

A1.1: Sendegrundimpulse

Wir untersuchen in dieser Aufgabe die zwei in der Grafik dargestellten Sendesignale $s_R(t)$ und $s_C(t)$ mit Rechteck- bzw. \cos^2 -Sendegrundimpuls. Insbesondere sollen für die jeweiligen Impulse $g_s(t)$ folgende Kenngrößen berechnet werden:

- die äquivalente Impulsdauer von $g_s(t)$:

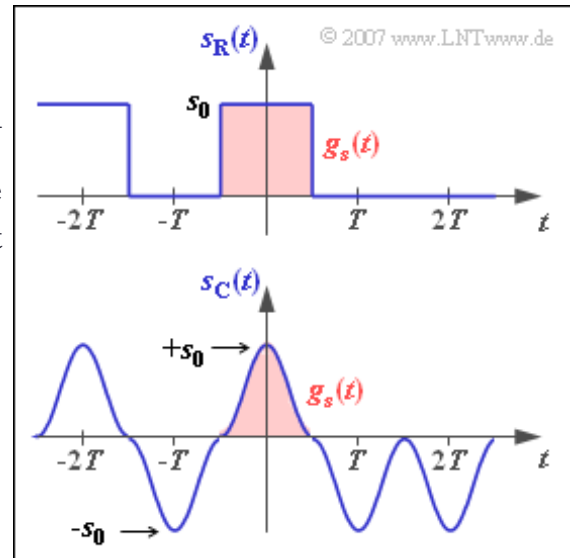
$$\Delta t_S = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) dt}{\text{Max}[g_s(t)]},$$

- die Energie des Sendegrundimpulses $g_s(t)$:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s^2(t) dt,$$

- die Leistung des Sendesignals $s(t)$:

$$P_S = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{+T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} s^2(t) dt.$$



Gehen Sie bei Ihren Berechnungen stets davon aus, dass die beiden möglichen Amplitudenkoeffizienten gleichwahrscheinlich sind und dass der Abstand zwischen benachbarten Symbolen $T = 1 \mu\text{s}$ beträgt. Dies entspricht einer Bitrate von $R = 1 \text{ Mbit/s}$. Der (positive) Maximalwert des Sendesignals ist in beiden Fällen gleich

$$s_0 = \sqrt{0.5 \text{ W}}.$$

Unter der Annahme, dass der Sender mit einem Widerstand von 50Ω abgeschlossen ist, entspricht dies dem folgenden Spannungswert:

$$s_0^2 = 0.5 \text{ W} \cdot 50 \Omega = 25 \text{ V}^2 \Rightarrow s_0 = 5 \text{ V}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 1.1** im Buch „Digitalsignalübertragung“. Gegeben ist das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax) + \frac{1}{32a} \cdot \sin(4ax).$$

Fragebogen zu "A1.1: Sendegrundimpulse"

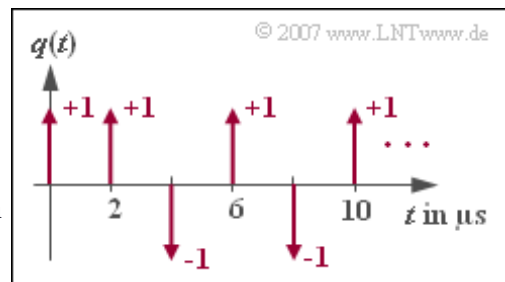
a) Handelt es sich bei $s_R(t)$ und $s_C(t)$ um unipolare oder bipolare Signale?
<input type="checkbox"/> $s_R(t)$ ist ein bipolares Signal.
<input type="checkbox"/> $s_C(t)$ ist ein bipolares Signal.
b) Wie groß ist die äquivalente Impulsdauer, normiert auf die Symboldauer?
Rechteckimpuls: $\Delta t_S/T =$
cos²-Impuls: $\Delta t_S/T =$
c) Wie groß ist die Energie des rechteckförmigen Sendegrundimpulses?
Rechteckimpuls: $E_g =$ Ws
d) Wie groß ist die Leistung des Sendesignals $s_R(t)$?
Signal $s_R(t)$: $P_S =$ W
e) Wie groß ist die Energie des cos ² -Sendegrundimpulses?
cos²-Impuls: $E_g =$ Ws
f) Wie groß ist die Leistung des Signals $s_C(t)$?
Signal $s_C(t)$: $P_S =$ W

Z1.1: Redundanzfreie Binärquelle

Eine jede digitale Quelle kann durch ihre Quellensymbolfolge

$$\langle q_\nu \rangle = \langle q_0, q_1, q_2, \dots \rangle$$

vollständig beschrieben werden, wobei hier entgegen dem Theorieteil die Laufvariable ν mit 0 beginnt. Entspricht jedes einzelne Symbol q_ν dem Symbolvorrat $\{\mathbf{L}, \mathbf{H}\}$, so spricht man von einer Binärquelle.



Unter Verwendung des Symbolabstandes T kann man die Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ in äquivalenter Weise auch durch das diracförmige Quellensignal

$$q(t) = \sum_{(\nu)} a_\nu \cdot \delta(t - \nu \cdot T)$$

kennzeichnen, was eher einer systemtheoretischen Betrachtungsweise entspricht. Hierbei bezeichnet man a_ν als die Amplitudenkoeffizienten. Im Falle einer binären unipolaren Digitalsignalübertragung gilt:

$$a_\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } q_\nu = \mathbf{H}, \\ 0 & \text{für } q_\nu = \mathbf{L}. \end{cases}$$

Entsprechend gilt bei einem bipolaren System:

$$a_\nu = \begin{cases} +1 & \text{für } q_\nu = \mathbf{H}, \\ -1 & \text{für } q_\nu = \mathbf{L}. \end{cases}$$

In der Grafik ist das diracförmige Quellensignal $q(t)$ einer Binärquelle dargestellt. Von dieser ist bekannt, dass sie redundanzfrei ist. Diese Aussage ist für die Lösung der Aufgabe durchaus relevant.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.1**. In der Literatur werden die beiden möglichen Binärsymbole meist mit **L** und **0** bezeichnet. Um die etwas verwirrende Zuordnung $a_\nu = 1$ für $q_\nu = \mathbf{0}$ und $a_\nu = 0$ für $q_\nu = \mathbf{L}$ zu vermeiden, werden in unserem Lerntutorial die Symbole **L** („Low“) und **H** („High“) verwendet.

Fragebogen zu "Z1.1: Redundanzfreie Binärquelle"

a) Wie groß ist der Symbolabstand?

$$T = \quad \mu\text{s}$$

b) Wie groß ist die von der Quelle abgegebene Bitrate?

$$R = \quad \text{kbit/s}$$

c) Handelt es sich hierbei um die unipolare oder bipolare Repräsentation?

- Die Symbolfolge ist unipolar.
- Die Symbolfolge ist bipolar.

d) Wie lautet das Quellensymbol q_2 ?

- $q_2 = \text{L}$,
- $q_2 = \text{H}$.

e) Wie groß ist die Symbolwahrscheinlichkeit $p_{\text{H}} = \Pr(q_v = \text{H})$?

$$p_{\text{H}} =$$

A1.2: Bitfehlerquote (BER)

Von einem digitalen Übertragungssystem ist bekannt, dass es durch ein BSC-Modell (*Binary Symmetrical Channel*) mit Fehlerwahrscheinlichkeit p angenähert werden kann. Zur Verifizierung soll die Bitfehlerquote ermittelt werden, indem man die Sinkensymbolfolge $\langle v_\nu \rangle$ mit der Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ vergleicht und daraus die Fehlerfolge $\langle e_\nu \rangle$ ermittelt. Dabei gilt:

$$e_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } v_\nu = q_\nu, \\ 1 & \text{für } v_\nu \neq q_\nu. \end{cases}$$

Die Bitfehlerquote (englisch: *Bit Error Rate*)

$$\text{BER} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^N e_\nu$$

stellt eine Näherung für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit p dar. Je größer der Simulationsparameter N gewählt wird, um so genauer ist diese Näherung.

Aus der **Aufgabe A3.7** im Buch „Stochastische Signaltheorie“ ist bekannt, dass die Zufallsgröße BER eigentlich binominalverteilt ist, aber mit guter Näherung durch eine (diskrete) Gaußverteilung mit dem Mittelwert p und der Streuung

$$\sigma = \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{N}}$$

angenähert werden kann.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.2** dieses Buches sowie auf das **Kapitel 3.5** im Buch „Stochastische Signaltheorie“. In der Tabelle sind einige Werte der Gaußschen Fehlerfunktionen $\phi(x)$ und $Q(x)$ angegeben.

x	$\phi(x)$	$Q(x)$
0	0.5000	0.500
0.5	0.691	0.309
1.0	0.841	0.159
≈ 1.64	0.950	$0.500 \cdot 10^{-1}$
2.0	0.9772	$0.228 \cdot 10^{-1}$
2.5	0.9938	$0.621 \cdot 10^{-2}$
3.0	0.9987	$0.135 \cdot 10^{-2}$
3.5	0.9998	$0.233 \cdot 10^{-3}$
4.0	≈ 1.000	$0.317 \cdot 10^{-4}$
4.5	≈ 1.000	$0.340 \cdot 10^{-5}$
5.0	≈ 1.000	$0.287 \cdot 10^{-6}$

© 2007 www.LNTwww.de

Fragebogen zu "A1.2: Bitfehlerquote (BER)"

a) Was beschreibt BER im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

- BER ist eine Wahrscheinlichkeit.
- BER ist eine relative Häufigkeit.
- Wenn N hinreichend groß ist, stimmt BER mit p **exakt** überein.

b) Berechnen Sie die Streuung σ für $N = 10^6$ und $p = 10^{-2}$.

$$p = 10^{-2}: \sigma =$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bitfehlerquote betragsmäßig um mehr als 5% von der Wahrscheinlichkeit $p = 0.01$ abweicht?

$$p = 10^{-2}: \Pr(|\text{BER} - p| > 0.05 \cdot p) =$$

d) Wie groß ist die gleiche Wahrscheinlichkeit mit $p = 10^{-4}$?

$$p = 10^{-4}: \Pr(|\text{BER} - p| > 0.05 \cdot p) =$$

e) Wie groß müsste man N mindestens wählen, damit bei $p = 10^{-4}$ nicht mehr als 10% außerhalb des Intervalls von $0.95 \cdot 10^{-4} \dots 1.05 \cdot 10^{-4}$ liegen?

$$p = 10^{-4}: N_{\min} =$$

Z1.2: Bitfehlermessung

Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$p_B = 1/2 \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}} \right)$$

eines Binärsystems wurde durch eine Messung der Bitfehlerquote (BER)

$$h_B = \frac{n_B}{N}$$

simulativ ermittelt. Oftmals wird h_B auch Bitfehlerhäufigkeit genannt.

10 · lg (E_B/N_0)	Simulierte Bitfehlerhäufigkeit			
	$N = 64000$	$N = 128000$	$N = 1600000$	$N \rightarrow \infty$
0 dB	$0.779 \cdot 10^{-1}$	$0.770 \cdot 10^{-1}$	$0.782 \cdot 10^{-1}$	$0.786 \cdot 10^{-1}$
1 dB	$0.566 \cdot 10^{-1}$	$0.572 \cdot 10^{-1}$	$0.566 \cdot 10^{-1}$	$0.563 \cdot 10^{-1}$
2 dB	$0.382 \cdot 10^{-1}$	$0.367 \cdot 10^{-1}$	$0.376 \cdot 10^{-1}$	$0.375 \cdot 10^{-1}$
3 dB	$0.224 \cdot 10^{-1}$	$0.237 \cdot 10^{-1}$	$0.230 \cdot 10^{-1}$	$0.229 \cdot 10^{-1}$
4 dB	$0.127 \cdot 10^{-1}$	$0.124 \cdot 10^{-1}$	$0.126 \cdot 10^{-1}$	$0.125 \cdot 10^{-1}$
5 dB	$0.587 \cdot 10^{-2}$	$0.600 \cdot 10^{-2}$	$0.587 \cdot 10^{-2}$	$0.595 \cdot 10^{-2}$
6 dB	$0.258 \cdot 10^{-2}$	$0.272 \cdot 10^{-2}$	$0.239 \cdot 10^{-2}$	$0.239 \cdot 10^{-2}$
7 dB	$0.688 \cdot 10^{-3}$	$0.842 \cdot 10^{-3}$	$0.770 \cdot 10^{-3}$	$0.773 \cdot 10^{-3}$
8 dB	$0.173 \cdot 10^{-3}$	$0.164 \cdot 10^{-3}$	$0.197 \cdot 10^{-3}$	$0.191 \cdot 10^{-3}$
9 dB	$0.625 \cdot 10^{-4}$	$0.469 \cdot 10^{-4}$	$0.325 \cdot 10^{-4}$	$0.336 \cdot 10^{-4}$

© 2007 www.LNTwww.de

In obigen Gleichungen bedeuten

- E_B : Energie pro Bit,
- N_0 : AWGN-Rauschleistungsdichte,
- n_B : Anzahl der aufgetretenen Bitfehler,
- N : Anzahl der simulierten Bit einer Versuchsreihe.

Die Tabelle zeigt die Ergebnisse einiger Versuchsreihen mit $N = 64000$, $N = 128000$ und $N = 1.6$ Millionen. Die letzte mit $N \rightarrow \infty$ benannte Spalte gibt die Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B wieder.

Im Fragebogen zur Aufgabe wird auf folgende Eigenschaften Bezug genommen:

- Die Bitfehlerhäufigkeit h_B ist in erster Näherung eine gaußverteilte Zufallsgröße mit dem Mittelwert

$$m_h = p_B \text{ und der Varianz } \sigma_h^2 \approx p_B/N.$$

- Die relative Abweichung der Bitfehlerhäufigkeit von der Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \frac{h_B - p_B}{p_B}.$$

- Als eine grobe Faustregel zur erforderlichen Genauigkeit gilt, dass die Anzahl n_B der gemessenen Bitfehler mindestens 100 sein sollte.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 1.2**.

Fragebogen zu "Z1.2: Bitfehlermessung"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- Die Genauigkeit der BER-Messung ist unabhängig von N .
- Je größer N ist, desto genauer ist im Mittel die BER-Messung.
- Je größer N ist, desto genauer ist jede einzelne BER-Messung.

b) Geben Sie die Streuung σ_h für verschiedene N an. $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 0$ dB.

$N = 64.000: \sigma_h =$

$N = 1.600.000: \sigma_h =$

c) Wie groß ist die jeweilige relative Abweichung für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 0$ dB?

$N = 64.000: \epsilon_{\text{rel}} =$ %

$N = 1.600.000: \epsilon_{\text{rel}} =$ %

d) Geben Sie die Streuung σ_h für verschiedene N an. $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9$ dB.

$N = 64.000: \sigma_h =$

$N = 1.600.000: \sigma_h =$

e) Wie groß ist die jeweilige relative Abweichung für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9$ dB?

$N = 64.000: \epsilon_{\text{rel}} =$ %

$N = 1.600.000: \epsilon_{\text{rel}} =$ %

f) Bis zu welchem (logarithmischen) E_B/N_0 -Wert ist $N = 1.6$ Millionen aufgrund der Bedingung $n_B \geq 100$ ausreichend?

Maximum für $10 \cdot \lg E_B/N_0 =$ dB

A1.3: Einfluss von $g_s(t)$ und $h_E(t)$

Wir betrachten hier drei Varianten eines binären bipolaren AWGN-Übertragungssystems, die sich hinsichtlich des Sendegrundimpulses $g_s(t)$ sowie der Impulsantwort $h_E(t)$ des Empfangsfilters unterscheiden:

- Beim System A sind beide Zeitfunktionen $g_s(t)$ und $h_E(t)$ rechteckförmig, lediglich die Impulshöhen (s_0 bzw. $1/T$) sind unterschiedlich.
- Das System B unterscheidet sich vom System A durch einen dreieckförmigen Sendegrundimpuls mit $g_s(t=0) = s_0$.
- Das System C hat den gleichen Sendegrundimpuls wie das System A, während die Impulsantwort mit $h_E(t=0) = 1/T$ dreieckförmig verläuft.

Die absolute Breite der hier betrachteten Rechteck- und Dreieckfunktionen beträgt jeweils $T = 10 \mu\text{s}$. Die Bitrate ist $R = 100 \text{ kbit/s}$. Die weiteren Systemparameter sind wie folgt gegeben:

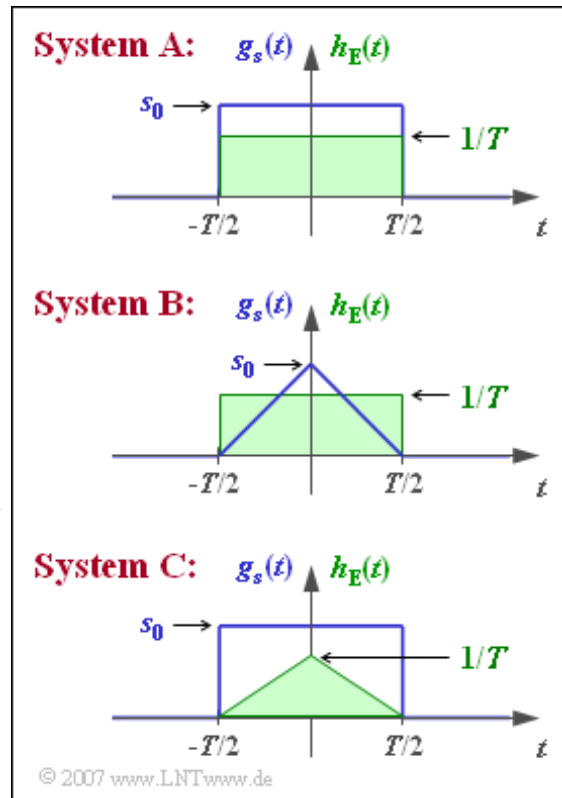
$$s_0 = 6 \sqrt{W}, \quad N_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ W/Hz}.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.2** des vorliegenden Buches. Zur Bestimmung von Fehlerwahrscheinlichkeiten können Sie das folgende Interaktionsmodul verwenden:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen

Berücksichtigen Sie bei der Berechnung der Detektionsstörleistung das Theorem von Wiener-Chintchine:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |h_E(t)|^2 dt.$$



Fragebogen zu "A1.3: Einfluss von $g_s(t)$ und $h_E(t)$ "

a) Berechnen Sie den Detektionsgrundimpuls $g_d(t) = g_s(t) * h_E(t)$ für System A.
Welcher Wert ergibt sich für den Zeitpunkt $t = 0$?

$$\text{System A: } g_d(t = 0) = \quad W^{1/2}$$

b) Berechnen Sie die Detektionsstörleistung für das System A.

$$\text{System A: } \sigma_d^2 = \quad W$$

c) Welche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für das System A?

$$\text{System A: } p_B =$$

d) Ermitteln Sie die entsprechenden Größen für das System B.

$$\text{System B: } g_d(t = 0) = \quad W^{1/2}$$

$$\text{System B: } \sigma_d^2 = \quad W$$

$$\text{System B: } p_B =$$

e) Wie lauten die Kenngrößen für das System C?

$$\text{System C: } g_d(t = 0) = \quad W^{1/2}$$

$$\text{System C: } \sigma_d^2 = \quad W$$

$$\text{System C: } p_B =$$

Z1.3: Schwellenwertoptimierung

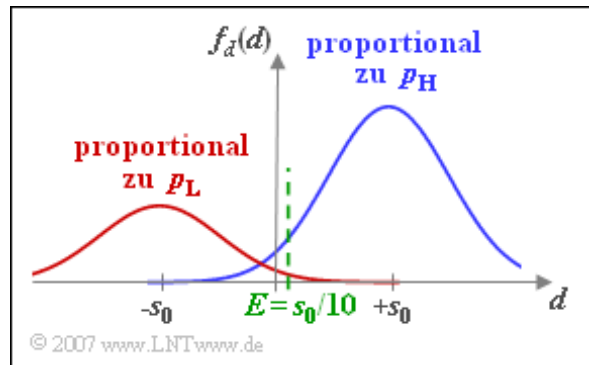
In dieser Aufgabe wird ein bipolares Binärsystem mit AWGN-Rauschen („Additive White Gaussian Noise“) betrachtet, so dass für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$p_B = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{s_0}{\sqrt{2} \cdot \sigma_d}\right)$$

gilt. Hierbei sind folgende Funktionen verwendet:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du,$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du.$$



Die obige Gleichung gilt für den Schwellenwert $E = 0$ unabhängig von den Symbolwahrscheinlichkeiten p_L und p_H . Allerdings kann mit einem anderen Schwellenwert E eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit erzielt werden, wenn die beiden Auftretswahrscheinlichkeiten unterschiedlich sind ($p_L \neq p_H$).

Die Streuung des Rauschanteils ist stets $\sigma_d = 0.5$ V, die beiden Amplituden des Detektionsnutzanteils sind mit ± 1 V fest vorgegeben. Zu untersuchen sind folgende Symbolwahrscheinlichkeiten:

- $p_L = 0.88$ und $p_H = 0.12$,
- $p_L = 0.31$ und $p_H = 0.69$.

In der Grafik ist dieser letzte Parametersatz und der Schwellenwert $E = 0.1 \cdot s_0$ dargestellt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.2**. Für die Ableitung der Q-Funktion gilt:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}.$$

Die Werte der Funktion $Q(x)$ können Sie mit folgendem Interaktionsmodul bestimmen:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen

Fragebogen zu "Z1.3: Schwellenwertoptimierung"

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $Q(x)$ und $\text{erfc}(x)$?

- $\text{erfc}(x) = 2 \cdot Q(2^{1/2} \cdot x)$,
- $\text{erfc}(x) = 2^{1/2} \cdot Q(x/2^{1/2})$,
- $\text{erfc}(x) \approx Q(x)$.

b) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit $p_L = 0.88$ und $E = 0$?

$$E = 0: p_B = \quad \quad \quad \%$$

c) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit $p_L = 0.88$ und $E = 0.1 \text{ V}$?

$$E = 0.1 \text{ V}: p_B = \quad \quad \quad \%$$

d) Bestimmen Sie den optimalen Schwellenwert für $p_L = 0.88$.

$$p_L = 0.88: E_{\text{opt}} = \quad \quad \quad \text{V}$$

e) Wie groß ist die minimale Fehlerwahrscheinlichkeit mit $p_L = 0.88$?

$$p_L = 0.88, E_{\text{opt}}: p_{B, \text{min}} = \quad \quad \quad \%$$

f) Bestimmen Sie den optimalen Schwellenwert für $p_L = 0.31$.

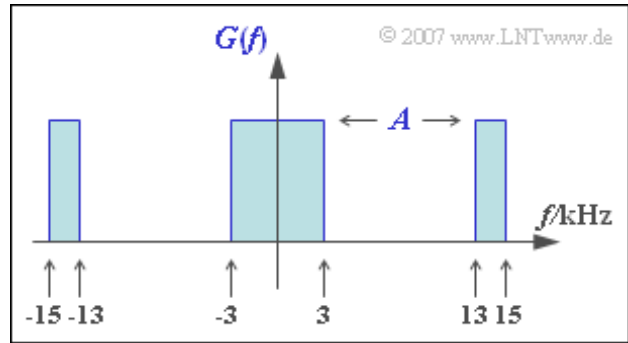
$$p_L = 0.31: E_{\text{opt}} = \quad \quad \quad \text{V}$$

g) Wie groß ist die minimale Fehlerwahrscheinlichkeit für $p_L = 0.31$?

$$p_L = 0.31, E_{\text{opt}}: p_{B, \text{min}} = \quad \quad \quad \%$$

A1.4: Nyquistkriterien

Durch die Skizze gegeben ist das Spektrum $G(f)$ des Detektionsgrundimpulses, wobei der Parameter A noch zu bestimmen ist. Überprüft werden soll unter anderem, ob dieser Detektionsgrundimpuls eines der beiden Nyquistkriterien erfüllt. Diese lauten:



- Das **erste Nyquistkriterium** ist erfüllt, wenn für die Spektralfunktion gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G\left(f - \frac{k}{T}\right) = \text{const.}$$

In diesem Fall besitzt der Impuls $g(t)$ für alle ganzzahligen Werte von v mit Ausnahme von $v = 0$ Nulldurchgänge bei $t = vT$. Für die gesamte Aufgabe wird $T = 0.1$ ms vorausgesetzt.

- Ist das **zweite Nyquistkriterium** erfüllt, so hat $g(t)$ Nulldurchgänge bei $\pm 1.5T, \pm 2.5T, \text{ usw.}$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.3** dieses Buches. Als bekannt vorausgesetzt werden:

$$X(f) = \begin{cases} A & \text{für } |f| < f_0, \\ 0 & \text{für } |f| > f_0 \end{cases} \quad \bullet \text{---} \circ \quad x(t) = 2 \cdot A \cdot f_0 \cdot \text{si}(2\pi f_0 T),$$

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

Fragebogen zu "A1.4: Nyquistkriterien"

a) Erfüllt der Impuls $g(t)$ das erste Nyquistkriterium?

- Das erste Nyquistkriterium wird erfüllt.
- Das erste Nyquistkriterium wird nicht erfüllt.

b) Bestimmen Sie den Parameter A derart, dass $g(t = 0) = 2 \text{ V}$ gilt.

$$A = \quad \text{V/Hz}$$

c) Berechnen Sie $g(t)$ durch Anwendung der Fourierreücktransformation. Welcher (normierte) Funktionswert ergibt sich bei $t = T$?

$$g(t = T)/g(t = 0) =$$

d) Welcher (normierte) Wert ergibt sich für $t = 2.5T$?

$$g(t = 2.5 T)/g(t = 0) =$$

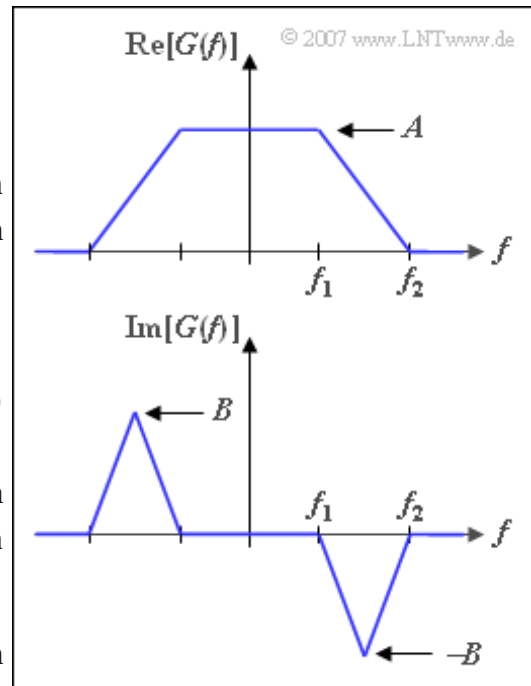
e) Erfüllt der Impuls $g(t)$ das zweite Nyquistkriterium?

- Das zweite Nyquistkriterium wird erfüllt.
- Das zweite Nyquistkriterium wird nicht erfüllt.

Z1.4: Komplexes Nyquistspektrum

Betrachtet wird ein Impuls $g(t)$ mit dem Spektrum gemäß der Skizze. Man erkennt aus dieser Darstellung:

- Der Realteil von $G(f)$ verläuft trapezförmig mit den beiden Eckfrequenzen $f_1 = 3$ kHz und $f_2 = 7$ kHz. Im Bereich $|f| < f_1$ gilt $\text{Re}[G(f)] = A = 10^{-4}$ V/Hz.
- Der Imaginärteil von $G(f)$ wird für die Teilaufgaben a) bis e) stets zu 0 angenommen. In diesem Fall ist $g(t)$ sicher ein Nyquistimpuls.
- Ab der Teilaufgabe f) hat der Imaginärteil $\text{Im}[G(f)]$ im Bereich $f_1 \leq |f| \leq f_2$ einen Dreiecksverlauf mit den Werten $\pm B$ bei den Dreieckspitzen.



Zu überprüfen ist, ob der Impuls $g(t)$ auch mit komplexem Spektrum der ersten Nyquistbedingung genügt:

$$g(\nu T) = \begin{cases} g_0 & \text{für } \nu = 0, \\ 0 & \text{für } \nu \neq 0. \end{cases}$$

Im Verlauf dieser Aufgabe wird auf folgende Beschreibungsgrößen Bezug genommen:

- Die Nyquistfrequenz gibt den Symmetriepunkt des Flankenabfalls an:

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{1}{2T} = \frac{f_1 + f_2}{2}.$$

- Der Rolloff-Faktor ist ein Maß für die Flankensteilheit:

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.3**. Als bekannt vorausgesetzt werden kann die Fourierrücktransformierte $g(t)$ eines trapezförmigen Nyquistspektrums mit Rolloff-Faktor r :

$$g(t) = g_0 \cdot \text{si}(\pi \cdot t/T) \cdot \text{si}(\pi \cdot r \cdot t/T).$$

Ein dreieckförmiges Tiefpass-Spektrum $G(f)$, das auf $|f| < f_0$ begrenzt ist und für das $G(f=0) = B$ gilt, führt nach der Fourierrücktransformation zu folgender Zeitfunktion:

$$g(t) = B \cdot f_0 \cdot \text{si}^2(\pi f_0 t).$$

Fragebogen zu "Z1.4: Komplexes Nyquistspektrum"

a) Für die ersten Teilfragen gelte $B = 0$. Wie groß ist die Nyquistfrequenz?

$$f_{\text{Nyq}} = \quad \text{kHz}$$

b) Welcher Rolloff-Faktor liegt hier vor?

$$r =$$

c) Berechnen Sie den Maximalwert g_0 des Nyquistimpulses $g(t)$.

$$g_0 = \quad \text{V}$$

d) Berechnen Sie $g(t)$ für die Zeitpunkte $t = 100 \mu\text{s}$ und $t = 200 \mu\text{s}$.

$$B = 0: g(t = 100 \mu\text{s}) = \quad \text{V}$$

$$B = 0: g(t = 200 \mu\text{s}) = \quad \text{V}$$

e) Berechnen Sie den Impulswert zur Zeit $t = 250 \mu\text{s}$.

$$B = 0: g(t = 250 \mu\text{s}) = \quad \text{V}$$

f) Welche Aussagen treffen für $B \neq 0$ zu? $G(f)$ ist dann komplexwertig.

- Die Nyquistbedingung wird erfüllt, wenn die Dreieckfunktion wie in der Grafik zwischen 3 kHz und 7 kHz liegt.
- Die Nyquistbedingung wird auch erfüllt, wenn die Dreieckfunktion zwischen 3 kHz und 5 kHz liegt.
- Die Nyquistbedingung wird auch erfüllt, wenn die Dreieckfunktion zwischen 4.5 kHz und 5.5 kHz liegt.

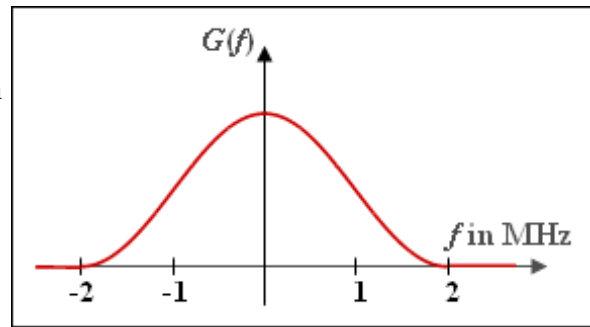
g) Berechnen Sie $g(t)$ für $t = 250 \mu\text{s}$ und $B = A = 10^{-4} \text{ V/Hz}$.

$$A = B = 10^{-4} \text{ V/Hz}: g(t = 250 \mu\text{s}) = \quad \text{V}$$

A1.5: Cosinus-Quadrat-Spektrum

Betrachtet wird das Spektrum $G(f)$ mit \cos^2 -förmigem Verlauf entsprechend der Skizze. Dieses erfüllt das erste Nyquistkriterium:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f - \frac{k}{T}) = \text{const.}$$



Dementsprechend hat der zugehörige Impuls $g(t)$ Nulldurchgänge bei Vielfachen von T , wobei T noch zu bestimmen ist. Durch Fourierrücktransformation von $G(f)$ erhält man die Gleichung für den Zeitverlauf:

$$g(t) = g_0 \cdot \frac{\cos(\pi \cdot t/T)}{1 - (2 \cdot t/T)^2} \cdot \text{si}(\pi \cdot t/T).$$

In den Fragen zu dieser Aufgabe werden auf folgende Eigenschaften Bezug genommen:

- Die hier betrachtete Spektralfunktion $G(f)$ ist ein Sonderfall des Cosinus-Rolloff-Spektrums, das punktsymmetrisch um die Nyquistfrequenz f_{Nyq} ist.
- Das Cosinus-Rolloff-Spektrum ist durch die Eckfrequenzen f_1 und f_2 vollständig gekennzeichnet. Für $|f| < f_1$ ist $G(f) = g_0 \cdot T = \text{const.}$, während das Spektrum für $|f| > f_2$ keine Anteile besitzt.
- Der Zusammenhang zwischen der Nyquistfrequenz und den Eckfrequenzen lautet:

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{f_1 + f_2}{2}.$$

- Die Flankensteilheit wird durch den so genannten Rolloff-Faktor charakterisiert:

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (0 \leq r \leq 1).$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 1.3**.

Fragebogen zu "A1.5: Cosinus-Quadrat-Spektrum"

a) Welche Eckfrequenzen besitzt dieses Cosinus-Rolloff-Spektrum?

$$f_1 = \quad \text{MHz}$$

$$f_2 = \quad \text{MHz}$$

b) Wie groß sind die Nyquistfrequenz und der Rolloff-Faktor?

$$f_{\text{Nyq}} = \quad \text{MHz}$$

$$r =$$

c) In welchem zeitlichen Abstand T besitzt $g(t)$ Nulldurchgänge?

$$T = \quad \mu\text{s}$$

d) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- $g(t)$ erfüllt das erste Nyquistkriterium wegen des si -Terms.
- $g(t)$ besitzt weitere Nulldurchgänge bei $\pm 0.5T, \pm 1.5T, \pm 2.5T, \dots$
- Das \cos^2 -Spektrum erfüllt auch das zweite Nyquistkriterium.

e) Welchen (normierten) Wert besitzt der Impuls zum Zeitpunkt $t = T/2$?

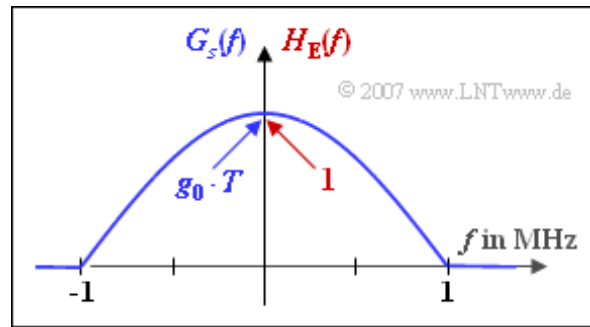
$$g(t = T/2)/g_0 =$$

A1.6: Wurzel-Nyquist-System

Die nebenstehende Grafik zeigt

- das Spektrum $G_s(f)$ des Sendegrundimpulses,
- den Frequenzgang $H_E(f)$ des Empfangsfilters

eines binären und bipolaren Übertragungssystems, die zueinander formgleich sind:



$$G_s(f) = \begin{cases} A \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot f}{2 \cdot f_2}\right) & \text{für } |f| \leq f_2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$H_E(f) = \begin{cases} 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot f}{2 \cdot f_2}\right) & \text{für } |f| \leq f_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der gesamten Aufgabe gelte $A = 10^{-6}$ V/Hz und $f_2 = 1$ MHz.

Unter der Voraussetzung, dass die Bitrate $R = 1/T$ richtig gewählt wird, erfüllt der Detektionsgrundimpuls $g_d(t) = g_s(t) * h_E(t)$ das erste Nyquistkriterium. Bei der dazugehörigen Spektralfunktion $G_d(f)$ erfolgt dabei der Flankenabfall cosinusförmig ähnlich einem Cosinus-Rolloff-Spektrum; der Rolloff-Faktor r ist in dieser Aufgabe zu ermitteln.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.4** dieses Buches. Zahlenwerte der Q-Funktion liefert zum Beispiel das folgende Interaktionsmodul:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen

Der Crestfaktor ist der Quotient aus Maximalwert und Effektivwert des Sendesignals und damit ein Maß für die sendeseitigen Impulsinterferenzen:

$$C_S = \frac{s_0}{\sqrt{E_B/T}} = \frac{\text{Max}[s(t)]}{\sqrt{E[s^2(t)]}} = s_0/s_{\text{eff}}.$$

Fragebogen zu "A1.6: Wurzel-Nyquist-System"

a) Berechnen Sie das Nyquistspektrum $G_d(f)$. Wie groß sind Nyquistfrequenz und Rolloff-Faktor?

$$f_{\text{Nyq}} = \quad \text{MHz}$$

$$r =$$

b) Wie groß ist die Bitrate des vorliegenden Nyquistsystems?

$$R = \quad \text{Mbit/s}$$

c) Warum handelt es sich unter der Nebenbedingung „Leistungsbegrenzung“ um ein optimales System?

- Das Gesamtsystem erfüllt die Nyquistbedingung.
- Der Crestfaktor ist $C_S = 1$.
- Das Empfangsfilter ist an den Sendegrundimpuls angepasst.

d) Welche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn für die Leistungsdichte des AWGN-Rauschens $N_0 = 8 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2/\text{Hz}$ (bezogen auf 1Ω) gilt?

$$p_B =$$

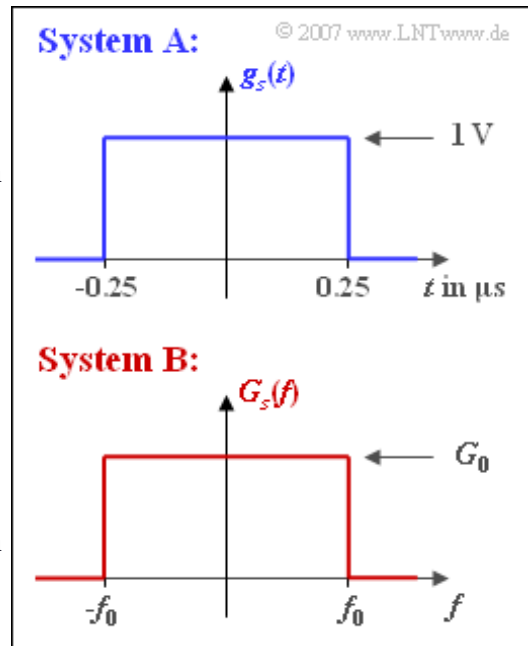
Z1.6: Zwei Optimalsysteme

Betrachtet werden zwei binäre Übertragungssysteme **A** und **B**, die bei einem AWGN-Kanal mit Rauschleistungsdichte N_0 das gleiche Fehlerverhalten aufweisen. In beiden Fällen gilt für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = Q\left(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}\right).$$

Das System **A** verwendet den NRZ-Sendegrundimpuls $g_s(t)$ gemäß der oberen Skizze mit der Amplitude $s_0 = 1$ V und der Dauer $T = 0.5$ μ s. Dagegen besitzt das System **B**, das mit der gleichen Bitrate wie das System **A** arbeiten soll, ein rechteckförmiges Sendegrundimpulsspektrum:

$$G_s(f) = \begin{cases} G_0 & \text{für } |f| < f_0, \\ 0 & \text{für } |f| > f_0. \end{cases}$$



Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.4** des vorliegenden Buches. Beachten Sie bitte, dass hier die Impulsamplitude in „Volt“ angegeben ist, so dass die mittlere Energie pro Bit (E_B) die Einheit „ V^2/Hz “ aufweist.

Fragebogen zu "Z1.6: Zwei Optimalsysteme"

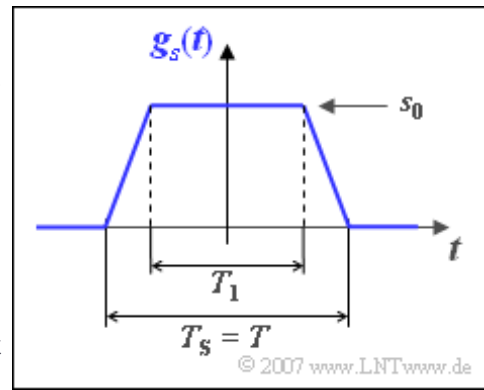
a) Mit welcher Bitrate arbeiten die beiden Systeme?
$R =$ Mbit/s
b) Berechnen Sie die Energie pro Bit für das System A.
System A : $E_B =$ V²/Hz
c) Welche Aussagen gelten für die Empfangsfilter der Systeme A und B?
<input type="checkbox"/> Bei System A hat $H_E(f)$ einen si-förmigen Verlauf.
<input type="checkbox"/> Bei System B ist $H_E(f)$ ein idealer, rechteckförmiger Tiefpass.
<input type="checkbox"/> $H_E(f)$ lässt sich bei System B durch einen Integrator realisieren.
d) Für welche Grenzfrequenz f_0 weist das System B die Symboldauer T auf?
System B: $f_0 =$ MHz
e) Wie groß ist die konstante Höhe G_0 des Spektrums von B zu wählen, damit sich die gleiche Energie pro Bit ergibt wie bei System A?
System B: $G_0 =$ V/Hz
f) Wäre eines der beiden Systeme auch bei Spitzenwertbegrenzung geeignet?
<input type="checkbox"/> System A,
<input type="checkbox"/> System B.

A1.7: Systemwirkungsgrade

Der Empfänger eines binären Nachrichtenübertragungssystems mit Symboldauer T besteht aus einem Integrator, der durch die Impulsantwort

$$h_E(t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } |t| < T/2, \\ 0 & \text{für } |t| > T/2 \end{cases}$$

beschreibbar ist. Danach folgt ein Schwellenwertentscheider mit optimalen Parametern.



Der Sendegrundimpuls $g_s(t)$ gemäß der Grafik ist im Allgemeinen trapezförmig und wird durch die Zeit T_1 parametrisiert. Für $T_1 = 0$ ergibt sich ein Dreieckimpuls, für $T_1 = T$ das NRZ-Rechteck. Die absolute Impulsdauer T_s ist stets gleich der Symboldauer T , also dem Abstand zweier Sendeimpulse.

Das Signal-zu-Rausch-Leistungsverhältnis (SNR) vor dem Schwellenwertentscheider kann unter der Voraussetzung, dass keine Impulsinterferenzen auftreten, wie folgt berechnet werden:

$$\rho_d = g_0^2 / \sigma_d^2.$$

Hierbei ist $g_0 = g_d(t = 0)$ der Maximalwert des Detektionsgrundimpulses und

$$\sigma_d^2 = N_0 / 2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |h_E(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2 \cdot T}$$

die Rauschleistung nach dem Empfangsfilter bei AWGN-Rauschen an seinem Eingang.

Im Laufe dieser Aufgabe werden folgende Größen verwendet:

- $\rho_{d, \max | L}$ ist das maximale SNR unter der Nebenbedingung der Leistungsbegrenzung.
- $\rho_{d, \max | A}$ ist das maximale SNR bei Spitzenwertbegrenzung (Amplitudenbegrenzung).

Mit diesen Definitionen lassen sich die Systemwirkungsgrade angeben:

$$\eta_L = \frac{\rho_d}{\rho_{d, \max | L}},$$

$$\eta_A = \frac{\rho_d}{\rho_{d, \max | A}} = 1 / C_S^2 \cdot \eta_L.$$

Hierbei bezeichnet der so genannte Crestfaktor C_S das Verhältnis zwischen dem Maximalwert und dem Effektivwert (Wurzel aus der Leistung) des Sendesignals $s(t)$.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themenkomplex von **Kapitel 1.4**. Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe folgende Zahlenwerte:

$$s_0^2 = 10 \text{ mW}, \quad T = 3 \mu\text{s}, \quad N_0 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ W/Hz}.$$

Fragebogen zu "A1.7: Systemwirkungsgrade"

a) Berechnen Sie die Impulsenergie E_B in Abhängigkeit von T_1 . Welche Werte ergeben sich für $T_1 = 0$, $T_1 = T/2$ und $T_1 = T$?

$$T_1 = 0: E_B = \quad \text{Ws}$$

$$T_1 = T/2: E_B = \quad \text{Ws}$$

$$T_1 = T: E_B = \quad \text{Ws}$$

b) Welcher Wert T_1 führt bei Leistungsbegrenzung zum maximal möglichen SNR?

$$T_1/T =$$

c) Wie groß ist das maximale SNR bei Leistungsbegrenzung?

$$\rho_{d, \max | L} =$$

d) Wie groß ist der Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ in Impulsmitte mit $T_1 = T/2$?

$$T_1 = T/2: g_0 = \quad \text{W}^{1/2}$$

e) Berechnen Sie den Systemwirkungsgrad η_L bei Leistungsbegrenzung.

$$T_1 = T/2: \eta_L =$$

f) Berechnen Sie den Crestfaktor.

$$T_1 = T/2: C_S =$$

g) Berechnen Sie den Systemwirkungsgrad bei Spitzenwertbegrenzung.

$$T_1 = T/2: \eta_A =$$

A1.8: Vergleich ASK und BPSK

Die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten der Modulationsarten *Amplitude Shift Keying* (ASK) sowie *Binary Shift Keying* (BPSK) werden oft durch die beiden folgenden Gleichungen angegeben:

$$\begin{aligned}
 p_{\text{ASK}} &= Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2 \cdot N_0}}\right), \\
 p_{\text{BPSK}} &= Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right).
 \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen sind in der beigefügten Tabelle ausgewertet. Dabei gilt:

- E_B gibt die mittlere Energie pro Bit an.
- N_0 ist die Rauschleistungsdichte.
- Zwischen den Fehlerfunktionen $Q(x)$ und $\operatorname{erfc}(x)$ besteht ein fester Zusammenhang.

Anzumerken ist, dass diese Gleichungen nicht allgemein gelten, sondern nur unter gewissen idealisierten Bedingungen. Diese Voraussetzungen sollen in dieser Aufgabe herausgearbeitet werden.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 1.5**.

E_B/N_0 (log.)	$p_B(\text{ASK})$	$p_B(\text{BPSK})$
0 dB	$0.242 \cdot 10^0$	$0.786 \cdot 10^{-1}$
1 dB	$0.131 \cdot 10^0$	$0.563 \cdot 10^{-1}$
2 dB	$0.104 \cdot 10^0$	$0.375 \cdot 10^{-1}$
3 dB	$0.789 \cdot 10^{-1}$	$0.229 \cdot 10^{-1}$
4 dB	$0.565 \cdot 10^{-1}$	$0.125 \cdot 10^{-1}$
5 dB	$0.377 \cdot 10^{-1}$	$0.595 \cdot 10^{-2}$
6 dB	$0.230 \cdot 10^{-1}$	$0.239 \cdot 10^{-2}$
7 dB	$0.126 \cdot 10^{-1}$	$0.723 \cdot 10^{-3}$
8 dB	$0.600 \cdot 10^{-2}$	$0.191 \cdot 10^{-3}$
9 dB	$0.241 \cdot 10^{-2}$	$0.336 \cdot 10^{-4}$
10 dB	$0.783 \cdot 10^{-3}$	$0.387 \cdot 10^{-5}$
11 dB	$0.194 \cdot 10^{-3}$	$0.261 \cdot 10^{-6}$
12 dB	$0.343 \cdot 10^{-4}$	$0.901 \cdot 10^{-8}$

© 2008 www.lntwww.de

Fragebogen zu "A1.8: Vergleich ASK und BPSK"

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $Q(x)$ und $\text{erfc}(x)$?

- Es gilt $Q(x) = 2 \cdot \text{erfc}(x)$,
- Es gilt $Q(x) = 0.5 \cdot \text{erfc}(x/2^{0.5})$,
- Es gilt $\text{erfc}(x) = 0.5 \cdot Q(x/2^{0.5})$.

b) Wann gelten die angegebenen Fehlerwahrscheinlichkeits-Gleichungen?

- Sie gelten nur für den AWGN-Kanal.
- Sie gelten nur für Matched-Filter-Empfänger (oder Varianten).
- Die Gleichungen berücksichtigen Impulsinterferenzen.
- Die Gleichungen gelten nur bei rechteckförmigen Signalen.

c) Wie lauten die Fehlerwahrscheinlichkeiten für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12$ dB?

$$10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12 \text{ dB: } p_{\text{ASK}} =$$

$$10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12 \text{ dB: } p_{\text{BPSK}} =$$

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten ergeben sich für $E_B/N_0 = 8$?

$$E_B/N_0 = 8: p_{\text{ASK}} =$$

$$E_B/N_0 = 8: p_{\text{BPSK}} =$$

e) Die Fehlerwahrscheinlichkeit soll nicht größer werden als 10^{-8} . Wie groß ist das erforderliche $10 \cdot \lg E_B/N_0$ bei ASK?

$$\text{ASK, BER} = 10^{-8}: (E_B/N_0)_{\text{min}} = \quad \text{dB.}$$

Z1.8: BPSK-Fehlerwahrscheinlichkeit

Wir gehen von dem optimalen Basisbandübertragungssystem für Binärsignale aus mit

- bipolaren Amplitudenkoeffizienten $a_v \in \{-1, +1\}$,
- rechteckförmigem Sendesignal mit den Signalwerten $\pm s_0$ und der Bitdauer T_B ,
- AWGN-Rauschen mit der Rauschleistungsdichte N_0 ,
- Empfangsfilter gemäß dem Matched-Filter-Prinzip,
- Entscheider mit der optimalen Schwelle $E = 0$.

Wenn nichts anderes angegeben ist, so sollten Sie zudem von den folgenden Zahlenwerten ausgehen:

$$s_0 = 4 \text{ V}, \quad T_B = 1 \text{ ns}, \quad N_0 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}.$$

Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit dieses „Basisbandsystems“ wurde bereits in **Kapitel 1.2** angegeben (Index BB):

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) \quad \text{mit} \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{2 \cdot T_B}}.$$

Hierbei bezeichnet σ_d den Rauscheffektivwert am Entscheider und $Q(x)$ die komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion, die hier tabellarisch gegeben ist.

Diese Fehlerwahrscheinlichkeit kann man auch in der Form

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}\right)$$

schreiben, wobei E_B die „Energie pro Bit“ bezeichnet. Die Fehlerwahrscheinlichkeit eines vergleichbaren Übertragungssystems mit *Binary Phase Shift Keying* (BPSK) lautet:

$$p_{\text{BPSK}} = Q(s_0/\sigma_d) \quad \text{mit} \quad \sigma_d = \sqrt{N_0/T_B}.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 1.5**. Da hier s_0 in „Volt“ angegeben ist, besitzt E_B die Einheit „V²/Hz“.

x	$20 \cdot \lg x$	$Q(x)$
0	$-\infty$ dB	$0.500 \cdot 10^0$
1	0.000 dB	$0.159 \cdot 10^0$
2	6.021 dB	$0.227 \cdot 10^{-1}$
3	9.542 dB	$0.135 \cdot 10^{-2}$
4	12.041 dB	$0.317 \cdot 10^{-4}$
5	13.979 dB	$0.287 \cdot 10^{-6}$
6	15.563 dB	$0.987 \cdot 10^{-9}$
7	16.902 dB	$0.128 \cdot 10^{-11}$
8	18.062 dB	$0.622 \cdot 10^{-15}$
9	19.085 dB	$0.113 \cdot 10^{-18}$
10	20.000 dB	$0.762 \cdot 10^{-23}$

© 2008 www.LNTwww.de

Fragebogen zu "Z1.8: BPSK-Fehlerwahrscheinlichkeit"

a) Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit des Basisbandsystems?

$$s_0 = 4V: p_{BB} =$$

b) Wie groß ist die Energie pro Bit beim Basisbandsystem?

$$s_0 = 4V: E_B = \quad V^2_s$$

c) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei halber Sendeamplitude?

$$s_0 = 2V: p_{BB} =$$

d) Geben Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit der BPSK abhängig vom Quotienten E_B/N_0 an. Welches Ergebnis stimmt?

$p_{BPSK} = Q[(E_B/N_0)^{1/2}]$,

$p_{BPSK} = Q[(2E_B/N_0)^{1/2}]$,

$p_{BPSK} = Q[(4E_B/N_0)^{1/2}]$.

e) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten ergeben sich für $E_B/N_0 = 8$ und $E_B/N_0 = 2$?

$$E_B/N_0 = 8: p_{BPSK} =$$

$$E_B/N_0 = 2: p_{BPSK} =$$

A1.9: BPSK und 4-QAM

Die Grafik zeigt schematisch die Phasendiagramme der binären Phasenmodulation (abgekürzt BPSK) und der Quadraturamplitudenmodulation (4-QAM genannt). Die letztere lässt sich durch zwei BPSK-Systeme mit Cosinus- und Minus-Sinus-Träger beschreiben, wobei bei jedem der Teilkomponenten die Sendeamplitude gegenüber der BPSK um den Faktor „Wurzel aus 2“ reduziert ist. Die Hüllkurve des Gesamtsignals $s(t)$ ist somit ebenfalls konstant gleich s_0 .

Die Fehlerwahrscheinlichkeit abhängig vom Quotienten E_B/N_0 lautet bei BPSK und 4-QAM gleichermaßen:

$$p_B = Q\left(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}\right) = 1/2 \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{E_B/N_0}\right).$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit des BPSK-Systems kann aber auch in der Form

$$p_{B, \text{BPSK}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) \quad \text{mit } \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{T_B}}$$

dargestellt werden. Entsprechend gilt für das 4-QAM-System:

$$p_{B, \text{QAM}} = Q\left(\frac{s_0/\sqrt{2}}{\sigma_d}\right) \quad \text{mit } \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{2 \cdot T_B}}.$$

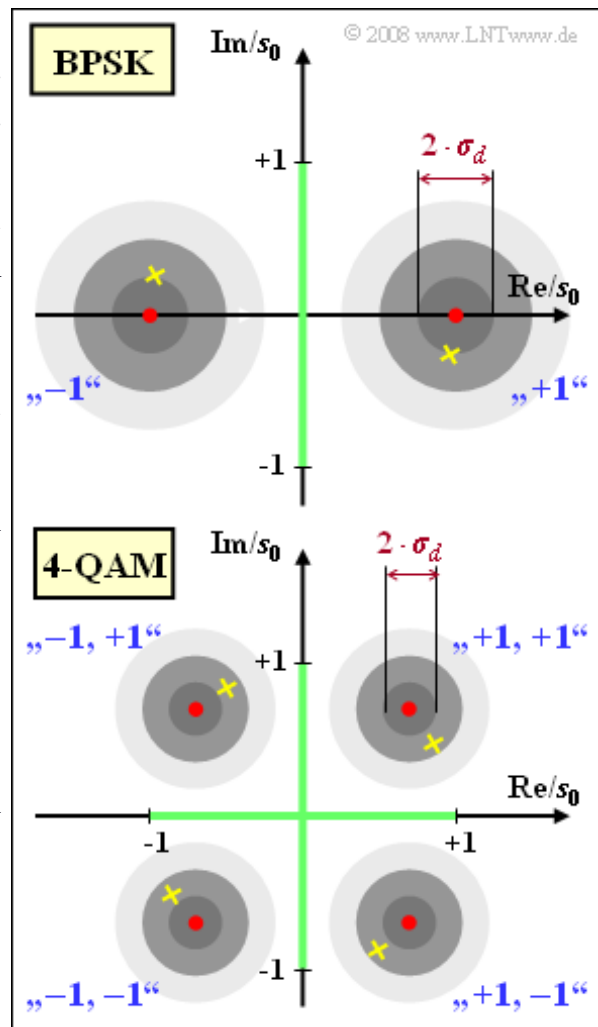
Beide Gleichungen gelten allerdings nur unter der Voraussetzung einer exakten Phasensynchronisation. Bei einem Phasenversatz $\Delta\phi_T$ zwischen sender- und empfangsseitigem Trägersignal erhöht sich die Fehlerwahrscheinlichkeit signifikant, wobei BPSK- und QAM-System unterschiedlich degradiert werden. Im Phasendiagramm macht sich der Phasenversatz durch eine Rotation der Punktwolken bemerkbar. In der Grafik sind die Mittelpunkte der Punktwolken für $\Delta\phi_T = 15^\circ$ durch gelbe Kreuze markiert, während die roten Kreise die Mittelpunkte für $\Delta\phi_T = 0$ angeben.

Es gilt stets $E_B/N_0 = 8$, so dass sich die Fehlerwahrscheinlichkeiten von BPSK und QAM im günstigsten Fall (ohne Phasenversatz) jeweils wie folgt ergeben \Rightarrow **Aufgabe Z1.8:**

$$p_B = Q\left(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}\right) = Q(4) = 0.317 \cdot 10^{-4}.$$

Bezeichnet man den Abstand der BPSK-Nutzabtastwerte von der (vertikalen) Entscheiderschwelle mit s_0 , so ergibt sich für den Rauscheffektivwert $\sigma_d = s_0/4$. Die helleren Kreise in der Grafik markieren die Höhenlinien mit dem Radius $2\sigma_d$ bzw. $3\sigma_d$ der Gaußschen 2D-WDF.

Bei der 4-QAM sind gegenüber der BPSK die Abstände der rot eingezeichneten Nutzabtastwerte von



den nun zwei Entscheidungsschwellen jeweils um den Faktor „Wurzel aus 2“ geringer, aber es ergibt sich auch ein um den gleichen Faktor kleinerer Rauscheffektivwert σ_d .

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Phasenversatz zwischen Sender und Empfänger** im **Kapitel 1.5**. Die Werte der Q-Funktion können Sie mit folgendem Interaktionsmodul ermitteln:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen

Fragebogen zu "A1.9: BPSK und 4-QAM"

a) Wie groß ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei BPSK mit $\Delta\phi_T = 15^\circ$?

$$\text{BPSK, } \Delta\phi_T = 15^\circ: p_B =$$

b) Welche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei BPSK mit $\Delta\phi_T = 45^\circ$?

$$\text{BPSK, } \Delta\phi_T = 45^\circ: p_B =$$

c) Wie groß ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei 4-QAM mit $\Delta\phi_T = 15^\circ$?

$$\text{QAM, } \Delta\phi_T = 15^\circ: p_B =$$

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei 4-QAM mit $\Delta\phi_T = 45^\circ$?

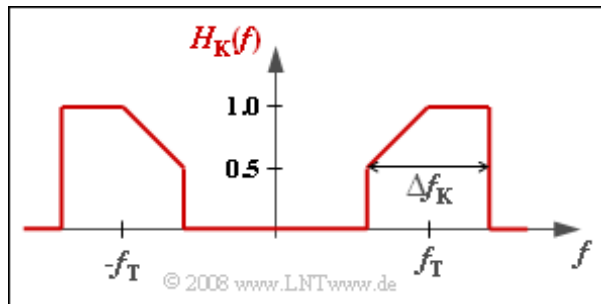
$$\text{QAM, } \Delta\phi_T = 45^\circ: p_B =$$

A1.10: BPSK–Basisbandmodell

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein BPSK–System mit kohärenter Demodulation, das heißt, es gilt

$$\begin{aligned} s(t) &= z(t) \cdot q(t), \\ b(t) &= 2 \cdot z(t) \cdot r(t). \end{aligned}$$

Die hier gewählten Bezeichnungen lehnen sich an das **Blockschaltbild** im Theorieteil an.



Der Einfluss eines Kanalfrequenzgangs $H_K(f)$ lässt sich in einfacher Weise berücksichtigen, wenn man diesen zusammen mit Modulator und Demodulator durch einen gemeinsamen Basisbandfrequenzgang beschreibt:

$$H_{MKD}(f) = 1/2 \cdot [H_K(f - f_T) + H_K(f + f_T)].$$

Damit werden

- Modulator und Demodulator quasi gegeneinander gekürzt,
- der Bandpasskanal $H_K(f)$ in den Tiefpassbereich transformiert.

Die resultierende Übertragungsfunktion $H_{MKD}(f)$ sollte man nicht mit der Tiefpass–Übertragungsfunktion $H_{K,TP}(f)$ gemäß der Beschreibung in **Kapitel 4.3** des Buches „Signaldarstellung“ verwechseln, die sich aus $H_K(f)$ durch Abschneiden der Anteile bei negativen Frequenzen sowie einer Frequenzverschiebung um f_T nach links ergibt.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 1.5**.

Fragebogen zu "A1.10: BPSK–Basisbandmodell"

a) Welche Aussagen gelten für die äquivalente Tiefpassfunktion $H_{K,TP}(f)$?

- Es gilt $H_{K,TP}(f = 0) = 2$.
- Es gilt $H_{K,TP}(f = \Delta f_K/4) = 1$.
- Es gilt $H_{K,TP}(f = -\Delta f_K/4) = 0.75$.
- Die dazugehörige Zeitfunktion $h_{K,TP}(t)$ ist komplex.

b) Welche Aussagen gelten für den Frequenzgang $H_{MKD}(f)$?

- Es gilt $H_{MKD}(f = 0) = 2$.
- Es gilt $H_{MKD}(f = \Delta f_K/4) = 1$.
- Es gilt $H_{MKD}(f = -\Delta f_K/4) = 0.75$.
- Die dazugehörige Zeitfunktion $h_{MKD}(t)$ ist komplex.

c) Berechnen Sie die Zeitfunktion $h_{MKD}(t)$. Geben Sie den Wert bei $t = 0$ an.

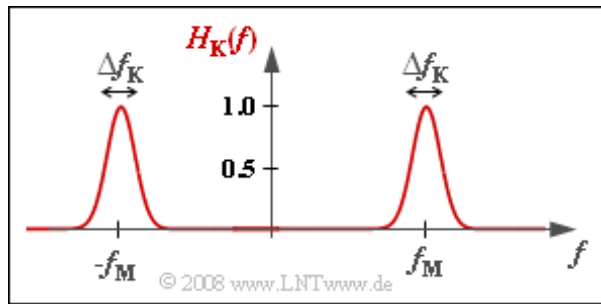
$$h_{MKD}(t = 0)/\Delta f_K =$$

d) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu?

- $h_{MKD}(t)$ hat äquidistante Nulldurchgänge im Abstand $1/\Delta f_K$.
- $h_{MKD}(t)$ hat äquidistante Nulldurchgänge im Abstand $2/\Delta f_K$.

Z1.10: Gauß-Bandpass

Bei trägerfrequenzmodulierter Übertragung muss der Kanalfrequenzgang $H_K(f)$ stets als Bandpass angesetzt werden. Die Kanalparameter sind zum Beispiel die Mittenfrequenz f_M und die Bandbreite Δf_K , wobei die Mittenfrequenz f_M oft mit der Trägerfrequenz f_T



übereinstimmt. In dieser Aufgabe soll insbesondere von einem Gaußbandpass mit dem Frequenzgang

$$H_K(f) = \exp \left[-\pi \cdot \left(\frac{f - f_M}{\Delta f_K} \right)^2 \right] + \exp \left[-\pi \cdot \left(\frac{f + f_M}{\Delta f_K} \right)^2 \right]$$

entsprechend der Grafik ausgegangen werden:

- Zur Modulation wird binäre Phasenmodulation (BPSK) verwendet.
- Die Demodulation erfolgt frequenz- und phasensynchron.

Zur Beschreibung benutzt man oft den äquivalenten TP-Frequenzgang $H_{K,TP}(f)$. Dieser ergibt sich aus $H_K(f)$ durch

- Abschneiden der Anteile bei negativen Frequenzen,
- Verschieben des Spektrums um f_T nach links.

Im betrachteten Beispiel ergibt sich mit $f_T = f_M$ für den äquivalenten TP-Frequenzgang:

$$H_{K,TP}(f) = \exp \left[-\pi \cdot (f/\Delta f_K)^2 \right].$$

Die entsprechende Zeitfunktion (Fourerrücktransformierte) lautet:

$$h_{K,TP}(t) = \Delta f_K \cdot \exp \left[-\pi \cdot (\Delta f_K \cdot t)^2 \right].$$

Zur Beschreibung eines phasensynchronen BPSK-Systems im Tiefpassbereich eignet sich aber auch der Frequenzgang

$$H_{MKD}(f) = 1/2 \cdot [H_K(f - f_T) + H_K(f + f_T)],$$

wobei „MKD“ für Modulator – Kanal – Demodulator steht. Häufig – aber nicht immer – sind $H_{MKD}(f)$ und $H_{K,TP}(f)$ identisch.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **letzte Theorieseite** von **Kapitel 1.5**.

Fragebogen zu "Z1.10: Gauß-Bandpass"

a) Geben Sie die Impulsantwort $h_K(t)$ des Gauß-Bandpasskanals an. Welcher (normierte) Wert ergibt sich für den Zeitpunkt $t = 0$?

$$h_K(t = 0)/\Delta f_K =$$

b) Welche Aussagen gelten unter der Voraussetzung $f_T = f_M$?

- $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ stimmen vollständig überein.
- $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ sind für tiefe Frequenzen gleich.
- Die Zeitfunktion $h_{K,TP}(t)$ ist reell.
- Die Zeitfunktion $h_{MKD}(t)$ ist reell.

c) Welche Aussagen gelten unter der Voraussetzung $f_T \neq f_M$?

- $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ stimmen vollständig überein.
- $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ sind für tiefe Frequenzen gleich.
- Die Zeitfunktion $h_{K,TP}(t)$ ist reell.
- Die Zeitfunktion $h_{MKD}(t)$ ist reell.

d) Im Hinblick auf eine kleinere Bitfehlerwahrscheinlichkeit sollte gelten:

- $f_M = f_T$,
- $f_M \neq f_T$.