

## Überblick zu Kapitel 5 des Buches **Stochastische Signaltheorie**

Dieses Kapitel beschreibt den **Einfluss eines Filters** auf die Kenngrößen *Autokorrelationsfunktion* (AKF) und *Leistungsdichtespektrum* (LDS) stochastischer Signalen. Im Einzelnen werden behandelt:

- die Berechnung von AKF und LDS am Filterausgang (*Stochastische Systemtheorie*),
- die Struktur und die Beschreibungsmöglichkeiten *digitaler Filter* (nichrekursiv und rekursiv),
- die *Dimensionierung* der Filterkoeffizienten für eine vorgegebene AKF,
- die Bedeutung des *Matched-Filters* für Nachrichtensysteme (SNR-Maximierung),
- die Eigenschaften des *Wiener-Kolmogoroff-Filters* zur Signalrekonstruktion.

Die Theorie wird auf 26 Seiten verdeutlicht, wobei zwei Interaktionsmodule integriert sind. Zukünftig sind noch einige Lernvideos vorgesehen. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel 38 Grafiken, neun Aufgaben und sieben Zusatzaufgaben mit insgesamt 75 Teilaufgaben.

Interaktionsmodule (IM) zu Kapitel 5:

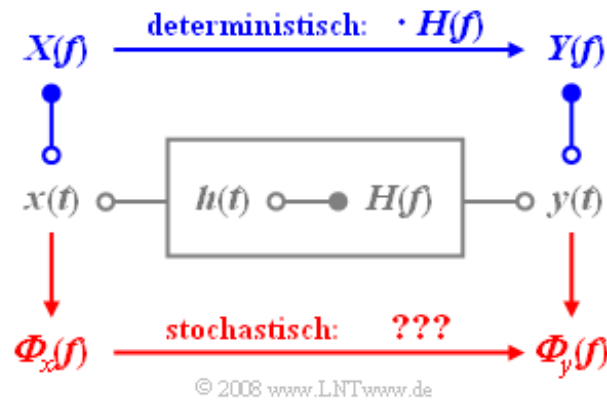
- **Digitales Filter** (IM zu Kap. 5.2 – Größe 217 kB)
- **Zur Verdeutlichung des Matched-Filters** (IM zu Kap. 5.4 – Größe 391 kB)

**Literaturhinweise:** [Böh93] – [BFS87] – [Chu78] – [Dav70] – [Hän97] – [Hau03] – [Jac86] – [Knu73] – [Knu81] – [Lüc80] – [Lük92] – [Mül79] – [Mül91] – [PP02] – [Söd88] – [Söd93] – [Win77]

Weitere Informationen zu diesem Thema sowie Übungsaufgaben, Simulationen und Programmierübungen gibt es in den Kapiteln 10 und 11 des Praktikums *Simulationenmethoden in der Nachrichtentechnik*. Dieser Link gibt **Hinweise zum Herunterladen** der entsprechenden Texte und Programme.

## Problemstellung

Wir betrachten wie im Buch *Lineare zeitinvariante Systeme* die nachfolgend skizzierte Anordnung, wobei das System sowohl durch die **Impulsantwort**  $h(t)$  als auch durch seinen **Frequenzgang**  $H(f)$  eindeutig beschrieben ist. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Beschreibungsgrößen im Zeit- und Frequenzbereich ist durch die **Fouriertransformation** gegeben.



Legt man an den Eingang das Signal  $x(t)$  an und bezeichnet das Ausgangssignal mit  $y(t)$ , so liefert die **klassische Systemtheorie** folgende Aussagen:

- Das Ausgangssignal  $y(t)$  ergibt sich aus der Faltung zwischen dem Eingangssignal  $x(t)$  und der Impulsantwort  $h(t)$ :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \, d\tau.$$

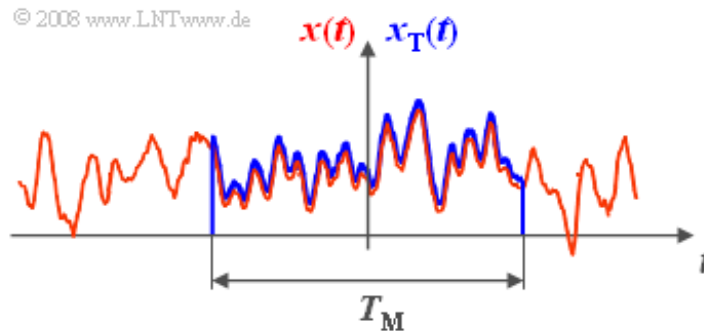
Diese Fundamentalbeziehung gilt für deterministische und stochastische Signale gleichermaßen.

- Bei deterministischen Signalen geht man meist den Umweg über die Spektralfunktionen. Das Eingangsspektrum  $X(f)$  ist die Fouriertransformierte von  $x(t)$ . Die Multiplikation mit  $H(f)$  führt zum Spektrum  $Y(f)$ . Das Signal  $y(t)$  lässt sich daraus durch die Fourierrücktransformation gewinnen.
- Bei stochastischen Signalen versagt diese Vorgehensweise, da die Zeitfunktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  nicht für alle Zeiten von  $-\infty$  bis  $+\infty$  vorhersagbar sind und somit die Amplitudenspektren  $X(f)$  und  $Y(f)$  gar nicht existieren. Hier muss auf die **Leistungsdichtespektren** übergegangen werden.

## Amplituden- und Leistungsdichtespektrum

Wir betrachten nun einen ergodischen Zufallsprozess  $\{x(t)\}$ , dessen Autokorrelationsfunktion  $\varphi_x(\tau)$  als bekannt vorausgesetzt wird. Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_x(f)$  ist dann über die Fouriertransformation ebenfalls eindeutig bestimmt und es sind folgende Aussagen zutreffend:

- Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_x(f)$  kann – ebenso wie auch die AKF  $\varphi_x(\tau)$  – für jede einzelne Musterfunktion des stationären und ergodischen Zufallsprozesses angegeben werden, auch wenn der spezifische Verlauf von  $x(t)$  explizit nicht bekannt ist.
- Das Amplitudenspektrum  $X(f)$  ist dagegen undefiniert, da bei Kenntnis der Spektralfunktion  $X(f)$  auch die gesamte Zeitfunktion  $x(t)$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  über die Fourierrücktransformation bekannt sein müsste, was eindeutig nicht der Fall sein kann.
- Ist entsprechend der nachfolgenden Skizze ein Zeitausschnitt der endlichen Zeitdauer  $T_M$  bekannt, so kann für diesen natürlich wieder die Fouriertransformation angewandt werden.



- Zwischen dem Leistungsdichtespektrum  $\Phi_x(f)$  des unendlich ausgedehnten Zufallssignals  $x(t)$  und dem Amplitudenspektrum  $X_T(f)$  des Zeitausschnittes  $x_T(t)$  besteht folgender Zusammenhang:

$$\Phi_x(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |X_T(f)|^2. \quad \Rightarrow \quad \text{Herleitung}$$

## LDS des Filterausgangssignals

Kombiniert man die auf den beiden letzten Seiten gemachten Aussagen, so kommt man zu folgendem wichtigen Ergebnis:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot |H(f)|^2. \quad \Rightarrow \quad \text{Herleitung}$$

In Worten: Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_y(f)$  am Ausgang eines LZI-Systems mit dem Frequenzgang  $H(f)$  ergibt sich als das Produkt von Eingangs-LDS  $\Phi_x(f)$  und Leistungsübertragungsfunktion  $|H(f)|^2$ .

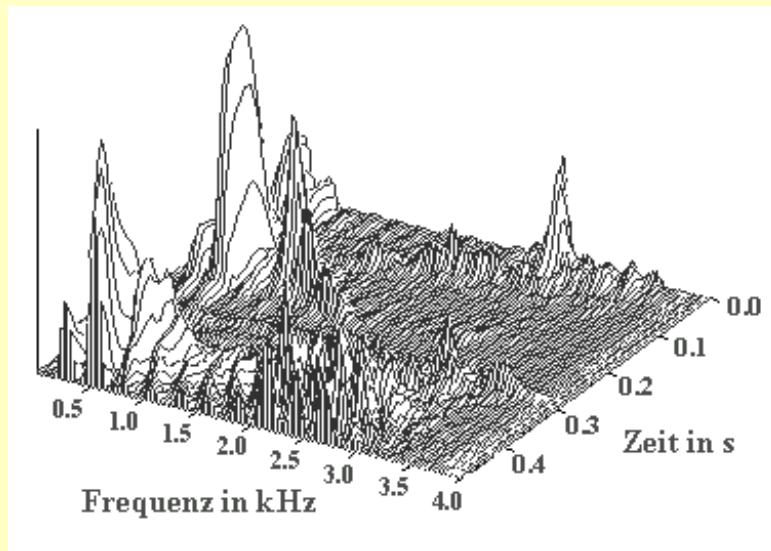
**Beispiel:** Am Eingang eines Gauß-Tiefpasses mit dem Frequenzgang

$$H(f) = e^{-\pi \cdot (f/\Delta f)^2}$$

liegt weißes Rauschen  $x(t)$  mit der (zweiseitigen) Rauschleistungsdichte  $N_0/2$  an. Dann gilt für das LDS des Ausgangssignals:

$$\Phi_y(f) = \frac{N_0}{2} \cdot e^{-2\pi \cdot (f/\Delta f)^2}.$$

Das folgende Bild zeigt die Signale und Leistungsdichtespektren am Ein- und Ausgang des Filters. Das Eingangssignal  $x(t)$  kann – streng genommen – gar nicht gezeichnet werden, da es eine unendlich große Leistung besitzt; siehe hierzu das Lehrvideo **AWGN-Kanal – Teil 2**. Das Ausgangssignal  $y(t)$  ist niederfrequenter als  $x(t)$  und besitzt eine endliche Leistung entsprechend dem Integral über  $\Phi_y(f)$ .



## AKF des Filterausgangssignals

Berücksichtigen wir, dass das auf der letzten Seite berechnete Leistungsdichtespektrum auch in der Form

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot H(f) \cdot H^*(f)$$

geschrieben werden kann, so kommt man entsprechend den Gesetzen der Fouriertransformation und durch Anwendung des **Faltungssatzes** zur dazugehörigen AKF:

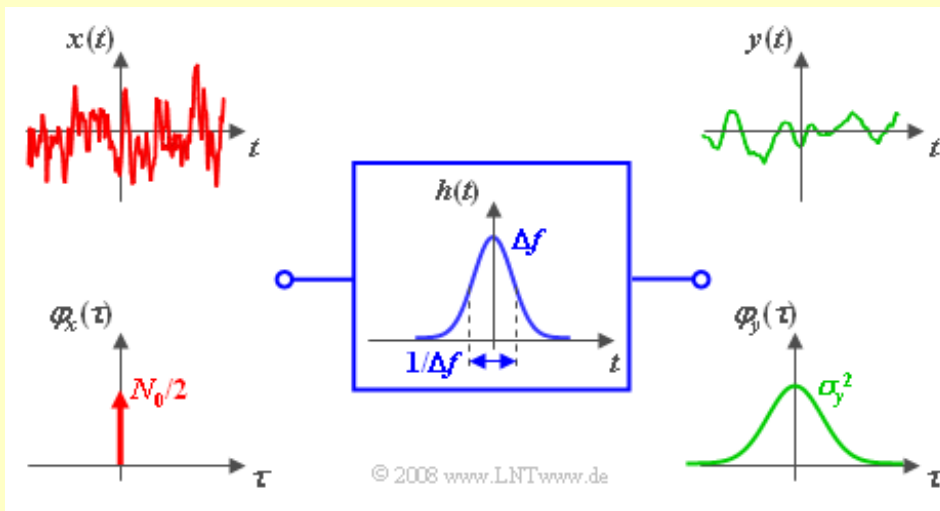
$$\varphi_y(\tau) = \varphi_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau).$$

Beim Übergang vom Spektral- in den Zeitbereich sind jeweils die Fourierrücktransformierten, nämlich

$$\varphi_y(\tau) \longleftrightarrow \Phi_y(f), \quad \varphi_x(\tau) \longleftrightarrow \Phi_x(f), \quad h(\tau) \longleftrightarrow H(f), \quad h(-\tau) \longleftrightarrow H^*(f)$$

einzusetzen und aus jeder Multiplikation wird eine Faltungsoperation.

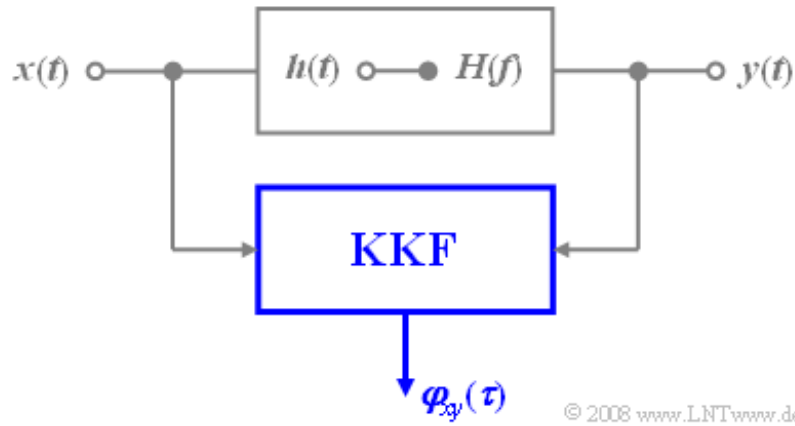
**Beispiel:** Betrachten wir nun nochmals das Beispiel der letzten Seite, aber diesmal im Zeitbereich.



Die AKF des Eingangssignals ist nun eine Diracfunktion mit dem Gewicht  $N_0/2$ . Durch zweimalige Faltung mit der (hier ebenfalls gaußförmigen) Impulsantwort  $h(t)$  bzw.  $h(-t)$  erhält man die AKF  $\varphi_y(\tau)$  des Ausgangssignals. Diese ist wiederum gaußförmig. Der AKF-Wert bei  $\tau = 0$  ist identisch mit der LDS-Fläche und kennzeichnet die Signalleistung (Varianz)  $\sigma_y^2$ . Dagegen ergibt die Fläche unter  $\varphi_y(\tau)$  den LDS-Wert  $\Phi_y(f = 0)$ , also  $N_0/2$ .

## KKF zwischen Eingangs- und Ausgangssignal

Wir betrachten wieder ein Filter mit der Impulsantwort  $h(t)$  und den stochastischen Signalen  $x(t)$  bzw.  $y(t)$  an seinem Ein- und Ausgang.



Dann gilt für die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangssignal:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_x(\tau). \quad \Rightarrow \quad \text{Herleitung}$$

Hierbei bezeichnet  $h(\tau)$  die Impulsantwort des Filters (mit der Zeitvariablen  $\tau$  anstelle von  $t$ ) und  $\varphi_x(\tau)$  die AKF am Filtereingang. Im Frequenzbereich lautet die entsprechende Gleichung:

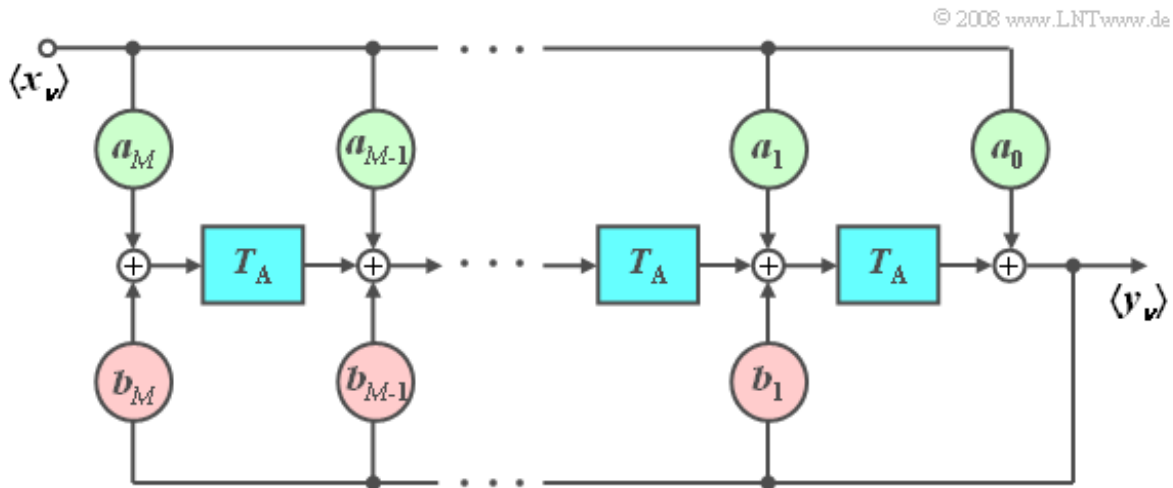
$$\Phi_{xy}(f) = H(f) \cdot \Phi_x(f).$$

Die beiden Gleichungen zeigen, dass der Filterfrequenzgang  $H(f)$  durch eine Messung mit stochastischer Anregung vollständig – also sowohl der Betrag als auch die Phase – ermittelt werden kann, wenn neben den statistischen Kenngrößen des Eingangssignals (AKF oder LDS) auch die KKF  $\varphi_{xy}(\tau)$  bzw. deren Fouriertransformierte  $\Phi_{xy}(f)$  bestimmt wird.

## Allgemeines Blockschaltbild

Jedes Signal  $x(t)$  kann an einem Rechner nur durch die Folge  $\langle x_\nu \rangle$  seiner Abtastwerte dargestellt werden, wobei  $x_\nu = x(\nu \cdot T_A)$  angibt. Der zeitliche Abstand  $T_A$  zwischen zwei Abtastwerten ist dabei durch das **Abtasttheorem** nach oben begrenzt.

Um den Einfluss eines Filters mit dem Frequenzgang  $H(f)$  auf das zeitdiskrete Signal zu erfassen, bietet es sich an, auch das Filter zeitdiskret zu beschreiben. Nachfolgend sehen Sie das **Blockschaltbild**.



Für die Abtastwerte des Ausgangssignals gilt somit:

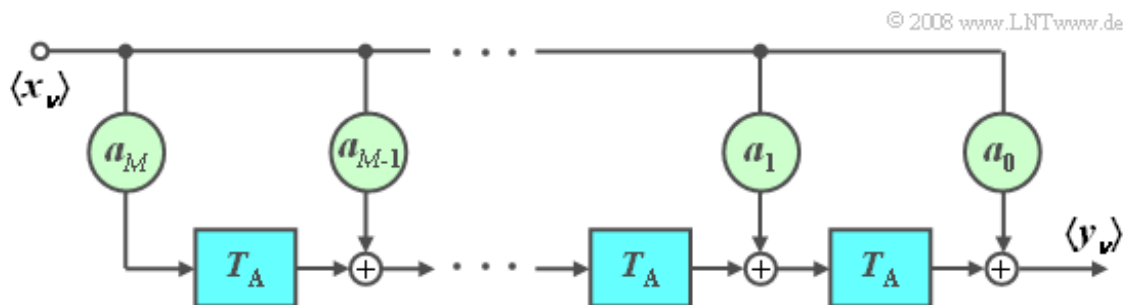
$$y_\nu = \sum_{\mu=0}^M a_\mu \cdot x_{\nu-\mu} + \sum_{\mu=1}^M b_\mu \cdot y_{\nu-\mu}.$$

Hierzu ist folgendes zu bemerken:

- Die erste Summe beschreibt die Abhängigkeit des aktuellen Ausgangswertes  $y_\nu$  vom aktuellen Eingangswert  $x_\nu$  sowie von den  $M$  vorangegangenen Eingangswerten  $x_{\nu-1}, \dots, x_{\nu-M}$ .
- Die zweite Summe kennzeichnet die Beeinflussung von  $y_\nu$  durch die vorherigen Ausgangswerte  $y_{\nu-1}, \dots, y_{\nu-M}$ . Sie gibt somit den rekursiven Teil des Filters an.
- Man bezeichnet den ganzzahligen Parameter  $M$  als die **Ordnung** des digitalen Filters.

## Nichtrekursive Filter

Man bezeichnet ein digitales Filter als **nichtrekursiv**, wenn alle Rückführungskoeffizienten  $b_\mu = 0$  sind.



Ein solches nichtrekursives Filter  $M$ -ter Ordnung besitzt folgende Eigenschaften:

- Der aktuelle Wert  $y_v$  hängt nur vom aktuellen und den  $M$  vorangegangenen Eingangswerten ab:

$$y_v = \sum_{\mu=0}^M a_\mu \cdot x_{\mu-v}.$$

- Die Filterimpulsantwort erhält man daraus mit  $x(t) = \delta(t)$  bzw. in diskreter Schreibweise  $x_v = 0$  mit Ausnahme von  $x_0 = 1$ :

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^M a_\mu \cdot \delta(t - \mu \cdot T_A).$$

- Durch Anwendung des Verschiebungssatzes folgt daraus für den Frequenzgang:

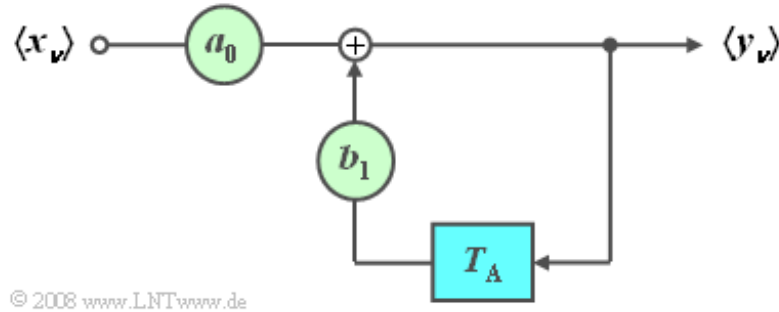
$$H(f) = \sum_{\mu=0}^M a_\mu \cdot e^{-j2\pi f \mu T_A}.$$

**Beispiel:** Ein Zweivegekanal, bei dem das Signal auf dem Hauptpfad gegenüber dem Eingangssignal ungedämpft, aber um  $2 \mu\text{s}$  verzögert ankommt, und bei dem in  $4 \mu\text{s}$  Abstand – also absolut zur Zeit  $t = 6 \mu\text{s}$  – ein Echo mit halber Amplitude nachfolgt, kann durch ein nichtrekursives Filter nachgebildet werden, wobei folgende Parameterwerte einzustellen sind:

$$M = 3, \quad T_A = 2 \mu\text{s}, \quad a_0 = a_2 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_3 = 0.5.$$

## Rekursive Filter

Sind alle Vorwärtskoeffizienten mit Ausnahme von  $a_0$  identisch 0, so liegt ein (rein) **rekursives Filter** vor. Im Folgenden beschränken wir uns auf den Sonderfall  $M = 1$ . Dann gilt folgendes Blockschaltbild:



Dieses weist folgende Eigenschaften auf:

- Der Ausgangswert  $y_\nu$  hängt (indirekt) von unendlich vielen Eingangswerten ab, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$y_\nu = a_0 \cdot x_\nu + b_1 \cdot y_{\nu-1} = a_0 \cdot x_\nu + a_0 \cdot b_1 \cdot x_{\nu-1} + b_1^2 \cdot y_{\nu-2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_0 \cdot b_1^\mu \cdot x_{\nu-\mu}.$$

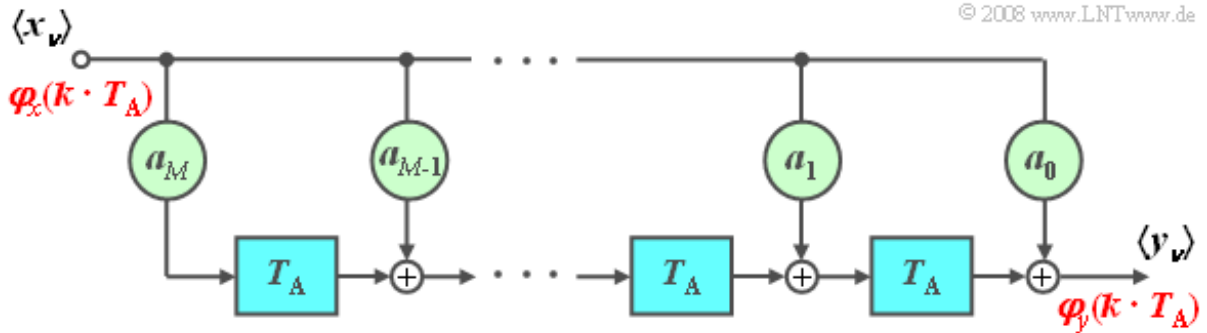
- Die zeitdiskrete Impulsantwort eines rekursiven Filters – erkennbar als Ausgangsfolge, wenn bei  $t = 0$  am Eingang eine einzelne „Eins“ anliegt – reicht bis ins Unendliche. Für  $M = 1$  lautet diese:

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_0 \cdot b_1^\mu \cdot \delta(t - \mu \cdot T_A).$$

- Bei einem rekursiven Filter erster Ordnung ist jede einzelne Diraclinie um den Faktor  $b_1$  kleiner als die vorherige. Aus Stabilitätsgründen muss  $b_1 < 1$  gelten, da sich bei  $b_1 = 1$  die Impulsantwort bis ins Unendliche erstrecken würde und bei  $b_1 > 1$  unendlich große Koeffizienten auftreten würden.
- Bei einem rekursiven Filter erster Ordnung mit  $0 < b_1 < 1$  ist  $\langle h_\nu \rangle$  zeitdiskret-exponentiell.

## AKF am Ausgang eines nichtrekursiven Filters (1)

Wir betrachten ein **nichtrekursives Laufzeitfilter  $M$ -ter Ordnung** gemäß dem nachfolgenden Bild.



Weiterhin gelten folgende Voraussetzungen:

- Die zeitdiskrete Eingangsgröße  $\langle x_\nu \rangle$  ist mittelwertfrei ( $m_x = 0$ ), gaußverteilt (mit Streuung  $\sigma_x$ ) und statistisch unabhängig („Weißes Rauschen“). Somit gilt für die zeitdiskrete AKF:

$$\varphi_x(k \cdot T_A) = \overline{x_\nu \cdot x_{\nu+k}} = \begin{cases} \sigma_x^2 & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$$

Die Überstreichung kennzeichnet hierbei die Mittelung bezüglich der Variablen  $\nu$ .

- Unter dieser Voraussetzung gilt für die AKF der Ausgangsfolge  $\langle y_\nu \rangle$ :

$$\varphi_y(k \cdot T_A) = \sigma_x^2 \cdot \sum_{\mu=0}^{M-k} a_\mu \cdot a_{\mu+k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, M.$$

Alle AKF-Werte mit  $k > M$  sind 0. Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass die (zeitdiskrete) AKF immer symmetrisch um 0 ist:

$$\varphi_y(-k \cdot T_A) = \varphi_y(k \cdot T_A).$$

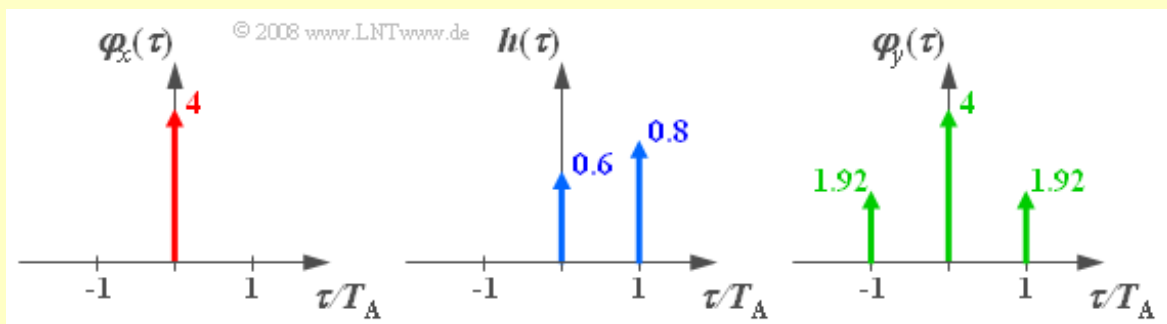
## AKF am Ausgang eines nichtrekursiven Filters (2)

**Beispiel:** Legt man an den Eingang eines nichtrekursiven Filters erster Ordnung (Filterkoeffizienten  $a_0 = 0.6$ ,  $a_1 = 0.8$ ) zeitdiskretes weißes Rauschen mit der Streuung  $\sigma_x^2 = 2$  an, so lauten die diskreten AKF-Werte des Ausgangssignals (alle anderen AKF-Werte sind 0):

$$\varphi_y(0) = \sigma_x^2 \cdot (a_0^2 + a_1^2) = 4,$$

$$\varphi_y(-T_A) = \varphi_y(T_A) = \sigma_x^2 \cdot a_0 \cdot a_1 = 1.92.$$

Wegen  $\varphi_y(0) = \varphi_x(0)$  besitzt das Ausgangssignal  $y(t)$  genau die gleiche Varianz wie das Eingangssignal ( $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$ ), aber im Gegensatz zum Eingangssignal  $x(t)$  bestehen beim Ausgangssignal  $y(t)$  statistische Bindungen zwischen benachbarten Abtastwerten.



## Koeffizientenbestimmung (1)

Nun soll die Frage beantwortet werden, wie die Koeffizienten  $a_0 \dots a_M$  eines **nichtrekursiven Filters**  $M$ -ter Ordnung ermittelt werden können, wenn die gewünschten AKF-Werte  $\varphi_y(0) \dots \varphi_y(M \cdot T_A)$  vorgegeben sind. Außerhalb des Bereiches  $-M \cdot T_A \dots M \cdot T_A$  sollen alle AKF-Werte gleich 0 sein.

Es ergibt sich folgendes **nichtlineares Gleichungssystem**, wobei zur Vereinfachung der Schreibweise  $\varphi_k = \varphi_y(k \cdot T_A)$  verwendet wird, und  $\sigma_x = 1$  vorausgesetzt ist.

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \sum_{\mu=0}^M a_{\mu}^2, \\ \varphi_1 &= \sum_{\mu=0}^{M-1} a_{\mu} \cdot a_{\mu+1}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \varphi_{M-1} &= a_0 \cdot a_{M-1} + a_1 \cdot a_M, \\ \varphi_M &= a_0 \cdot a_M.\end{aligned}$$

Man erhält somit für die  $M + 1$  Koeffizienten auch  $M + 1$  unabhängige Gleichungen. Durch sukzessives Eliminieren der Koeffizienten  $a_1 \dots a_M$  bleibt für  $a_0$  eine nichtlineare Gleichung höherer Ordnung übrig.

**Beispiel:** Mit den Vorgaben  $M = 1$ ,  $\sigma_x = 1$ ,  $\varphi_0 = 0.58$  und  $\varphi_1 = 0.21$  lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= a_0^2 + a_1^2 = 0.58, \\ \varphi_1 &= a_0 \cdot a_1 = 0.21.\end{aligned}$$

Dies führt zu einer Gleichung vom Grad 4, nämlich

$$a_0^2 + \left(\frac{0.21}{a_0}\right)^2 = 0.58 \quad \Rightarrow \quad a_0^4 - 0.58 \cdot a_0^2 + 0.21^2 = 0.$$

Eine Lösung stellt  $a_0 = 0.7$  dar. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung findet man  $a_1 = 0.3$ .

## Koeffizientenbestimmung (2)

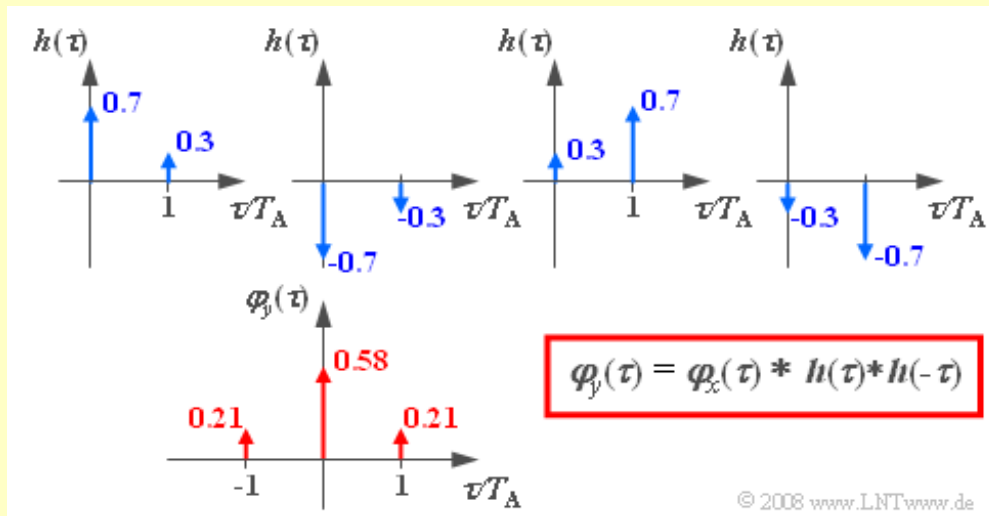
Wie das letzte Beispiel gezeigt hat, ist mit  $M = 1$  die Bestimmungsgleichung für  $a_0$  vom Grad 4. Dies bedeutet gleichzeitig, dass es auch vier Koeffizientensätze gibt, die alle zur gleichen AKF führen. Dies ist aus folgenden Gründen einsichtig:

- Alle Koeffizienten können gleichzeitig ihr Vorzeichen ändern, ohne dass das Gleichungssystem verändert wird.
- Ersetzt man die Koeffizienten  $a_\nu$  durch  $a_{M-\nu}$ , so ergibt sich die identische Bestimmungsgleichung. Diese Operation entspricht einer Spiegelung und Verschiebung der Impulsantwort.

**Beispiel:** Wie auf der letzten Seite gezeigt wurde, ist der Parametersatz  $a_0 = 0.7, a_1 = 0.3$  geeignet, die AKF-Werte  $\varphi_0 = 0.58$  und  $\varphi_1 = 0.21$  zu generieren. Zur gleichen AKF kommt man auch mit den Koeffizientenpaaren

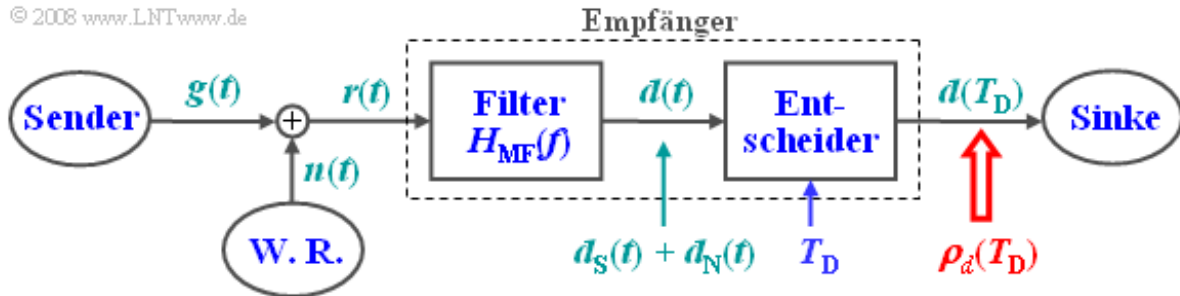
$$\begin{aligned} a_0 &= -0.7, & a_1 &= -0.3, \\ a_0 &= 0.3, & a_1 &= 0.7, \\ a_0 &= -0.3, & a_1 &= -0.7. \end{aligned}$$

Das nachfolgende Bild zeigt die entsprechenden Impulsantworten. Es gilt  $\varphi_x(\tau) = \delta(\tau)$ :



## Optimierungskriterium

Das **Matched-Filter** – auch Korrelationsfilter genannt – dient zum Nachweis der Signalexistenz. Es kann mit größtmöglicher Sicherheit – anders ausgedrückt: mit maximalem SNR – entscheiden, ob ein durch additives Rauschen  $n(t)$  gestörtes impulsförmiges Nutzsignal  $g(t)$  vorhanden ist oder nicht. Zur Herleitung des Matched-Filters wird folgende Anordnung betrachtet.



Für die einzelnen Komponenten gelten folgende Voraussetzungen:

- Der Nutzanteil  $g(t)$  des Empfangssignals  $r(t)$  sei impulsförmig und entsprechend *energiebegrenzt*. Das heißt: Das Integral über  $g^2(t)$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  liefert den endlichen Wert  $E_g$ .
- Das Störsignal  $n(t)$  sei *Weißes Gaußsches Rauschen* mit der Rauschleistungsdichte  $N_0$ .
- Das Filterausgangssignal  $d(t) = d_S(t) + d_N(t)$  setzt sich additiv aus zwei Anteilen zusammen;  $d_S(t)$  geht auf  $g(t)$  zurück, während der Rauschanteil  $d_N(t)$  von  $n(t)$  herrührt.
- Der Empfänger – bestehend aus linearem Filter mit dem Frequenzgang  $H_{MF}(f)$  und Entscheider – ist so zu bestimmen, dass das **momentane S/N-Verhältnis** am Ausgang maximal wird:

$$\rho_d(T_D) = \frac{d_S^2(T_D)}{\sigma_d^2} \stackrel{!}{=} \text{Maximum.}$$

Hierbei bezeichnen  $\sigma_d^2$  die *Varianz* (Leistung) von  $d_N(t)$  und  $T_D$  den *Detektionszeitpunkt*.

## Matched-Filter-Optimierung

Gegeben sei ein energiebegrenztetes Nutzsinal  $g(t)$  mit dem zugehörigen Spektrum  $G(f)$ . Damit kann das Filterausgangssignal zum Detektionszeitpunkt  $T_D$  für jedes beliebige Filter mit Impulsantwort  $h(t)$  und Frequenzgang  $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$  wie folgt geschrieben werden (ohne Berücksichtigung des Rauschens):

$$d_S(T_D) = g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f T_D} df.$$

Die Varianz des Filterausgangssignals  $d_N(t)$ , herrührend vom Rauschanteil  $n(t)$ , ist unabhängig von  $T_D$ :

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df.$$

Damit lautet das hier vorliegende **Optimierungsproblem**:

$$\rho_d(T_D) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f T_D} df \right|^2}{N_0/2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} = \text{Maximum.}$$

Nach längerer Rechnung kann man zeigen, dass der Quotient für folgenden Frequenzgang maximal wird:

$$H(f) = H_{\text{MF}}(f) = K_{\text{MF}} \cdot G^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T_D}, \quad \Rightarrow \quad \text{Herleitung}$$

Damit erhält man für das **Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis** am Ausgang des Matched-Filters

$$\rho_d(T_D) = \frac{2 \cdot E_g}{N_0},$$

und zwar unabhängig von der dimensionsbehafteten Konstante  $K_{\text{MF}}$ .  $E_g$  bezeichnet die Energie des Eingangsimpulses, die man nach dem Satz von **Parseval** sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich berechnen kann:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df.$$

**Beispiel:** Ein rechteckförmiger Impuls  $g(t)$  mit der Amplitude 1 V und der Dauer 0.5 ms (das heißt, mit der Energie  $E_g = 5 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2\text{s}$ ) und unbekannter Lage soll in verrauschter Umgebung (mit der Rauschleistungsdichte  $N_0 = 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$ ) aufgefunden werden. Das beste Ergebnis erzielt man mit dem Matched-Filter, nämlich ein Signal-zu-Rauschverhältnis von  $2 \cdot E_g/N_0 = 1000$  entsprechend 30 dB.

## Interpretation des Matched-Filters

Auf der letzten Seite wurde der Frequenzgang des Matched-Filters wie folgt abgeleitet:

$$H_{\text{MF}}(f) = K_{\text{MF}} \cdot G^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T_D}$$

Durch **Fourier rücktransformation** erhält man die dazugehörige Impulsantwort:

$$h_{\text{MF}}(t) = K_{\text{MF}} \cdot g(T_D - t)$$

Diese beiden Funktionen lassen sich wie folgt interpretieren:

- Das **Matched-Filter** ist durch den Term  $G^*(f)$  an das Spektrum des aufzufindenden Impulses angepasst - daher sein Name (englisch: *to match*  $\equiv$  anpassen).
- Die **Konstante**  $K_{\text{MF}}$  ist aus Dimensionsgründen notwendig. Ist  $g(t)$  ein Spannungsimpuls, so hat diese Konstante die Einheit „Hz/V“. Der Frequenzgang ist somit dimensionslos.
- Die **Impulsantwort**  $h_{\text{MF}}(t)$  ergibt sich aus dem Nutzsinal  $g(t)$  durch Spiegelung – das heißt, aus  $g(t)$  wird  $g(-t)$  – sowie einer Verschiebung um  $T_D$  nach rechts.
- Der frühestmögliche **Detektionszeitpunkt**  $T_D$  folgt aus der Kausalitätsbedingung  $h_{\text{MF}}(t < 0) \equiv 0$ .
- Für den Nutzanteil des Filterausgangssignals gilt:

$$d_S(t) = g(t) * h_{\text{MF}}(t) = K_{\text{MF}} \cdot g(t) * g(T_D - t) = K_{\text{MF}} \cdot \varphi_g^\bullet(t - T_D)$$

Das bedeutet: Das Ausgangssignal ist formgleich mit der **Energie-AKF** (in diesem Tutorial durch einen Punkt gekennzeichnet) und gegenüber dieser um  $T_D$  verschoben.

Anzumerken ist, dass man bei einem energiebegrenzten Signal  $g(t)$  nur die Energie-AKF angeben kann:

$$\varphi_g^\bullet(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot g(t + \tau) dt$$

Gegenüber der AKF-Definition eines leistungs begrenzten Signals  $x(t)$ , nämlich

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt,$$

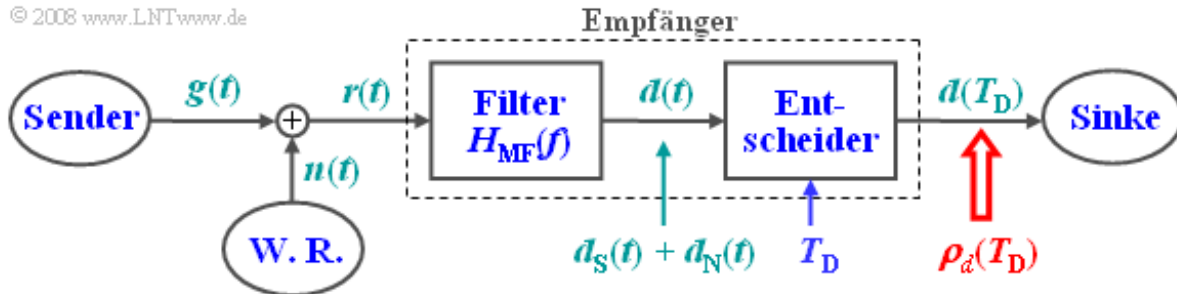
wird bei der Berechnung der Energie-AKF auf die Division durch die Messdauer  $T_M$  sowie auf den Grenzübergang  $T_M \rightarrow \infty$  verzichtet.

**Beispiel:** Gehen wir davon aus, dass gemäß dem Beispiel auf der letzten Seite der Rechteckimpuls zwischen 2 und 2.5 ms liegt und der Detektionszeitpunkt  $T_D = 4$  ms gewünscht wird, so muss die Impulsantwort des Matched-Filters im Bereich von 1.5 ms ... 2 ms konstant sein; außerhalb dieses Bereichs darf sie keine Anteile besitzen. Die Höhe der Impulsantwort spielt für das S/N-Verhältnis keine Rolle, da dieses unabhängig von  $K_{\text{MF}}$  ist. Der Betragsfrequenzgang  $|H_{\text{MF}}(f)|$  ist hier si-förmig.

## Matched-Filter bei farbigen Störungen (1)

Bei den bisherigen Herleitungen dieses Abschnittes wurde stets von Weißem Rauschen ausgegangen. Nun soll die Frage geklärt werden, wie das **Empfangsfilter**  $H_E(f) = H_{MF}(f)$  **bei farbiger Störung**  $n(t)$  zu gestalten ist, damit das Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis maximal wird.

© 2008 www.LNTwww.de



Zu dem hier betrachteten Blockschaltbild ist zu bemerken:

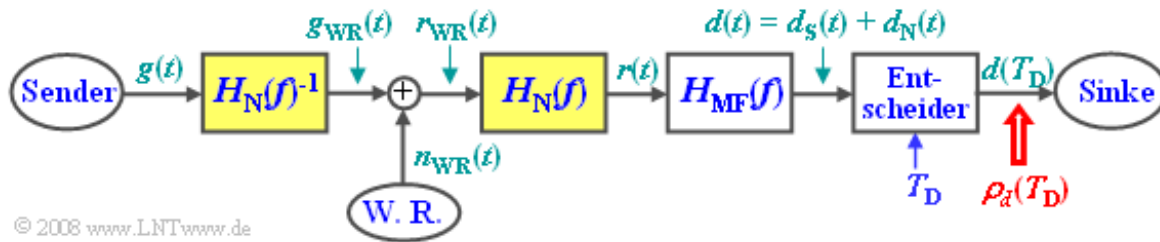
- Das am Empfänger anliegende Störsignal  $n(t)$  ist farbig; das Störleistungsdichtespektrum  $\Phi_n(f)$  ist nicht für alle Frequenzen gleich.
- Ein solches farbiges Störsignal kann – zumindest gedanklich – aus einer „weißen“ Rauschquelle  $n_{WR}(t)$  mit der konstanten Rauschleistungsdichte  $N_0$  und einem Formfilter mit dem Frequenzgang  $H_N(f)$  modelliert werden:

$$\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2} \cdot |H_N(f)|^2.$$

- Da in diesem Modell Realisierungsaspekte nicht zu beachten sind, kann  $H_N(f)$  vereinfacht als reell angenommen werden. Der Phasengang von  $H_N(f)$  spielt für das Folgende keine Rolle.
- Alle bisher für diesen Abschnitt genannten Voraussetzungen gelten weiterhin.

## Matched-Filter bei farbigen Störungen (2)

Hinsichtlich der Störungen am Ausgang des Matched-Filters – zusammengefasst im Signal  $d_N(t)$  – ändert sich nichts, wenn das Formfilter auf die rechte Seite der Additionsstelle verlagert wird.



Anhand dieses modifizierten Blockschaltbildes wird nun das verallgemeinerte Matched-Filter hergeleitet:

- Um ein auch bezüglich des Nutzsignals  $d_S(t)$  äquivalentes Modell zu erhalten, muss das Formfilter im Nutzsignalzweig durch das inverse Filter  $1/H_N(f)$  kompensiert werden.
- Besitzt  $H_N(f)$  keine Nullstelle, was für das Folgende vorausgesetzt werden soll, so sind die beiden Anordnungen von dieser und der letzten Seite identisch.
- Nach den bisherigen Aussagen ergibt sich das maximale S/N-Verhältnis, wenn das resultierende Empfangsfilter  $H_N(f) \cdot H_{MF}(f)$  an das Spektrum  $G_{WR}(f)$  des Nutzsignals  $g_{WR}(t)$  angepasst ist:

$$H_N(f) \cdot H_{MF}(f) = K_{MF} \cdot G_{WR}^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T_D}.$$

- Mit  $G_{WR}(f) = G(f)/H_N(f)$  gilt somit für das **Matched-Filter bei farbigen Störungen**:

$$H_{MF}(f) = K_{MF} \frac{G^*(f)}{|H_N(f)|^2} \cdot e^{-j2\pi f T_D}.$$

- Das **Signal-zu-Störleistungsverhältnis** vor dem Entscheider ist somit maximal:

$$\rho_{d,\max}(T_D) = \frac{1}{N_0/2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{WR}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(f)|^2}{\Phi_n(f)} df.$$

Der Fall „Weißes Rauschen“ ist in dieser allgemeineren Gleichung für  $\Phi_n(f) = N_0/2$  mitenthalten.

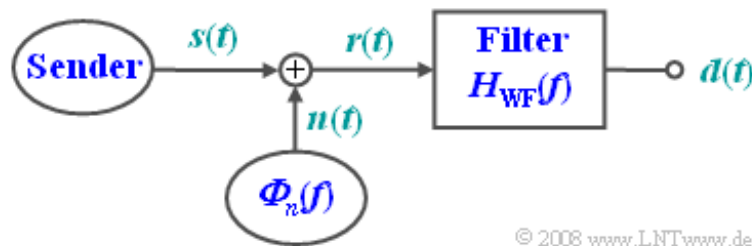
- Alle auf dieser Seite angegebenen Gleichungen führen nur dann zu sinnvollen, auch in der Praxis verwertbaren Ergebnissen, wenn das Energiespektrum  $|G(f)|^2$  des Nutzsignals  $g(t)$  asymptotisch schneller abklingt als das Störleistungsdichtespektrum  $\Phi_n(f)$ .

## Optimierungskriterium

Als ein weiteres Beispiel zur **Optimalfilterung** betrachten wir nun die Aufgabenstellung, die Form eines Nutzsignals  $s(t)$  aus dem durch additives Rauschen  $n(t)$  gestörten Empfangssignals  $r(t)$  im Sinne des **mittleren quadratischen Fehlers** (MQF) möglichst gut zu rekonstruieren:

$$\text{MQF} = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} |d(t) - s(t)|^2 dt \stackrel{!}{=} \text{Minimum.}$$

Hierbei ist  $d(t)$  das Ausgangssignal des gesuchten Filters;  $T_M$  bezeichnet wiederum die Messdauer.



Für diese Optimierungsaufgabe gelten folgende Voraussetzungen:

- Das zu rekonstruierende Nutzsignal  $s(t)$  sei nicht deterministisch beschreibbar, sondern vielmehr das Ergebnis eines Zufallsprozesses  $\{s(t)\}$ , von dem nur die statistischen Eigenschaften in Form des Leistungsdichtespektrums  $\Phi_s(f)$  bekannt ist.
- Das Signal  $s(t)$  sei mittelwertfrei ( $m_s = 0$ ) und leistungsbeschränkt. Das bedeutet: Die Signalenergie  $E_s$  ist aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Signals  $s(t)$  unendlich und die Signalleistung besitzt einen endlichen Wert:

$$P_s = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} s(t)^2 dt > 0.$$

- Das Störsignal  $n(t)$  ist durch das LDS  $\Phi_n(f)$  charakterisiert. Korrelationen zwischen Nutz- und Störsignal werden durch die Kreuzkorrelationsdichtespektren  $\Phi_{sn}(f) = -\Phi_{ns}^*(f)$  berücksichtigt.

## Ergebnis der Filteroptimierung

**Kolmogoroff** und **Wiener** haben dieses Optimierungsproblem nahezu zur gleichen Zeit unabhängig voneinander gelöst. Die Übertragungsfunktion des optimalen Filters kann über die **Wiener-Hopfsche Integralgleichung** ermittelt werden, und lautet:

$$H_{WF}(f) = \frac{\Phi_s(f) + \Phi_{ns}(f)}{\Phi_s(f) + \Phi_{sn}(f) + \Phi_{ns}(f) + \Phi_n(f)}.$$

Der Index „WF“ steht für Wiener-Filter und lässt leider die Verdienste von Kolmogoroff nicht erkennen. Auf die exakte, mathematische Ableitung der Gleichung wird hier verzichtet. Vielmehr soll diese im Folgenden an einigen Sonderfällen verdeutlicht und interpretiert werden.

- Sind Signal und Störung unkorreliert (das heißt, es gilt  $\Phi_{sn}(f) = \Phi_{ns}(f) = 0$ ), so vereinfacht sich obige Gleichung wie folgt:

$$H_{WF}(f) = \frac{\Phi_s(f)}{\Phi_s(f) + \Phi_n(f)} = \frac{1}{1 + \Phi_n(f)/\Phi_s(f)}.$$

- Das Wiener-Filter wirkt somit wie ein frequenzabhängiger Teiler, wobei das Teilverhältnis durch die Leistungsdichtespektren von Nutzsignal und Störsignal bestimmt wird.
- Der „Durchlassbereich“ liegt vorwiegend bei den Frequenzen, bei denen das Nutzsignal sehr viel größere Anteile besitzt als die Störung:  $\Phi_s(f) \gg \Phi_n(f)$ .
- Der mittlere quadratische Fehler zwischen Ausgangssignal  $d(t)$  und dem zu approximierenden Eingangssignal  $s(t)$  ist

$$\text{MQF} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_s(f) \cdot \Phi_n(f)}{\Phi_s(f) + \Phi_n(f)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{WF}(f) \cdot \Phi_n(f) df.$$

Die Ableitung dieser Ergebnisse ist durchaus nicht trivial und z. B. in **[Hän97]** zu finden.

## Interpretation des Wiener-Filters (1)

**Beispiel:** Zur Verdeutlichung des Wiener-Filters betrachten wir zunächst als Grenzfall ein Sendesignal  $s(t)$  mit dem LDS  $\Phi_s(f) = P_s \cdot \delta(f \pm f_s)$ . Damit ist bekannt, dass es sich bei  $s(t)$  um eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $f_s$  handelt. Unbekannt sind dagegen Amplitude und Phase der aktuellen Musterfunktion  $s(t)$ .

Bei weißem Rauschen – also  $\Phi_n(f) = N_0/2$  – lautet somit der **Frequenzgang des Wiener-Filters**:

$$H_{WF}(f) = \frac{1}{1 + \frac{N_0/2}{P_s \cdot \delta(f \pm f_s)}}.$$

Bei allen Frequenzen mit Ausnahme von  $f = \pm f_s$  ergibt sich  $H_{WF}(f) = 0$ . Berücksichtigt man weiter, dass  $\delta(f = \pm f_s)$  an der Stelle  $f = \pm f_s$  unendlich groß ist, so erhält man weiter  $H_{MF}(f = \pm f_s) = 1$ . Das optimale Filter ist somit ein Bandpass um  $f_s$  mit unendlich kleiner Bandbreite. Der mittlere quadratische Fehler zwischen dem Sendesignal  $s(t)$  und dem Filterausgangssignal  $d(t)$  beträgt

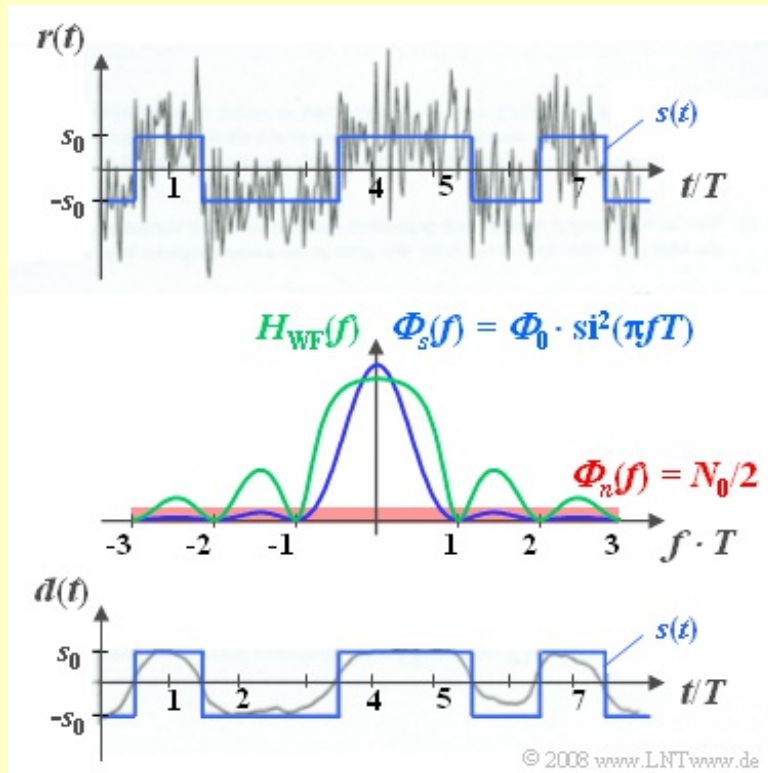
$$\text{MQF} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{WF}(f) \cdot \Phi_n(f) df = \lim_{\epsilon > 0, \epsilon \rightarrow \infty} \int_{f_s - \epsilon}^{f_s + \epsilon} N_0 df = 0.$$

Dieses unendlich schmale Filter erlaubt somit die vollständige Regenerierung des Sendesignals hinsichtlich Amplitude und Phase. Unabhängig von der Größe der Störung ( $N_0$ ) gilt somit  $d(t) = s(t)$ .

Ein unendlich schmales Filter ist allerdings nicht realisierbar. Bei endlicher Bandbreite  $\Delta f$  ist der mittlere quadratische Fehler (MQF) gleich  $N_0 \cdot \Delta f$ .

## Interpretation des Wiener-Filters (2)

**Beispiel:** Nun betrachten wir ein **stochastisches rechteckförmiges Binärsignal**  $s(t)$ , das durch weißes Rauschen  $n(t)$  additiv überlagert ist. Im mittleren Bild sind die beiden Leistungsdichtespektren  $\Phi_s(f)$  und  $\Phi_n(f)$  skizziert und formelmäßig angegeben. Im oberen Bild sehen Sie in grauer Farbe das Summensignal  $r(t) = s(t) + n(t)$  für  $\Phi_0/N_0 = 5$ , wobei  $\Phi_0$  gleich der Energie eines Einzelimpulses ist.



Das untere Bild zeigt das Ausgangssignal  $d(t)$  des zugehörigen Wiener-Filters mit dem Frequenzgang

$$H_{WF}(f) = \frac{1}{1 + \frac{N_0/2}{\Phi_0 \cdot \text{si}^2(\pi f T)}}$$

Mit keinem anderen Filter ergibt sich ein kleinerer mittlerer quadratischer Fehler (MQF) zwischen den Signalen  $d(t)$  und  $s(t)$  als beim Wiener-Kolmogoroff-Filter. Im vorliegenden Beispiel beträgt MQF gleich 11% der Nutzleistung  $P_s$ . Im Signal  $d(t)$  fehlen vorwiegend die höherfrequenten Signalanteile (Sprünge), die zugunsten einer besseren Störunterdrückung bei diesen Frequenzen ausgefiltert werden.

Im mittleren Bild ist grün der Frequenzgang  $H_{WF}(f)$  eingezeichnet. Der Gleichsignalübertragungsfaktor ergibt sich zu  $H_{WF}(f=0) = \Phi_0 / (\Phi_0 + N_0/2) = 10/11$ . Bei Vielfachen der Symbolfolgefrequenz  $1/T$ , bei denen das stochastische Binärsignal  $s(t)$  keine Spektralanteile besitzt, ist  $H_{WF}(f)$  ebenfalls Null. Je mehr Nutzsignalanteile bei einer bestimmten Frequenz vorhanden sind, desto durchlässiger ist bei dieser Frequenz auch das Wiener-Kolmogoroff-Filter.