

Musterlösung zur Aufgabe A1.1

a) In beiden Fällen kann das Sendesignal in der Form

$$s(t) = \sum_{(\nu)} a_{\nu} \cdot g_s(t - \nu \cdot T)$$

dargestellt werden. Beim Signal $s_R(t)$ sind die Amplitudenkoeffizienten a_{ν} entweder 0 oder 1. Es liegt also ein unipolares Signal vor. Beim bipolaren Signal $s_C(t)$ gilt dagegen $a_{\nu} \in \{-1, +1\}$. Richtig ist der Lösungsvorschlag 2.

b) Das Signal $s_R(t)$ ist NRZ-rechteckförmig. Dementsprechend sind sowohl die absolute Impulsdauer T_S als auch die äquivalente Impulsdauer Δt_S gleich der Symboldauer T :

$$T_S/T = 1, \quad \Delta t_S/T \equiv \underline{1}.$$

Der Sendegrundimpuls für das Signal $s_C(t)$ lautet:

$$g_s(t) = \begin{cases} s_0 \cdot \cos^2(\pi \cdot \frac{t}{T}) & \text{für } -T/2 \leq t \leq +T/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Grafik auf der Angabenseite erkennt man, dass für den \cos^2 -Impuls folgende Werte gelten:

$$T_S/T = 1, \quad \Delta t_S/T \equiv \underline{0.5}.$$

c) Für die Energie des Rechteckimpulses gilt:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s^2(t) dt = s_0^2 \cdot T = 0.5 \text{ W} \cdot 1 \mu\text{s} \equiv \underline{5 \cdot 10^{-7} \text{ Ws}}.$$

d) Bei einem bipolaren Rechtecksignal würde gelten:

$$s_R^2(t) = s_0^2 = \text{const.} \Rightarrow P_s = s_0^2 \cdot \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} dt = s_0^2.$$

Da das Signal $s_R(t)$ hier jedoch unipolar ist, gilt in der Hälfte der Zeit $s_R(t) = 0$. Somit ergibt sich:

$$P_s = \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \equiv \underline{0.25 \text{ W}}.$$

e) Für die Energie des \cos^2 -Impulses gilt:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s^2(t) dt = 2 \cdot s_0^2 \cdot \int_0^{T/2} \cos^4(\pi \cdot \frac{t}{T}) dt.$$

Hierbei ist die unter Punkt c) hergeleitete Formel und die Symmetrie von $g_s(t)$ um den Zeitpunkt $t = 0$ berücksichtigt. Das Integral ist bei der Aufgabenbeschreibung angegeben, wobei $a = \pi/T$ zu setzen ist:

$$E_g = 2 \cdot s_0^2 \cdot \left[\frac{3}{8} \cdot t + \frac{T}{4\pi} \cdot \sin(2\pi \frac{t}{T}) + \frac{T}{32\pi} \cdot \sin(4\pi \frac{t}{T}) \right]_0^{T/2}.$$

Die untere Grenze $t = 0$ liefert stets das Ergebnis 0. Hinsichtlich der oberen Grenze ergibt sich nur für den ersten Term ein von 0 verschiedenes Ergebnis. Daraus folgt:

$$E_g = 2 \cdot s_0^2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{T}{2} = \frac{3}{8} \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ Ws} \underline{=} 1.875 \cdot 10^{-7} \text{ Ws}.$$

f) Beim bipolaren Signal $s_C(t)$ gilt folgender Zusammenhang:

$$P_S = \frac{E_g}{T} = \frac{1.875 \cdot 10^{-7} \text{ Ws}}{10^{-6} \text{ s}} \underline{=} 0.1875 \text{ W}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.1

- a) Entsprechend der Grafik beträgt der Abstand zweier Symbole $T = 2 \mu\text{s}$.
- b) Bei einer redundanzfreien Binärquelle – und nur bei dieser – ist die Bitrate $R = 1/T$. Demzufolge ergibt sich hier $R = 500 \text{ kbit/s}$.
- c) Die möglichen Amplitudenkoeffizienten sind ± 1 . Deshalb ist die gegebene Symbolfolge bipolar.
- d) Der Amplitudenkoeffizient a_2 kann bei $2T = 4 \mu\text{s}$ abgelesen werden. Entsprechend der bipolaren Zuordnung folgt aus $a_2 = -1$ für das Symbol: $q_2 = \mathbf{L}$.
- e) Auch wenn die Grafik für den hier dargestellten kurzen Zeitabschnitt etwas anderes suggeriert: Bei einer redundanzfreien Binärquelle muss neben der statistischen Unabhängigkeit der Symbole auch die Bedingung $p_H = p_L = 0.5$ (gleichwahrscheinliche Symbole) gelten.

Musterlösung zur Aufgabe A1.2

a) BER ist als Quotient aus der Anzahl n_B der festgestellten Symbolfehler und der Anzahl N aller simulierten Symbole und damit tatsächlich als relative Häufigkeit definiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass $\text{BER} = p$ gilt, ist stets genau 0, da BER eine kontinuierliche Zufallsgröße darstellt. Allerdings wird die Wahrscheinlichkeit, dass BER in einem schmalen Intervall um p liegt, mit steigendem N immer größer. Trotzdem gilt: Richtig ist nur die zweite Aussage.

b) Die Streuung der Gaußschen Zufallsgröße BER ergibt sich mit $p = 10^{-2}$ und $N = 10^6$ zu

$$\sigma = \sqrt{p \cdot (1 - p) / N} \approx \sqrt{p / N} = 10^{-4}.$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Bitfehlerrate (kurz BER) einen Wert außerhalb des Bereichs von $0.95 \cdot p$ und $1.05 \cdot p$ annimmt, kann mit $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ (wegen $p = 0.01$) wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{BER} < 0.95 \cdot 10^{-2}) &= \Pr(\text{BER} > 1.05 \cdot 10^{-2}) = Q(\varepsilon / \sigma) \\ \Rightarrow \Pr(|\text{BER} - p| > \varepsilon) &= 2 \cdot Q\left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}}\right) = 2 \cdot 0.287 \cdot 10^{-6} = \underline{0.574 \cdot 10^{-6}}. \end{aligned}$$

d) Mit $p = 10^{-4}$ gilt für die vergleichbare Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \Pr(|\text{BER} - 10^{-4}| > 0.05 \cdot 10^{-4}) &= 2 \cdot Q(\varepsilon / \sigma). \\ \sigma &\approx \sqrt{p / N} = 10^{-5}, \quad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}; \\ \Rightarrow \Pr(|\text{BER} - 10^{-4}| > 0.05 \cdot 10^{-4}) &= 2 \cdot Q\left(\frac{5 \cdot 10^{-6}}{10^{-5}}\right) = 2 \cdot 0.309 = \underline{0.618}. \end{aligned}$$

e) Diese Bedingung lässt sich mit $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} Q(\varepsilon / \sigma) < 0.1 &\Rightarrow \varepsilon / \sigma > Q^{-1}(0.05) \approx 1.64 \Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} \approx \frac{\varepsilon^2 \cdot N}{p} > 1.64^2 = 2.69 \\ \Rightarrow N > \frac{2.69 \cdot p}{\varepsilon^2} &= \frac{2.69 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^{-12}} \approx \underline{1.08 \cdot 10^7} = 10.8 \text{ Millionen}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.2

a) Natürlich wird die Genauigkeit der BER-Messung durch den Parameter N in starkem Maße beeinflusst. Es besteht jedoch kein deterministischer Zusammenhang zwischen der Anzahl der simulierten Bit und der Genauigkeit der BER-Messung, wie z. B. die Ergebnisse für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 6$ dB zeigen: Bei $N = 64000$ ($h_B = 0.258 \cdot 10^{-2}$) ist die Abweichung vom tatsächlichen Wert $0.239 \cdot 10^{-2}$ geringer als bei $N = 128000$ ($h_B = 0.272 \cdot 10^{-2}$). Richtig ist also der zweite Lösungsvorschlag: Im statistischen Mittel wird die BER-Messung natürlich besser, wenn man N erhöht: Nur die Aussage 2 trifft zu.

b) Bei $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 0$ dB, also $E_B = N_0$, erhält man folgende Werte:

$$N = 64000: \quad \sigma_h = \sqrt{p/N} = \sqrt{\frac{0.0786}{64000}} \approx 1.1 \cdot 10^{-3},$$
$$N = 1600000: \quad \sigma_h = \sqrt{p/N} = \sqrt{\frac{0.0786}{1600000}} \approx 2.2 \cdot 10^{-4}.$$

c) Hierfür ergeben sich mit $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 0$ dB folgende Werte:

$$N = 64000: \quad \varepsilon_{\text{rel}} = \frac{h_B - p_B}{h_B} = \frac{0.0779 - 0.0786}{0.0786} \approx -0.9\%,$$
$$N = 1600000: \quad \varepsilon_{\text{rel}} = \frac{h_B - p_B}{h_B} = \frac{0.0782 - 0.0786}{0.0786} \approx -0.5\%.$$

d) Aufgrund der kleineren Fehlerwahrscheinlichkeit ergeben sich nun kleinere Werte als unter b):

$$N = 64000: \quad \sigma_h = \sqrt{p/N} = \sqrt{\frac{0.336 \cdot 10^{-4}}{6.4 \cdot 10^4}} \approx 2.3 \cdot 10^{-5},$$
$$N = 1600000: \quad \sigma_h = \sqrt{p/N} = \sqrt{\frac{0.336 \cdot 10^{-4}}{1.6 \cdot 10^6}} \approx 4.6 \cdot 10^{-6}.$$

e) Trotz der deutlich kleineren Streuung σ_h ergeben sich für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9$ dB aufgrund der kleineren Fehlerwahrscheinlichkeit größere relative Abweichungen als für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 0$ dB:

$$N = 64000: \quad \varepsilon_{\text{rel}} = \frac{h_B - p_B}{h_B} = \frac{0.625 \cdot 10^{-4} - 0.336 \cdot 10^{-4}}{0.336 \cdot 10^{-4}} \approx 86\%,$$
$$N = 1600000: \quad \varepsilon_{\text{rel}} = \frac{h_B - p_B}{h_B} = \frac{0.325 \cdot 10^{-4} - 0.336 \cdot 10^{-4}}{0.336 \cdot 10^{-4}} \approx -3.3\%.$$

f) Die Anzahl n_B der gemessenen Bitfehler sollte mindestens 100 betragen. Deshalb gilt näherungsweise (Rundungsfehler sind zu berücksichtigen):

$$n_B = p_B \cdot N > 100 \quad \Rightarrow \quad p_B > \frac{100}{1.6 \cdot 10^6} = 0.625 \cdot 10^{-4}.$$

Daraus folgt weiter, dass bei der Simulation für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 8$ dB noch ausreichend viele Bitfehler aufgetreten sind ($n_B = 315$), während für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9$ dB im Mittel nur mehr $n_B = 52$ Fehler zu erwarten sind. Für diesen dB-Wert müsste etwa die doppelte Anzahl an Bits simuliert werden.

Musterlösung zur Aufgabe A1.3

a) Beim System A führt die Faltung der beiden gleich breiten Rechteckfunktionen $g_s(t)$ und $h_E(t)$ zu einem dreieckförmigen Detektionsgrundimpuls mit dem Maximum bei $t = 0$:

$$g_d(t = 0) = \int_{-T/2}^{+T/2} g_s(t) \cdot h_E(t) dt = s_0 \cdot \frac{1}{T} \cdot T = s_0 = \underline{6 \sqrt{W}}.$$

Es gibt keine Impulsinterferenzen, da für $|t| \geq T$ der Detektionsimpuls $g_d(t)$ identisch 0 ist.

b) Die Varianz des Detektionsstörsignals – hier als Detektionsstörleistung bezeichnet – kann sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich berechnet werden. Bei der vorliegenden Rechteckform führt die Berechnung im Zeitbereich schneller zum Ergebnis:

$$\begin{aligned} \sigma_d^2 &= \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |h_E(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} |h_E(t)|^2 dt = \\ &= \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot T = \frac{N_0}{2T} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \text{ W/Hz}}{2 \cdot 10^{-5} \text{ s}} = \underline{1 \text{ W}}. \end{aligned}$$

Die Frequenzbereichsberechnung würde mit $H_E(f) = \text{si}(\pi f T)$ wie folgt aussehen:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \text{si}^2(\pi f T) df = \frac{N_0}{2T}.$$

c) Aufgrund der zeitlich begrenzten Impulsform (das bedeutet: keine Impulsinterferenzen!) ergibt sich bei der hier vorausgesetzten bipolaren Betrachtungsweise:

$$p_B = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\frac{6 \sqrt{W}}{1 \sqrt{W}}\right) = Q(6) = \underline{0.987 \cdot 10^{-9}}.$$

Das System A stellt die Matched-Filter-Realisierung des optimalen Binärempfängers dar, so dass hier auch die folgenden Gleichungen anwendbar wären:

$$\begin{aligned} E_B &= s_0^2 \cdot T = 36 \text{ W} \cdot 10^{-5} \text{ s} \\ \Rightarrow p_B &= Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 36 \cdot 10^{-5} \text{ Ws}}{2 \cdot 10^{-5} \text{ Ws}}}\right) = Q(6). \end{aligned}$$

d) Da bei System B das genau gleiche Empfangsfilter wie bei System A verwendet wird, erhält man auch die gleiche Detektionsstörleistung $\sigma_d^2 = 1 \text{ W}$. Der Detektionsgrundimpuls ist nun aber nicht mehr dreieckförmig, sondern weist eine spitzere Form auf. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt:

$$g_d(t = 0) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} g_s(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{s_0}{2} \cdot T = \frac{s_0}{2} = \underline{3 \sqrt{W}}.$$

Auch das System B ist impulsinterferenzfrei. Man erhält deshalb für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = Q\left(\frac{g_d(t = 0)}{\sigma_d}\right) = Q\left(\frac{3 \sqrt{W}}{1 \sqrt{W}}\right) = Q(3) = \underline{0.135 \cdot 10^{-2}}.$$

Nicht anwendbar ist dagegen hier der folgende Rechengang:

$$E_B = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s^2(t) dt = 2 \cdot s_0^2 \cdot \int_0^{+T/2} \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^2 dt = \frac{s_0^2 \cdot T}{3} = 12 \cdot 10^{-5} \text{ Ws}$$

$$\Rightarrow p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{12}) = Q(3.464) \approx 3 \cdot 10^{-4}.$$

Man würde so eine zu niedrige Bitfehlerwahrscheinlichkeit berechnen, da die implizit getroffene Annahme eines angepassten Filters nicht zutrifft.

e) Bei rechteckförmigem Sendegrundimpuls und dreieckförmiger Impulsantwort erhält man den gleichen Detektionsgrundimpuls wie bei dreieckförmigem $g_s(t)$ und rechteckförmigem $h_E(t)$. Wie beim System B gilt deshalb:

$$g_d(t=0) = \frac{s_0}{2} = 3 \sqrt{W}.$$

Dagegen ist nun die Detektionsstörleistung kleiner als bei den Systemen A und B:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^2 dt = \frac{N_0}{6T} = 0.333 W$$

$$\Rightarrow \sigma_d = 0.577 \sqrt{W}.$$

Damit erhält man nun:

$$p_B = Q\left(\frac{3 \sqrt{W}}{0.577 \sqrt{W}}\right) \approx Q(5.2) \approx 10^{-7}.$$

Der gegenüber Teilfrage c) erkennbare Anstieg der Fehlerwahrscheinlichkeit um etwa den Faktor 100 ist auf die gravierende Fehlanpassung gegenüber dem Matched-Filter zurückzuführen. Die Verbesserung gegenüber Teilaufgabe d) geht auf die höhere Signalenergie zurück.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.3

a) Aus der Q-Funktion ergibt sich mit der Substitution $t^2 = u^2/2$:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(x/\sqrt{2}\right).$$

Daraus folgt die Richtigkeit des ersten Lösungsvorschlags:

$$\operatorname{erfc}(x) = 2 \cdot Q(\sqrt{2} \cdot x).$$

b) Unabhängig von den Symbolwahrscheinlichkeiten erhält man mit der Entscheidungsschwelle $E = 0$:

$$p_B = Q(s_0/\sigma_d) = Q(2) = \underline{2.27\%}.$$

c) Nun lautet die allgemeine Gleichung für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit, wobei d_N den Rauschanteil von $d(t)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} p_B &= p_L \cdot \Pr(d_N > E + s_0) + p_H \cdot \Pr(d_N < E - s_0) = \\ &= p_L \cdot Q\left(\frac{s_0 + E}{\sigma_d}\right) + p_H \cdot Q\left(\frac{s_0 - E}{\sigma_d}\right). \end{aligned}$$

Hierbei ist die WDF-Symmetrie berücksichtigt. Mit $p_L = 0.88 \rightarrow p_H = 0.12$ und $E = 0.1$ V erhält man:

$$\begin{aligned} p_B &= 0.88 \cdot Q\left(\frac{1 \text{ V} + 0.1 \text{ V}}{0.5 \text{ V}}\right) + 0.12 \cdot Q\left(\frac{1 \text{ V} - 0.1 \text{ V}}{0.5 \text{ V}}\right) = \\ &= 0.88 \cdot Q(2.2) + 0.12 \cdot Q(1.8) = 0.88 \cdot 1.39\% + 0.12 \cdot 3.59\% = \underline{1.65\%}. \end{aligned}$$

Durch die Schwellenverschiebung nach rechts (positiver Wert) um $E = s_0/10$ ergibt sich also bereits eine Verbesserung von $p_B = 2.27\%$ auf $p_B = 1.65\%$.

d) Diese Optimierungsaufgabe wird durch Nullsetzen der Ableitung gelöst, wobei der Hinweis auf der Angabenseite zu berücksichtigen ist:

$$\begin{aligned} \frac{dp_B(E)}{dE} &= -\frac{p_L}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} \cdot \exp\left(-\frac{(s_0 + E)^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\right) + \frac{p_H}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} \cdot \exp\left(-\frac{(s_0 - E)^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{p_L}{p_H} &= -\frac{\exp\left(-\frac{(s_0 - E)^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\right)}{\exp\left(-\frac{(s_0 + E)^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\right)} = \exp\left(\frac{2 \cdot E \cdot s_0}{\sigma_d^2}\right). \end{aligned}$$

Damit erhält man für den optimalen Schwellenwert allgemein:

$$E_{\text{opt}} = \frac{\sigma_d^2}{2 \cdot s_0} \cdot \ln \frac{p_L}{p_H}.$$

Mit $\sigma_d = 0.5$ V, $s_0 = 1$ V, $p_L = 0.88$ und $p_H = 0.12$ ergibt sich folgendes Optimum:

$$E_{\text{opt}} = \frac{(0.5 \text{ V})^2}{2 \cdot 1 \text{ V}} \cdot \ln \frac{0.88}{0.12} \approx \underline{0.25 \text{ V}}.$$

e) Die minimale Fehlerwahrscheinlichkeit für den optimalen Schwellenwert $E_{\text{opt}} = 0.25$ V ist somit:

$$p_{B, \text{min}} = 0.88 \cdot Q(2.5) + 0.12 \cdot Q(1.5) = 0.88 \cdot 0.62\% + 0.12 \cdot 6.68\% = \underline{1.35\%}.$$

Gegenüber $E = 0$ ist die Fehlerwahrscheinlichkeit nun um ca. 40% kleiner.

f) Mit dem Ergebnis aus d) ergibt sich nun für den optimalen Schwellenwert:

$$E_{\text{opt}} = \frac{(0.5 \text{ V})^2}{2 \cdot 1 \text{ V}} \cdot \ln \frac{0.31}{0.69} \approx \underline{\underline{-0.1 \text{ V}}}.$$

Nachdem hier das Symbol **L** unwahrscheinlicher ist, muss nun die Schwelle nach links – also weg vom wahrscheinlicheren Symbol – verschoben werden. Die Herleitung des Ergebnisses zu d) und die Grafik auf der Angabenseite zeigen, dass der optimale Schwellenwert genau an die Stelle zu setzen ist, bei der sich die beiden Gaußfunktionen schneiden.

g) Mit dem Ergebnis aus f) gilt schließlich:

$$p_{B, \text{min}} = 0.31 \cdot Q(1.8) + 0.69 \cdot Q(2.2) = 0.31 \cdot 3.59 \% + 0.69 \cdot 1.39 \% = \underline{\underline{2.07 \%}}.$$

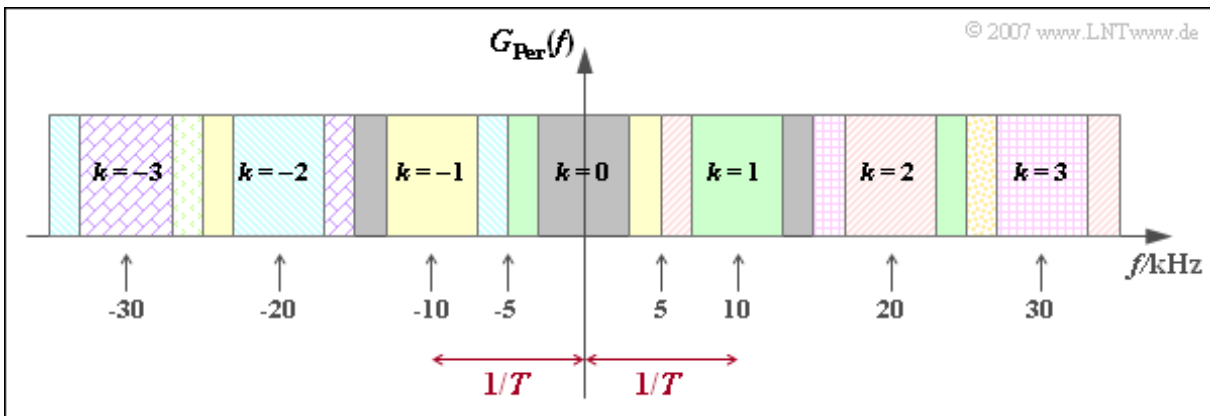
Aufgrund der weniger gravierenden Unsymmetrie ist die erreichbare Verbesserung mit 9% geringer als unter Punkt e) berechnet.

Musterlösung zur Aufgabe A1.4

a) Die folgende Grafik zeigt das Spektrum (der Index „Per“ steht hier für „Periodische Fortsetzung“):

$$G_{\text{Per}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f - \frac{k}{T}).$$

Die Laufvariable $k = 0$ gibt die ursprüngliche Spektralfunktion $G(f)$ an. Diese ist grau gefüllt. Das um den Wert $1/T = 10$ kHz nach rechts verschobene Spektrum gehört zu $k = 1$ und ist grün markiert, während $k = -1$ zur gelb hinterlegten Funktion führt. Die roten und blauen Flächen, jeweils zusätzlich schraffiert, kennzeichnen die Beiträge der Laufvariablen $k = 2$ und $k = -2$.



Man erkennt, dass $G_{\text{Per}}(f)$ konstant ist. Daraus folgt, dass das erste Nyquistkriterium erfüllt ist.

b) Aufgrund der Fourierintegrale gilt folgender Zusammenhang:

$$g(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = A \cdot (2 \text{ kHz} + 6 \text{ kHz} + 2 \text{ kHz}) = A \cdot 10 \text{ kHz}$$

$$\Rightarrow A = \frac{g(t = 0)}{10 \text{ kHz}} = \frac{2 \text{ V}}{10 \text{ kHz}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ V/Hz}.$$

c) Es gelte $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, wobei $g_1(t)$ die Spektralanteile im Intervall ± 3 kHz beinhaltet und $g_2(t)$ diejenigen zwischen 13 kHz und 15 kHz (und zwischen -13 kHz und -15 kHz). Mit der angegebenen Fourierkorrespondenz lauten die beiden Anteile:

$$g_1(t) = A \cdot 6 \text{ kHz} \cdot \text{si}(\pi \cdot 6 \text{ kHz} \cdot t),$$

$$g_2(t) = A \cdot 2 \text{ kHz} \cdot \text{si}(\pi \cdot 2 \text{ kHz} \cdot t) \cdot 2 \cdot \cos(2\pi \cdot 14 \text{ kHz} \cdot t).$$

Die zweite Gleichung folgt aus der Beziehung:

$$G_2(f) = [\delta(f + 14 \text{ kHz}) + \delta(f - 14 \text{ kHz})] \star \begin{cases} A & \text{für } |f| < 1 \text{ kHz,} \\ 0 & \text{für } |f| > 1 \text{ kHz.} \end{cases}$$

Die Grafik zeigt den numerisch ermittelten Zeitverlauf $g(t)$. Für den Zeitpunkt $t = T = 0.1$ ms (gelbes Quadrat) erhält man:

$$g_2(t = T) = 2A \cdot 2 \text{ kHz} \cdot \text{si}(0.2 \cdot \pi) \cdot \cos(2.8 \cdot \pi)$$

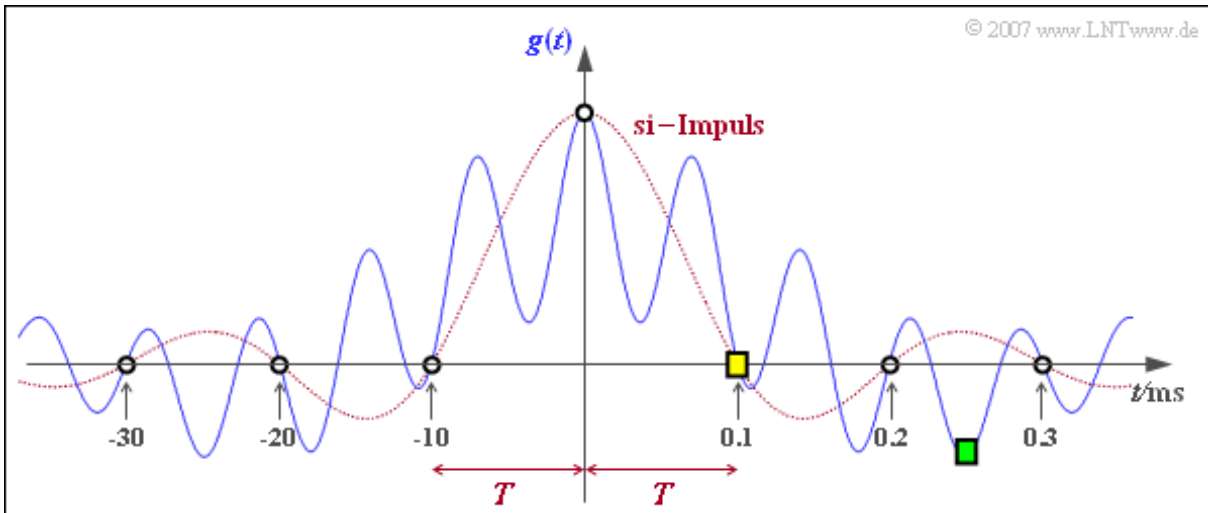
$$= \frac{A \cdot 4 \text{ kHz}}{0.2 \cdot \pi} \cdot \sin(0.2 \cdot \pi) \cdot \cos(0.8 \cdot \pi) =$$

$$= \frac{A \cdot 10 \text{ kHz}}{\pi} \cdot [\sin(-0.6 \cdot \pi) + \sin(\pi)] = -\frac{A \cdot 10 \text{ kHz}}{\pi} \cdot \sin(0.6 \cdot \pi)$$

$$g_1(t = T) = A \cdot 6 \text{ kHz} \cdot \text{si}(0.6 \cdot \pi) = \frac{A \cdot 6 \text{ kHz}}{0.6 \cdot \pi} \cdot \sin(0.6 \cdot \pi) = -g_2(t = T)$$

$$\Rightarrow g(t = T) = g_1(t = T) + g_2(t = T) \underline{\underline{0}}.$$

Dieses Ergebnis ist aufgrund der Nyquisteigenschaft nicht überraschend.



d) Für $t = 2.5T$ (grünes Quadrat) erhält man folgende Teilergebnisse:

$$g_1(t = 2.5T) = A \cdot 6 \text{ kHz} \cdot \text{si}(1.5 \cdot \pi) = \frac{A \cdot 6 \text{ kHz}}{1.5 \cdot \pi} \cdot \sin(1.5 \cdot \pi) = -\frac{A \cdot 4 \text{ kHz}}{\pi},$$

$$g_2(t = 2.5T) = 2A \cdot 2 \text{ kHz} \cdot \text{si}(0.5 \cdot \pi) \cdot \cos(7 \cdot \pi) = -\frac{A \cdot 8 \text{ kHz}}{\pi}$$

$$\Rightarrow g(t = 2.5T) = g_1(t = 2.5T) + g_2(t = 2.5T) = -\frac{A \cdot 12 \text{ kHz}}{\pi}.$$

Berücksichtigt man $g(t = 0) = A \cdot 10 \text{ kHz}$, so ergibt sich:

$$\frac{g(t = 2.5T)}{g(t = 0)} = -\frac{1.2}{\pi} \underline{\underline{-0.382}}.$$

e) Das zweite Nyquistkriterium besagt, dass der Nyquistimpuls $g(t)$ Nulldurchgänge bei $\pm 1.5T$, $\pm 2.5T$, $\pm 3.5T$, ... besitzt. Nach dem Ergebnis aus d) ist diese Bedingung hier nicht erfüllt. Richtig ist demzufolge der Lösungsvorschlag 2.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.4

a) Die Nyquistfrequenz gibt den Symmetriepunkt des Flankenabfalls an. Es gilt:

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{3 \text{ kHz} + 7 \text{ kHz}}{2} \underline{\underline{= 5 \text{ kHz}}}.$$

b) Der Rolloff-Faktor ist ebenfalls durch die beiden Eckfrequenzen f_1 und f_2 festgelegt:

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} = \frac{7 \text{ kHz} - 3 \text{ kHz}}{7 \text{ kHz} + 3 \text{ kHz}} \underline{\underline{= 0.4}}.$$

c) Bei einem Impuls mit reellem Tiefpass-Spektrum liegt das Maximum stets bei $t = 0$ und es gilt:

$$g_0 = g(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = A \cdot 2f_{\text{Nyq}} = 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{Hz}} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ Hz} \underline{\underline{= 1 \text{ V}}}.$$

d) Beim Nyquistimpuls treten die äquidistanten Nulldurchgänge im Abstand $T = 1/(2f_{\text{Nyq}}) = 100 \mu\text{s}$ auf. Daraus erhält man direkt:

$$\begin{aligned} g(t = 100 \mu\text{s}) &= \underline{\underline{g(T) = 0}}, \\ g(t = 200 \mu\text{s}) &= \underline{\underline{g(2T) = 0}}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis folgt auch aus der angegebenen Gleichung mit $r = 0.4$:

$$g(t) = g_0 \cdot \text{si}(\pi \cdot t/T) \cdot \text{si}(\pi \cdot 0.4 \cdot t/T).$$

Verantwortlich dafür, dass die erste Nyquistbedingung erfüllt wird, ist der erste Term.

e) Entsprechend der unter d) angegebenen Gleichung gilt:

$$g(t = 250 \mu\text{s}) = g_0 \cdot \text{si}(2.5 \cdot \pi) \cdot \text{si}(\pi) \underline{\underline{= 0}}.$$

Diese Nullstelle ist auf den zweiten Term zurückzuführen und liegt nicht im Nyquist-Zeitraaster νT .

f) Für die folgende Herleitung gelte:

$$g(t) = g_{\text{R}}(t) + g_{\text{I}}(t),$$

wobei $g_{\text{R}}(t)$ auf den Realteil und $g_{\text{I}}(t)$ auf den Imaginärteil von $G(f)$ zurückgeht. Der erste Anteil ist dabei genau wie unter Punkt d) berechnet:

$$g_{\text{R}}(t) = g_0 \cdot \text{si}(\pi \cdot t/T) \cdot \text{si}(\pi \cdot 0.4 \cdot t/T).$$

Zur Erfüllung des ersten Nyquistkriteriums muss für den Imaginärteil mit $1/T = 10 \text{ kHz}$ gelten:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Im} [G(f - k/T)] = 0.$$

Mit den gegebenen Eckfrequenzen $f_1 = 3 \text{ kHz}$ und $f_2 = 7 \text{ kHz}$ liegen die beiden Dreiecke um $\pm 5 \text{ kHz}$, so dass obige Gleichung erfüllt ist. Gleiches gilt für $f_1 = 4.5 \text{ kHz}$ und $f_2 = 5.5 \text{ kHz}$. Dagegen liegen die Dreieckspitzen mit $f_1 = 3 \text{ kHz}$ und $f_2 = 5 \text{ kHz}$ bei $\pm 4 \text{ kHz}$. In diesem Fall löschen sich die Dreiecksfunktionen durch die periodische Fortsetzung nicht aus und die Nyquistbedingung ist nicht erfüllt. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 3.

g) Mit dem Ergebnis $g_R(2.5T) = 0$ aus der Teilaufgabe c) folgt $g(2.5T) = g_I(2.5T)$, wobei $g_I(t)$ die Fourierrechtransformierte von $j \cdot G_1(f)$ ist. Es gilt:

$$j \cdot G_1(f) = j \cdot [\delta(f + f_{Nyq}) - \delta(f - f_{Nyq})] \star D(f)$$

$$\Rightarrow g_I(t) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_{Nyq} \cdot t) \cdot d(t).$$

Die Sinusfunktion erzwingt die erforderlichen Nulldurchgänge bei Vielfachen von $T = 100 \mu\text{s}$. $D(f)$ ist eine Dreieckfunktion um $f = 0$ mit $D(f = 0) = B$ und der einseitigen Breite $f_0 = f_2 - f_{Nyq} = f_{Nyq} - f_1 = 2 \text{ kHz}$. Für die dazugehörige Zeitfunktion kann somit entsprechend der Angabe geschrieben werden:

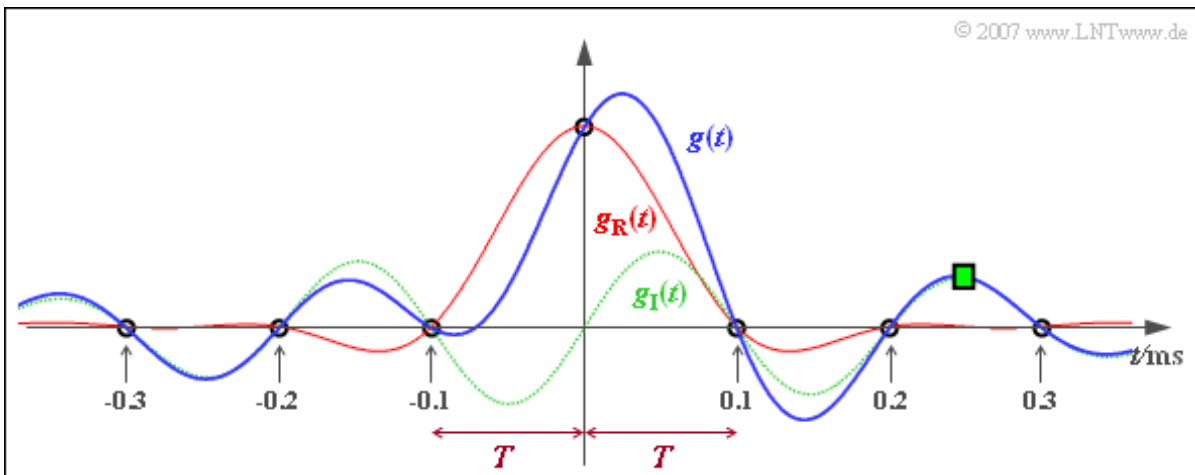
$$g_I(t) = 2 \cdot B \cdot f_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_{Nyq} \cdot t) \cdot \text{si}^2(\pi \cdot f_0 \cdot t).$$

Insbesondere gilt für den Zeitpunkt $t = 250 \mu\text{s}$ (grünes Quadrat):

$$g(t = 2.5T) = g_I(t = 2.5T) = 2 \cdot B \cdot f_0 \cdot \sin(2.5\pi) \cdot \text{si}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{Hz}} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ Hz} = \underline{\underline{0.162 \text{ V}}}.$$

Die nachfolgende Grafik zeigt die Veränderung der Zeitfunktion aufgrund des Imaginärteils (grüner Zeitverlauf). Es ergibt sich nun ein unsymmetrischer Funktionsverlauf $g(t)$, der blau dargestellt ist. Die Nulldurchgänge von $g_R(t)$ im Abstand T bleiben jedoch erhalten.



Musterlösung zur Aufgabe A1.5

a) Die obere Eckfrequenz kann aus der Grafik abgelesen werden: $f_2 = 2 \text{ MHz}$. Da das Spektrum in keinem Bereich konstant ist, gilt: $f_1 = 0$.

b) Aus den angegebenen Gleichungen erhält man:

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{f_1 + f_2}{2} = 1 \text{ MHz},$$

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} = 1.$$

c) Der Abstand äquidistanter Nulldurchgänge hängt direkt mit der Nyquistfrequenz zusammen:

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{1}{2T} \Rightarrow T = \frac{1}{2f_{\text{Nyq}}} = 0.5 \mu\text{s}.$$

d) Die erste Aussage ist richtig: Die Funktion $\text{si}(\pi \cdot t/T)$ führt zu Nulldurchgängen bei vT ($v \neq 0$). Auch die letzte Aussage trifft zu: Wegen $g(t) = 0$ für $t = \pm 1.5T, \pm 2.5T, \pm 3.5T, \dots$ wird auch das zweite Nyquistkriterium erfüllt. Falsch ist dagegen die mittlere Aussage, da $g(t = T/2) \neq 0$ ist. Richtig sind also nur die Aussagen 1 und 3.

Die Bedingung für das zweite Nyquistkriterium lautet im Frequenzbereich:

$$G_{\text{Per}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{G(f - \frac{k}{T})}{\cos(\pi \cdot f \cdot T - k \cdot \pi)} = \text{const.}$$

Die Bedingung ist beim \cos^2 -Spektrum tatsächlich erfüllt, wie man nach längerer Rechnung zeigen kann. Wir beschränken uns hier auf den Frequenzbereich $|f \cdot T| \leq 1$ und setzen vereinfachend $g_0 \cdot T = 1$:

$$G_{\text{Per}}(f) = \frac{\cos^2[\pi/2 \cdot (f_{\text{Nyq}} - f) \cdot T]}{\cos[\pi \cdot (f_{\text{Nyq}} - f) \cdot T]} + \frac{\cos^2[\pi/2 \cdot (f_{\text{Nyq}} + f) \cdot T]}{\cos[\pi \cdot (f_{\text{Nyq}} + f) \cdot T]}.$$

Weiter gilt:

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)} = 1/2 \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{\cos(2x)} = 1/2 \cdot \left[1 + \frac{1}{\cos(2x)} \right]$$

$$\Rightarrow G_{\text{Per}}(f) = 1/2 \cdot \left[1 + \frac{1}{\cos[\pi \cdot (f_{\text{Nyq}} - f) \cdot T]} + 1 - \frac{1}{\cos[\pi \cdot (f_{\text{Nyq}} + f) \cdot T]} \right].$$

$$\cos[\pi \cdot (f_{\text{Nyq}} \pm f) \cdot T] = \cos(\pi/2 \pm \pi f T) = \sin(\pm \pi f T)$$

$$\Rightarrow G_{\text{Per}}(f) = 2 - \frac{1}{\sin(\pi f T)} + \frac{1}{\sin(\pi f T)} = 2 = \text{const.}$$

e) Für $t = T/2$ liefert die angegebene Gleichung einen unbestimmten Wert (0 geteilt durch 0), der allerdings mit der Regel von l'Hospital ermittelt werden kann. Dazu bildet man die Ableitungen von Zähler und Nenner und setzt in das Ergebnis den gewünschten Zeitpunkt $t = T/2$ ein:

$$\begin{aligned}\frac{g(t = T/2)}{g_0} &= \operatorname{si}\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \cdot \frac{\left. \frac{d}{dt} [\cos(\pi \cdot t/T)] \right|_{t=T/2}}{\left. \frac{d}{dt} [1 - (2 \cdot t/T)^2] \right|_{t=T/2}} = \\ &= \operatorname{si}\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \cdot \frac{-\pi/T \cdot \sin(\pi \cdot t/T)}{-2 \cdot (2 \cdot t/T) \cdot (2/T)} \Big|_{t=T/2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0.5.\end{aligned}$$

Ein zweiter Lösungsweg führt zu der Darstellung:

$$\frac{g(t)}{g_0} = \operatorname{si}\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot [\operatorname{si}(\pi \cdot (t/T + 1/2)) + \operatorname{si}(\pi \cdot (t/T - 1/2))].$$

Der zweite Klammerausdruck kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} \cdot [\dots] &= \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{\sin(\pi \cdot t/T + \pi/2)}{\pi \cdot t/T + \pi/2} + \frac{\sin(\pi \cdot t/T - \pi/2)}{\pi \cdot t/T - \pi/2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\pi \cdot t/T) \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot t/T + 1} - \frac{1}{2 \cdot t/T - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\pi \cdot t/T) \cdot \frac{1 - 2 \cdot t/T + 1 + 2 \cdot t/T}{(1 + 2 \cdot t/T)(1 - 2 \cdot t/T)} = \frac{\cos(\pi \cdot t/T)}{1 - (2 \cdot t/T)^2}.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass beide Ausdrücke tatsächlich gleich sind. Für den Zeitpunkt $t = T/2$ gilt somit weiterhin:

$$\frac{g(t = T/2)}{g_0} = \operatorname{si}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot [\operatorname{si}(\pi) + \operatorname{si}(0)] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0.5.$$

Musterlösung zur Aufgabe A1.6

a) Mit den Funktionen $G_s(f)$ und $H_E(f)$ gilt für das Spektrum des Detektionsgrundimpulses für $|f| \leq f_2$:

$$G_d(f) = G_s(f) \cdot H_E(f) = A \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi \cdot f}{2 \cdot f_2} \right).$$

Nach der allgemeinen Definition des Cosinus-Rolloff-Spektrums ergeben sich die Eckfrequenzen $f_1 = 0$ und $f_2 = 1$ MHz. Daraus folgt für die Nyquistfrequenz (Symmetriepunkt bezüglich des Flankenabfalls):

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{f_1 + f_2}{2} \equiv \underline{0.5 \text{ MHz}}.$$

Der Rolloff-Faktor beträgt

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \equiv \underline{1}.$$

Das bedeutet: $G_d(f)$ beschreibt ein \cos^2 -Spektrum.

b) Der Zusammenhang zwischen Nyquistfrequenz und Symboldauer T lautet $f_{\text{Nyq}} = 1/(2T)$. Daraus folgt für die Bitrate $R = 1/T = 2 \cdot f_{\text{Nyq}} \equiv \underline{1 \text{ Mbit/s}}$. Beachten Sie die unterschiedlichen Einheiten für Frequenz und Bitrate.

c) Es handelt es sich um ein optimales Binärsystem unter der Nebenbedingung der Leistungsbegrenzung, weil die erste und die dritte Lösungsalternative zutreffen. Der Crestfaktor ist bei Leistungsbegrenzung nicht von Bedeutung. Bei den hier gegebenen Voraussetzungen würde $C_S > 1$ gelten.

d) Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit eines optimalen Systems kann wie folgt berechnet werden:

$$p_B = Q \left(\sqrt{2 \cdot E_B / N_0} \right).$$

Im vorliegenden Beispiel erhält man für die mittlere Energie pro Bit:

$$\begin{aligned} E_B &= \int_{-\infty}^{+\infty} |G_s(f)|^2 df = A^2 \cdot \int_{-1/T}^{+1/T} H_{\text{Nyq}}(f) df = \\ &= \frac{A^2}{T} = \frac{(10^{-6} \text{ V/Hz})^2}{10^{-6} \text{ s}} = 10^{-6} \text{ V}^2\text{s}. \end{aligned}$$

Mit $N_0 = 8 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2/\text{Hz}$ ergibt sich weiter:

$$p_B = Q \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s}}{8 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2/\text{Hz}}} \right) = Q \left(\sqrt{25} \right) = Q(5) \equiv \underline{0.287 \cdot 10^{-6}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.6

a) Beide Systeme arbeiten gemäß der Angabe mit gleicher Bitrate. Der NRZ-Sendegrundimpuls von System A hat die Symboldauer $T = 0.5 \mu\text{s}$. Daraus ergibt sich für die Bitrate $R = 1/T = \underline{2 \text{ Mbit/s}}$.

b) Die Energie des NRZ-Sendegrundimpulses von System A ergibt sich zu

$$E_B = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s^2(t) dt = s_0^2 \cdot T = 1 \text{ V}^2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ s} = \underline{5 \cdot 10^{-7} \text{ V}^2/\text{Hz}}.$$

c) Die beiden ersten Aussagen treffen zu. In beiden Fällen muss $h_E(t)$ formgleich mit $g_s(t)$ und $H_E(f)$ formgleich mit $G_s(f)$ sein. Somit ergibt sich beim System A eine rechteckförmige Impulsantwort $h_E(t)$ und damit ein si-förmiger Frequenzgang $H_E(f)$. Beim System B ist $H_E(f)$ wie $G_s(f)$ rechteckförmig und damit die Impulsantwort $h_E(t)$ eine si-Funktion.

Die letzte Aussage ist falsch: Ein Integrator besitzt eine rechteckförmige Impulsantwort und würde sich für die Realisierung von System A anbieten, nicht jedoch für System B.

d) Beim System B stimmt $G_d(f)$ mit $G_s(f)$ nahezu überein. Lediglich bei der Nyquistfrequenz gibt es einen Unterschied, der sich aber für die hier angestellten Betrachtungen nicht weiter auswirkt: Während $G_s(f_{\text{Nyq}}) = 1/2$ gilt, ist $G_d(f_{\text{Nyq}}) = 1/4$.

Es ergibt sich also ein Nyquistsystem mit Rolloff-Faktor $r = 0$. Daraus folgt für die Nyquistfrequenz aus der Bedingung, dass die Symboldauer ebenfalls $T = 0.5 \mu\text{s}$ sein soll:

$$f_0 = f_{\text{Nyq}} = \frac{1}{2 \cdot T} = \frac{1}{2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = \underline{1 \text{ MHz}}.$$

e) Für die Energie des Sendegrundimpulses kann auch geschrieben werden:

$$E_B = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_s(f)|^2 df = G_0^2 \cdot 2f_0.$$

Mit den Ergebnissen aus b) und d) folgt daraus:

$$G_0^2 = \frac{E_B}{2f_0} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \text{ V}^2/\text{Hz}}{2 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 2.5 \cdot 10^{-13} \text{ V}^2/\text{Hz}^2 \Rightarrow G_0 = \underline{5 \cdot 10^{-7} \text{ V}/\text{Hz}}.$$

f) Das System A stellt auch bei Spitzenwertbegrenzung das optimale System dar. Dagegen wäre das System B aufgrund des äußerst ungünstigen Crestfaktors hierfür denkbar ungeeignet. Richtig ist also der Lösungsvorschlag 1.

Musterlösung zur Aufgabe A1.7

a) Zur Vereinfachung der Berechnungen setzen wir $T_1' = T_1/2$ und $T_2' = (T - T_1)/2$. Damit ergibt sich für die Sendeimpulsenergie:

$$E_B = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s^2(t) dt = 2 \cdot \int_0^{T_1'} g_s^2(t) dt + 2 \cdot \int_{T_1'}^{T/2} g_s^2(t) dt.$$

Entsprechend dieser Aufteilung kann auch geschrieben werden:

$$E_B/2 = s_0^2 \cdot T_1' + E_2, \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{T_1'}^{T/2} g_s^2(t) dt = s_0^2 \cdot \int_0^{T_2'} \left(1 - \frac{t}{T_2'}\right)^2 dt = \\ &= s_0^2 \cdot \left[\int_0^{T_2'} dt - \frac{2}{T_2'} \cdot \int_0^{T_2'} t dt + \frac{1}{(T_2')^2} \cdot \int_0^{T_2'} t^2 dt \right] = \\ &= s_0^2 \cdot \left[T_2' - \frac{2}{T_2'} \cdot \frac{(T_2')^2}{2} + \frac{1}{(T_2')^2} \cdot \frac{(T_2')^3}{3} \right] = s_0^2 \cdot \frac{T_2'}{3}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in obige Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} E_B/2 &= s_0^2 \cdot \frac{T_1}{2} + s_0^2 \cdot \frac{T - T_1}{2 \cdot 3} = s_0^2 \cdot \left[\frac{T}{6} + \frac{T_1}{3} \right] \\ \Rightarrow E_B &= s_0^2/3 \cdot (T + 2 \cdot T_1). \end{aligned}$$

Mit den angegebenen Werten $s_0^2 = 10 \text{ mW}$ und $T = 3 \text{ } \mu\text{s}$ erhält man:

$$\begin{aligned} T_1 = 0 : E_B &= 1/3 \cdot s_0^2 \cdot T = 1/3 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ s} \underline{\underline{= 1 \cdot 10^{-8} \text{ W}_s}}, \\ T_1 = T/2 : E_B &= 2/3 \cdot s_0^2 \cdot T = \dots \underline{\underline{= 2 \cdot 10^{-8} \text{ W}_s}}, \\ T_1 = T : E_B &= s_0^2 \cdot T = \dots \underline{\underline{= 3 \cdot 10^{-8} \text{ W}_s}}. \end{aligned}$$

b) Der Systemwirkungsgrad bei Leistungsbegrenzung ist maximal ($\eta_L = 1$), wenn der Sendegrundimpuls $g_s(t)$ formgleich mit der Impulsantwort $h_E(t)$ ist. Dies trifft hier für den NRZ-Sendeimpuls zu: $T_1/T = 1$.

c) Unter der in Teilaufgabe b) genannten Bedingung erhält man das maximale SNR:

$$\rho_{d, \max | L} = \frac{2 \cdot E_B}{N_0} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-8} \text{ W}_s}{3 \cdot 10^{-10} \text{ W/Hz}} \underline{\underline{= 200}}.$$

d) Allgemein gilt $g_d(t) = g_s(t) * h_E(t)$. Für $t = 0$ ergibt sich hierfür die Trapezfläche mit $T_1 = T/2$:

$$g_0 = g_d(t = 0) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) dt = \frac{T + T_1}{2} \cdot s_0 = 0.75 \cdot 0.1 \cdot \sqrt{W} \underline{\underline{= 0.075 \sqrt{W}}}.$$

e) Mit $T_1 = T/2$ (trapezförmige Sendeimpulse) erhält man für das Signal-zu-Rausch-Verhältnis:

$$\rho_d = \frac{g_0^2}{\sigma_d^2} \quad \text{mit} \quad g_0^2 = 0.075^2 \text{ W}, \quad \sigma_d^2 = \frac{N_0}{2 \cdot T} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

$$\Rightarrow \rho_d = \frac{0.075^2 \text{ W}}{5 \cdot 10^{-5} \text{ W}} = 112.5.$$

Somit ergibt sich für den Systemwirkungsgrad bei Leistungsbegrenzung mit dem Ergebnis aus c):

$$\eta_L = \frac{\rho_d}{\rho_{d, \max | L}} = \frac{112.5}{200} = \underline{0.5625}.$$

Aufgrund der Fehlanpassung ist $\eta_L < 1$.

f) Mit dem Maximalwert s_0 und dem Ergebnis der Teilaufgabe a) gilt:

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{E_B/T} = \sqrt{2/3 \cdot s_0^2} \Rightarrow C_S = s_0/s_{\text{eff}} = \sqrt{3/2} \approx \underline{1.225}.$$

g) Der Systemwirkungsgrad bei Spitzenwertbegrenzung ist kleiner als der bei Leistungsbegrenzung, da hier neben der Fehlanpassung auch das nicht optimale Sendesignal (zu kleine Energie) eine Rolle spielt:

$$\eta_A = \frac{1}{C_S^2} \cdot \eta_L = \frac{2}{3} \cdot 0.5625 = \underline{0.375}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A1.8

a) Bereits aus den Gleichungen auf der Angabenseite ist ersichtlich, dass der mittlere Lösungsvorschlag richtig ist. Die Definitionsgleichungen lauten:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du,$$
$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Durch einfache Substitutionen kann der oben genannte Zusammenhang einfach nachgewiesen werden:

$$Q(x) = 1/2 \cdot \operatorname{erfc}(x/\sqrt{2}).$$

b) Richtig sind die beiden ersten Lösungsvorschläge: Die Gleichungen gelten nur für den AWGN-Kanal und für einen optimalen Binärempfänger, zum Beispiel entsprechend des Matched-Filter-Ansatzes. Impulsinterferenzen – verursacht durch den Kanal oder das Empfangsfilter – werden damit nicht erfasst. Die genaue Sendeimpulsformung spielt dagegen keine Rolle, solange das Empfangsfilter $H_E(f)$ an das Sendespektrum angepasst ist. Zwei unterschiedliche Sendeimpulsformer $H_S(f)$ führen zur genau gleichen Fehlerwahrscheinlichkeit, wenn sie die gleiche Energie pro Bit aufweisen.

c) Diese Ergebnisse können direkt aus der Tabelle abgelesen werden:

$$p_{\text{ASK}} \equiv \underline{0.343 \cdot 10^{-4}}, \quad p_{\text{BPSK}} \equiv \underline{0.901 \cdot 10^{-8}}.$$

d) Mit $E_B/N_0 = 8 \Rightarrow 10 \cdot \lg E_B/N_0 \approx 9$ dB erhält man folgende Fehlerwahrscheinlichkeiten:

$$p_{\text{ASK}} \equiv \underline{0.241 \cdot 10^{-2}}, \quad p_{\text{BPSK}} \equiv \underline{0.336 \cdot 10^{-4}}.$$

e) Aus der Teilaufgabe c) folgt, dass bei der binären Phasenmodulation $10 \cdot \lg E_B/N_0 \approx 12$ dB erfüllt sein muss, damit $p_{\text{BPSK}} \approx 10^{-8}$ möglich ist. Die angegebenen Gleichungen zeigen aber auch, dass die ASK-Kurve um 3 dB (exakt 3.01 dB) rechts von der BPSK-Kurve liegt. Daraus folgt:

$$10 \cdot \lg (E_B/N_0)_{\min} \approx \underline{15 \text{ dB}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.8

a) Der Rauscheffektivwert ergibt sich hier zu

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{2 \cdot T_B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}{2 \cdot 1 \text{ ns}}} = 1 \text{ V}$$
$$\Rightarrow p_{\text{BB}} = Q(s_0/\sigma_d) = Q(4) = \underline{0.317 \cdot 10^{-4}}.$$

b) Beim Basisbandsystem gilt:

$$E_B = s_0^2 \cdot T_B = (4 \text{ V})^2 \cdot 10^{-9} \text{ s} = \underline{1.6 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2\text{s}}.$$

Natürlich ergibt sich mit der zusätzlich angegebenen Gleichung die genau gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 16 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2\text{s}}{2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}}\right) = Q(4) = 0.317 \cdot 10^{-4}.$$

Ein Vergleich mit Aufgabe A1.8(d) zeigt, dass $E_B/N_0 = 8$ nicht (exakt) gleich $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9 \text{ dB}$ ist.

Im ersten Fall ergibt sich $p_{\text{BB}} = 0.317 \cdot 10^{-4}$, im zweiten $p_{\text{BB}} = 0.336 \cdot 10^{-4}$.

c) Bei halber Sendeamplitude $s_0 = 2 \text{ V}$ sinkt die Energie pro Bit auf ein Viertel und es gelten folgende Gleichungen:

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\frac{2 \text{ V}}{1 \text{ V}}\right) = \underline{Q(2) = 0.227 \cdot 10^{-1}},$$
$$p_{\text{BB}} = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2\text{s}}{2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}}\right) = Q(2) = 0.227 \cdot 10^{-1}.$$

d) Unter Berücksichtigung der nur mehr halben Energie $E_B = s_0^2 \cdot T_B/2$ erhält man mit $\sigma_d^2 = N_0/T_B$ und

$$p_{\text{BPSK}} = Q(s_0/\sigma_d) = Q\left(\sqrt{s_0^2 \cdot T_B/N_0}\right) = Q\left(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}\right)$$

das genau gleiche Ergebnis wie beim optimalen Basisbandsystem (zweiter Lösungsvorschlag).

e) Es ergeben sich die genau gleichen Ergebnisse wie bei der Basisbandübertragung:

$$E_B/N_0 = 8: p_{\text{BPSK}} = Q(\sqrt{16}) = Q(4) = \underline{0.317 \cdot 10^{-4}},$$
$$E_B/N_0 = 2: p_{\text{BPSK}} = Q(\sqrt{4}) = Q(2) = \underline{0.227 \cdot 10^{-1}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A1.9

a) Durch die Rotation des Phasendiagramms um $\Delta\phi_T = 15^\circ$ wird der Abstand der Nutzabtastwerte von der Schwelle um $\cos(15^\circ) \approx 0.966$ geringer. Daraus folgt:

$$p_B = Q(0.966 \cdot 4) \approx Q(3.86) \approx \underline{0.57 \cdot 10^{-4}}.$$

b) Analog zu Teilaufgabe a) erhält man mit $\cos(45^\circ) \approx 0.707$:

$$p_B = Q(0.707 \cdot 4) \approx Q(2.83) \approx \underline{0.233 \cdot 10^{-2}}.$$

c) Bei 4-QAM wird durch die Rotation um $\Delta\phi_T$ im Uhrzeigersinn der Abstand

- von der horizontalen Schwelle (Entscheidung des ersten Bits) gleich $s_0 \cdot \cos(45^\circ + \Delta\phi_T)$, also kleiner als ohne Phasenversatz,
- von der vertikalen Schwelle (Entscheidung des zweiten Bits) gleich $s_0 \cdot \cos(45^\circ - \Delta\phi_T)$, also größer als ohne Phasenversatz.

Damit erhält man für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(45^\circ + \Delta\phi_T) \cdot s_0}{0.25 \cdot s_0 / \sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(45^\circ - \Delta\phi_T) \cdot s_0}{0.25 \cdot s_0 / \sqrt{2}}\right).$$

Hierbei ist der kleinere Rauscheffektivwert der 4-QAM bereits berücksichtigt. Zur Kontrolle berechnen wir die Fehlerwahrscheinlichkeit für $\Delta\phi_T = 0$:

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(45^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(45^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) = Q(4) = 0.317 \cdot 10^{-4}.$$

Dagegen erhält man mit $\Delta\phi_T = 15^\circ$:

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(60^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(30^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [Q(2.83) + Q(4.90)] \approx \frac{1}{2} \cdot [0.233 \cdot 10^{-2} + 0.479 \cdot 10^{-6}] \approx \underline{0.117 \cdot 10^{-2}}. \end{aligned}$$

d) Bei einem Phasenversatz von 45° erhält man aus der oben allgemein hergeleiteten Gleichung:

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(90^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(0^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [Q(0) + Q(5.66)] \approx \underline{0.25}. \end{aligned}$$

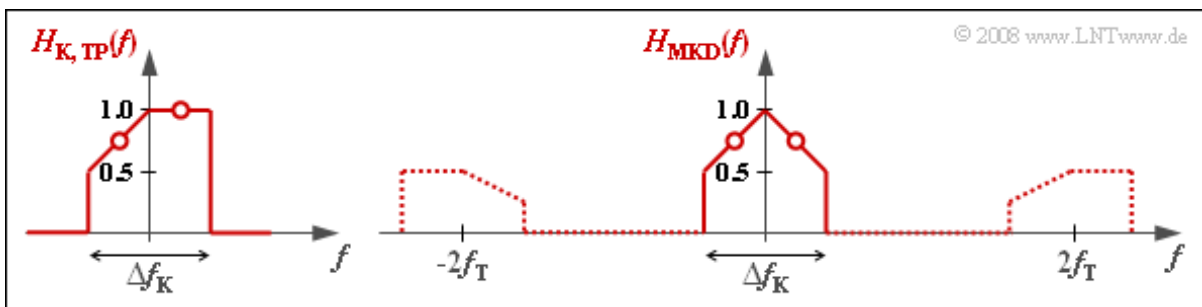
Das heißt: Die Fehlentscheidung für das erste Bit ist 50%. Dagegen wird das zweite Bit nahezu fehlerfrei ($\approx 10^{-8}$) entschieden. Insgesamt ergibt sich so eine mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit von ca. 25%.

Musterlösung zur Aufgabe A1.10

a) Richtig sind die Aussagen 2, 3 und 4. $H_{K,TP}(f)$ ergibt sich aus $H_K(f)$ durch Abschneiden der negativen Frequenzanteile sowie Verschieben um f_T nach links. Bei Frequenzgängen wird – im Gegensatz zu Spektren – auf das Verdoppeln der Anteile bei positiven Frequenzen verzichtet. Deshalb gilt:

$$H_{K,TP}(f = 0) = H_K(f = f_T) = 1.$$

Wegen der reellen unsymmetrischen Spektralfunktionen $H_{K,TP}(f)$ ist die Fourierrücktransformierte $h_{K,TP}(t)$ nach dem Zuordnungssatz komplex.



b) Hier ist nur der dritte Lösungsvorschlag richtig. Die Spektralfunktion $H_{MKD}(f)$ besitzt stets einen geraden Realteil. Demzufolge ist $h_{MKD}(t)$ stets reell. Hätte $H_K(f)$ zusätzlich einen um f_T ungeraden Imaginärteil, so würde $H_{MKD}(f)$ einen um $f = 0$ ungeraden Imaginärteil aufweisen. Damit wäre $h_{MKD}(t)$ immer noch eine reelle Funktion.

Die Grafik verdeutlicht die Unterschiede zwischen $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$. Die Anteile von $H_{MKD}(f)$ im Bereich um $\pm 2f_T$ müssen nicht weiter beachtet werden.

c) $H_{MKD}(f)$ setzt sich additiv aus einem Rechteck und einem Dreieck zusammen, jeweils mit Breite Δf_K und Höhe 0.5. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} h_{MKD}(t) &= \frac{\Delta f_K}{2} \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f_K \cdot t) + \frac{\Delta f_K}{4} \cdot \text{si}^2\left(\pi \cdot \frac{\Delta f_K}{2} \cdot t\right) \\ \Rightarrow h_{MKD}(t = 0) &= \frac{\Delta f_K}{2} + \frac{\Delta f_K}{4} = 0.75 \cdot \Delta f_K \\ \Rightarrow h_{MKD}(t = 0) / \Delta f_K &\equiv \underline{0.75}. \end{aligned}$$

d) Die erste si-Funktion besitzt zwar äquidistante Nulldurchgänge im Abstand $1/\Delta f_K$. Die äquidistanten Nulldurchgänge der gesamten Zeitfunktion $h_{MKD}(t)$ werden aber durch den zweiten Term bestimmt:

$$\begin{aligned} h_{MKD}\left(t = \frac{1}{\Delta f_K}\right) &= \frac{\Delta f_K}{2} \cdot \text{si}(\pi) + \frac{\Delta f_K}{4} \cdot \text{si}^2(\pi/2) = \frac{\Delta f_K}{4}, \\ h_{MKD}\left(t = \frac{2}{\Delta f_K}\right) &= \frac{\Delta f_K}{2} \cdot \text{si}(2\pi) + \frac{\Delta f_K}{4} \cdot \text{si}^2(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Richtig ist der zweite Lösungsvorschlag.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.10

a) Für den Bandpass–Frequenzgang $H_K(f)$ kann geschrieben werden:

$$H_K(f) = H_{K,TP}(f) \star [\delta(f - f_M) + \delta(f + f_M)].$$

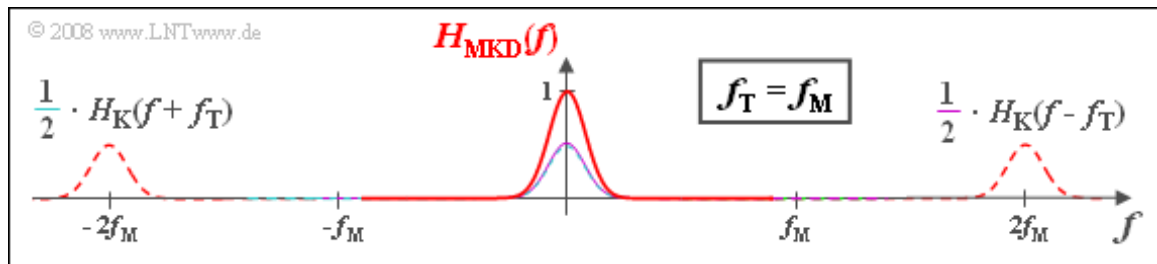
Die Fourierrücktransformierte des Klammerausdrucks liefert eine Cosinusfunktion der Frequenz f_M mit der Amplitude 2. Nach dem Faltungssatz gilt somit:

$$h_K(t) = 2 \cdot \Delta f_K \cdot \exp[-\pi \cdot (\Delta f_K \cdot t)^2] \cdot \cos(2\pi f_M t) \Rightarrow h_K(t=0)/\Delta f_K \equiv 2.$$

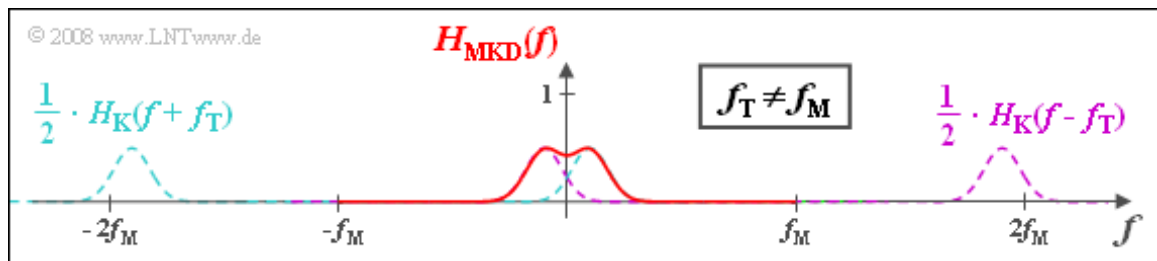
Das heißt: Die TP–Impulsantwort $h_{K,TP}(t)$ ist formgleich mit der Hüllkurve der BP–Impulsantwort $h_K(t)$, aber doppelt so groß.

b) Die erste Aussage ist falsch, da $H_{MKD}(f)$ auch Anteile um $\pm 2f_T$ besitzt. Die Zeitfunktion $h_{K,TP}(t)$ ist entsprechend der angegebenen Gleichung reell. Gleiches gilt für $h_{MKD}(t)$ auch unter Berücksichtigung der $\pm 2f_T$ –Anteile, da $H_{MKD}(f)$ eine bezüglich $f = 0$ gerade Funktion ist. Richtig sind also die Aussagen 2, 3 und 4.

Die Grafik zeigt den Frequenzgang $H_{MKD}(f)$, der auch Anteile um $\pm 2f_T$ besitzt. Bei tiefen Frequenzen ist $H_{K,TP}(f)$ identisch mit $H_{MKD}(f)$.



c) Hier unterscheiden sich $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ auch bei den tiefen Frequenzen. $H_{K,TP}(f)$ ist eine Gaußfunktion mit dem Maximum bei $f_\varepsilon = f_M - f_T$. Aufgrund dieser Unsymmetrie ist $h_{K,TP}(f)$ komplex. Dagegen ist $H_{MKD}(f)$ weiterhin eine bezüglich $f = 0$ gerade Funktion mit reeller Impulsantwort $h_{MKD}(t)$. $H_{MKD}(f)$ setzt sich aus zwei Gaußfunktionen bei $\pm f_\varepsilon$ zusammen. Richtig ist nur der Lösungsvorschlag 4.



d) Richtig ist natürlich die erste Antwort.