Musterlösung zur Aufgabe A5.1

a) Die Auswertung der Fehlerabstandsfolge weist auf Fehler bei ν = 2, 5, 6, 10, 12, 17, 18, 19, 22, 26, 27 und 29 hin. Daraus folgt:

- e_{16} $\underline{= 0}$,
- e_{17} $\underline{= 1}$,
- e_{18} $\underline{= 1}$.

b) Aus der Definitionsgleichung folgt bereits

$$V_a(k = 1) = \text{Pr}(a \ge 1) \;\underline{= 1}\,.$$

c) Es gilt $\text{Pr}(a = k) = V_a(k) - V_a(k + 1)$. Daraus erhält man für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
\text{Pr}(a = 1) &= V_a(1) - V_a(2) = 1 - 0.7 \;\underline{= 0.3}\,,\\
\text{Pr}(a = 2) &= V_a(2) - V_a(3) = 0.7 - 0.45 \;\underline{= 0.25}\,,\\
\text{Pr}(a = 3) &= V_a(3) - V_a(4) = 0.45 - 0.25 \;\underline{= 0.2}\,,\\
\text{Pr}(a = 4) &= V_a(4) - V_a(5) = 0.25 - 0.10 \;\underline{= 0.15}\,,\\
\text{Pr}(a = 5) &= V_a(5) - V_a(6) = 0.10 - 0 \;\underline{= 0.10}\,.
\end{aligned}$$

d) Aus $V_a(k = 6) = \text{Pr}(a \ge 6) = 0$ folgt für den maximalen Fehlerabstand direkt k_{max} $\underline{= 5}$.

e) Mit den unter c) berechneten Wahrscheinlichkeiten ergibt sich für den gesuchten Erwartungswert:

$$\text{E}[a] = \sum_{k=1}^{5} k \cdot \text{Pr}(a = k) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.15 + 5 \cdot 0.1 \;\underline{= 2.5}\,.$$

f) Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit ist der Kehrwert des mittleren Fehlerabstands: p_{M} $\underline{= 0.4}$.

g) Die Aussage 1 stimmt, da $\text{Pr}(a = 1) = V_a(1) - V_a(2) = 0$ ist.

- Die zweite Aussage ist nicht sicher, da $V_a(6)$ nur die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\text{Pr}(a \ge 6)$ angibt, aber nicht $\text{Pr}(a = 6)$ allein. Nur mit der zusätzlichen Angabe $V_a(7) = 0$ würde die Aussage 2 zutreffen.
- Ebenso ist für den Erwartungswert $\text{E}[a]$ aufgrund fehlender Angaben keine endgültige Aussage möglich. Mit $V_a(7) = 0$ würde sich

$$\text{E}[a] = 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.3 = 4.4$$

ergeben. Ohne diese Angabe ist nur die Aussage $\text{E}[a] \ge 4.4$ möglich. Damit gilt aber für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit die Bedingung $p_{\text{M}} < 1/4.4 \approx 0.227$ ⇒ Die Aussage 3 trifft also mit Sicherheit nicht zu. Mit Sicherheit stimmt nur die <u>Aussage 1</u>.

Musterlösung zur Aufgabe A5.2

a) Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit ist gleich dem FKF–Wert für k = 0. Wegen $e_\nu \in \{0, 1\}$ gilt nämlich

$$\varphi_e(k=0) = \mathrm{E}[e_\nu^2] = \mathrm{E}[e_\nu] = p_\mathrm{M} \quad \Rightarrow \quad p_\mathrm{M} \underline{= 0.1}\,.$$

b) Der mittlere Fehlerabstand ist gleich dem Kehrwert der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit. Das heißt: $\mathrm{E}[a] = 1/p_\mathrm{M} \underline{= 10}$.

c) Nach der Definitionsgleichung und dem **Satz von Bayes** erhält man folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}\varphi_e(k=1) &= \mathrm{E}[e_\nu \cdot e_{\nu+1}] = \mathrm{E}[(e_\nu = 1)\cdot(e_{\nu+1}=1)] = \\ &= \mathrm{Pr}(e_{\nu+1} = 1\,|\,e_\nu = 1)\cdot \mathrm{Pr}(e_\nu = 1)\,.\end{aligned}$$

Die erste Wahrscheinlichkeit ist gleich $\mathrm{Pr}(a = 1)$ und die zweite Wahrscheinlichkeit ist gleich p_M:

$$\varphi_e(k=1) = 0.3091 \cdot 0.1 \underline{= 0.0309}\,.$$

d) Der FKF–Wert $\varphi_e(k = 2)$ kann (näherungsweise) folgendermaßen interpretiert werden:

$$\varphi_e(k=2) = \mathrm{Pr}(e_{\nu+2} = 1\,|\,e_\nu = 1)\cdot p_\mathrm{M}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Pr}(e_{\nu+2} = 1\,|\,e_\nu = 1) = \frac{\varphi_e(k=2)}{p_\mathrm{M}} = \frac{0.0267}{0.1} = 0.267\,.$$

Diese Wahrscheinlichkeit setzt sich zusammen aus den beiden Möglichkeiten „Zum Zeitpunkt ν+1 tritt ein Fehler auf" sowie „Zum Zeitpunkt ν+1 gibt es keinen Fehler":

$$\mathrm{Pr}(e_{\nu+2} = 1\,|\,e_\nu = 1) = \mathrm{Pr}(a=1)\cdot\mathrm{Pr}(a=1) + \mathrm{Pr}(a=2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Pr}(a=2) = 0.267 - 0.3091^2 \underline{= 0.1715}\,.$$

Bei der Rechnung wurde davon ausgegangen, dass die einzelnen Fehlerabstände statistisch voneinander unabhängig sind. Diese Annahme gilt allerdings nur für eine besondere Klasse von Kanalmodellen, die man als „erneuernd" bezeichnet. Das hier betrachtete Bündelfehlermodell erfüllt diese Bedingung nicht. Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit $\mathrm{Pr}(a = 2) = 0.1675$ weicht deshalb vom hier berechneten Wert (0.1715) geringfügig ab.

Musterlösung zur Aufgabe A5.3

a) Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit beträgt $p_{\rm M}$ = Q(s_0/σ) = 0.01. Daraus folgt für den Quotienten aus Detektionsnutzabtastwert und Detektionsstöreffektivwert:

$$s_0/\sigma = {\rm Q}^{-1}\left(0.01\right) \ \underline{\approx 2.32}\,.$$

b) Mit E = 0 ergibt sich für die Wahrscheinlichkeiten des vorgegebenen digitalen Kanalmodells:

$$p_2 = p_3 = p = 0.01\,,\;\; p_1 = p_4 = 1-p = 0.99\,.$$

Ein Vergleich mit dem Theorieteil zeigt, dass dieses Kanalmodell dem BSC–Modell entspricht, und zwar unabhängig von der Statistik der Quellensymbole. Richtig sind also beide Lösungsvorschläge.

c) Die Übergangswahrscheinlichkeit p_2 bescheibt den Fall, dass die Entscheiderschwelle E = 0.25 · s_0 fälschlicherweise unterschritten wurde. Dann ist υ_ν = **L**, obwohl q_ν = **H** gesendet wurde. Der Abstand von der Schwelle beträgt somit nur 0.75 · s_0 und es gilt:

$$p_2 \;=\; {\rm Q}\left(\frac{0.75\cdot s_0}{\sigma}\right) = {\rm Q}\left(0.75\cdot 2.32\right) = {\rm Q}\left(1.74\right) \ \underline{\approx 0.041}\,,$$
$$p_1 \;=\; 1 - p_2 \ \underline{= 0.959}\,.$$

In ähnlicher Weise können die Übergangswahrscheinlichkeiten p_3 und p_4 berechnet werden, wobei nun vom Schwellenabstand 1.25 · s_0 auszugehen ist:

$$p_3 = {\rm Q}\left(1.25\cdot 2.32\right) = {\rm Q}\left(2.90\right) \ \underline{\approx 0.002}\,,\;\; p_4 = 1 - p_3 \ \underline{= 0.998}\,.$$

d) Mit der Entscheiderschwelle E ≠ 0 ist das BSC–Modell unabhängig von der Symbolstatistik nicht anwendbar, da die Symmetrieeigenschaft (das Kennzeichen „S” in „BSC”) nicht gegeben ist. Keiner der beiden Lösungsvorschläge trifft zu.

e) Die Aussagen 1 und 3 treffen zu, nicht aber Aussage 2. Beim BSC–Modell ist $p_{\rm M}$ = 1% unabhängig von den Symbolwahrscheinlichkeiten $p_{\rm L}$ und $p_{\rm H}$. Dagegen gilt für $p_{\rm L}$ = 0.9, $p_{\rm H}$ = 0.1 sowie E = +s_0/4:

$$p_{\rm M} = 0.9\cdot p_3 + 0.1\cdot p_2 = 0.9\cdot 0.2\% + 0.1\cdot 4.1\% \approx 0.59\%\,.$$

Das Minimum ergibt sich für $p_{\rm L}$ = 0.93 und $p_{\rm H}$ = 0.07 zu $p_{\rm M}$ ≈ 0.45%.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.3

a) Beim BSC–Modell ist die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit p_M stets gleich der charakteristischen Wahrscheinlichkeit p. Für die Fehlerkorrelationsfunktion und die Fehlerabstandsverteilung gelten

$$\varphi_e(k) = \left\{ \begin{array}{ll} p & f\ddot{u}r\ k = 0\,, \\ p^2 & f\ddot{u}r\ k \neq 0\,, \end{array} \right. \qquad V_a(k) = (1-p)^{k-1}\,.$$

p lässt sich aus allen angegebenen Kenngrößen ermitteln, nur nicht aus $V_a(k = 1)$. Dieser FAV–Wert ist unabhängig von p gleich $(1 – p)^0 = 1$. Zutreffend sind somit die <u>Lösungsvorschläge 1, 2, 4 und 5</u>.

b) Die relative Fehlerhäufigkeit der angegebenen Folge ist gleich $h_\text{F} = 22/1000 \approx 0.022$. Es ist ganz offensichtlich, dass die Fehlerfolge vom Modell M_2 ⇒ $p_\text{M} = 0.02$ generiert wurde. Aufgrund der kurzen Folge stimmt h_F mit p_M zwar nicht exakt überein, aber zumindest näherungsweise ⇒ <u>Vorschlag 2</u>.

c) Der mittlere Fehlerabstand – also der Erwartungswert der Zufallsgröße a – ist gleich dem Kehrwert der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit ⇒ $E[a] = 1/0.1 \underline{= 10}$.

d) Entsprechend der Gleichung $\Pr(a = k) = (1 – p)^{k–1} \cdot p$ erhält man:

$$\begin{aligned} \Pr(a = 1) &= 0.1\,,\ \ \Pr(a = 2) = 0.9 \cdot 0.1 \underline{= 0.09}\,, \\ \Pr(a = \text{E}[a]) &= \Pr(a = 10) = 0.9^9 \cdot 0.1 \underline{= 0.0387}\,. \end{aligned}$$

e) Aus der Beziehung $V_a(k) = (1 – p)^{k–1}$ erhält man

$$\begin{aligned} V_a(k=2) &= 0.9^1 \underline{= 0.9} \quad \Rightarrow \quad \Pr(a=1) = V_a(k=1) - V_a(k=2) = 0.1\,, \\ V_a(k=10) &= 0.9^9 \underline{= 0.3874}\,,\ \ V_a(k=11) = 0.9^{10} \underline{= 0.3487} \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \quad \Pr(a=10) = V_a(k=10) - V_a(k=11) = 0.3874 - 0.3487 = 0.0387\,.$$

Musterlösung zur Aufgabe A5.4

a) Nach der allgemeinen Definition ist $\varphi_e(k = 0) = \mathrm{E}[e_\nu^2]$. Wegen $e_\nu \in \{0, 1\}$ gilt aber gleichzeitig $\varphi_e(k = 0) = \mathrm{E}[e_\nu]$, was der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit $p_M = p$ entspricht $\Rightarrow$ $\varphi_e(k = 0) \underline{= 0.01}$.

b) Nach der allgemeinen FKF–Definition gilt unter Berücksichtigung des BSC–Modells:

$$\begin{aligned} \varphi_e(k=1) &= \mathrm{E}[e_\nu \cdot e_{\nu+1}] = \\ &= \mathrm{Pr}[e_\nu = 1 \cap e_{\nu+1} = 1] = p \cdot p = p^2 \underline{= 10^{-4}}. \end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man über die nur für erneuernde Kanalmodelle gültige Gleichung:

$$\varphi_e(k=1) = \mathrm{Pr}(a=1) \cdot \varphi_e(0) = p \cdot p = p^2 = 10^{-4}\,.$$

Das bedeutet: Der FKF–Wert $\varphi_e(1)$ spricht nicht dagegen, dass das BSC–Modell erneuernd ist.

c) Aus der Grafik erkennt man bereits, dass $\varphi_e(k = 2) = \varphi_e(k = 1) = 10^{-4}$ gelten wird. Die explizite Berechnung bestätigt dieses Ergebnis:

$$\begin{aligned} \varphi_e(k &= 2) = \mathrm{Pr}[e_\nu = 1 \cap e_{\nu+2} = 1] = \\ &= \mathrm{Pr}[e_\nu = 1 \cap e_{\nu+1} = 1 \cap e_{\nu+2} = 1] + \mathrm{Pr}[e_\nu = 1 \cap e_{\nu+1} = 0 \cap e_{\nu+2} = 1]\,. \end{aligned}$$

Der erste Term lautet beim BSC–Modell mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten (nur erste Ordnung erforderlich):

$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}[1\;1\;1] &= \mathrm{Pr}[e_{\nu+2} = 1 \,|\, e_{\nu+1} = 1] \cdot \mathrm{Pr}[e_{\nu+1} = 1 \,|\, e_\nu = 1] \cdot \mathrm{Pr}[e_\nu = 1] = \\ &= p \cdot p \cdot p = p^3\,. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für den zweiten Term:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}[1\;0\;1] &= \mathrm{Pr}[e_{\nu+2} = 1 \,|\, e_{\nu+1} = 0] \cdot \mathrm{Pr}[e_{\nu+1} = 0 \,|\, e_\nu = 1] \cdot \mathrm{Pr}[e_\nu = 1] = \\ &= p \cdot (1-p) \cdot p = p^2 - p^3\,. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_e(k=2) = \mathrm{Pr}[1\;1\;1] + \mathrm{Pr}[1\;0\;1] = (p^3) + (p^2 - p^3) = p^2 \underline{= 10^{-4}}.$$

Mit der nur für erneuernde Kanalmodelle gültigen Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi_e(k=2) &= \mathrm{Pr}(a=1) \cdot \varphi_e(k=1) + \mathrm{Pr}(a=2) \cdot \varphi_e(k=0) = \\ &= p \cdot p^2 + (1-p) \cdot p \cdot p = p^2\,. \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis spricht also nicht dagegen, dass das BSC–Modell erneuernd ist.

d) Die bisherigen Ergebnisse lassen schon darauf schließen, dass das BSC–Modell erneuernd ist. Und auch die Tatsache, dass hier die einzelnen Fehlerabstände statistisch unabhängig voneinander sind, spricht für diese These. Als letzten Beweis zeigen wir, dass die Gleichung

$$\varphi_e(k) = \sum_{\kappa=1}^{k} \mathrm{Pr}(a=\kappa) \cdot \varphi_e(k-\kappa) = \varphi_e(0) \cdot \mathrm{Pr}(a=k) + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \varphi_e(k-\kappa) \cdot \mathrm{Pr}(a=\kappa)$$

das richtige Ergebnis liefert, wenn $\varphi_e(0) = p$ und $\varphi_e(1) = ... = \varphi_e(k-1) = p^2$ eingesetzt wird. Man erhält

$$\begin{aligned}\varphi_e(k) &= p \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p + p^2 \cdot \sum_{\kappa=1}^{k-1} (1-p)^{\kappa-1} \cdot p = \\ &= p^2 \cdot (1-p)^{k-1} + p^3 \cdot \sum_{\kappa=0}^{k-2} (1-p)^{\kappa} .\end{aligned}$$

Mit der Summenformel einer geometrischen Reihe,

$$\sum_{\kappa=0}^{n} x^{\kappa} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} ,$$

lässt sich dieser Ausdruck wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\varphi_e(k) &= p^2 \cdot (1-p)^{k-1} + p^3 \cdot \frac{1-(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)} = \\ &= p^2 \cdot \left[(1-p)^{k-1} + 1 - (1-p)^{k-1}\right] = p^2 .\end{aligned}$$

Das bedeutet: Das BSC–Modell ist tatsächlich erneuernd $\Rightarrow$ Lösungsvorschlag 1.

Musterlösung zur Aufgabe A5.5

a) Pro Element e_ν der Fehlerfolge benötigt man genau ein Bit. Die Multiplikation mit N ergibt 10^6 Bit entsprechend G_e = 125000 Byte.

b) Mit $N = 10^6$ und $p_\text{M} = 10^{-3}$ sind ca. 1000 Fehlerabstände abzuspeichern, jeder einzelne mit 4 Byte ⇒ G_a = 4000 Byte. Im Gegensatz zur Speicherung der Fehlerfolge wird dieser Wert leicht variieren, da in einer Fehlerfolge der (begrenzten) Länge $N = 10^6$ nicht immer exakt 1000 Fehler auftreten werden.

c) Nun werden im Mittel $0.5 \cdot 10^6$ Fehler auftreten ⇒ G_a = 2 Millionen Byte. Daraus ist ersichtlich, dass die Speicherung der Fehlerabstände nur sinnvoll ist, wenn die (mittlere) Fehlerwahrscheinlichkeit nicht zu groß ist.

d) Aus den Erklärungen zu den oberen Teilaufgaben folgt:

$$N \cdot p_\text{M} \cdot 4 < N/8 \Rightarrow \quad p_\text{M,\,max} = 1/32 \underline{= 0.03125}\,.$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Folgenlänge N.

Musterlösung zur Aufgabe A5.6

a) Der FKF–Wert $\varphi_e(k = 0)$ gibt stets die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit p_M an, während der FKF–Grenzwert für $k \to \infty$ gleich p_M^2 ist. Aus der Grafik auf der Angabenseite kann man p_M $\underline{= 0.01}$ ablesen. In der Aufgabe Z5.6 wird dieser Wert auf anderem Wege berechnet.

b) Setzt man in die untere FKF–Gleichung, die eigentlich nur für $k > 0$ gültig ist, den Parameter $k = 0$ ein, so erhält man den gesuchten Extrapolationswert.

$$\begin{aligned}\varphi_{e0} &= p_{\rm M}^2 + (p_{\rm B} - p_{\rm M}) \cdot (p_{\rm M} - p_{\rm G}) = 10^{-4} + (0.1 - 0.01) \cdot (0.01 - 0.001) = \\ &= 10^{-4} + 0.09 \cdot 0.009 \underline{\approx 0.91 \cdot 10^{-3}}\,.\end{aligned}$$

c) Nach der allgemeinen Definitionsgleichung gilt für die Fehlerkorrelationsdauer

$$D_{\rm K} = \frac{1}{\varphi_{e0} - p_{\rm M}^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_e(k) - p_{\rm M}^2]\,.$$

Mit den Ausdrücken

$$\begin{aligned}A &= (p_{\rm B} - p_{\rm M}) \cdot (p_{\rm M} - p_{\rm G}) = \varphi_{e0} - p_{\rm M}^2\,, \\ B &= {\rm Pr(B\,|\,G)} + {\rm Pr(G\,|\,B)}\end{aligned}$$

lässt sich diese Gleichung wie folgt schreiben:

$$D_{\rm K} = 1/A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A \cdot (1 - B)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - B)^k\,.$$

Mit der Summenformel einer geometrischen Reihe ergibt sich daraus das Endergebnis:

$$D_{\rm K} = 1/B - 1 = \frac{1}{{\rm Pr(B\,|\,G)} + {\rm Pr(G\,|\,B)}} - 1\,.$$

Richtig ist also der <u>letzte Lösungsvorschlag</u>.

d) Mit Pr(B/G) = 0.01 und Pr(G/B) = 0.1 ergibt sich

$$D_{\rm K} = \frac{1}{0.01 + 0.1} - 1 \underline{\approx 8.091}\,.$$

e) Richtig ist nur der <u>erste Lösungsvorschlag</u>, wie in den Musterlösungen zu den letzten Teilaufgaben gezeigt wurde. Damit liegt aber nur die Korrelationsdauer fest. Mit Pr(B|G) = 0.1 und Pr(G|B) = 0.01 ergibt sich zwar das gleiche $D_K = 8.091$ wie mit Pr(B|G) = 0.01 und Pr(G|B) = 0.1. Aber nun ist die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $p_M \approx 9.1\%$ statt 1%, jeweils für $p_G = 0.001$ und $p_B = 0.1$.

Auch die letzte Aussage ist falsch. Diese Aussage würde nur dann gelten, wenn $\varphi_e(k)$ linear aufgetragen wäre und nicht wie hier logarithmisch.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.6

a) Es gilt Pr(G|G) = 1 – Pr(B|G) $\underline{= 0.99}$ sowie Pr(B|B) = 1 – Pr(G|B) $\underline{= 0.9}$.

b) Das GE–Modell ist eine stationäre Markovkette. Für die Wahrscheinlichkeit, dass sich diese im Zustand „GOOD" befindet, gilt unter Berücksichtigung des Ergebnisses der Teilaufgabe a):

$$w_{\rm G} = {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm G}) \cdot {\rm w_G} + {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) \cdot {\rm w_B} \quad\Rightarrow\quad {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G}) \cdot {\rm w_G} = {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) \cdot {\rm w_B}\,.$$

Weiter gilt $w_{\rm B} = 1 - w_{\rm G}$:

$${\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G}) \cdot {\rm w_G} + {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) \cdot {\rm w_G} = {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B})$$

$$\Rightarrow \quad w_{\rm G} = \frac{{\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B})}{{\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) + {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G})} = \frac{0.1}{0.1 + 0.01}\ \underline{\approx 0.909}\,, \quad w_{\rm B} = 1 - w_{\rm G}\ \underline{\approx 0.091}\,.$$

c) Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $p_{\rm M}$ ergibt sich aus den Fehlerwahrscheinlichkeiten $p_{\rm G}$ und $p_{\rm B}$, gewichtet mit $w_{\rm G}$ und $w_{\rm B}$:

$$p_{\rm M} = w_{\rm G} \cdot p_{\rm G} + w_{\rm B} \cdot p_{\rm B} = \frac{10}{11} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{11} \cdot 10^{-1}\ \underline{= 0.01}\,.$$

d) Entsprechend der allgemeinen Gleichung auf dem Angabenblatt gilt für $k > 0$:

$$\begin{aligned}\varphi_e(k) &= p_{\rm M}^2 + (p_{\rm B} - p_{\rm M}) \cdot (p_{\rm M} - p_{\rm G}) \cdot [1 - {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G}) - {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B})]^k = \\ &= 10^{-4} + 0.09 \cdot 0.009 \cdot 0.89^k = 10^{-4} \cdot \left(1 + 8.1 \cdot 0.89^k\right)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \varphi_e(k=1) &= 10^{-4} \cdot \left(1 + 8.1 \cdot 0.89^1\right)\ \underline{= 8.209 \cdot 10^{-4}}\,,\\ \varphi_e(k=2) &= 10^{-4} \cdot \left(1 + 8.1 \cdot 0.89^2\right)\ \underline{= 7.416 \cdot 10^{-4}}\,,\\ \varphi_e(k=5) &= 10^{-4} \cdot \left(1 + 8.1 \cdot 0.89^5\right)\ \underline{= 5.523 \cdot 10^{-4}}\,,\\ \varphi_e(k=50) &= 10^{-4} \cdot \left(1 + 8.1 \cdot 0.89^{50}\right)\ \underline{= 1.024 \cdot 10^{-4}}\,.\end{aligned}$$

e) Für jedes Kanalmodell gilt wegen $e_\nu \in \{0, 1\}$:

$$\varphi_e(k=0) = {\rm E}[e_\nu^2] = {\rm E}[e_\nu] = p_{\rm M}\,.$$

Mit dem Ergebnis der Teilaufgabe c) ergibt sich für den vorliegenden Fall $\varphi_e(k = 0)\ \underline{= 0.01}$.

f) Entsprechend der Teilaufgabe c) gilt

$$p_{\rm M} = 10/11 \cdot p_{\rm G} + 1/11 \cdot p_{\rm B}\,.$$

Bei vorgegebenem $p_{\rm B} = 0.1$ ergibt sich selbst für $p_{\rm G} = 0$ (kein Fehler im Zustand „G") die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit zu $p_{\rm M} \approx 0.009$. Dagegen ist mit festem $p_{\rm G} = 0.001$ der Wert $p_{\rm M} = 0.005$ erreichbar:

$$0.005 = 10/11 \cdot 10^{-3} + 1/11 \cdot p_{\rm B} \quad\Rightarrow\quad p_{\rm B} \le 0.055 - 0.1 = 4.5\%\,.$$

Weiterhin kann die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit (mit vorgegebenem $p_{\rm G}$ und $p_{\rm B}$) auch wie folgt dargestellt werden:

$$p_{\rm M} = \frac{p_{\rm G} \cdot {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) + p_{\rm B} \cdot {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G})}{{\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) + {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G})} = \frac{0.001 \cdot {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) + 0.1 \cdot {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G})}{{\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) + {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G})}\,.$$

Mit Pr(B|G) = 0.01 bzw. mit Pr(G|B) = 0.1 erhält man folgende Gleichungen:

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{G}) = 0.01\text{:} \quad p_{\mathrm{M}} = \frac{0.001 \cdot \mathrm{Pr}(\mathrm{G}\,|\,\mathrm{B}) + 0.001}{\mathrm{Pr}(\mathrm{G}\,|\,\mathrm{B}) + 0.01}\,,$$

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{G}\,|\,\mathrm{B}) = 0.1\text{:} \quad p_{\mathrm{M}} = \frac{0.0001 + 0.1 \cdot \mathrm{Pr}(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{G})}{0.1 + \mathrm{Pr}(\mathrm{G}\,|\,\mathrm{B})}\,.$$

Aus der oberen Gleichung ist zu erkennen, dass mit keinem Pr(G|B)–Wert das Ergebnis p_{M} = 0.005 möglich ist. Dagegen lässt sich durch ein kleineres Pr(B|G) die Bedingung erfüllen:

$$0.005 = \frac{0.0001 + 0.1 \cdot \mathrm{Pr}(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{G})}{0.1 + \mathrm{Pr}(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{G})} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Pr}(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{G}) \le \frac{0.0004}{0.095} \approx 0.0042\,.$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2 und 4.

Musterlösung zur Aufgabe A5.7

a) Für die u–Hilfsgrößen gilt:

$$\begin{aligned} u_{\rm GG} &= {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm G}) \cdot (1-p_{\rm G}) = 0.99 \cdot (1-0.001) \;\underline{\approx 0.98901}\,, \\ u_{\rm BG} &= {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) \cdot (1-p_{\rm B}) = 0.1 \cdot (1-0.1) \;\underline{\approx 0.09}\,, \\ u_{\rm GB} &= {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G}) \cdot (1-p_{\rm G}) = 0.01 \cdot (1-0.001) \;\underline{\approx 0.00999}\,, \\ u_{\rm BB} &= {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm B}) \cdot (1-p_{\rm B}) = 0.9 \cdot (1-0.1) \;\underline{\approx 0.81}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die β–Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned} \beta_{\rm G} &= \frac{u_{\rm GG} + u_{\rm BB} + \sqrt{(u_{\rm GG} - u_{\rm BB})^2 + 4 \cdot u_{\rm GB} \cdot u_{\rm BG}}}{2}\,, \\ &= \frac{0.98901 + 0.81 + \sqrt{(0.98901 - 0.81)^2 + 4 \cdot 0.00999 \cdot 0.09}}{2}\,, \\ &= \frac{1.79901 + \sqrt{0.03204 + 0.003596}}{2} = \frac{1.79901 + 0.18877}{2} \;\underline{= 0.9939}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{\rm B} &= \frac{u_{\rm GG} + u_{\rm BB} - \sqrt{(u_{\rm GG} - u_{\rm BB})^2 + 4 \cdot u_{\rm GB} \cdot u_{\rm BG}}}{2}\,, \\ &= \ldots = \frac{1.79901 - 0.18877}{2} \;\underline{= 0.8051}\,. \end{aligned}$$

b) Mit dem Ergebnis der Teilaufgabe a) erhält man:

$$q_{\rm G} = 1 - \beta_{\rm G} = 1 - 0.9939 \;\underline{= 0.0061}\,, \quad q_{\rm B} = 1 - \beta_{\rm B} = 1 - 0.8051 \;\underline{= 0.1949}\,.$$

c) Entsprechend dem Angabenblatt ist hier anzusetzen

$$\begin{aligned} x_{\rm G} &= \frac{u_{\rm BG}}{\beta_{\rm G} - u_{\rm BB}} = \frac{0.0999}{0.9939 - 0.81} \;\underline{= 0.5432}\,, \\ x_{\rm B} &= \frac{u_{\rm BG}}{\beta_{\rm B} - u_{\rm BB}} = \frac{0.0999}{0.8051 - 0.81} \;\underline{= -20.388}\,, \\ \alpha_{\rm G} &= \frac{(w_{\rm G} \cdot p_{\rm G} + w_{\rm B} \cdot p_{\rm B} \cdot x_{\rm G})(x_{\rm B} - 1)}{p_{\rm M} \cdot (x_{\rm B} - x_{\rm G})} = \\ &= \frac{(0.9091 \cdot 0.001 + 0.0909 \cdot 0.1 \cdot 0.5432)(-20.388 - 1)}{0.01 \cdot (-20.388 - 0.5432)} \;\underline{= 0.5975}\,, \\ \alpha_{\rm B} &= 1 - \alpha_{\rm G} \;\underline{= 0.4025}\,. \end{aligned}$$

d) Entsprechend den vorgegebenen Gleichungen gilt:

$$\begin{aligned} q({\rm B}\,|\,{\rm G}) &= \frac{\alpha_{\rm B} \cdot [{\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G}) + {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B})]}{\alpha_{\rm G} \cdot q_{\rm B} + \alpha_{\rm B} \cdot q_{\rm G}}\,, \\ &= \frac{0.4025 \cdot [0.1 + 0.01]}{0.5975 \cdot 0.1949 + 0.4025 \cdot 0.0061} \;\underline{= 0.3724}\,, \\ q({\rm G}\,|\,{\rm B}) &= \frac{\alpha_{\rm G}}{\alpha_{\rm B}} \cdot q({\rm B}\,|\,{\rm G}) = \frac{0.5975}{0.4025} \cdot 0.3724 \;\underline{= 0.5528}\,. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.7

a) Für die Zustandswahrscheinlichkeiten des GE–Modells wurde in Aufgabe Z5.6 ermittelt:

$$w_{\rm G} = \frac{p({\rm G}\,|\,{\rm B})}{p({\rm G}\,|\,{\rm B}) + {\rm p}({\rm B}\,|\,{\rm G})} = 0.909\,, \quad w_{\rm B} = 1 - w_{\rm G} = 0.091\,.$$

Dagegen erhält man beim MC–Modell:

$$\alpha_{\rm G} \;=\; \frac{q({\rm G}\,|\,{\rm B})}{q({\rm G}\,|\,{\rm B}) + {\rm q}({\rm B}\,|\,{\rm G})} = \frac{0.5528}{0.5528 + 0.3724} \underline{= 0.5975}\,,$$

$$\alpha_{\rm B} \;=\; 1 - \alpha_{\rm G} \underline{= 0.4025}\,.$$

In der Teilaufgabe c) der Aufgabe A5.7 wurden diese Werte schon einmal ermittelt, allerdings aus den Parametern des äquivalenten Gilbert–Elliott–Modells.

b) Der mittlere Fehlerabstand im Kanalzustand „GOOD" ist gleich dem Kehrwert der dazugehörigen Fehlerwahrscheinlichkeit $q_{\rm G}$. Der mittlere Fehlerabstand im Zustand „B" ist dementsprechend $1/q_{\rm B}$. Durch Gewichtung mit den beiden Zustandswahrscheinlichkeiten $\alpha_{\rm G}$ und $\alpha_{\rm B}$ ergibt sich der mittlere Fehlerabstand des MC–Modells insgesamt zu

$${\rm E}[a] = \frac{\alpha_{\rm G}}{q_{\rm G}} + \frac{\alpha_{\rm B}}{q_{\rm B}} = \frac{0.5975}{0.0061} + \frac{0.4025}{0.1949} = 97.95 + 2.06 \underline{= 100.1}\,.$$

Dieser Wert sollte natürlich genau so groß wie beim entsprechenden GE–Modell sein. Die kleine Abweichung von 0.1 ist auf Rundungsfehler zurückzuführen.

c) Auch hier gilt der Zusammenhang $\varphi_e(k = 0) = p_{\rm M}$. Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit ist aber gleich dem Kehrwert des mittleren Fehlerabstands E[a]. Daraus folgt $\varphi_e(k = 0) \underline{= 0.01}$.

d) Beim GE–Modell ist die Korrelationsdauer wie folgt gegeben (S steht für Summe):

$$D_{\rm K} = 1/S - 1\,, \quad S = {\rm Pr}({\rm G}\,|\,{\rm B}) + {\rm Pr}({\rm B}\,|\,{\rm G})\,.$$

Weiter gilt mit den Angaben zur Aufgabe A5.7:

$$q({\rm B}\,|\,{\rm G}) = \frac{\alpha_{\rm B}\cdot S}{\alpha_{\rm G}\cdot q_{\rm B} + \alpha_{\rm B}\cdot q_{\rm G}}\,, \quad q({\rm G}\,|\,{\rm B}) = \frac{\alpha_{\rm G}}{\alpha_{\rm B}}\cdot q({\rm B}\,|\,{\rm G})$$

$$\Rightarrow \quad S = q_{\rm G}\cdot q({\rm B}\,|\,{\rm G}) + q_{\rm B}\cdot\frac{\alpha_{\rm G}}{\alpha_{\rm B}}\cdot q({\rm B}\,|\,{\rm G}) = {\rm q_G}\cdot{\rm q}({\rm B}\,|\,{\rm G}) + {\rm q_B}\cdot{\rm q}({\rm G}\,|\,{\rm B})\,.$$

$$\Rightarrow \quad D_{\rm K} = \frac{1}{q_{\rm G}\cdot q({\rm B}\,|\,{\rm G}) + q_{\rm B}\cdot q({\rm G}\,|\,{\rm B})} - 1\,.$$

Richtig ist also der <u>Lösungsvorschlag 2</u>. Mit den gegebenen Parameterwerten erhält man zum Beispiel:

$$D_{\rm K} = \frac{1}{0.0061\cdot 0.3724 + 0.1949\cdot 0.5528} - 1 = \frac{1}{0.11} - 1 \approx 8.09\,.$$

Es ergibt sich exakt der gleiche Wert wie in der Aufgabe A5.6c.

Musterlösung zur Aufgabe A5.8

a) Die Bildbreite (im Bereich 0x12 .. 0x15) hat den Hexadezimalwert 0x0118 (Dezimalwert 280). Entsprechend ist die Bildhöhe (im Bereich 0x16 .. 0x19) den Hexadezimalwert 0x00D2 ⇒ 210 Pixel. Einzugeben sind jeweils die Dezimalwerte 280 und 210.

b) Die Farbtiefe beträgt 24 BPP (hexadezimal 0x18), wie im Bereich 0x1C ... 0x1D angegeben.

c) Diesen Wert findet man im Bereich 0x2A ... 0x2D. Er beträgt 0x 0E EA = 3818 Pixel pro Meter. Mit der angegebenen Längenumrechnung ergibt sich daraus 3818 · 0.0254 ≈ 97 dpi (dots per inch). Die horizontale Auflösung (Bereich 0x26 ... 0x29) ist ähnlich, aber nicht gleich: 0x0EC3 ⇒ 3779 · 0.0254 ≈ 96 dpi.

d) Bei 24 BPP (Farbtiefe) hat der Informationsblock die minimale Größe 0x28 = 40d, da dann keine Farbinformation in Tabellenform angegeben wird. Der Offset beträgt unter Berücksichtigung der 14 Byte für den Dateiheader 0x36 = 54 Byte. Das erste Datenbyte liegt somit bei 0x36.

Die Größe der Bitmap (im Bereich 0x22 ... 0x25) beträgt 0x02 B1 12 = 176402d. Dieser Wert ist um 54 (Dateikopf) kleiner als die Dateigröße. Dieser Wert setzt sich wie folgt zusammen:

$$280 \cdot 210 \cdot 3 + 2 = 176402.$$

Hierbei berücksichtigt die „2” die beiden Abschlussbytes (00 00), wie aus dem Hexdump auf der Angabenseite zu ersehen ist.

e) Die Bilddaten werden zeilenweise von rechts unten nach links oben mit jeweils 3 Byte abgespeichert. Die Farbwerte des linken oberen Punktes sind somit

R = 0x28 = 40d,
G = 0x52 = 82d,
B = 0x73 = 115d.

Beachten Sie hierbei wieder die *Little–Endian–Byteanordnung* des Intelprozessors, so dass $R – G – B$ tatsächlich in der Reihenfolge $B – G – R$ angeordnet werden.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.8

a) Die Umstellung der vorgegebenen p_M–Gleichung führt zum gesuchten Ergebnis:

$$p_\mathrm{G} = \frac{p_\mathrm{M} \cdot [\Pr(\mathrm{G}\,|\,\mathrm{B}) + \Pr(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{G})] - p_\mathrm{B} \cdot \Pr(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{G})}{\Pr(\mathrm{G}\,|\,\mathrm{B})} =$$

$$= \frac{0.01 \cdot [0.01 + 0.0005] - 0.2 \cdot 0.0005}{0.01} \underline{= 0.0005}\,.$$

b) Mit der angegebenen Gleichung erhält man:

$$D_\mathrm{K} = \frac{1}{\Pr(\mathrm{G}\,|\,\mathrm{B}) + \Pr(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{G})} - 1 = \frac{1}{0.0105} - 1 \underline{\approx 94.2}\,.$$

c) Das Bild „Weiß” besteht aus 160 · 120 = 19200 Pixel und wird wegen der Farbtiefe 1 BPP auch durch 19200 Bit beschrieben. Mit der mittleren Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_M = 0.01 sind in beiden Bildern (W1 und W2) jeweils N_c = <u>192</u> Bitfehler zu erwarten.

d) Bei gleicher Bildgröße und Fehlerwahrscheinlichkeit gibt es wegen der Farbtiefe 24 BPP nun deutlich mehr Bitfehler, nämlich N_d = 24 · 192 <u>= 4608</u> (statistischer Wert).

e) Das Bild „E3” zeigt die typische Struktur statistisch unabhängiger Fehler. Richtig ist somit <u>Antwort 1</u>.

f) Das Bild „E4” zeigt eine typische Bündelfehlerstruktur. Verwendet wurde hierbei das GE–Modell mit D_K ≈ 94, das auch für „W2” verwendet wurde ⇒ <u>Antwort 3</u>. Da aber nun jedes einzelne Pixel durch 24 Bit dargestellt wird, ergibt sich die mittlere Fehlerkorrelationsdauer (bezogen auf Pixel) nur etwa zu 4. Das GE–Modell mit D_K ≈ 8 (bezogen auf Bit) würde bei einem 24 BPP–Bild etwa so aussehen wie das auf dem BSC–Modell basierende Bild „E3”. Bezogen auf Pixel ergeben sich dann eher statistisch unabhängige Fehler.