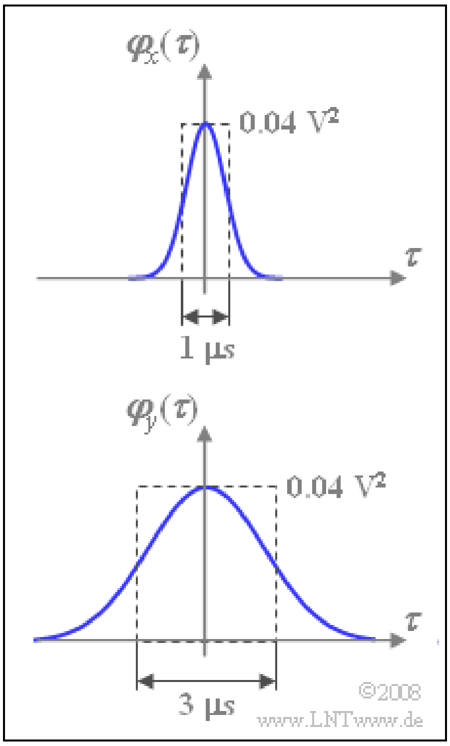
A5.1: Gaußsche AKF und Gaußtiefpass



Am Eingang eines Tiefpassfilters mit dem Frequenzgang $H(f)$ liegt ein gaußverteiltes mittelwertfreies Rauschsignal $x(t)$ mit folgender Autokorrelationsfunktion (AKF) an:

$$\varphi_x(\tau) = \sigma_x^2 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(\tau/\nabla\tau_x)^2}.$$

Diese AKF ist im nebenstehenden Bild oben dargestellt.

Das Tiefpassfilter sei gaußförmig mit der Gleichsignalverstärkung H_0 und der Bandbreite Δf, so dass für den Frequenzgang geschrieben werden kann:

$$H(f) = H_0 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(f/\Delta f)^2}.$$

Im Verlaufe dieser Aufgabe sollen die beiden Filterparameter H_0 und Δf so dimensioniert werden, dass das Ausgangssignal $y(t)$ eine AKF entsprechend der unteren Skizze aufweist.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.4** und **Kapitel 5.1.** Berücksichtigen Sie die folgende Fourierkorrespondenz:

$$\mathrm{e}^{-\pi(f/\Delta f)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; \Delta f \cdot \mathrm{e}^{-\pi(\Delta f \cdot t)^2}.$$

Fragebogen zu "A5.1: Gaußsche AKF und Gaußtiefpass"

a) Wie groß ist der Effektivwert des Filtereingangssignals?

$\boldsymbol{\sigma_x}$ = V

b) Bestimmen Sie aus der skizzierten AKF auch die äquivalente AKF-Dauer des Signals $x(t)$. Wie kann diese allgemein ermittelt werden?

$\boldsymbol{\nabla\tau_x}$ = µs

c) Wie lautet das Leistungsdichtespektrum $\Phi_x(f)$ des Eingangsignals? Wie groß ist der LDS-Wert bei $f = 0$?

$\boldsymbol{\Phi_x(f = 0)}$ = $\text{V}^2\text{/Hz}$

d) Berechnen Sie das LDS $\Phi_y(f)$ am Filterausgang allgemein als Funktion von σ_x, $\nabla\tau_x$, H_0 und Δf. Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Das LDS $\Phi_y(f)$ ist ebenfalls gaußförmig.
- ☐ Je kleiner Δf ist, um so breiter ist $\Phi_y(f)$.
- ☐ H_0 beeinflusst nur die Höhe, aber nicht die Breite von $\Phi_y(f)$.

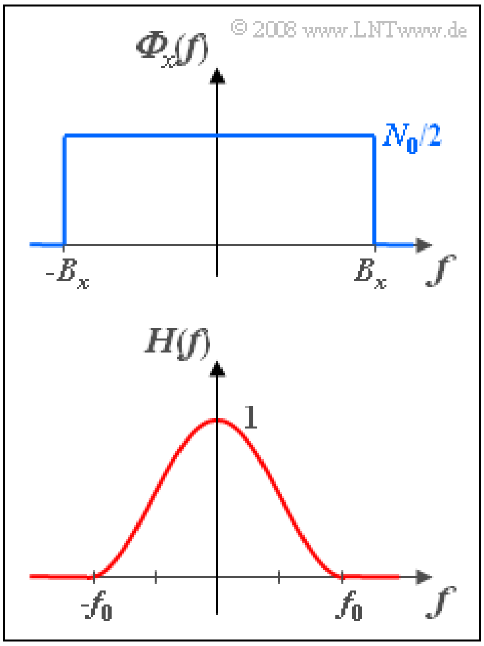
e) Wie groß muss die äquivalente Filterbandbreite Δf gewählt werden, damit für die äquivalente AKF-Dauer gilt: $\nabla\tau_y = 3$ µs?

$\boldsymbol{\Delta f}$ = MHz

f) Wie groß muss man den Gleichsignalübertragungsfaktor H_0 wählen, damit die Bedingung $\sigma_y = \sigma_x$ erfüllt wird?

$\boldsymbol{H_0}$ =

Z5.1: cos²-Rauschbegrenzung



Wir betrachten ein bandbegrenztes weißes Rauschsignal $x(t)$ mit dem nebenstehend skizzierten Leistungsdichtespektrum $\Phi_x(f)$. Dieses ist im Bereich $|f| \le B_x$ konstant gleich $N_0/2$ und außerhalb gleich Null. Gehen Sie von den Zahlenwerten $N_0 = 10^{-16}$ V²/Hz und $B_x = 10$ kHz aus.

Dieses Signal wird an den Eingang eines Tiefpassfilters mit dem Frequenzgang

$$H(f) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi f}{2 f_0}\right) & \text{für} \quad |f| \le f_0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

angelegt. Hierbei bezeichnet f_0 die absolute Filterbandbreite, die zwischen $B_x/2$ und $2B_x$ variieren kann. Das Filterausgangssignal wird mit $y(t)$ bezeichnet.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.5, Kapitel 4.5** und **Kapitel 5.1.** Benutzen Sie, falls nötig, die nachfolgenden Gleichungen:

$$\mathrm{Q}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} \quad (\text{für große } x),$$

$$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4a}\cdot \sin(2ax),$$

$$\int \cos^4(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4a}\cdot \sin(2ax) + \frac{1}{32a}\cdot \sin(4ax).$$

Fragebogen zu "Z5.1: cos^2-Rauschbegrenzung"

a) Wie groß ist der Effektivwert des Eingangssignals $x(t)$?

$\boldsymbol{\sigma_x}$ = µV

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein momentaner Spannungswert des Eingangssignals betragsmäßig größer als 5 µV ist?

Pr(|*x*(*t*)| > 5 µV) =

c) Wie groß ist der Mittelwert (Gleichanteil) des Ausgangssignals $y(t)$?

$\boldsymbol{m_y}$ = µV

d) Berechnen Sie den Effektivwert des Ausgangssignals $y(t)$, wenn $f_0 = B_x/2$ gilt:

$\boldsymbol{\sigma_y(f_0 = B_x/2)}$ = µV

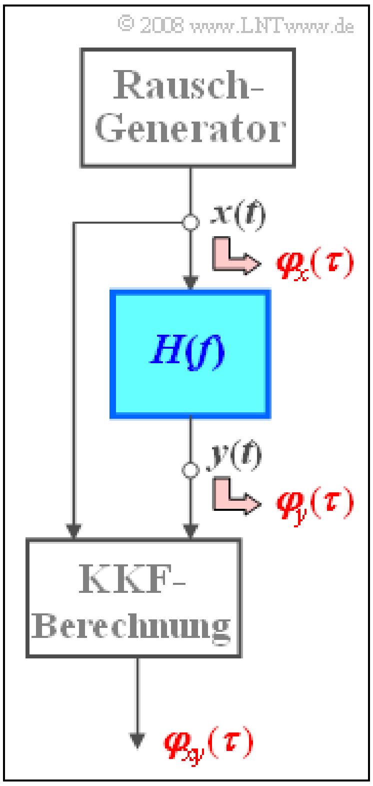
e) Berechnen Sie den Effektivwert von $y(t)$ unter der Bedingung $f_0 = 2B_x$.

$\boldsymbol{\sigma_y(f_0 = 2B_x)}$ = µV

f) Es gelte $f_0 = 2B_x$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ausgangssignal $y(t)$ betragsmäßig größer als 5 µV ist?

Pr(|*y*(*t*)| > 5 µV) =

A5.2: Frequenzgangbestimmung



Wir betrachten die abgebildete Messanordnung zur Bestimmung des blau hervorgehobenen Frequenzgangs $H(f)$. Das Eingangssignal $x(t)$ ist weißes Gaußsches Rauschen mit der Rauschleistungsdichte $N_0 = 10^{-10}$ W/Hz. Somit gilt für die AKF:

$$\varphi_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau).$$

Die gemessene Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) zwischen den Signalen $x(t)$ und $y(t)$ kann mit $K = 0.628 \cdot 10^{-12}$ W und $T_0 = 1$ ms wie folgt angenähert werden (nur gültig für positive Zeiten):

$$\varphi_{xy}(\tau) = K \cdot \mathrm{e}^{-\tau/T_0}.$$

Gemessen wird außerdem die AKF $\varphi_y(\tau)$ des Ausgangssignals.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 4.6** und **Kapitel 5.1.** Beachten Sie bitte auch die folgende Fouriertransformation (in ω):

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot \omega/\omega_0} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad h(t) = \omega_0 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_0 t} \quad (t \ge 0).$$

Für negative t-Werte ist dagegen $h(t)$ stets 0.

Fragebogen zu "A5.2: Frequenzgangbestimmung"

a) Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend? Man kann den Frequenzgang $H(f)$ nach Betrag und Phase vollständig bestimmen, wenn:

- [ ] die Funktionen $\varphi_x(\tau)$ und $\varphi_y(\tau)$ bekannt sind,
- [ ] die Funktionen $\varphi_x(\tau)$ und $\varphi_{xy}(\tau)$ bekannt sind,
- [ ] die Funktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_y(\tau)$ bekannt sind.

b) Berechnen Sie die Impulsantwort $h(t)$. Welcher Wert ergibt sich für $t = T_0$?

$\boldsymbol{h(t = T_0)}$ = 1/s

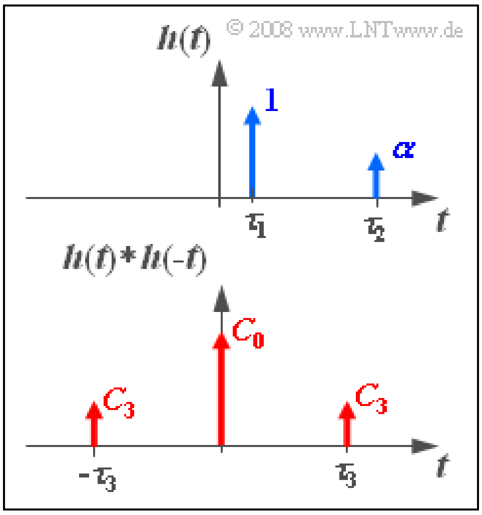
c) Wie lautet der Frequenzgang $H(f)$? Welcher Wert ergibt sich für $f = 0$?

$\boldsymbol{H(f = 0)}$ =

d) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals $y(t)$. Welcher Wert ergibt sich bei $f = 1/(2\pi T_0)$?

$\boldsymbol{\Phi_y(f = 1/(2\pi T_0))}$ = W/Hz

Z5.2: Zweiwegekanal



Von einem Übertragungssystem ist bekannt, dass zwischen dem Eingangssignal $x(t)$ und dem Ausgangssignal $y(t)$ der folgende Zusammenhang besteht:

$$y(t) = x(t - \tau_1) + \alpha \cdot x(t - \tau_2).$$

Die dazugehörige Impulsantwort ist rechts skizziert. Verwenden Sie für die numerischen Berechnungen stets den Wert $\alpha = 0.5$. Für die Teilaufgaben a) und b) gelte zudem $\tau_1 = 0$ und $\tau_2 = 4$ ms; für die späteren Aufgabenteile sei $\tau_1 = 1$ ms und $\tau_2 = 5$ ms.

In der unteren Skizze ist die Funktion

$$h(t) * h(-t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ |H(f)|^2$$

dargestellt, wobei die Parameter C_0, C_3 und τ_3 von α, τ_1 und τ_2 abhängen (siehe Teilaufgabe d).

Das Eingangssignal $x(t)$ sei bandbegrenztes weißes Rauschen mit der Rauschleistungsdichte $N_0 = 1$ µW und der Bandbreite $B = 10$ kHz, woraus sich die Leistung $P_x = 10$ mW berechnen lässt.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.1.**

Fragebogen zu "Z5.2: Zweiwegekanal"

a) Berechnen Sie den Frequenzgang $H(f)$ für $\tau_1 = 0$ und $\tau_2 = 4$ ms. Zeigen Sie, dass $H(f)$ eine mit f_0 periodische Funktion ist. Wie groß ist f_0?

f_0 = kHz

b) Berechnen Sie $|H(f)|^2$. Wie groß ist $|H(f = 0)|^2$ mit $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 4$ ms, $\alpha = 0.5$?

$|H(f = 0)|^2$ =

c) Wie verändert sich die Funktion $|H(f)|^2$ mit $\tau_1 = 1$ ms und $\tau_2 = 5$ ms? Die Dämpfungskonstante α sei weiterhin 0.5. Geben Sie den Wert bei $f = 0$ ein.

$|H(f = 0)|^2$ =

d) Es gelte weiterhin $\alpha = 0.5$, $\tau_1 = 1$ ms und $\tau_2 = 5$ ms. Welche Werte ergeben sich für die Funktionsparameter von $h(t) * h(-t)$ entsprechend der Skizze?

C_0 =

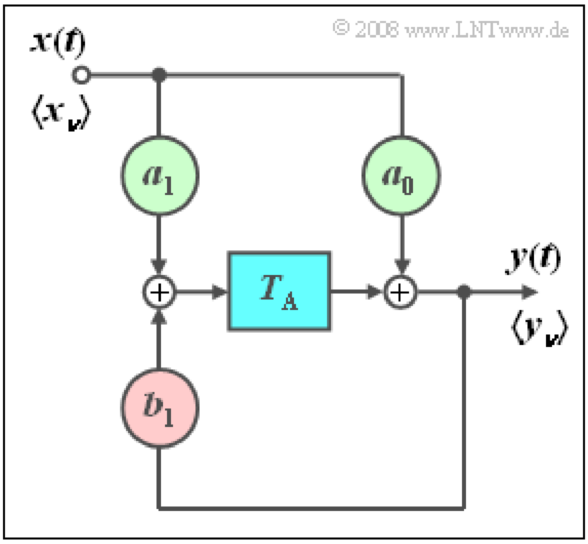
C_3 =

τ_3 = ms

e) Wie groß ist die Leistung des Ausgangssignals $y(t)$?

P_y = mW

A5.3: Digitales Filter 1. Ordnung



Wir betrachten die nebenstehende Filteranordnung mit den Koeffizienten a_0, a_1 und b_1, die alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen können. Das Eingangssignal ist ein einziger Diracimpuls mit dem Einheitsgewicht „1" – also $x(t) = \delta(t)$ – was der folgenden zeitdiskreten Darstellung entspricht:

$$\langle x_\nu \rangle = \langle 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots \rangle\ .$$

Aufgrund dieser speziellen Eingangsfolge beschreibt die Folge $\langle y_\nu \rangle$ am Filterausgang gleichzeitig die zeitdiskrete Impulsantwort des Filters. Der Abstand der Abtastwerte beträgt hierbei T_A = 1 µs.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.2.**

Fragebogen zu "A5.3: Digitales Filter 1. Ordnung"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Der Sonderfall $b_1 = 1$ führt zu einem nichtrekursiven Filter.
- ☐ Es gilt $y(t) = x(t)$, wenn $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ gewählt wird.
- ☐ Mit $a_0 = 0$, $a_1 = 0.5$, $b_1 = 0$ ist $y(t)$ gegenüber $x(t)$ unverzerrt.

b) Es gelte nun $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ und $b_1 = 0.6$. Berechnen Sie die Ausgangsfolge $\langle y_\nu \rangle$. Welcher Ausgangswert y_3 tritt zum Zeitpunkt $t = 3 \cdot T_\text{A}$ auf?

$\boldsymbol{y_3(a_1 = 0)}$ =

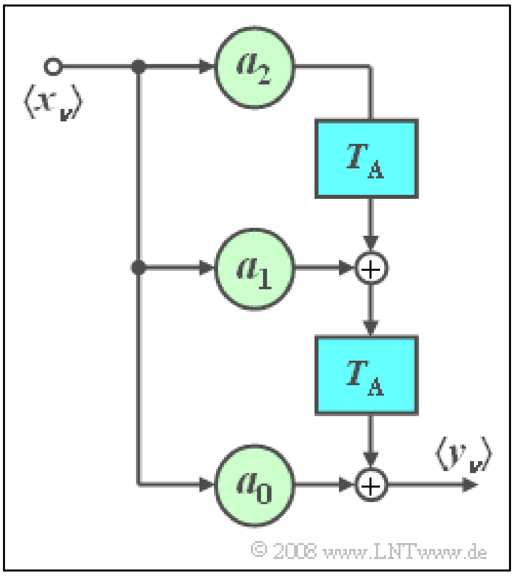
c) Auf welchen Bereich 0 ... $M \cdot T_\text{A}$ ist die Impulsantwort beschränkt, wenn man Werte kleiner als 0.001 vernachlässigt? ($a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0.6$)

$\boldsymbol{M}$ =

d) Es gelte weiterhin $a_0 = 1$ und $b_1 = 0.6$. Berechnen Sie unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus b) den Ausgangswert y_3 für $a_1 = -0.5$.

$\boldsymbol{y_3(a_1 = -0.5)}$ =

Z5.3: Nichtrekursives Filter



Betrachtet wird das nebenstehende nichtrekursive Filter mit den Filterkoeffizienten

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1.$$

Gesucht sind die jeweiligen Ausgangsfolgen $\langle y_\nu \rangle$, wenn am Eingang folgende Wertefolgen angelegt werden:

- die *Gleichfolge*

  $$\langle x_\nu \rangle = \langle g_\nu \rangle = \langle\, 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots \rangle\,.$$

- die *Sinusfolge* mit der Periodendauer $T_0 = 4 \cdot T_A$:

  $$\langle x_\nu \rangle = \langle s_\nu \rangle = \langle\, 0,\ 1,\ 0, -1,\ 0,\ 1,\ 0, -1,\ \ldots \rangle\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 5.2** und das **Kapitel 3** des Buches „Signaldarstellung".

Fragebogen zu "Z5.3: Nichtrekursives Filter"

a) Wie lautet die Impulsantwort $h(t)$ des Filters? Zu welchem Zeitpunkt $\nu \cdot T_\text{A}$ hat diese ihr Maximum?

$\boldsymbol{\nu}$ =

b) Berechnen Sie den Frequenzgang $H(f)$. Wie groß ist der Wert bei $f = 0$?

$\boldsymbol{H(f = 0)}$ =

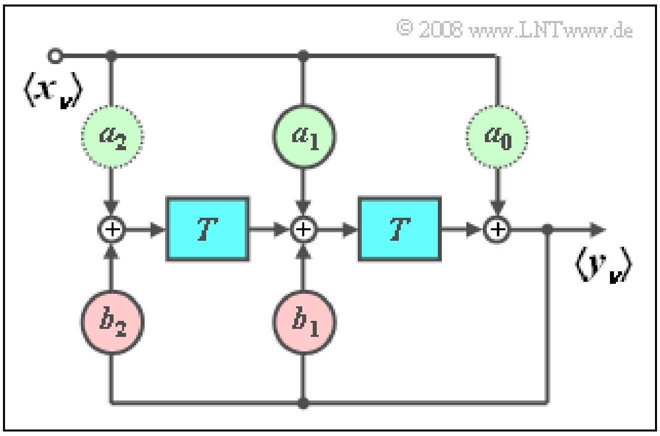
c) Bestimmen Sie die Ausgangsfolge $\langle y_\nu \rangle$ für die Eingangsfolge $\langle g_\nu \rangle$. Interpretieren Sie das Ergebnis unter Berücksichtigung von Punkt b). Welcher Ausgangswert ergibt sich für $\nu = 4$?

$\boldsymbol{y_4}$**(Eingang** $\boldsymbol{\langle g_\nu \rangle}$ **)** =

d) Bestimmen Sie die Ausgangsfolge $\langle y_\nu \rangle$ für die Eingangsfolge $\langle s_\nu \rangle$. Interpretieren Sie das Ergebnis. Welcher Ausgangswert ergibt sich für $\nu = 4$?

$\boldsymbol{y_4}$**(Eingang** $\boldsymbol{\langle s_\nu \rangle}$ **)** =

A5.4: Sinusgenerator



Das Bild zeigt ein digitales Filter zweiter Ordnung, das zum Beispiel zur Erzeugung einer zeitdiskreten Sinusfunktion auf einem digitalen Signalprozessor (DSP) geeignet ist:

$$\langle y_\nu \rangle = \langle \sin(\nu T \omega_0) \rangle \, .$$

Voraussetzung hierfür ist, dass die Eingangsfolge $\langle x_\nu \rangle$ eine Diracfunktion beschreibt. Damit sind für Zeiten $\nu < 0$ automatisch auch alle Ausgangswerte y_ν identisch 0.

Die Filterkoeffizienten ergeben sich aus der z-Transformation, die im Buch „Lineare zeitvariante Systeme" behandelt wird:

$$z\{\sin(\nu T \omega_0)\} = \frac{z \cdot \sin(\omega_0 T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega_0 T) + 1}.$$

Setzt man diese Gleichung durch ein rekursives Filter zweiter Ordnung (M = 2) um, so erhält man die folgenden Filterkoeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = \sin(\omega_0 T), \quad a_2 = 0, \\ b_1 &= 2 \cdot \cos(\omega_0 T), \quad b_2 = -1. \end{aligned}$$

Im Bild ist bereits markiert, dass auf die Filterkoeffizienten a_0 und a_2 verzichtet werden kann.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 5.2,** wobei zur Vereinfachung der Gleichungen T anstelle der Laufzeit T_0 benutzt wird. Für die Teilaufgaben a) bis c) gelte:

$$a_1 = 0.5, \quad b_1 = \sqrt{3}.$$

Fragebogen zu "A5.4: Sinusgenerator"

a) Es gelte a_1 = 0.5 und $b_1 = 3^{1/2}$. Berechnen Sie die Ausgangswerte y_ν zu den Zeitpunkten ν = 0, ν = 1 und ν = 2.

$\boldsymbol{y_0}$ =

$\boldsymbol{y_1}$ =

$\boldsymbol{y_2}$ =

b) Wie lautet der Ausgangswert y_ν für $\nu \geq 2$ allgemein? Berechnen Sie die Werte y_3, ... , y_7 und geben Sie zur Kontrolle y_7 ein.

$\boldsymbol{y_7}$ =

c) Durch wie viele Stützstellen (T_0/T) wird eine Periodendauer (T_0) dargestellt?

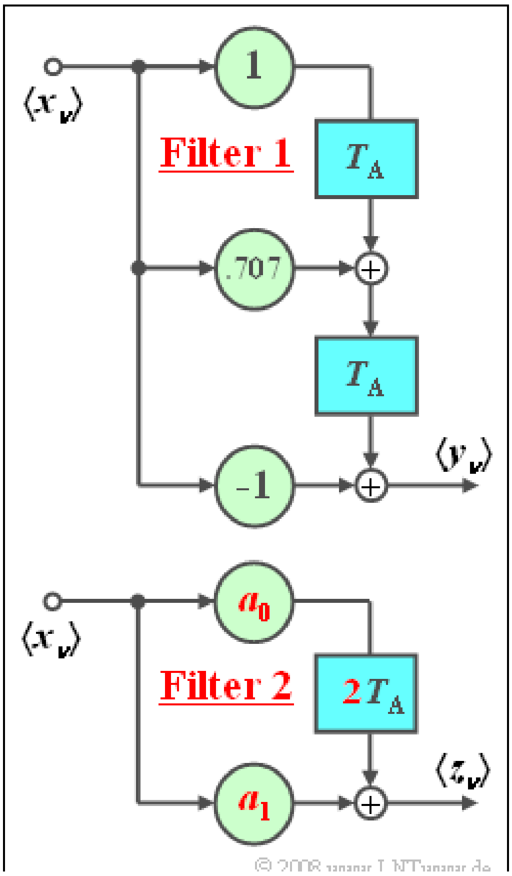
$\boldsymbol{T_0/T}$ =

d) Es gelte nun T = 1 µs. Wie müssen die Koeffizienten a_1 und b_1 gewählt werden, damit eine 10 kHz–Sinusschwingung erzeugt wird?

$\boldsymbol{a_1}$ =

$\boldsymbol{b_1}$ =

A5.5: AKF-äquivalente Filter



Es werden die nebenstehend skizzierten Filterkonfigurationen betrachtet. Die Eingangswerte $\langle x_\nu \rangle$ sind bei den beiden Filtern statistisch voneinander unabhängig und jeweils gleichverteilt zwischen –1 und +1. Daraus folgt direkt für den Mittelwert und die Varianz:

$$m_x = 0, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{3}.$$

Die beiden Verzögerungszeiten von Filter 1 sind jeweils gleich T_A = 1 µs. Die Verzögerung von Filter 2 ist doppelt so lang.

Die Koeffizienten a_0 und a_1 sollen so eingestellt werden, dass die Autokorrelationsfunktionen (AKF) von $\langle y_\nu \rangle$ und von $\langle z_\nu \rangle$ vollständig übereinstimmen. Bei mehreren Lösungen wählen Sie bitte diejenige mit $|a_0| > |a_1|$.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die Theorieteil von **Kapitel 5.3.**

Fragebogen zu "A5.5: AKF-äquivalente Filter"

a) Welche Aussagen sind bezüglich Filter 1 zutreffend?

- ☐ Es handelt sich um ein nichtrekursives Filter.
- ☐ Die Ordnung des Filters ist $M = 2$.
- ☐ Der Filterkoeffizient a_0 ist gleich 1.

b) Berechnen Sie die Streuung der Ausgangsfolge $\langle y_\nu \rangle$.

$\boldsymbol{\sigma_y}$ =

c) Berechnen Sie die AKF-Werte $\varphi_y(k \cdot T_\text{A})$ für $k = 1$ und $k = 2$.

$\boldsymbol{\varphi_y(T_\text{A})}$ =

$\boldsymbol{\varphi_y(2T_\text{A})}$ =

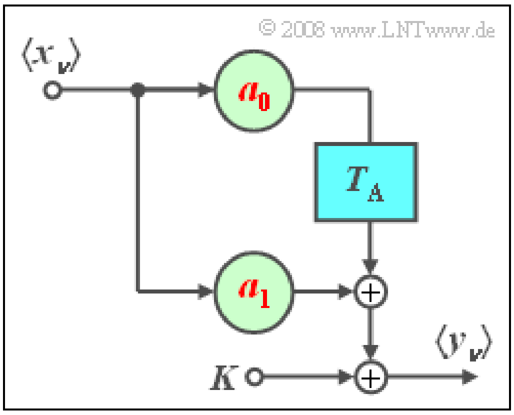
d) Bestimmen Sie die Koeffizienten des zweiten Filters, damit $\langle z_\nu \rangle$ die gleiche AKF besitzt wie $\langle y_\nu \rangle$. Geben Sie den Quotienten a_1/a_0 an. Es gelte $|a_0| > |a_1|$.

$\boldsymbol{a_1/a_0}$ =

e) Welche Aussagen treffen bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen zu?

- ☐ $f_y(y)$ und $f_z(z)$ sind identisch.
- ☐ $f_y(y)$ und $f_z(z)$ sind unterschiedlich.
- ☐ Bei Gaußscher Eingangsgröße wären $f_y(y)$ und $f_z(z)$ gleich.

Z5.5: AKF nach Filter 1. Ordnung



Wir betrachten hier ein nichtrekursives Filter erster Ordnung ($M = 1$) mit den Filterkoeffizienten $a_0 = 0.4$ und $a_1 = 0.3$. Am Filterausgang wird eine Konstante K hinzuaddiert, die vorerst (bis einschließlich Teilaufgabe c) zu Null gesetzt werden soll.

Das zeitdiskrete Eingangssignal $\langle x_\nu \rangle$ ist gaußisch, mittelwertfrei und besitzt die Streuung $\sigma_x = 1$.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.3.**

Fragebogen zu "Z5.5: AKF nach Filter 1. Ordnung"

a) Welche Aussagen sind bezüglich der Ausgangs-AKF zutreffend, wenn $K = 0$ ist? Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

- [ ] Der AKF-Wert $\varphi_y(0)$ gibt die Streuung σ_y an.
- [ ] Alle AKF-Werte $\varphi_y(k \cdot T_\mathrm{A})$ mit $k \geq 2$ sind 0.
- [ ] Das LDS $\Phi_y(f)$ verläuft cosinusförmig.

b) Berechnen Sie die AKF-Werte $\varphi_y(k \cdot T_\mathrm{A})$ für $k = 0$ und $k = 1$.

$\boldsymbol{\varphi_y(0)}$ =

$\boldsymbol{\varphi_y(T_\mathrm{A})}$ =

c) Welche Werte müssen für die Koeffizienten a_0 und a_1 eingestellt werden, wenn bei gleicher AKF-Form die Streuung $\sigma_y = 1$ betragen soll?

$\boldsymbol{a_0}$ =

$\boldsymbol{a_1}$ =

d) Es gelte wieder $a_0 = 0.4$ und $a_1 = 0.3$. Wie groß ist die Konstante K zu wählen, damit $\varphi_y(0) = 0.5$ ist?

$\boldsymbol{K}$ =

e) Berechnen Sie mit diesem Wert von K die AKF-Werte für $k = 1$ und $k = 2$.

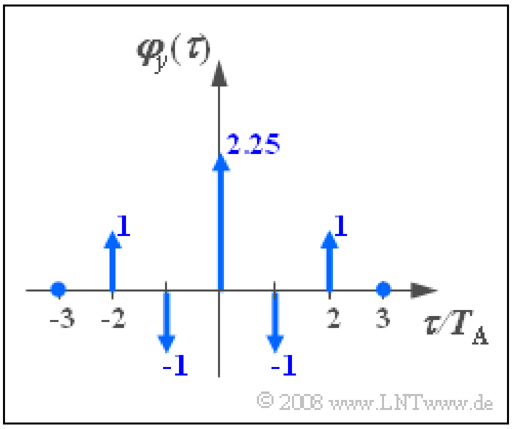
$\boldsymbol{\varphi_y(T_\mathrm{A})}$ =

$\boldsymbol{\varphi_y(2T_\mathrm{A})}$ =

f) Welcher Wert ergibt sich nun für die Streuung σ_y?

$\boldsymbol{\sigma_y}$ =

A5.6: Filterdimensionierung



Mit Hilfe eines Digitalfilters soll eine zeitdiskrete Zufallsgröße $\langle y_\nu \rangle$ mit der nebenstehend skizzierten Autokorrelationsfunktion (AKF) erzeugt werden. Alle AKF-Werte $\varphi_y(k \cdot T_A)$ mit Index $|k| > 2$ seien 0.

Die zeitdiskreten Gaußschen Eingangswerte x_ν weisen jeweils den Mittelwert $m_x = 0$ und die Streuung $\sigma_x = 1$ auf.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 5.3.**

Fragebogen zu "A5.6: Filterdimensionierung"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Es eignet sich ein rekursives Filter erster Ordnung.
- ☐ Es eignet sich ein nichtrekursives Filter erster Ordnung.
- ☐ Es eignet sich ein nichtrekursives Filter zweiter Ordnung.
- ☐ Die Ausgangswerte $y_ν$ sind dreieckverteilt.
- ☐ Die Ausgangswerte $y_ν$ sind mittelwertfrei ($m_y = 0$).

b) Geben Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2 an. Ersetzen Sie die 3 Variablen durch $u = a_1^2$, $w = (a_0 + a_2)^2$ und bestimmen Sie die Größen u und w. *Hinweis:* Es gibt nur eine sinnvolle Lösung.

$\boldsymbol{u}$ =

$\boldsymbol{w}$ =

c) Bestimmen Sie die Filterkoeffizienten a_0, a_1, a_2. Geben Sie die nachfolgenden Quotienten ein:

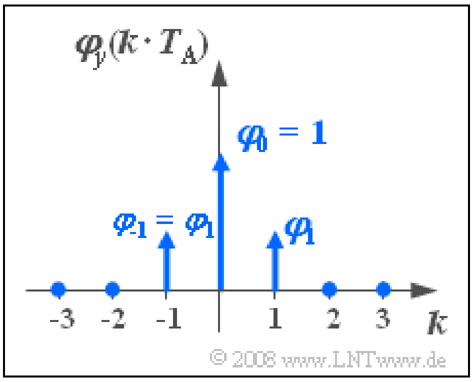
$\boldsymbol{a_1/a_0}$ =

$\boldsymbol{a_2/a_0}$ =

d) Wieviele unterschiedliche Parametersätze (I) führen zur gewünschten AKF?

$\boldsymbol{I}$ =

Z5.6: Nochmals Filterdimensionierung



Mit Hilfe eines nichtrekursiven digitalen Filters erster Ordnung soll eine zeitdiskrete Zufallsgröße $\langle y_\nu \rangle$ generiert werden, die folgende AKF-Werte aufweist:

$$\varphi_y(k \cdot T_A) = \begin{cases} \varphi_0 = 1 & \text{für} \quad k = 0 \\ \varphi_1 & \text{für} \quad |k| = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet φ_1 einen in Grenzen frei wählbaren Parameter.

Die zeitdiskreten Eingangswerte x_ν sind gaußverteilt mit Mittelwert m_x und Streuung σ_x. Zunächst gelte $m_x = 0$ und $\sigma_x = 1$. Damit lautet das Gleichungssystem zur Bestimmung der Filterkoeffizienten a_0 und a_1:

$$a_0^2 + a_1^2 = 1,$$

$$a_0 \cdot a_1 = \varphi_1.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 5.3.**

Fragebogen zu "Z5.6: Nochmals Filterdimensionierung"

a) In welchen Grenzen kann φ_1 liegen, damit das Gleichungssystem lösbar ist?

$\boldsymbol{\varphi_{1,\,\max}}$ =

$\boldsymbol{\varphi_{1,\,\min}}$ =

b) Es gelte φ_1 = –0.3. Bestimmen Sie die Filterparameter a_0 und a_1. Wählen Sie die Lösung mit positivem a_0 und $|a_0| > |a_1|$.

$\boldsymbol{a_0}$ =

$\boldsymbol{a_1}$ =

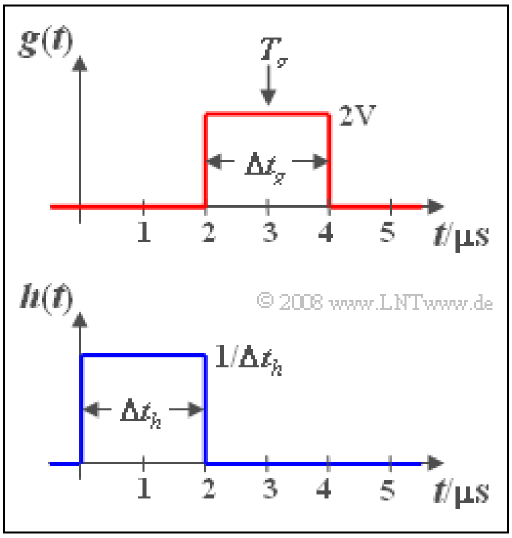
c) Wie ändert sich die AKF, wenn bei gleichen Filterkoeffizienten nun σ_x = 2 gilt? Wie groß ist insbesondere der AKF-Wert für k = 1?

$\boldsymbol{\varphi_y(T_A)}$ =

d) Wie ändert sich die AKF bei gleichen Filterkoeffizienten und σ_x = 2, wenn der Gleichanteil m_x auf 1 erhöht wird? Wie groß ist nun der AKF-Wert für k = 1?

$\boldsymbol{\varphi_y(T_A)}$ =

A5.7: Rechteck-Matched-Filter



Am Eingang eines Tiefpassfilters mit einer rechteckförmigen Impulsantwort $h(t)$ liegt das Empfangssignal $r(t)$ an, das sich additiv aus einem impulsförmigen Nutzsignal $g(t)$ und einem Rauschsignal $n(t)$ zusammensetzt. Bei Letzterem handelt es sich um „Weißes Gaußsches Rauschen" mit der konstanten einseitigen Leistungsdichte $N_0 = 4 \cdot 10^{-6}\,\text{V}^2/\text{Hz}$, bezogen auf den Widerstand 1 Ω.

Der Nutzimpuls ist ebenfalls rechteckförmig. Die Impulsdauer beträgt Δt_g = 2 µs und die Impulsamplitude g_0 = 2 V. Die Mitte dieses Impulses liegt bei T_g = 3 µs.

Die rechteckförmige Impulsantwort des Filters beginnt bei t = 0. Die Impulsantwortdauer Δt_h ist ein freier Parameter. Die Höhe $1/\Delta t_h$ der Impulsantwort ist jeweils so angepasst, dass $H(f = 0) = 1$ gilt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 5.4.** Für die Teilfragen a) bis f) gelte stets $\Delta t_h = \Delta t_g$ = 2 µs.

Fragebogen zu "A5.7: Rechteck-Matched-Filter"

a) Welche der drei Aussagen sind unter der Annahme $\Delta t_h = \Delta t_g$ zutreffend?

- ☐ Das Filter ist an den Eingangsimpuls $g(t)$ angepasst.
- ☐ Es gibt ein anderes Filter mit größerem S/N-Verhältnis.
- ☐ Das Filter lässt sich als Integrator über die Zeit Δt_h realisieren.

b) Was ist der optimale Detektionszeitpunkt?

$T_{\rm D,\,opt}$ = µs

c) Welchen Wert besitzt hier die Matched-Filter-Konstante?

$K_{\rm MF}$ = 1/Vs

d) Welches S/N-Verhältnis ergibt sich zum optimalen Detektionszeitpunkt?

$\rho_d(T_{\rm D,\,opt})$ =

e) Wie groß sind der Detektionsnutzabtastwert zum optimalen Detektionszeitpunkt $T_{\rm D,\,opt}$ und die Störleistung vor dem Detektor?

$d_{\rm S}(T_{\rm D,\,opt})$ = V

σ_d^2 = V²

f) Welches S/N-Verhältnis ergibt sich zum Detektionszeitpunkt $T_{\rm D}$ = 3 µs?

$\rho_d(T_{\rm D} = 3\ \mu s)$ =

g) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu, wenn Δt_h = 1 µs gilt? *Hinweis:* Im Bereich von 0 bis 1 µs hat die Impulsantwort somit den Wert 10^6 1/s.

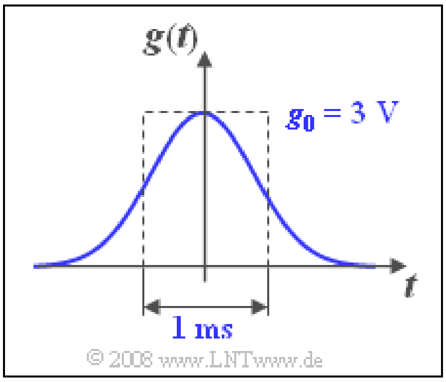
- ☐ Jeder $T_{\rm D}$-Wert zwischen 3 µs und 4 µs führt zum maximalen SNR.
- ☐ Der Nutzwert $d_{\rm S}(T_{D,\,\rm opt})$ ist kleiner als unter Punkt e) berechnet.
- ☐ Die Störleistung σ_d^2 ist größer als unter Punkt e) berechnet.
- ☐ Das S/N-Verhältnis ist kleiner als unter Punkt c) berechnet.

h) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu, wenn Δt_h = 3 µs gilt? *Hinweis:* Im Bereich von 0 bis 1 µs hat die Impulsantwort somit den Wert $0.33 \cdot 10^6$ 1/s.

- ☐ Jeder $T_{\rm D}$-Wert zwischen 3 µs und 4 µs führt zum maximalen SNR.
- ☐ Der Nutzwert $d_{\rm S}(T_{D,\,\rm opt})$ ist kleiner als unter Punkt e) berechnet.

- [ ] Die Störleistung σ_d^2 ist größer als unter Punkt e) berechnet.
- [ ] Das S/N-Verhältnis ist kleiner als unter Punkt c) berechnet.

Z5.7: Matched-Filter - alles gaußisch



Am Eingang eines Filters liegt ein von weißem Rauschen mit der Rauschleistungsdichte $N_0 = 10^{-4}\ \text{V}^2/\text{Hz}$ überlagerter Gaußimpuls mit der Amplitude g_0 und der äquivalenten Dauer $\Delta t_g = 1$ ms an:

$$g(t) = g_0 \cdot \mathrm{e}^{-\pi (t/\Delta t_g)^2}.$$

Die Impulsenergie beträgt $E_g = 0.01\ \text{V}^2\text{s}$. Das Empfangsfilter sei ein akausaler Gaußtiefpass mit dem Frequenzgang

$$H_\text{E}(f) = \mathrm{e}^{-\pi (f/\Delta f_\text{E})^2}.$$

Die dazugehörige Impulsantwort lautet somit:

$$h_\text{E}(t) = \Delta f_\text{E} \cdot \mathrm{e}^{-\pi (\Delta f_\text{E} \cdot t)^2}.$$

Die systemtheoretische Filterbandbreite Δf_E soll so gewählt werden, dass der Gaußtiefpass optimal an den Eingangsimpuls $g(t)$ angepasst ist. Man spricht dann von einem Matched-Filter.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.4.** Benutzen Sie zur Lösung das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a^2 x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Fragebogen zu "Z5.7: Matched-Filter - alles gaußisch"

a) Berechnen Sie die Impulsamplitude.

g_0 = ___ V

b) Wie groß ist das maximal mögliche S/N-Verhältnis am Filterausgang in dB?

$10 \cdot \lg \rho_d(T_{\rm D,\,opt})$ = ___ dB

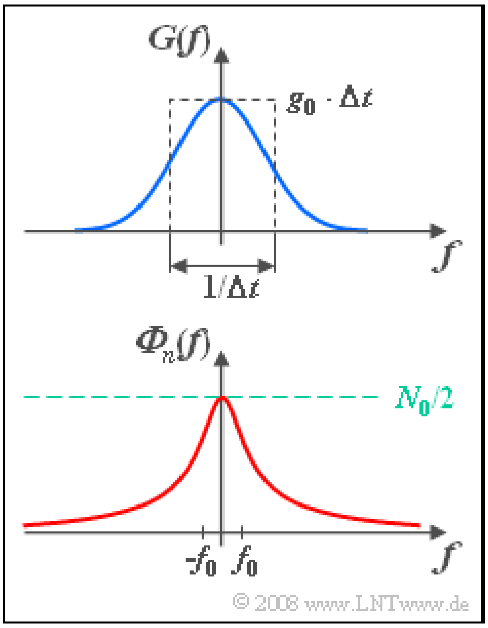
c) Bei welcher Filterbandbreite wird dieses S/N-Verhältnis erreicht?

$\Delta f_{\rm E,\,opt}$ = ___ kHz

d) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu, wenn die Filterbandbreite $\Delta f_{\rm E}$ kleiner ist als unter Punkt c) berechnet?

- [ ] Der Nutzabtastwert $d_{\rm S}(T_{\rm D,\,opt})$ ist kleiner als beim Matched-Filter.
- [ ] Die Störleistung σ_d^2 ist größer als beim Matched-Filter.
- [ ] Das S/N-Verhältnis ist kleiner als unter Punkt b) berechnet.

A5.8: Matched-Filter bei farbiger Störung



Am Eingang eines Filters liegt ein Gaußimpuls

$$g(t) = g_0 \cdot \mathrm{e}^{-\pi (t/\Delta t)^2}$$

mit der Amplitude g_0 = 2 V und der äquivalenten Impulsdauer Δt = 1 ms an. Die dazugehörige Spektralfunktion $G(f)$ ist oben skizziert. Die Energie dieses Gaußimpulses ist wie folgt gegeben:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2 \, \mathrm{d}t = \frac{g_0^2 \cdot \Delta t}{\sqrt{2}} = 2.83 \cdot 10^{-3} \ \mathrm{V^2 s}.$$

Der Impuls wird durch eine Störung $n(t)$ weitgehend überdeckt, für die folgende Alternativen betrachtet werden sollen:

- Die zweiseitige Störleistungsdichte sei konstant (Frage a):

$$\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2}, \quad N_0 = 10^{-6} \ \mathrm{V^2/Hz}.$$

- Das Störsignal $n(t)$ sei farbig mit folgender Störleistungsdichte:

$$\Phi_n(f) = \frac{N_0/2}{1 + (f/f_0)^2}, \quad f_0 = 500 \ \mathrm{Hz}.$$

Dieser LDS-Verlauf kann z. B. aus weißem Rauschen durch ein Formfilter mit dem Frequenzgang

$$H_\mathrm{N}(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j} f/f_0} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad h_\mathrm{N}(t) = 2\pi f_0 \cdot \mathrm{e}^{-2\pi f_0 t}$$

modelliert werden (Tiefpass erster Ordnung).

Das Filter sei jeweils optimal an die Sendeimpulsform $g(t)$ und das Störleistungsdichtespektrum $\Phi_n(f)$ angepasst: $H(f) = H_\mathrm{MF}(f)$. Die Filterkonstante K_MF ist so zu wählen, dass $H(f = 0)$ zu 1 wird. Der Detektionszeitpunkt sei vereinfachend T_D = 0 (akausale Systembeschreibung).

Hinweis: Diese Aufgabe behandelt den Lehrstoff von **Kapitel 5.4.** Gegeben ist zudem das folgende bestimmte Integral:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = 1.$$

Fragebogen zu "A5.8: Matched-Filter bei farbiger Störung"

a) Welches S/N-Verhältnis (in dB) stellt sich im Fall des weißen Rauschens ein?

$10 \cdot \lg \rho_{d,\mathrm{WR}}$ = dB

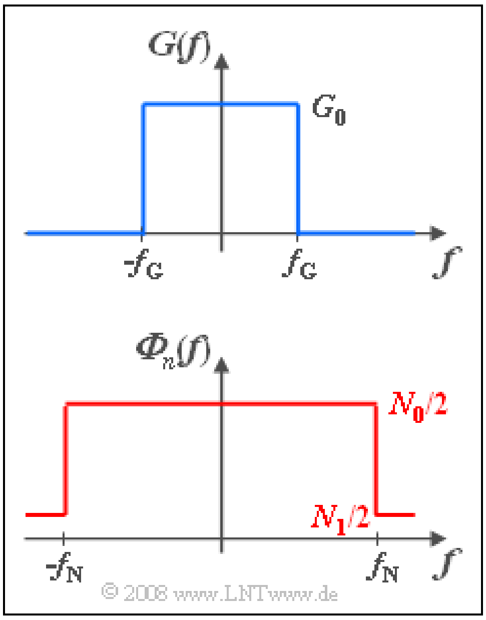
b) Berechnen und interpretieren Sie den MF-Frequenzgang bei den vorliegenden farbigen Störungen. Welchen Wert besitzt $H_{\mathrm{MF}}(f)$ bei f = 1 kHz?

$|H_{\mathrm{MF}}(f = 1\ \mathrm{kHz})|$ =

c) Welches S/N-Verhältnis (in dB) stellt sich im Fall der vorgegebenen farbigen Störung am Empfänger ein? Begründen Sie das bessere Ergebnis.

$10 \cdot \lg \rho_d$ = dB

Z5.8: Matched-Filter bei Rechteck-LDS



Die bei einem Nachrichtensystem wirksame Störleistungsdichte kann als bereichsweise konstant angenommen werden:

$$\Phi_n(f) = \begin{cases} N_0/2 & \text{für} \quad |f| \le f_\mathrm{N}, \\ N_1/2 & \text{für} \quad |f| > f_\mathrm{N}. \end{cases}$$

Hierbei sei die Störleistungsdichte N_1 im äußeren Bereich stets sehr viel kleiner als N_0. Verwenden Sie z. B. folgende Werte:

$$N_0 = 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V^2/Hz}, \quad N_1 = 2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{V^2/Hz}.$$

Ein solches Störsignal $n(t)$ tritt beispielsweise dann auf, wenn die dominante Störquelle nur Anteile unterhalb der Grenzfrequenz f_N beinhaltet. Aufgrund des unvermeidbaren thermischen Rauschens ist jedoch auch oberhalb von $|f| = f_\mathrm{N}$ die Störleistungsdichte $\Phi_n(f) \ne 0$.

Die Spektralfunktion $G(f)$ sei entsprechend der obigen Skizze ebenfalls rechteckförmig. Der zugehörige Nutzimpuls $g(t)$ hat deshalb mit $\Delta f = 2 \cdot f_\mathrm{G}$ folgenden Verlauf:

$$g(t) = G_0 \cdot \Delta f \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t)\,.$$

Verwenden Sie für numerische Berechnungen stets die Zahlenwerte

$$G_0 = 10^{-4}\ \mathrm{V/Hz}, \quad \Delta f = 10\ \mathrm{kHz}.$$

Das Empfangsfilter sei optimal an das Nutzspektrum $G(f)$ und das Stör-LDS $\Phi_n(f)$ angepasst, d. h. es gelte: $H(f) = H_\mathrm{MF}(f)$. Der Detektionszeitpunkt sei vereinfachend $T_\mathrm{D} = 0$ (akausale Systembeschreibung).

Hinweis: Diese Aufgabe behandelt den Lehrstoff von **Kapitel 5.4.**

Fragebogen zu "Z5.8: Matched-Filter bei Rechteck-LDS"

a) Welche der folgenden Aussagen treffen unter der Voraussetzung $f_N > f_G$ zu?

- ☐ Anwendbar ist das „Matched-Filter" für „Weißes Rauschen".
- ☐ Der MF-Ausgangsimpuls ist dreieckförmig.
- ☐ Der MF-Ausgangsimpuls ist si-förmig.
- ☐ Der MF-Ausgangsimpuls ist si^2-förmig.

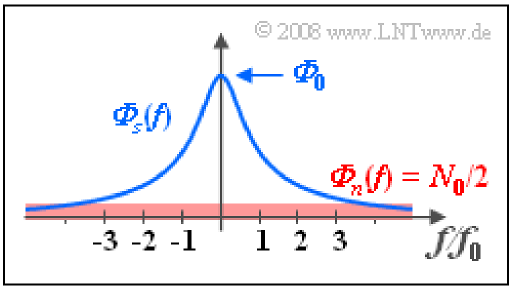
b) Welches S/N-Verhältnis (in dB) ergibt sich für $f_N > f_G$?

$\mathbf{10 \cdot lg(\rho_d)}$ = dB

c) Welches SNR (in dB) ergibt sich für $f_N = f_G/2$? Interpretieren Sie das Ergebnis.

$\mathbf{10 \cdot lg(\rho_d)}$ = dB

A5.9: Minimierung des MQF



Gegeben ist hier ein stochastisches Nutzsignal $s(t)$, von dem lediglich das Leistungsdichtespektrum (LDS) bekannt ist:

$$\Phi_s(f) = \frac{\Phi_0}{1 + (f/f_0)^2}.$$

Dieses ist in der nebenstehenden Grafik blau dargestellt.

Die mittlere Leistung von $s(t)$ ergibt sich durch Integration über das Leistungsdichtespektrum:

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f)\,\mathrm{d}f = \Phi_0 \cdot f_0 \cdot \pi.$$

Additiv überlagert ist dem Nutzsignal $s(t)$ weißes Rauschen mit der Rauschleistungsdichte $\Phi_n(f) = N_0/2$.

Als Abkürzung verwenden wir $Q = 2\Phi_0/N_0$, wobei Q als „Qualität" interpretiert werden kann. Zu beachten ist, dass Q kein Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis darstellt.

In dieser Aufgabe wird der Frequenzgang $H(f)$ eines Filters gesucht, das den mittleren quadratischen Fehler (MQF) zwischen dem Nutzsignal $s(t)$ und dem Filterausgangssignal $d(t)$ minimiert:

$$\mathrm{MQF} = \lim_{T_\mathrm{M} \to \infty} \frac{1}{T_\mathrm{M}} \int_{-T_\mathrm{M}/2}^{T_\mathrm{M}/2} |d(t) - s(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.5.** Zur Lösung vorgegeben wird das folgende Integral:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

Fragebogen zu "A5.9: Minimierung des MQF"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ $H(f)$ ist ein Gaußtiefpass.
- ☐ $H(f)$ stellt ein Matched-Filter dar.
- ☐ $H(f)$ ist ein Wiener-Kolmogoroff-Filter.

b) Bestimmen Sie den Frequenzgang $H(f)$ des optimalen Filters. Welche Werte ergeben sich bei $f = 0$ und $f = 2f_0$ mit $Q = 3$?

$\boldsymbol{H(f = 0)}$ =

$\boldsymbol{H(f = 2f_0)}$ =

c) Es gelte weiterhin $Q = 3$. Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler (MQF) bezogen auf P_s für das bestmögliche Filter.

MQF / $\boldsymbol{P_s}$ =

d) Wie groß muss der „Qualitätsfaktor" Q mindestens gewählt werden, damit für den Quotienten MQF/P_s der Wert 0.1 erreicht werden kann?

$\boldsymbol{Q_{\min}}$ =

e) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Ein formgleiches Filter $K \cdot H(f)$ führt zum gleichen Ergebnis.
- ☐ Das Ausgangssignal $d(t)$ enthält bei großem Q höhere Frequenzen.