

Zu Kapitel 3.6: Herleitung der Transformationskennlinie

Es soll eine geeignete Transformationskennlinie $x = g(u)$ ermittelt werden, die aus einer zwischen 0 und 1 gleichverteilten Zufallsgröße u eine einseitig exponentialverteilte Zufallsgröße x formt:

$$f_u(u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < u < 1, \\ 0.5 & \text{falls } u = 0, u = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x > 0, \\ \lambda/2 & \text{falls } x = 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Ausgehend von der allgemeinen Transformationsgleichung

$$f_x(x) = \frac{f_u(u)}{|g'(u)|} \Bigg|_{u=h(x)}$$

erhält man durch Umstellen und Einsetzen der gegebenen WDF $f_x(x)$:

$$|g'(u)| = \frac{f_u(u)}{f_x(x)} \Bigg|_{x=g(u)} = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot g(u)}.$$

Hierbei bezeichnet $x = g'(u)$ die Ableitung der Kennlinie, die wir als monoton steigend voraussetzen. Mit dieser Annahme erhält man $|g'(u)| = g'(u) = dx/du$ und die Differentialgleichung

$$du = \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx$$

mit der Lösung

$$u = K - e^{-\lambda x}.$$

Aus der Bedingung, dass die Eingangsgröße $u = 0$ zum Ausgangswert $x = 0$ führen soll, erhält man für die Konstante $K = 1$ und damit

$$u = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Löst man diese Gleichung nach x auf, so ergibt sich die vorne angegebene Gleichung:

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(\frac{1}{1 - u} \right).$$

Bei einer Rechnerimplementierung ist allerdings sicherzustellen, dass für die gleichverteilte Eingangsgröße u der kritische Wert 1 ausgeschlossen wird. Dies wirkt sich jedoch auf das Endergebnis nicht aus.

q.e.d.

Zu Kapitel 4.5: Reziprozitätsgesetz zwischen AKF und LDS

Mit den hier gebrachten Definitionen gilt:

$$\nabla_{\tau_x} = \frac{1}{\varphi_x(\tau = 0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\tau) d\tau = \frac{\Phi_x(f = 0)}{\varphi_x(\tau = 0)},$$

$$\nabla_{f_x} = \frac{1}{\Phi_x(f = 0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(f) df = \frac{\varphi_x(\tau = 0)}{\Phi_x(f = 0)}.$$

Daraus folgt direkt, dass das Produkt aus äquivalenter AKF-Dauer und äquivalenter LDS-Bandbreite gleich 1 ist:

$$\nabla_{\tau_x} \cdot \nabla_{f_x} = 1.$$

Zu Kapitel 4.7: Determinante und Inverse einer Matrix (1)

Wir betrachten die beiden quadratischen Matrizen mit Dimension $N = 2$ bzw. $N = 3$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Die **Determinanten** dieser Matrizen lauten:

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

$$|\mathbf{B}| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} - \\ - b_{11} \cdot b_{23} \cdot b_{32} - b_{12} \cdot b_{21} \cdot b_{33} - b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{31}.$$

Die Determinante der Matrix \mathbf{A} lässt sich geometrisch als die Fläche des durch die beiden Zeilenvektoren (a_{11}, a_{12}) und (a_{21}, a_{22}) aufgespannten Parallelogramms interpretieren. Die Fläche des durch die zwei Spaltenvektoren $(a_{11}, a_{21})^T$ und $(a_{12}, a_{22})^T$ festgelegten Parallelogramms ist ebenfalls $|\mathbf{A}|$. Dagegen ist die Determinante der Matrix \mathbf{B} bei analoger geometrischer Interpretation als Volumen zu verstehen.

Für $N > 2$ ist es möglich, sogenannte Unterdeterminanten zu bilden. Die **Unterdeterminante** einer $N \times N$ -Matrix bezüglich der Stelle i, j ist die Determinante der $(N-1) \times (N-1)$ -Matrix, die sich ergibt, wenn man die i -te Zeile und die j -te Spalte streicht. Als **Kofaktor** bezeichnet man dann den Wert der Unterdeterminante gewichtet mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+j}$.

Beispiel: Ausgehend von der 3×3 -Matrix \mathbf{B} lauten die Kofaktoren der zweiten Zeile:

$$B_{21} = -(b_{12} \cdot b_{23} - b_{13} \cdot b_{32}) \quad \text{da } i + j = 3,$$

$$B_{22} = +(b_{11} \cdot b_{23} - b_{13} \cdot b_{31}) \quad \text{da } i + j = 4,$$

$$B_{23} = -(b_{11} \cdot b_{32} - b_{12} \cdot b_{31}) \quad \text{da } i + j = 5.$$

Die Determinante von \mathbf{B} ergibt sich mit diesen Kofaktoren zu:

$$|\mathbf{B}| = b_{21} \cdot B_{21} + b_{22} \cdot B_{22} + b_{23} \cdot B_{23}.$$

Hierbei wurde die Determinante nach der zweiten Zeile entwickelt. Entwickelt man die Determinante nach einer anderen Zeile oder Spalte, so ergibt sich der gleiche Zahlenwert für $|\mathbf{B}|$.

Zu Kapitel 4.7: Determinante und Inverse einer Matrix (2)

Häufig benötigt man die Inverse \mathbf{M}^{-1} der quadratischen Matrix \mathbf{M} . Diese besitzt die gleiche Dimension N wie \mathbf{M} und ist wie folgt definiert, wobei \mathbf{E} die Einheitsmatrix (Diagonalmatrix) bezeichnet:

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Inverse der 2×2 -Matrix \mathbf{A} lautet:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Hierbei gibt $|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ die Determinante an. Entsprechend gilt für den Sonderfall $N = 3$:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{B}|} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}.$$

Die Determinante $|\mathbf{B}|$ einer 3×3 -Matrix wurde auf der letzten Seite angegeben, ebenso wie die Vorschrift zur Berechnung der Kofaktoren B_{ij} . Diese beschreiben die Unterdeterminanten von \mathbf{B} , gewichtet mit den Positionsvorzeichen $(-1)^{i+j}$. Zu beachten ist die Vertauschung der Zeilen und Spalten bei der Inversen.

Zu Kapitel 5.1: KKF-Berechnung zwischen Eingang und Ausgang

Allgemein gilt für die KKF zwischen zwei Signalen $x(t)$ und $y(t)$:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot y(t + \tau) dt.$$

Mit der allgemeingültigen Beziehung $y(t) = h(t) * x(t)$ und der formalen Integrationsvariablen θ lässt sich hierfür auch schreiben:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot x(t + \tau - \theta) d\theta dt.$$

Durch Vertauschen der beiden Integrale und Hereinziehen der Grenzwertbildung erhält man:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot \left[\lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot x(t + \tau - \theta) dt \right] d\theta.$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ergibt den AKF-Wert des Eingangssignals zum Zeitpunkt $\tau - \theta$:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot \varphi_x(\tau - \theta) d\theta.$$

Das verbleibende Integral beschreibt die Faltungsoperation in ausführlicher Form. Damit gilt auch:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_x(\tau).$$

q.e.d.

Zu Kapitel 5.1: LDS am Filterausgang

Ausgegangen wird von den folgenden, bereits hergeleiteten Beziehungen:

$$\Phi_x(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |X_T(f)|^2,$$

$$\Phi_y(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |Y_T(f)|^2,$$

$$Y_T(f) = X_T(f) \cdot H(f).$$

Setzt man diese Gleichungen ineinander ein, so erhält man das Ergebnis:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot |H(f)|^2.$$

q.e.d.

Zu Kapitel 5.1: LDS-Berechnung eines zeitbegrenzten Signals

Die AKF eines ergodischen Prozesses mit der Musterfunktion $x(t)$ lautet (siehe Kapitel 4.4):

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt.$$

Es ist hier zulässig, die zeitlich unbegrenzte Funktion $x(t)$ durch die auf den Zeitbereich $-T_M/2$ bis $T_M/2$ begrenzte Funktion $x_T(t)$ zu ersetzen. Diese Funktion korrespondiert mit der Spektralfunktion $X_T(f)$, und man erhält durch Anwendung des Fourierintegrals und des Verschiebungssatzes:

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x_T(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(f) \cdot e^{j2\pi f(t+\tau)} df dt.$$

Nach Aufspalten des Exponenten und Vertauschen von Zeit- und Frequenzintegral ergibt sich:

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(f) \cdot \left[\int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x_T(t) \cdot e^{j2\pi ft} dt \right] \cdot e^{j2\pi f\tau} df.$$

Das innere Integral beschreibt das konjugiert-komplexe Spektrum $X_T^*(f)$. Daraus folgt weiter:

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 \cdot e^{j2\pi f\tau} df.$$

Ein Vergleich mit dem bei Ergodizität allgemein gültigen Theorem von **Wiener** und **Chintchine**,

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df,$$

zeigt die Gültigkeit der Beziehung:

$$\Phi_x(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |X_T(f)|^2.$$

q.e.d.

Zu Kapitel 5.4: Herleitung des Matched-Filter-Frequenzgangs

Die Schwarzsche Ungleichung lautet allgemein mit den beiden Funktionen $A(f)$ und $B(f)$:

$$\left| \int_a^b A(f) \cdot B(f) \, df \right|^2 \leq \int_a^b |A(f)|^2 \, df \cdot \int_a^b |B(f)|^2 \, df.$$

Wir wenden nun diese Gleichung auf das Signal-zu-Rauschverhältnis an:

$$\rho_d(T_D) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f T_D} \, df \right|^2}{N_0/2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \, df}.$$

Mit $A(f) = G(f)$ und $B(f) = H(f) \cdot \exp(j2\pi f T_D)$ ergibt sich somit die folgende Schranke:

$$\rho_d(T_D) \leq \frac{1}{N_0/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, df.$$

Setzt man für den Filterfrequenzgang versuchsweise

$$H(f) = H_{\text{MF}}(f) = K_{\text{MF}} \cdot G^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T_D}$$

ein, so erhält man aus der obigen Gleichung:

$$\rho_d(T_D) = \frac{\left| K_{\text{MF}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, df \right|^2}{N_0/2 \cdot K_{\text{MF}}^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, df} = \frac{1}{N_0/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, df.$$

Das heißt: Mit diesem Ansatz des Matched-Filters wird in obiger Abschätzung der maximal mögliche Wert erreicht. Mit keinem anderen Filter kann man ein höheres Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis erzielen; das Matched-Filter ist bezüglich des zugrunde gelegten Maximierungskriteriums optimal.

q.e.d.