

## Allgemeine Bemerkungen zum Praktikum Nachrichtentechnik (LB):

Im Praktikum *Nachrichtentechnik (LB)* soll die in Vorlesungen und Übungen dargelegte Theorie der Signaldarstellung und Nachrichtenübertragung anhand von Simulationsprogrammen und Grafiken anschaulich dargestellt werden. Die Thematik des gesamten Praktikums ist durch die beiden Vorlesungen

- Nachrichtentechnik I (LB) – Signaldarstellung (im 3. Semester)
- Nachrichtentechnik II (LB) – Modulationsverfahren (im 6. Semester)

von Prof. Dr.-Ing. Norbert Hanik festgelegt. Der Besuch dieser Lehrveranstaltungen wird für dieses Praktikum vorausgesetzt, so dass bei normalem Studienverlauf die Praktikumsteilnahme frühestens im 6. Semester möglich ist. Auf die Vorlesung *Nachrichtentechnik I (LB)* beziehen sich die Versuche

- Signale & Spektren (S&S), und
- Pulsmodulation (PCM).

Dagegen ist der Inhalt der letzten drei Versuche Lehrstoff der Vorlesung *Nachrichtentechnik II (LB)*:

- Amplitudenmodulation (AM),
- Winkelmodulation (WM),
- Digitalsignalübertragung (DSÜ).

Ich habe das Praktikum (gemeinsam mit meinem Kollegen Dr.-Ing. Klaus Eichin) seit Mitte der 1990er Jahre bis zu unserem Eintritt in den Ruhestand 2011 betreut, und wir beide waren auch die Vorgänger von Professor Hanik bezüglich der Vorlesungen *Nachrichtentechnik I* und *Nachrichtentechnik II*. Das heißt, dass ich durchaus weiß, was *Studierende des Lehramts an Beruflichen Schulen (LB)* können (sollten) und welche Anforderungen man an Sie aufgrund Ihres Studiums nicht stellen kann.

In der vorliegenden Anleitung, die ich 2013 und 2014 basierend auf den früheren Anleitungen zusammengestellt habe, sind diese Erfahrungen berücksichtigt. Der Versuch 2

- Wahrscheinlichkeit und Statistik (W&S)

wurde als Ergänzung hinzugefügt, da diese Thematik in Ihrem Studienplan völlig fehlt, ich aber glaube, dass ein zukünftiger Berufsschullehrer die Grundlagen hierfür kennen sollte. Das Thema wird nicht sehr tief behandelt. Für einige von Ihnen ist es nur eine Auffrischung Ihres Gymnasialzeit-Wissens.

Alle Anleitungen gliedern sich grob in die Kapitel *Theoretische Grundlagen*, *Vorbereitungsfragen* und *Versuchsdurchführung*. Anhand dieses Heftes und der zugrundeliegenden Lehrprogramme sollte ein Teilnehmer mit Grundkenntnissen der Nachrichtentechnik in der Lage sein, sich die wesentlichen Merkmale der einzelnen Versuche in jeweils etwa sechs Stunden zu erarbeiten, ca. drei Stunden zur Vorbereitung sowie drei weitere Stunden für die Versuchsdurchführung.

Die Musterlösungen der Vorbereitungsfragen und der Versuchsdurchführung sind am Ende aller Versuche beigefügt. Ich möchte an dieser Stelle - ebenso ausdrücklich wie überflüssig - erwähnen, dass Sie sicher einen besseren Lernerfolg erzielen, wenn Sie diese Musterlösungen nur zur Kontrolle Ihrer Ergebnisse benutzen.

Ich wünsche Ihnen für dieses Praktikum viel Erfolg und etwas Spaß beim Durcharbeiten der Versuche.

## Organisation des Praktikums im Sommersemester 2014:

Die Praktikumstermine sind jeweils am Mittwoch zwischen 14:00 und 17:00 Uhr im Raum N2409. Die vorläufige Planung sieht wie folgt aus:

- Vorberechnung am 09.04.
- Versuch 1: Signale und Spektren (S&S) am .....
- Versuch 2: Wahrscheinlichkeit und Statistik (W&S) am .....
- Versuch 3: Pulsmodulation (PCM) am .....
- Versuch 4: Amplitudenmodulation (AM) am .....
- Versuch 5: Winkelmodulation (WM) am .....
- Versuch 6: Digitalsignalübertragung (DSÜ) am .....

Die letzten drei Termine werden rechtzeitig bekanntgegeben. Sie richten sich nach dem Fortgang der Vorlesung *Nachrichtentechnik II (LB)* von Prof. Hanik. Die mündlichen Prüfungen zum Praktikum finden in den letzten beiden Semesterwochen statt und dauern jeweils 30 Minuten. Jeder Kandidat wird zu zwei der insgesamt sechs Themen geprüft. Die Themenzulassung erfolgt am Ende von Versuch 6.

### Zum Lerntutorial LNTwww:

An dieser Stelle möchten wir Sie auf *das Lerntutorial für die Nachrichtentechnik im world wide web* – kurz **LNTwww** – hinweisen, das am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Technischen Universität München entwickelt wurde. Zu allen im Praktikum behandelten Themen finden Sie unter <http://www.lntwww.de> weitere Informationen sowie multimediale Darstellungen (Lernvideos und interaktive Programme), zahlreiche Grafiken und Aufgaben mit Musterlösungen. Der Versuch 2 wird direkt mit LNTwww durchgeführt (Buch 3: „Stochastische Signaltheorie“). Aber auch bei den anderen Versuchen wird jeweils auf ein LNTwww-Buch hingewiesen. Der gesamte Inhalt von LNTwww (Theorie, Aufgaben, Musterlösungen) gibt es in PDF-Form unter <http://www.lntwww.de/downloads>.

### Verwendete Grafikprogramme:

Die Versuche 1, 3 und 6 werden mit dem Lehrsoftwarepaket **LNTsim** – eine Sammlung von DOS-Programmen – durchgeführt. Sie finden die Software als Zip-Version unter

- <http://www.lntwww.de/downloads/Sonstiges/Programme/LNTsim.zip>

Für die Versuche 4 und 5 wird jeweils das Windows-Programm „amv“ aus dem Lehrsoftwarepaket **LNTwin** benötigt, das wir ebenfalls zum Download bereitstellen:

- <http://www.lntwww.de/downloads/Sonstiges/Programme/AMV.zip>

Alle diese Programme sind Eigenentwicklungen des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik der TU München (verantwortlich: Prof. Dr.-Ing. habil. Günter Söder). Im Versuch 5 kommt zudem ein auf GNU Radio basierendes Demonstrationsprogramm zum Einsatz, das 2012 von Herrn Klaus Madl im Rahmen seiner Bachelorarbeit unter der Betreuung von Dr.-Ing. Christoph Hausl erstellt wurde. Herzlichen Dank an beide für diese schöne Audio-Demonstration.

### Noch ein Dank und eine Bitte:

Die Anleitung musste aus früheren Ausdrucken teilweise in Handarbeit rekonstruiert werden. Ich bedanke mich herzlich bei Doris Dorn, Johannes Krönung und Klaus Madl. Ich bitte aber auch um Nachsicht der Praktikumssteilnehmer über Unzulänglichkeiten dieser Anleitung. Bitte geben Sie mir Hinweise auf eventuelle Fehler. Der nächste Praktikumsjahrgang wird es Ihnen danken.







# Praktikum Nachrichtentechnik (LB)

## Versuch: Signale und Spektren ("S&S")

### Inhaltsangabe

1	Periodische Signale.....	3
1.1	Definitionen und Eigenschaften.....	3
1.2	Fourierreihe.....	4
1.3	Spektrum eines periodischen Signals.....	7
1.4	Versuchsdurchführung.....	9
2	Lineare zeitinvariante Systeme .....	17
2.1	Methoden der Systemtheorie.....	17
2.2	Übertragungsfunktion.....	18
2.3	Lineare Verzerrungen.....	19
2.4	Impulsantwort und Sprungantwort .....	20
2.5	Faltung.....	22
2.6	Versuchsdurchführung.....	23
3	Tiefpaßkatalog.....	28
4	Musterlösungen der Vorbereitungsaufgaben.....	29
5	Musterlösungen zur Versuchsdurchführung.....	33

Konzeption und Ausarbeitung: Günter Söder in Anlehnung an den Versuch *Systemtheorie* des Grundpraktikums Nachrichtentechnik, erstellt von Günter Fröschl im Rahmen einer Diplomarbeit. Die Autoren der zugrundeliegenden Lehrprogramme sind Günter Fröschl, Erik Hogl, Theodoros Papavassiliu und Günter Söder.

Digitalisierung: Johannes Krönung (2013)

**Vorbemerkungen:**

Dieser Praktikumsversuch behandelt den Lehrstoff der Vorlesung Nachrichtentechnik 1 für den Studiengang LB (Lehramt an beruflichen Schulen). Mit diesem Versuch soll gezeigt werden, wie mit Hilfe der Systemtheorie auch relativ komplexe Zusammenhänge aus verschiedenen Bereichen der Nachrichtentechnik auf eine zwar abstrakte, aber dafür sehr handhabbare und übersichtliche Art und Weise beschrieben werden können. Es sei jedoch an dieser Stelle ausdrücklich betont, dass die angegebenen Verfahren aufgrund ihres großen Allgemeinheitsgrades auch in anderen technischen bzw. naturwissenschaftlichen Disziplinen wie z. B. der Schaltungstechnik, der Regelungstechnik sowie der Kybernetik gleichermaßen Anwendung finden.

Prinzipiell versucht man in der Systemtheorie, die bei den jeweiligen Aufgabenstellungen vorkommenden Größen (z. B. zeitveränderliche Ton-, Bild- und Datensignale) mittels bestimmter mathematischer Vorschriften in sogenannte Spektralbereiche zu transformieren, um so zu einer ein-facheren Beschreibung der betrachteten Systeme zu gelangen. Ausgehend von der harmonischen Analyse periodischer Zeitfunktionen (*Fourierreihe*) werden in diesem Versuch die Gleichungen der *Fouriertransformation* sowie deren Anwendungsmöglichkeiten auf lineare zeitinvariante Systeme behandelt.

Als Vorbereitung zu diesem Praktikum sollten Sie die theoretischen Grundlagen durcharbeiten und die mit „V“ gekennzeichneten Vorbereitungsfragen beantworten. Die mit einem Stern versehenen Vorbereitungsfragen und Versuchsdurchführungen sind optional, aber trotzdem lehrreich. Sie eignen sich speziell auch zur Prüfungsvorbereitung.

**Hinweise zur Programmbedienung:**

Die Durchführung des Versuchs findet an Personal Computern statt. Es werden jedoch keinerlei programmiertechnische, sondern lediglich einige mathematische sowie systemtheoretische Grundkenntnisse vorausgesetzt.

Zur Versuchsdurchführung benötigen Sie die Menüpunkte

- *Lineare zinvariante Systeme* (im folgendem mit „Lzi“ bezeichnet)
- *Fouriertransformation* („ft“)

des Lehr- und Demonstrationsprogramms „LNTsim“. Die Dateneingabe erfolgt weitgehend menü- und mausgesteuert, wobei standardmäßig die linke Maustaste zu betätigen ist. Durch Drücken der rechten Maustaste wird dagegen meist ein Eingabefenster geöffnet, das die Parameterwerteingabe per Tastatur erlaubt.

**Literaturhinweise:**

- /1/ Hanik, N.: Vorlesungsmanuskript *Nachrichtentechnik 1 (LB)*
- /2/ Hanik, N.: Vorlesungsmanuskript *Nachrichtentechnik 2 (LB)*
- /3/ Marko, H.: *Methoden der Systemtheorie*, 3. Auflage. Berlin: Springer Verlag, 1995

**Hinweise zum Lerntutorial LNTwww:**

Die Anleitung ist zur Versuchsvorbereitung ausreichend. Mehr Informationen zum Thema finden Sie in Kapitel 2 und 3 des LNTwww-Buches *Signaldarstellung*. Dort finden Sie auch einige passende Lernvideos (IV) und interaktive Multimedia-Elemente (IM):

- Harmonische Schwingungen (LV)
- Eigenschaften und Genauigkeit der Fourierreihe (LV)
- Kontinuierliche und diskrete Spektren (LV)
- Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation (LV)
- Periodendauer  $T_0$  periodischer Signale (IM)
- Zeitfunktion und zugehörige Spektralfunktion (IM)

# 1 Periodische Signale

## 1.1 Definitionen und Eigenschaften

Ein Signal  $x(t)$  bezeichnet man als periodisch, wenn für alle beliebigen Werte von  $t$  und alle ganzzahligen Werte von  $i$  gilt:

$$x(t + i \cdot T_0) = x(t) . \quad (1)$$

Der kleinstmögliche Wert von  $T_0$ , der (1) erfüllt, wird *Periodendauer* genannt. Den Kehrwert bezeichnet man als die Grundfrequenz  $f_0 = 1/T_0$ . Entsprechend ist

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2)$$

die *Grundkreisfrequenz*. Bild 1 verdeutlicht diese Größen an einem Beispiel.

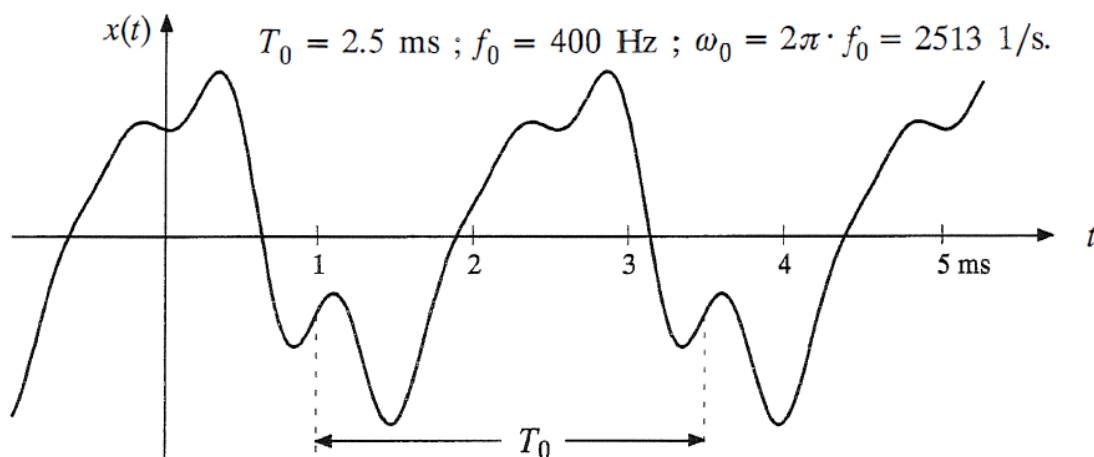


Abbildung 1: Beispiel eines periodischen Zeitsignals

Periodische Signale besitzen eine große Bedeutung in der Nachrichtentechnik, insbesondere in Zusammenhang mit Trägerfrequenzsystemen und der hierfür erforderlichen Taktgenerierung. Häufig anzutreffende Vertreter von periodischen Signalen sind sinus- und rechteckförmige Signale.

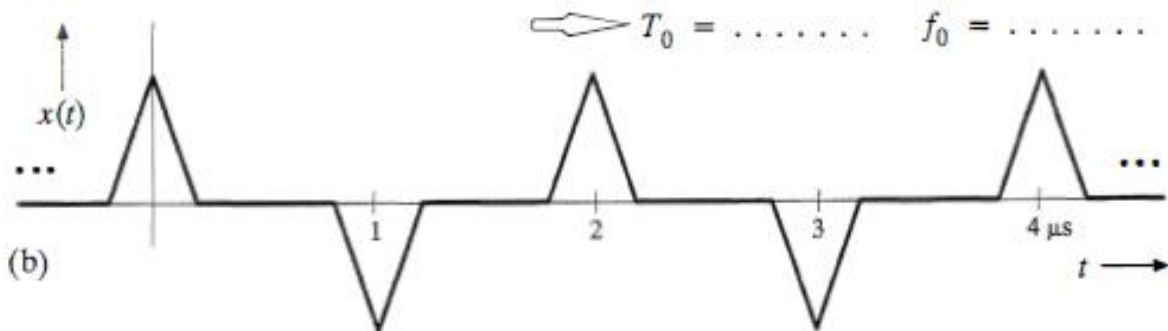
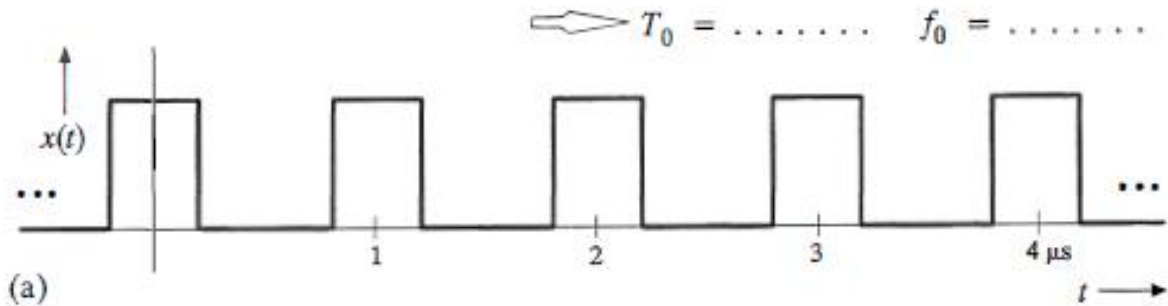
Besteht ein Signal aus einer Summe zweier periodischer Signale mit den Periodendauern  $T_1$  und  $T_2$ ,

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) , \quad (3)$$

so ergibt sich die Periodendauer  $T_0$  des Summensignals unabhängig von den Amplituden- und den Phasenverhältnissen als das kleinste gemeinsame Vielfache von  $T_1$  und  $T_2$ . Ist beispielsweise  $T_1 = 2\text{ms}$  und  $T_2 = 5\text{ms}$ , so beträgt die resultierende Periodendauer  $T_0 = 10\text{ms}$ . Besitzen  $T_1$  und  $T_2$  kein gemeinsames Vielfaches, so ist das Summensignal im Gegensatz zu seinen beiden Komponenten nicht periodisch.

**V 1: Periodendauer und Grundfrequenz**

Bestimmen Sie jeweils die Periodendauer  $T_0$  und die Grundfrequenz  $f_0$  der nachfolgend skizzierten bzw. formelmäßig festgelegten Signale.



(c)  $x(t) = \sin(\pi \cdot \frac{t}{4\mu s})$

$T_0 = \dots \dots \dots$      $f_0 = \dots \dots \dots$

(d)  $x(t) = \sin^2(\pi \cdot \frac{t}{4\mu s}) = \dots \dots \dots$

$T_0 = \dots \dots \dots$      $f_0 = \dots \dots \dots$

(e)  $x(t) = \cos(2\pi \cdot \frac{t}{8\mu s}) + A \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{t}{2\mu s} - \varphi)$

$T_0 = \dots \dots \dots$      $f_0 = \dots \dots \dots$

(f)  $x(t) = \cos(2\pi \cdot \frac{t}{8\mu s}) + \cos(2\pi \cdot \frac{t}{6\mu s})$

$T_0 = \dots \dots \dots$      $f_0 = \dots \dots \dots$

(g)  $x(t) = \cos(2\pi \cdot \frac{t}{8\mu s}) + \cos(\frac{t}{8\mu s})$

$T_0 = \dots \dots \dots$      $f_0 = \dots \dots \dots$

**1.2 Fourierreihe**

Eine periodische Funktion  $x(t)$  mit der Kreisfrequenz  $\omega_0$  kann in allen Bereichen, in denen sie stetig ist, auf folgende Weise in eine trigonometrische Reihe (*Fourierreihe*) entwickelt werden:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t) \quad (4)$$

mit

$$x_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \sum_{n=1}^N B_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t). \quad (5)$$

Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten  $A_0$ ,  $A_n$  und  $B_n$  beruht auf der Eigenschaft, dass die harmonischen Sinus- und Cosinus-Funktionen *Orthogonalfunktionen* sind. Für diese gilt:

$$\frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \sin(m \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

$$\text{und } \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot t) dt = 0 \text{ für alle } m, n.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen erhält man für

– den Gleichanteil: 
$$A_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt, \quad (6)$$

– die cos-Koeffizienten: 
$$A_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt, \quad (7)$$

– die sin-Koeffizienten: 
$$B_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt. \quad (8)$$

Ist  $x(t)$  eine gerade Funktion, d.h.  $x(-t) = x(t)$ , so sind alle Sinus-Koeffizienten  $B_n = 0$ . Dagegen gilt für eine ungerade Funktion,  $x(-t) = -x(t)$ , stets  $A_0 = 0$  und  $A_n = 0$ .

Eine zur Gleichung (5) äquivalente Darstellung findet sich über den Zusammenhang:

$$A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + B_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) = C_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t - \varphi_n) \quad (9)$$

mit

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{und} \quad \varphi_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}. \quad (10)$$

Voraussetzung für die Konvergenz der Reihendarstellung gemäß (4) und (5) ist, dass das Signal nur endlich viele Unstetigkeitsstellen je Periode besitzt. An denjenigen Stellen  $t = t_i$ , an denen das Signal  $x(t)$  endliche Sprünge aufweist, konvergiert die Reihe gegen den aus dem jeweiligen links- und rechtsseitigen Grenzwert gebildeten arithmetischen Mittelwert.

## V2: Berechnung der Fourierkoeffizienten

Gesucht ist die Fourierreihendarstellung des in Abbildung 2 skizzierten periodischen Signals  $x_1(t)$ . Dieses könnte z.B. durch Doppelweggleichrichtung eines Cosinussignals entstanden sein. Sie können Ihre Ergebnisse anhand der Tabelle in Aufgabe A4 vergleichen.

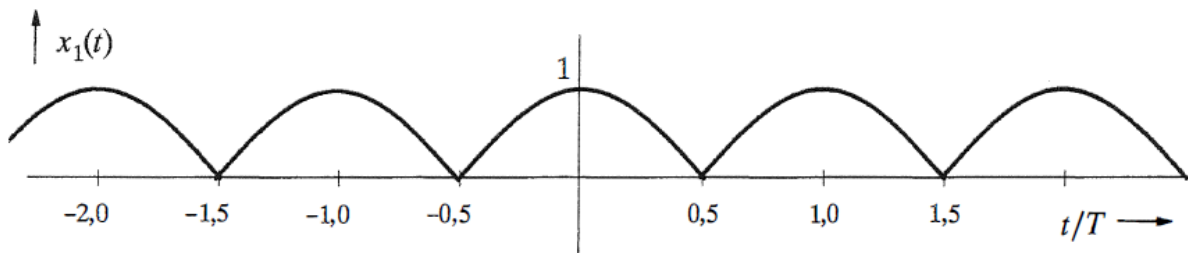


Abbildung 2: Betrachtetes periodisches Signal (Cosinus nach Doppelweggleichrichtung)

- Wie groß ist die Periodendauer  $T_0$ ?
- Berechnen Sie den Gleichanteil  $A_0$ .
- Begründen Sie, warum alle Sinus-Koeffizienten  $B_n$  identisch 0 sind.
- Berechnen Sie die Koeffizienten  $A_n$ . Gegeben ist hierzu das bestimmte Integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) \cdot \cos(2n \cdot u) \, du = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{4 \cdot n^2 - 1}$$

- Geben Sie die Fourierreihendarstellung von  $x_1(t)$  vollständig an.

### 1.3 Spektrum eines periodischen Signals

Jedes Zeitsignal  $x(t)$  wird durch seine Spektralfunktion  $X(f)$  ebenfalls vollständig beschrieben. Diese ist über die *Fouriertransformation* zu berechnen:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt . \tag{11}$$

Die Umkehrfunktion hiervon lautet (*Fourierrücktransformation*):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df . \tag{12}$$

Abkürzend werden diese Funktionalzusammenhänge mit  $X(f) \leftrightarrow x(t)$  bezeichnet. Die Spektralfunktion (kurz: das *Spektrum*) eines zeitlich begrenzten Signals (*Impuls*) kann mit (11) ohne Schwierigkeiten berechnet werden. Dagegen sind bei einem zeitlich unbegrenzten Signal (z.B. einem Gleichsignal oder einer harmonischen Schwingung) aufgrund des unendlich großen Integralwertes (11) Grenzübergänge erforderlich, die durch die Einführung der *Diracfunktion (Distribution)*  $\delta(f)$  in kompakter Weise bewältigt werden können. Die Diracfunktion ist unendlich schmal (d.h.  $\delta(f) = 0$  für  $f \neq 0$ ) und bei der Frequenz  $f = 0$  unendlich hoch. Die Impulsfläche ergibt einen endlichen Wert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1 . \tag{13}$$

Aus dieser Eigenschaft folgt, dass  $\delta(f)$  die Einheit  $1/\text{Hz} = \text{s}$  besitzt.

Mit dieser Definition lassen sich folgende Fourierkorrespondenzen angeben:

$$x(t) = A \quad \longleftrightarrow \quad X(f) = A \cdot \delta(f) , \tag{14}$$

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \quad \longleftrightarrow \quad X(f) = \frac{A}{2} \cdot [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] , \tag{15}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \quad \longleftrightarrow \quad X(f) = \frac{A}{2j} \cdot [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] . \tag{16}$$

Das Spektrum eines periodischen Signals (hier dargestellt als Fourierreihe gemäß (5))

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) \tag{17}$$

ist mit den Gleichungen (14) bis (16) vollständig berechenbar. Der Gleichanteil liefert eine Diracfunktion bei  $f = 0$  mit dem Impulsgewicht  $A_0$ . Desweiteren gibt es noch Diracfunktionen  $\delta(f \pm n \cdot f_0)$  bei Vielfachen der Grundfrequenz  $f_0 = 1/T_0$ , wobei  $\delta(f - n \cdot f_0)$  eine Diracfunktion bei  $f = n \cdot f_0$  (im positiven Frequenzbereich) und  $\delta(f + n \cdot f_0)$  eine solche bei  $f = -n \cdot f_0$  (also im negativen Frequenzbereich) kennzeichnet. Man erhält:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot \delta(f - n \cdot f_0) \tag{18}$$

und somit ein Linienspektrum bei Vielfachen der Grundfrequenz  $f_0 = 1/T_0$ .

Die Koeffizienten  $D_n$  sind im allgemeinen komplexwertig mit Ausnahme des stets reellen Koeffizienten  $D_0 = A_0$ . Ein Koeffizientenvergleich von (17) mit (18) unter Berücksichtigung von (15) und (16) ergibt für  $n > 0$  (positiver Frequenzbereich):

$$D_n = \frac{1}{2} \cdot (A_n - j \cdot B_n) = \frac{1}{2} \cdot C_n \cdot e^{-j\varphi_n} . \quad (19)$$

Das negative Vorzeichen des Imaginärteils ist darauf zurückzuführen, dass in (16) die imaginäre Einheit im Nenner steht ( $1/j = -j$ ). Für die komplexen Koeffizienten mit negativem Laufindex ( $n < 0$ ) gilt:

$$D_{-n} = D_n^* = \frac{1}{2} \cdot (A_n + j \cdot B_n) . \quad (20)$$

Anzumerken ist, dass mit diesen *komplexen Fourierkoeffizienten* die Fourierreihendarstellung (17) aufgrund der Eulerschen Gleichungen auch in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{j \cdot n \omega_0 t} . \quad (21)$$

Die Fourierkoeffizienten können dabei nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j \cdot n \omega_0 t} dt . \quad (22)$$

Ebenso wie bei den Gleichungen (6) bis (8) kann das Integrationsintervall (hier von  $-T_0/2$  bis  $+T_0/2$ ) beliebig verschoben werden, solange die Intervallbreite  $T_0$  erhalten bleibt.

### V3: Spektrum eines periodischen Signals

Skizzieren Sie das Spektrum  $X(f) \leftrightarrow x(t)$  des periodischen Zeitsignals

$$x(t) = 3V - 2V \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + 4V \cdot \sin(6\pi \cdot f_0 \cdot t) .$$

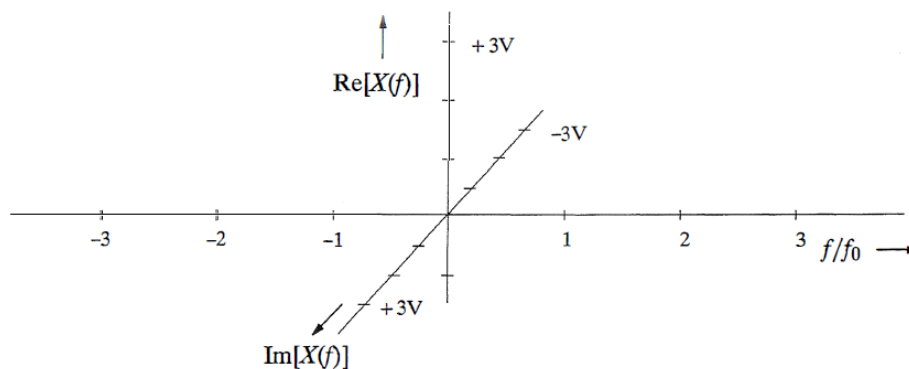


Abbildung 3: Spektrum der vorgegebenen harmonischen Schwingung



## 1.4 Versuchsdurchführung

In diesem ersten Versuch soll anhand einiger Beispiele gezeigt werden, inwieweit ein periodisches Zeitsignal durch eine endliche Fourierreihe approximiert werden kann (*angenäherte harmonische Synthese*).

Zur Durchführung des Versuchs steht das Programm „Izi“ zur Verfügung, das die Summe einer aus endlich vielen Gliedern bestehenden trigonometrischen Reihe (5) berechnet und anschließend graphisch ausgibt. Die Koeffizientenzahl  $N$  ist dabei frei wählbar. Alle Zeiten und Frequenzen sind als normiert auf die Bezugswerte  $T$  bzw.  $1/T$  zu verstehen.

Mit dem Menüpunkt (a) können vorgegebene Zeitsignale (bipolare Rechteck- und Dreieckfunktion, Diracpuls) hinsichtlich der Fourierreihendarstellung analysiert werden. Beim Menüpunkt (b) sind dagegen die Periodendauer  $T_0$  (ebenfalls normiert auf  $T$ ) sowie die Koeffizienten  $A_0$ ,  $A_n$  und  $B_n$  frei wählbar. Mit dem dritten Menüpunkt (c) können Auswirkungen von linearen Verzerrungen auf periodische Signale verdeutlicht werden. Hierauf wird erst in der Versuchsdurchführung 2.6 eingegangen.

### A1: Fourierreihendarstellung eines dreieckförmigen periodischen Signals

Nähern Sie ein dreieckförmiges Signal (vgl. Abbildung 4) durch eine endliche Fourierreihe an und beantworten Sie dazu folgende Fragen:

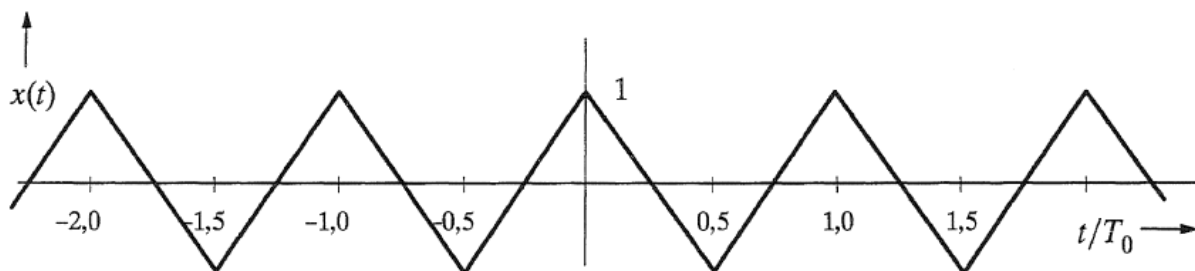


Abbildung 4: Betrachtetes dreieckförmiges periodisches Signal

- Begründen Sie, warum dieses Signal ein reelles Spektrum besitzt (d.h. es ist  $B_n = 0$ ).
- Wie groß ist der Fourierkoeffizient  $A_0$ ?
- Wählen Sie zunächst  $N = 3$ . Ermitteln Sie aus der angegebenen Spektralfunktion die Fourierkoeffizienten  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$ . Zeigen Sie an diesen 3 Beispielen, dass für die Cosinus-Koeffizienten der periodischen Dreieckfunktion gilt:

$$A_n = \frac{8}{n^2 \cdot \pi^2} \quad \text{für ungerades } n, \text{ ansonsten } 0. \quad (23)$$

	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
mit Programm				
nach (23)				

- d) Interpretieren Sie die Abweichungen der endlichen Fourierreihe vom tatsächlichen Signalverlauf für  $N = 1$ ,  $N = 3$ ,  $N = 10$  und  $N = 100$ .

**A2: Fourierreihendarstellung eines Rechtecksignals**

Betrachten Sie nun das periodische Rechtecksignal von Abbildung 5, dessen Fourierkoeffizienten sich wie folgt ergeben ( $T_0 = T$ ):

$$A_0 = x_{\min} + (x_{\max} - x_{\min}) \cdot \frac{\Delta t}{T} ,$$

$$A_n = 2 \cdot (x_{\max} - x_{\min}) \cdot \frac{\sin(n \cdot \pi \cdot \Delta t / T)}{n \cdot \pi} , \tag{24}$$

$$B_n = 0 .$$

Die verwendeten Signalparameter können der unteren Skizze entnommen werden.

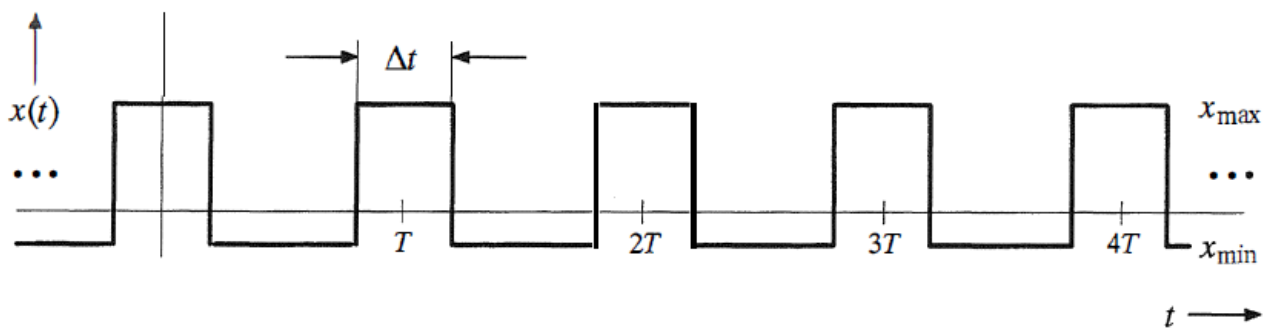


Abbildung 5: Allgemeine Form eines periodischen Rechtecksignals.

Zunächst seien die Parameterwerte  $x_{\max} = 1$ ,  $x_{\min} = -1$  und  $\Delta t / T = 0.5$ .

- a) Ermitteln Sie mit dem Programm „lzi“ die Fourierkoeffizienten. Überprüfen Sie diese anhand von Gl. (24).

	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
mit Programm						
nach (24)						

- b) Interpretieren Sie die Abweichungen der endlichen Fourierreihe vom tatsächlichen Rechteckverlauf für  $N = 1$ ,  $N = 3$ ,  $N = 10$  und  $N = 100$ . Welcher Unterschied ist im Vergleich zum dreieckförmigen Signal gemäß Versuch A1, Punkt (d) festzustellen?

- c) Warum treten hier auch bei sehr großem  $N$  Abweichungen zwischen der Fourierreihe und dem tatsächlichen Rechteckverlauf auf? Wie nennt man diesen Effekt?

Wählen Sie nun anstelle des bipolaren ein unipolares Signal ( $x_{\min} = 0$ ,  $\Delta t/T = 0.5$ ).

- d) Tragen Sie die Fourierkoeffizienten in Zeile 1 der nachfolgenden Tabelle ein. Wie unterscheiden sich die Fourierkoeffizienten gegenüber denen des bipolaren Rechtecksignals?

	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$\Delta t/T = 0.5$						
$\Delta t/T = 0.25$						
$\Delta t/T = 0.75$						

- e) Wählen Sie nun  $\Delta t/T = 0.25$ . Tragen Sie die Fourierkoeffizienten in obige Tabelle (mittlere Zeile) ein. Welcher Unterschied ist gegenüber  $\Delta t/T = 0.5$  festzustellen?
- f) Wählen Sie nun  $\Delta t/T = 0.75$  und tragen Sie die Fourierkoeffizienten in obige Tabelle (untere Zeile) ein. Interpretieren Sie die Änderungen gegenüber Punkt e).

### A3 \*: Fourierreihendarstellung eines Diracpulses (optional)

Ein Diracpuls  $p(t)$  ist eine unendliche Summe von Diracimpulsen im Abstand  $T_0$ :

$$p(t) = T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_0) . \quad (25)$$

Aus Dimensionsgründen seien alle Impulsgewichte ebenfalls gleich  $T_0$ , da  $\delta(t)$  die Einheit  $1/s$  besitzt, so dass  $p(t)$  „ohne Einheit“ ist.

- a) Ermitteln Sie mit dem Programm „lzi“ die komplexen Fourierkoeffizienten.
- b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten des Diracpulses auch aus Gl. (22).
- c) Bestimmen Sie daraus die Fourierkoeffizienten  $A_0$ ,  $A_n$  und  $B_n$ .
- d) Überprüfen Sie mit dem Programm „lzi“ (Menüpunkt a), welcher Fehler hier durch den Abbruch der Fourierreihe gemacht wird. Wählen Sie hierzu  $N = 1$ ,  $N = 10$ ,  $N = 100$  und  $N = 1000$ . Betrachten Sie insbesondere die Fourierreihendarstellung bei Vielfachen der Periodendauer (z. B. bei  $t = 0$ ) sowie die betragsmäßige Abweichung  $\epsilon$  beim benachbarten Abtastwert (programmtechnisch liegt dieser bei  $t = 0.004$ ; hier sollte eigentlich  $p(t) = 0$  sein). Interpretieren Sie die Ergebnisse.

	$N = 1$	$N = 10$	$N = 100$	$N = 1000$	$N \rightarrow \infty$
$x(t = 0)$					
$\varepsilon$					
$\frac{\varepsilon}{x(t = 0)}$					

- e) Veranschaulichen Sie sich, dass ein unipolares Rechtecksignal ( $x_{\min} = 0, x_{\max} = 1/\Delta t$ ) im Grenzfall  $\Delta t \rightarrow 0$  einen Diracpuls approximiert. Wählen Sie hierzu  $N = 100$  und  $\Delta t/T = 0.1, \Delta t/T = 0.01, \Delta t/T = 0.001$ . Warum muss  $x_{\max} = 1/\Delta t$  gesetzt werden?

**A4: Fourierreihendarstellung eines einweggleichgerichteten Cosinussignals**

Gesucht sind die reellen Fourierkoeffizienten des nachfolgend skizzierten periodischen Signals  $x_5(t)$ . Dieses entsteht z.B. nach idealer Einweggleichrichtung des Sinussignals  $x_4(t)$ . Die Amplituden aller hier betrachteten Signale seien normiert gleich 1.

Ausgegangen wird von den in Vorbereitungsfrage V2 berechneten Fourierkoeffizienten eines Cosinussignals nach Zweiweggleichrichtung. Dieses ist in Abbildung 6 als Signal  $x_1(t)$  skizziert. Für die Fourierkoeffizienten gilt hier:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} ; \quad A_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{4}{\pi \cdot (4 \cdot n^2 - 1)} ; \quad B_n = 0 .$$

$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$
0.636	0.424	-0.085	0.036	-0.020	0.013	-0.009	0.007	-0.005	0.004	-0.003

- a) Betrachten Sie das Signal  $x_1(t)$  am Monitor, wenn es entsprechend der Fourierreihe berechnet und diese nach  $N = 10$  Koeffizienten abgebrochen wird. An welchen Stellen ist der Abbruchfehler am deutlichsten zu erkennen? Betrachten Sie auch das aus der Fourierreihe entstehende Signal für kleinere N-Werte, z.B. für  $N = 1, N = 3$  und  $N = 5$ .

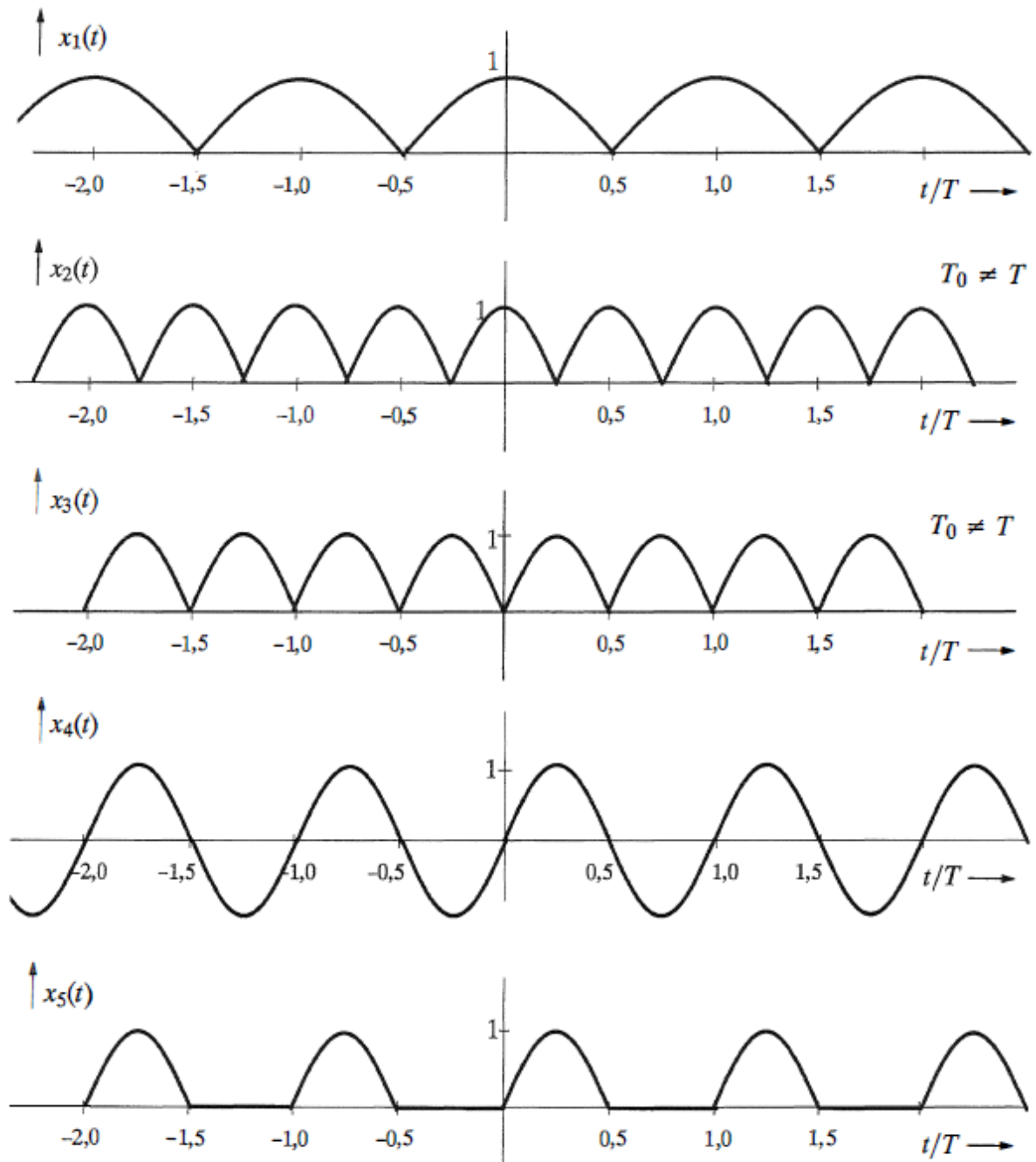


Bild 6: Signalverläufe zur Aufgabe A4.

- b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten des gegenüber  $x_1(t)$  um den Faktor 2 höher-frequenteren Signals  $x_2(t)$  unter Berücksichtigung der neuen Periodendauer  $T_0 = T/2$ . Wählen Sie hier und für die nachfolgenden Unterpunkte stets  $N = 10$ .







## 2 Lineare zeitinvariante Systeme

### 2.1 Methoden der Systemtheorie

Im zweiten Teil dieses Praktikumsversuchs soll der Einfluss eines Übertragungssystems auf Signal und Spektrum dargestellt werden. Dabei gelte Abbildung 7 mit dem Eingangssignal  $x(t) \leftrightarrow X(f)$  und dem Ausgangssignal  $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ .

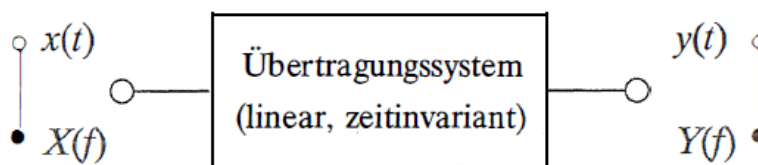


Abbildung 7: Zur Nomenklatur für die Beschreibung von LZI-Systemen

Um den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal herzustellen, kann man sich der Methoden der *Systemtheorie* bedienen. Damit können auch relativ komplexe Aufgabenstellungen aus verschiedenen Bereichen der Nachrichtentechnik auf eine zwar abstrakte mathematische, aber dafür sehr handhabbare und übersichtliche Art und Weise beschrieben werden.

Das *System* in Abbildung 7 kann beispielsweise eine einzelne Baugruppe sein, welche die Form des anliegenden Signals (z.B. Spannungsverlauf) verändert. Es kann aber auch ein komplettes Nachrichtenübertragungssystem beschreiben. Das Eingangssignal  $x(t)$  ist dann z.B. die Stimme eines Anrufers, das Ausgangssignal  $y(t)$  das auf einem Anrufbeantworter aufgezeichnete Gespräch am anderen Ende der Übertragung, das sich von  $x(t)$  geringfügig unterscheidet. Das „System“ beinhaltet in diesem Fall u.a. das Mikrofon, eine Sendeeinrichtung zur Umsetzung des Nachrichtensignals in einen für die Übertragung geeigneten Frequenzbereich, das Übertragungsmedium (Kabel, Lichtwellenleiter, Funk oder Satellitenverbindung), entsprechende Schaltungskomponenten am Empfänger sowie schließlich die magnetische Umsetzung des empfangenen Signals auf Band.

Die Systemtheorie ermöglicht eine Analyse dieses Nachrichtenübertragungssystems im Zeit- und Frequenzbereich, wobei Realisierungsaspekte nicht beachtet werden und das Gesamtsystem als Einheit (d.h. als „BlackBox“) aufgefasst wird. Dabei wird nach dem *Ursachen-Wirkungs-Prinzip* vorgegangen. Vorauszusetzen sind die Systemeigenschaften *Linearität* und *Zeitinvarianz*, d.h. es muss gelten:

- (a)  $x_1(t) + x_2(t) \Leftrightarrow y_1(t) + y_2(t)$  falls  $x_1(t) \Leftrightarrow y_1(t)$  und  $x_2(t) \Leftrightarrow y_2(t)$  ,  
 (b)  $x(t - \tau) \Leftrightarrow y(t - \tau)$  falls  $x(t) \Leftrightarrow y(t)$  .

Sind diese Eigenschaften gegeben, so spricht man von einem LZI-System. Für das Folgende setzen wir ohne (allzu große) Einschränkung der Allgemeingültigkeit voraus, dass  $x(t)$  und  $y(t)$  Spannungsverläufe darstellen.

## 2.2 Übertragungsfunktion

Das Übertragungsverhalten eines LZI-Systems wird durch die *Übertragungsfunktion*

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\text{Wirkungsfunktion}}{\text{Ursachenfunktion}} \quad (26)$$

vollständig beschrieben. Oft wird  $H(f)$  auch *Systemfunktion* oder *Frequenzgang* genannt.

Da die Spektren  $X(f)$  und  $Y(f)$  komplex sind, ist  $H(f)$  im allgemeinen ebenfalls eine komplexwertige Funktion. Mit der *Dämpfungsfunktion*  $a(f)$  und der *Phasenfunktion*  $b(f)$  gilt:

$$H(f) = e^{-a(f)} \cdot e^{-j \cdot b(f)} \quad (27)$$

Ist das Eingangssignal  $x(t)$  periodisch und dementsprechend das Eingangsspektrum  $X(f)$  ein Linienspektrum, so besteht auch das Ausgangsspektrum  $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$  ausschließlich aus diskreten Spektrallinien bei den gleichen Frequenzen. Das heißt: Aufgrund der Linearität des Systems entstehen keine neuen Frequenzen.

Entsprechend dem Dämpfungsverlauf  $a(f)$  unterscheidet man zwischen Tiefpass-, Hochpass- und Bandpasssystemen.

### V4: Einfluss von LZI-Systemen auf ein Cosinussignal

Gegeben sei die nachfolgende Übertragungsfunktion mit der Grenzfrequenz  $f_G$ :

$$H(f) = \frac{1}{1 + j \cdot f/f_G} = \frac{1 - j \cdot f/f_G}{1 + (f/f_G)^2} \quad (28)$$

- Berechnen Sie den Dämpfungs- und Phasenverlauf und interpretieren Sie diese Funktionen. Berechnen Sie insbesondere den Wert  $H(f = f_G)$ .
- Wie lautet das Ausgangssignal  $y(t)$ , wenn ein cosinusförmiges Eingangssignal mit der Amplitude 3V und der Periodendauer  $T = 1/f_G$  anliegt?
- Welche Eigenschaft hat ein System mit der Übertragungsfunktion

$$H(f) = \frac{j \cdot f/f_G}{1 + j \cdot f/f_G} = \frac{(f/f_G)^2 + j \cdot f/f_G}{1 + (f/f_G)^2} \quad (29)$$

- Wie lautet nun das Ausgangssignal  $y(t)$  bei sonst gleichen Parameterwerten wie in b)? Zeigen Sie, dass dieses System nicht kausal ist.

## 2.3 Lineare Verzerrungen

Liegen am Systemeingang statt einer einzelnen harmonischen Schwingung eine Summe solcher Sinus- und Cosinusschwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen an, so ist wegen der vorausgesetzten Linearität das Superpositionsprinzip anwendbar. Aufgrund der frequenzabhängigen Dämpfung  $a(f)$  und Phase  $b(f)$  werden die einzelnen Spektralanteile unterschiedlich gedämpft und verschiedenartig verzögert. Dies hat zur Folge, dass das Ausgangssignal  $y(t)$  gegenüber dem Eingangssignal  $x(t)$  verzerrt wird. Im Gegensatz zu nichtlinearen Verzerrungen, durch die auch zusätzliche, im Eingangssignal nicht vorhandene Frequenzanteile entstehen können, spricht man hier von *linearen Verzerrungen*.

Das System ist verzerrungsfrei, wenn die Dämpfungsfunktion  $a(f)$  konstant und der Phasenverlauf  $b(f)$  proportional zu  $f$  ist. Verzerrungen, die auf eine frequenzabhängige Dämpfung zurückzuführen sind, bezeichnet man als *Dämpfungsverzerrungen*. Entsprechend entstehen *Phasenverzerrungen* aufgrund eines nichtlinearen Phasenverlaufs  $b(f)$ .

### V5: Einfluss von LZI-Systemen auf ein Cosinussignal

In A1 wird gezeigt, dass ein periodisches Dreieckssignal gemäß Abbildung 4 mit guter Näherung durch eine endliche Fourierreihe angenähert werden kann. Beispielsweise gilt:

$$x(t) \approx \frac{8}{\pi^2} \cdot \left[ 1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{9} \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{1}{25} \cdot \cos(5 \cdot \omega_0 \cdot t) \right]. \quad (30)$$

Wird dieses Signal über einen Tiefpass mit der Übertragungsfunktion

$$H(f) = e^{-\pi \cdot \left(\frac{f}{2f_G}\right)^2} \cdot e^{-j \cdot 2\pi f \tau} \quad (31)$$

übertragen, so wird sich das Ausgangssignal  $y(t)$  vom Eingangssignal  $x(t)$  unterscheiden.

- Welchen Einfluss hat der zweite Term in Gl. (31)? Setzen Sie für das Folgende  $\tau = 0$ ?
- Die Grenzfrequenz  $f_G$  des Tiefpasses sei viermal so groß wie die Grundfrequenz  $f_0 = \omega_0/2\pi$ . Mit welchen Faktoren werden die Grundwelle sowie die Oberwellen ( $n = 3$  bzw.  $n = 5$ ) gedämpft?
- Geben Sie die Fourierreihendarstellung des Ausgangssignals  $y(t)$  an. Welche Auswirkungen haben die Dämpfungsverzerrungen im vorliegenden Fall? Wie groß ist  $y(0)$ ?

## 2.4 Impulsantwort und Sprungantwort

Betrachten wir nun den Einfluss eines LZI-Systems auf nichtperiodische, zeitlich begrenzte Eingangssignale (kontinuierliche Spektren). Eine Möglichkeit zur Berechnung des Ausgangssignals  $y(t)$  bei gegebenem Eingangssignal  $x(t)$  ist die Anwendung der Gleichungen  $X(f) \leftrightarrow x(t)$ ,  $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$  und  $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ . Eine zweite stellt die Faltung (Abschnitt 2.5) dar.

Verwendet man das Eingangssignal  $x(t) = \delta(t)$ , so ist  $X(f) = 1$ . Das Ausgangsspektrum ist somit  $Y(f) = H(f)$  und das Ausgangssignal  $y(t) = h(t)$ , wobei

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \quad (32)$$

als *Impulsantwort* (da Antwort des LZI-Systems auf einen Diracimpuls am Eingang) bezeichnet wird. Ebenso wie durch die Übertragungsfunktion  $H(f)$  wird ein System durch die Funktion (32) vollständig beschrieben. Manche Systemeigenschaften lassen sich im Zeitbereich sogar leichter erkennen, so z.B. die *Kausalität*.

Man bezeichnet ein System dann als kausal, wenn für dessen Impulsantwort gilt:  $h(t < 0) = 0$ . Im Frequenzbereich ist die Formulierung der Kausalitätsbedingung deutlich schwieriger (siehe Skriptum NT 1). Alle realisierbaren Systeme (z.B. Schaltungen) sind immer kausal. Die Begründung hierfür ist einfach: Wenn man zum Zeitpunkt  $t = 0$  einen kurzzeitigen Impuls am Eingang anlegt, kann nicht bereits vorher ein Ausgangssignal erscheinen.

Dennoch beschäftigt man sich in der Systemtheorie auch häufig mit solchen akasalen Systemen, zum Beispiel bei der Analyse von Dämpfungsverzerrungen. Mit einer Laufzeit  $\tau$  hinreichender Größe kann nämlich jede akasale Übertragungsfunktion zu einer kausalen gemacht werden  $h(t) \rightarrow h(t - \tau)$ . Wie Sie in V5 hoffentlich gezeigt haben, werden durch diese Maßnahme keine zusätzlichen Verzerrungen erzeugt.

Eine weitere wichtige Systembeschreibungsgröße ist die *Sprungantwort*  $\sigma(t)$ . Diese erhält man am Systemausgang, wenn am Eingang eine Sprungfunktion

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 0.5 & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (33)$$

angelegt wird. Anzumerken ist, dass die Sprungantwort ohne Einheit ist (falls  $y(t)$  ohne Einheit ist), während die Impulsantwort die Einheit 1/s aufweist.

Da die Sprungfunktion  $\gamma(t)$  gemäß (33) als Integral über die Diracfunktion  $\delta(t)$  interpretiert werden kann, kann auch die Sprungantwort als Integral über die Impulsantwort berechnet werden:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau. \quad (34)$$

In Vorbereitungsfrage V7 soll dieser Funktionalzusammenhang über die Faltungsoperation abgeleitet werden. Bei kausalen Systemen ist die untere Integrationsgrenze gleich 0.

**V6: Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion, Impuls- und Sprungantwort**

Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses sei wie folgt gegeben:

$$H(f) = \text{si}^2\left(\pi \cdot \frac{f}{2 \text{ kHz}}\right).$$

- a) Wie lautet die Impulsantwort  $h(t)$ ? Wie groß ist insbesondere  $h(0)$ ? Skizze. *Hinweis:* Verwenden Sie zur Lösung die im Tiefpasskatalog angegebene Fourierkorrespondenz.

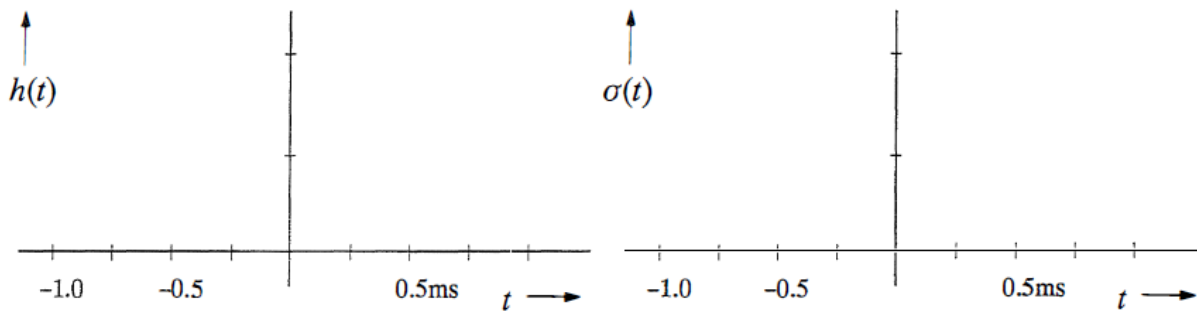


Abbildung 8: Impuls- und Sprungantwort zu V6

- b) Geben Sie auch eine quantitative Skizze der Sprungantwort  $\sigma(t)$ . Wie groß ist  $\sigma(0)$ ?
- c) Durch ein Laufzeitfilter kann obiger Tiefpass kausal gemacht werden. Wie groß ist die Verzögerungszeit mindestens zu wählen? Geben Sie die Übertragungsfunktion des kausalen Tiefpasses an und skizzieren Sie die Impuls- und die Sprungantwort in obige Diagramme.

## 2.5 Faltung

Ist die Systemantwort  $h(t)$  bekannt, so kann der Einfluss eines LZI-Systems (vgl. Abbildung 7) auf das Eingangssignal  $x(t)$  auch direkt im Zeitbereich angegeben werden. Da das Ausgangsspektrum  $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$  ist, gilt nach dem Faltungssatz (siehe Skriptum NT1):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \, d\tau. \quad (35)$$

Die Faltungsoperation, abgekürzt mit  $y(t) = x(t) * h(t)$ , ist kommutativ, so dass man alternativ zu (35) auch schreiben kann:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) \, d\tau. \quad (36)$$

Die Gleichung (35) lässt sich aus der Fouriertransformation (11) und Gl. (26) ableiten:

$$\begin{aligned} Y(f) = X(f) \cdot H(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \, d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t') \cdot e^{-j2\pi ft'} \, dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t') \cdot e^{-j2\pi f(\tau+t')} \, d\tau \, dt'. \end{aligned} \quad (37)$$

Mit der Substitution  $t = \tau + t'$  folgt nämlich:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \, d\tau \cdot e^{-j2\pi ft} \, dt. \quad (38)$$

Diese Gleichung beschreibt die Fouriertransformation, wenn man das innere Integral gleich  $y(t)$  setzt. Somit ist Gl. (35) bewiesen.

Bei vielen Aufgabenstellungen (jedoch beileibe nicht bei allen) kommt man durch Anwendung der Faltung schneller zum Ergebnis als mit der herkömmlichen Vorgehensweise

- $X(f) \leftrightarrow x(t)$ ,
- $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$  und
- $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ .

Dies gilt insbesondere dann, wenn  $x(t)$  bzw.  $h(t)$  zeitlich begrenzt ist (vgl. Vorbereitungsfrage V7) oder wenn eine der beiden Zeitfunktionen als Summe von (gewichteten und verschobenen) Diracfunktionen dargestellt werden kann. Es gilt nämlich:  $\delta(t - t_0) * h(t) = h(t - t_0)$ .

**V7: Berechnung der Sprungantwort über die Faltung**

Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung (34) mit Hilfe der Faltungsoperation. Wie lautet diese Gleichung bei kausalen Systemen?

**2.6 Versuchsdurchführung**

Im zweiten Versuch sollen die eben dargelegten theoretischen Zusammenhänge an Beispielen nachvollzogen und überprüft werden. Die Aufgaben A5 bis A7 werden wie in Abschnitt 1.4 mit dem Programm „lzi“ (Menüpunkt c) gelöst, die weiteren mit „ft“.

**A5: Einfluss verschiedener Übertragungsfunktionen auf ein Rechtecksignal am Eingang**

Das Eingangssignal sei das periodische bipolare Rechtecksignal von Abbildung 5 mit  $\Delta t/T = 0.5$  ( $x_{\max} = 1$ ,  $x_{\min} = -1$ ). Betrachten und beschreiben Sie qualitativ die verschiedenen Ausgangssignale und ihre Spektren nach einem

a) Gauß-Tiefpass:

b) Tiefpass erster Ordnung:

c) Hochpass erster Ordnung:

d) Allpass erster Ordnung:

Wählen Sie die (normierte) Grenzfrequenz jeweils  $f_g = 2$  und  $f_g = 4$ . Beobachten Sie insbesondere die entstehenden Dämpfungs- und Phasenverzerrungen.

**A6: Einfluss verschiedener Übertragungsfunktionen auf ein Dreiecksignal am Eingang**

Beobachten Sie auch den Einfluss der vier in A5 angegebenen LZI-Systeme (mit  $f_g = 2$ ) bei dreieck-förmigem Signal entsprechend Abbildung 4. Interpretieren Sie nun die Dämpfungs- und Phasenver-zerrungen im Vergleich zum rechteckförmigen Eingangssignal gemäß A5.

**A 7\*: Zusammenhang zwischen Diracpuls, Übertragungsfunktion und Impulsantwort**

Wählen Sie nun als Eingangssignal einen Diracpuls und die vier in A5 angegebenen LZI-Systeme (mit  $f_g = 2$  ). Was gibt in diesem Fall das Ausgangsspektrum an?

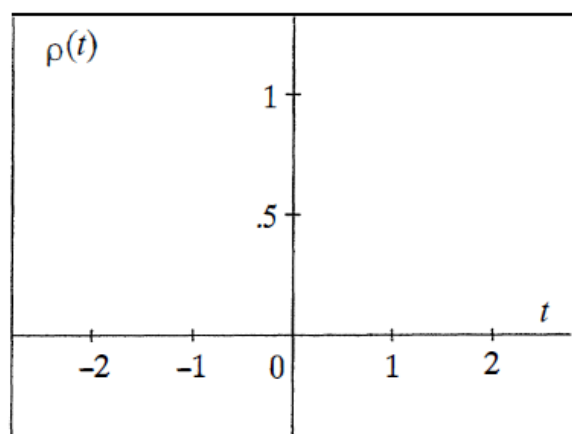
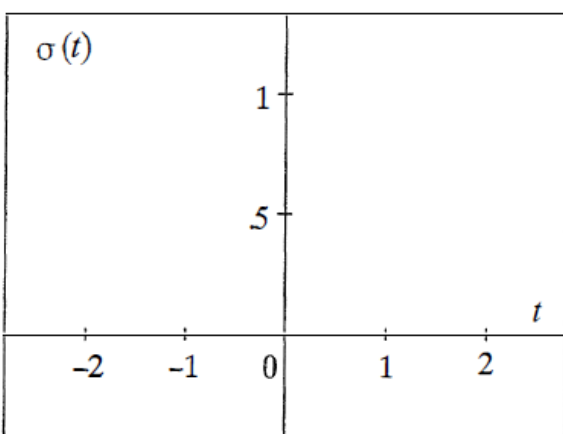
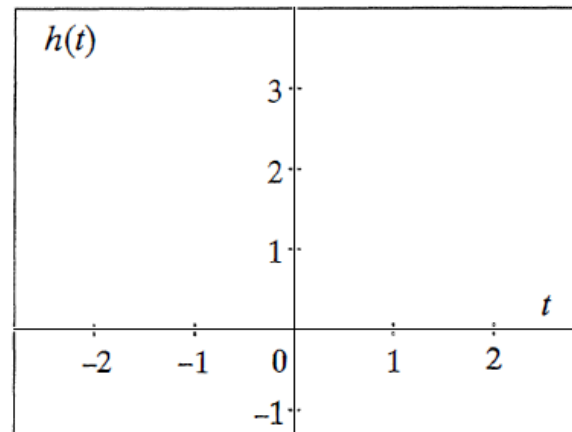
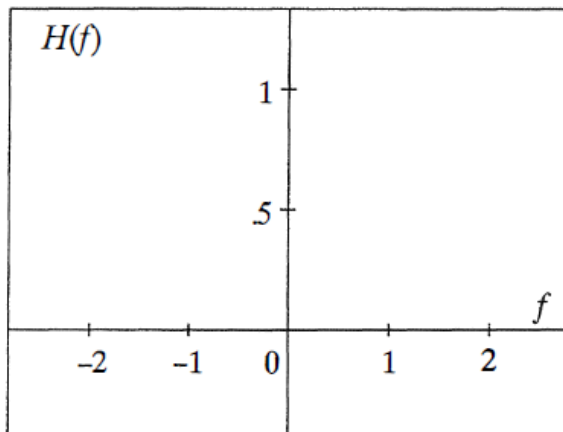


**8: Kennfunktionen des Gaußtiefpasses**

a) Ermitteln Sie mit dem Programm "ft" (Menüpunkt a)

- die Übertragungsfunktion,
- $H(f)$ ,
- die Impulsantwort  $h(t)$ ,
- die Sprungantwort  $\rho(t)$  und
- die Rechteckantwort  $\sigma(t)$  (= Ausgangssignal bei einem Rechteckimpuls der Dauer 1 und Höhe 1 am Eingang, jeweils normiert)

des Gaußtiefpasses und tragen Sie diese Funktionen in Bild 9 ein. Wählen Sie die normierte Grenzfrequenz  $f_g = 1$ . Geben Sie eine kurze Interpretation der Kurvenverläufe. Was lässt sich über die Realisierbarkeit dieses Tiefpasses aussagen?



- b) Welche qualitativen Veränderungen ergeben sich an der Impuls-, Sprung- und Rechteckantwort, wenn die Grenzfrequenz  $f_g$  variiert wird ( $f_g = 0.5$  bzw.  $f_g = 1.5$ )?
- c) Ändern Sie nun bei  $f_g = 1$  die Dauer und Höhe des Rechteckimpulses am Eingang, wobei die Impulsfläche = Dauer mal Höhe konstant bleibt. Interpretieren Sie die Rechteckantworten.

**A9: Graphische Faltung**

Die Faltungsoperation (35) lässt sich graphisch in folgenden Schritten lösen:

- a. Zeitvariable von Eingangssignal und Impulsantwort umbenennen:  $t \rightarrow \tau$ ,
- b. Impulsantwort spiegeln:  $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$ ,
- c. Gespiegelte Impulsantwort um  $t$  verschieben:  $h(\tau) \rightarrow h(t - \tau)$ ,
- d. Multiplikation der Zeitfunktionen:  $x(\tau) \cdot h(t - \tau)$ ,
- e. Integration über das Produkt unter Berücksichtigung der Integrationsgrenzen ergibt den Wert des Ausgangssignals  $y(t)$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Veranschaulichen Sie sich diese Vorgehensweise mit dem Programm „ft“ an einigen Beispielen, und zwar für einen

- a) rechteckförmigen Eingangsimpuls (Dauer 1) und eine exponentiell abfallende Impulsantwort (d.h. Tiefpass erster Ordnung, Grenzfrequenz ( $f_g = 0.2$ )),
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- b) rechteckförmigen Eingangsimpuls (Dauer 1) und eine rechteckförmige Impulsantwort (d.h. Spalttiefpass, Grenzfrequenz  $f_g = 1.0$  bzw.  $f_g = 0.5$ ),
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- c) gaußförmigen Eingangsimpuls (mit äquivalenter Impulsdauer 1) und eine rechteckförmige Impulsantwort (d. h. Spalttiefpass, Grenzfrequenz  $f_g = 1.0$ ),
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- d) für einen gaußförmigen Eingangsimpuls (mit äquivalenter Impulsdauer 1) und eine gaußförmige Impulsantwort (Grenzfrequenz  $f_g = 1.0$ ).

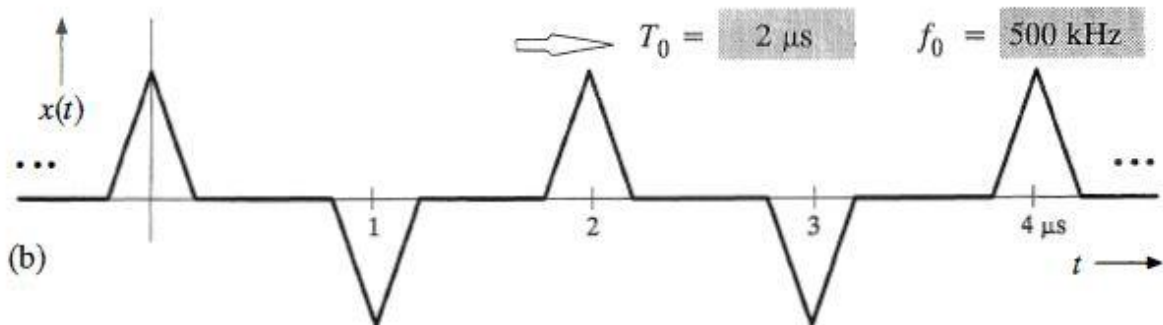
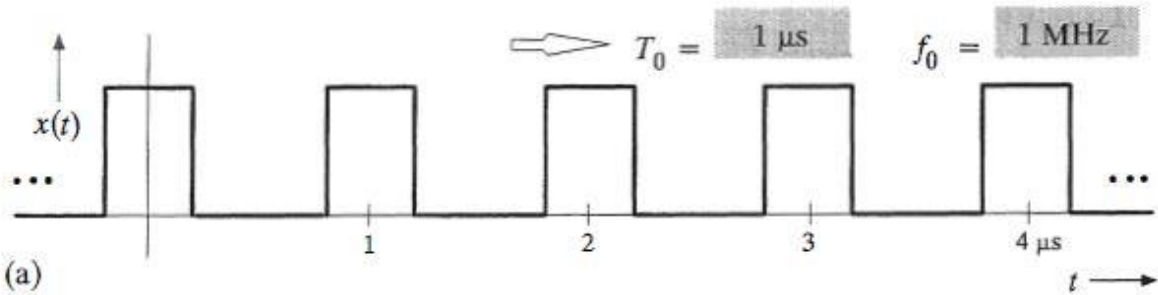
Notieren Sie sich in Stichworten die Besonderheiten der jeweiligen Kombinationen.

### 3 Tiefpasskatalog

Frequenzgang	Impulsantwort
<p><u>Küpfmüller-Tiefpaß</u></p> $H(f) = 1 \quad \text{für }  f  \leq f_G$ <p style="text-align: center;">ansonsten 0</p>	$h(t) = 2 \cdot f_G \cdot \text{si}(2\pi \cdot f_G \cdot t)$ <p style="text-align: right;">mit <math>\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}</math></p>
<p><u>Trapez-Tiefpaß</u></p> $H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für }  f  \leq f_1 \\ \frac{f_2 -  f }{f_2 - f_1} & \text{für } f_1 \leq  f  \leq f_2 \\ 0 & \text{ansonsten 0} \end{cases}$	$h(t) = 2f_G \cdot \text{si}(2\pi \cdot f_G \cdot t) \cdot \text{si}(2\pi \cdot f_G r \cdot t)$ <p style="text-align: center;">mit <math>f_G = \frac{f_1 + f_2}{2}</math> und <math>r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}</math></p>
<p><u>Dreieck-Tiefpaß</u></p> $H(f) = 1 - \frac{ f }{f_G} \quad \text{für }  f  \leq f_G$ <p style="text-align: center;">ansonsten 0</p>	$h(t) = f_G \cdot \text{si}^2(\pi \cdot f_G \cdot t)$ <p style="text-align: right;">mit <math>\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}</math></p>
<p><u>Spalt-Tiefpaß</u></p> $H(f) = \text{si}\left(\pi \cdot \frac{f}{f_G}\right)$	$h(t) = 2 \cdot f_G \quad \text{für }  t  \leq \frac{1}{2 \cdot f_G}$ <p style="text-align: center;">ansonsten 0</p>
<p><u>si2-Tiefpaß</u></p> $H(f) = \text{si}^2\left(\pi \cdot \frac{f}{f_G}\right)$	$h(t) = f_G \cdot [1 - f_G \cdot  t ]$ <p style="text-align: center;">für <math> t  \leq \frac{1}{f_G}</math></p>
<p><u>Gauß-Tiefpaß</u></p> $H(f) = \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f}{2f_G}\right)^2\right]$	$h(t) = 2f_G \cdot \exp[-\pi \cdot (2f_G \cdot t)^2]$
<p><u>Tiefpaß n-ter Ordnung</u></p> $H(f) = \frac{1}{(1 + j \cdot f/f_G)^n}$	<p>1. Ordnung (n=1):  <math display="block">h(t) = 2\pi \cdot f_G \cdot \exp[-2\pi \cdot f_G \cdot t]</math>                     für <math>t \geq 0</math>, sonst 0</p> <p>2. Ordnung (n=2):  <math display="block">h(t) = 4\pi^2 \cdot f_G^2 \cdot t \cdot \exp[-2\pi \cdot f_G \cdot t]</math>                     für <math>t \geq 0</math>, sonst 0</p>

### 4 Musterlösungen der Vorbereitungsaufgaben

V1:



(c)  $x(t) = \sin(\pi \cdot \frac{t}{4\mu\text{s}}) = \sin(2\pi \cdot \frac{t}{8\mu\text{s}})$

$T_0 = 8 \mu\text{s}$   $f_0 = 125 \text{ kHz}$

(d)  $x(t) = \sin^2(\pi \cdot \frac{t}{4\mu\text{s}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot \frac{t}{4\mu\text{s}})$

$T_0 = 4 \mu\text{s}$   $f_0 = 250 \text{ kHz}$

(e)  $x(t) = \cos(2\pi \cdot \frac{t}{8\mu\text{s}}) + A \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{t}{2\mu\text{s}} - \varphi)$   $T_1 = 8 \mu\text{s}$   $T_2 = 2 \mu\text{s}$

unabhängig von  $A$  und  $\varphi$

$T_0 = 8 \mu\text{s}$   $f_0 = 125 \text{ kHz}$

(f)  $x(t) = \cos(2\pi \cdot \frac{t}{8\mu\text{s}}) + \cos(2\pi \cdot \frac{t}{6\mu\text{s}})$   $T_1 = 8 \mu\text{s}$   $T_2 = 6 \mu\text{s}$

$T_0 = 24 \mu\text{s}$   $f_0 = 41.7 \text{ kHz}$

(g)  $x(t) = \cos(2\pi \cdot \frac{t}{8\mu\text{s}}) + \cos(\frac{t}{8\mu\text{s}})$   $T_1$  und  $T_2$  unterscheiden sich um  $2\pi$ , somit kein gemeinsames Vielfaches

$T_0 = \infty$   $f_0 = 0$

nicht periodisch !

**V2**

a)  $T_0 = T$

$$b) A_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) du$$

$$u = \pi \cdot \frac{t}{T}, \quad du = \pi \cdot \frac{dt}{T}$$

Nach Integration unter Berücksichtigung der Symmetrie:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right] = \frac{2}{\pi}$$

c)  $x_1(t)$  ist eine gerade Funktion; daraus folgt:  $B_n = 0$  für alle  $n$

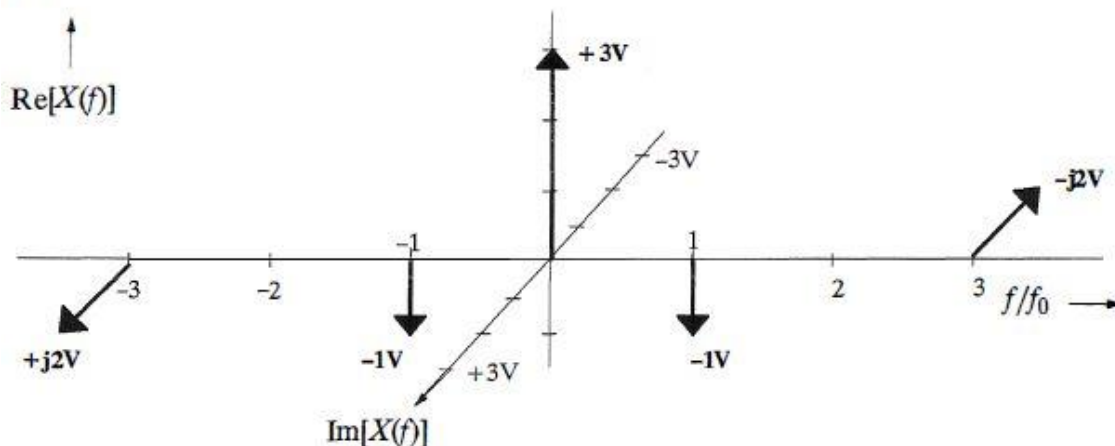
$$d) A_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right) \cdot \cos\left(n \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right) dt$$

$$\text{Mit } u = \pi \cdot \frac{t}{T_0} : A_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) \cdot \cos(2n \cdot u) du = (-1)^{n+1} \cdot \frac{4}{\pi \cdot (4 \cdot n^2 - 1)}$$

$$e) x_1(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{4 \cdot n^2 - 1} \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[ 1 + \frac{2}{3} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - \frac{2}{15} \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{2}{35} \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) - \dots \right]$$

**V3:**



**V4:**

$$a) \quad a(f) = -\ln |H(f)| = \ln \sqrt{1 + f^2/f_G^2} ,$$

$$b(f) = -\arg H(f) = -\arctan \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}} = \arctan(f/f_g) .$$

Der Dämpfungsverlauf nimmt von 0 Neper (für  $f=0$ ) mit steigender Frequenz kontinuierlich zu ("Tiefpaßcharakteristik"). Die Phase steigt von 0 auf  $\pi/2$ . Für  $f = f_G$  gilt:

$$H(f=f_G) = 1/(1+j) = 0.5 \cdot (1-j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\pi/4} .$$

b) Die Amplitude wird um  $\sqrt{1/2}$  kleiner, die Phase beträgt  $-45^\circ$ . Daraus folgt:

$$y(t) = 2.121\text{V} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T} - \frac{\pi}{4}\right) = 2.121\text{V} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t-T/8}{T}\right) .$$

Das Ausgangssignal  $y(t)$  ist gegenüber  $x(t)$  um  $T/8$  nachlaufend.

c) Bei  $f=0$  ist  $H(f)=0$ , d.h. die Dämpfung unendlich groß. Mit wachsendem  $f$  nimmt  $a(f)$  kontinuierlich ab ("Hochpaßcharakteristik"). Die Phase ist gegenläufig zu Punkt a). Für  $f = f_G$  gilt:

$$H(f=f_G) = j/(1+j) = 0.5 \cdot (1+j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{+j\pi/4} .$$

d) Die Amplitude wird wieder um  $\sqrt{1/2}$  kleiner, die Phase beträgt  $+45^\circ$ . Daraus folgt:

$$y(t) = 2.121\text{V} \cdot \cos\left(2\pi \cdot t/T + \frac{\pi}{4}\right) .$$

Das Signal ist gegenüber  $x(t)$  um  $T/8$  vorlaufend, d.h. System ist nicht kausal.

**V5:**

a) Da hier der Phasenverlauf  $b(f)$  linear mit  $f$  ansteigt, bewirkt dieser Term keine Phasenverzerrungen, sondern lediglich eine für alle Frequenzen konstante Verzögerung um  $\tau$  ("Verschiebungssatz", siehe Skriptum NT1, Abschnitt 1.4.6).

$$b) \quad H(f = f_0) = e^{-\pi \cdot \left(\frac{f_0}{2f_G}\right)^2} = e^{-\pi/64} \approx 0.952$$

$$H(f = 3 \cdot f_0) = e^{-\pi \cdot \left(\frac{3f_0}{2f_G}\right)^2} = e^{-9\pi/64} \approx 0.643 ,$$

$$H(f = 5 \cdot f_0) = e^{-\pi \cdot \left(\frac{5f_0}{2f_G}\right)^2} = e^{-25\pi/64} \approx 0.293 .$$

c) Die einzelnen Anteile werden entsprechend Punkt b) gedämpft. Somit ist

$$y(t) \approx \frac{8}{\pi^2} \cdot \left[ 0.952 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{0.643}{9} \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{0.293}{25} \cdot \cos(5 \cdot \omega_0 \cdot t) \right] .$$

Die Spitzen (höherfrequent) sind abgeschwächt. Der Wert bei  $t=0$  ist nur mehr

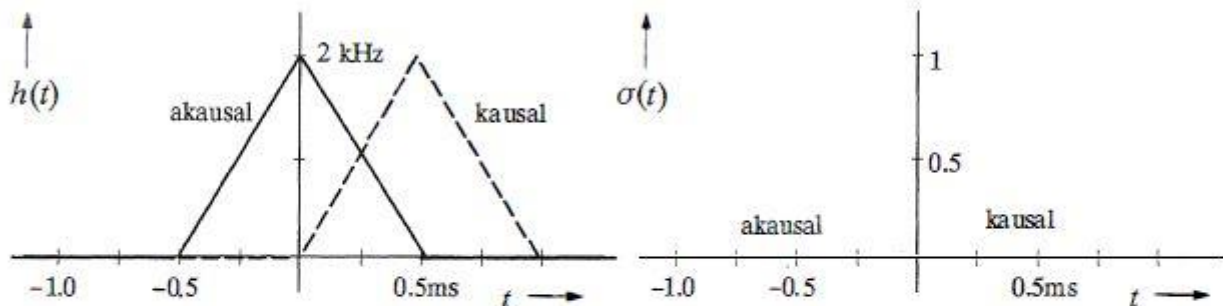
$$y(0) \approx \frac{8}{\pi^2} \cdot \left[ 0.952 + \frac{0.643}{9} + \frac{0.293}{25} \right] \approx 0.838 .$$



**V6:**

a)  $h(t)$  ist dreieckförmig im Bereich  $|t| < 0.5$  ms.  $h(0) = 1/(0.5 \text{ ms}) = 2$  kHz.

b)  $\sigma(t)$  ergibt sich nach (34) als Integral über  $h(t)$ . Der Endwert ist somit 1,  $\sigma(0) = 0.5$ .



c) Minimale Verzögerungszeit:  $t_0 = 0.5$  ms.

$$H(f) = \text{si}^2\left(\pi \cdot \frac{f}{2 \text{ kHz}}\right) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot 1 \text{ ms}}$$

**V7:**

Wir gehen von Gl. (36) aus. Mit  $x(\tau) = \gamma(\tau)$  gemäß Gl. (33), wobei formal  $t$  durch  $\tau$  ersetzt wird, ist die gespiegelte Funktion  $x(t-\tau)$  für  $\tau > 0$  identisch 0, ansonsten 1. Durch die Zeitverschiebung um  $t$  erfolgt der Sprung (von 1 auf 0) erst bei  $t$ , so daß das Produkt  $h(\tau) \cdot x(t-\tau)$  für  $\tau > t$  ebenfalls gleich 0 ist. Damit erhält man die obere Integrationsgrenze von Gl. (34).

Ist  $h(\tau) = 0$  für  $\tau < 0$ , so kann die untere Integrationsgrenze zu 0 gesetzt werden, und man erhält:

$$\sigma(t) = \int_0^t h(\tau) \, d\tau.$$

**V8:**

Entsprechend der Definitionsgleichung (39) gilt:

$$\Gamma_L(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} \, d\tau = -\frac{1}{p} \cdot e^{-p\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Betrachtet man  $p$  als eine reelle Variable, so beschreibt die Laplacetransformierte eine reelle Funktion (Hyperbel). Da  $p$  jedoch komplex ist, ergibt obiges Ergebnis einen Pol bei  $p = 0$ . Demgegenüber ist  $\Gamma(f)$  eine komplexe Funktion, deren Realteil nur bei der Frequenz  $f = 0$  erscheint (Diracfunktion), während der kontinuierliche Anteil eine imaginäre ungerade Funktion ist.



## 5 Musterlösungen zur Versuchsdurchführung

### A1:

- Es handelt sich um eine gerade Funktion, da  $x(-t) = x(t)$  ist.
- $A_0$  ist 0, da dieser Koeffizient den Gleichanteil (Mittelwert) des Signals angibt.
- Die Spektrallinien bei den (normierten) Frequenzen  $f = 1, 2$  bzw.  $3$  sind  $0.405, 0$  bzw.  $0.045$ . Die dazugehörigen  $\cos$ -Koeffizienten sind doppelt so groß.

	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
mit Programm	<b>0</b>	<b>0.810</b>	<b>0</b>	<b>0.090</b>
nach (23)	<b>0</b>	$\frac{8}{\pi^2}$	<b>0</b>	$\frac{8}{9 \cdot \pi^2}$

Die Werte stimmen exakt überein. Alle Koeffizienten mit geradzahligem  $n$  sind 0, da  $x(t) = -x(t + T_0/2)$  gilt (d.h. das Signal ist innerhalb der Periode ungerade, vgl. Skriptum NT1).

- $N = 1$ : In der Fourierreihe ist nur die Grundfrequenz (als Cosinus) enthalten.

$N = 3$ : Bereits recht gute Annäherung. Größte Abweichung bei  $t = 0$  und Vielfachen von  $T_0$  aufgrund der Spitze im Signalverlauf. Die maximale Abweichung beträgt ca. 10%.

$N = 10$ : Im allgemeinen ist innerhalb der Zeichengenauigkeit kein Unterschied zwischen Fourierreihe und Original feststellbar. Die maximale Abweichung an der Spitze beträgt nun ca. 4%.

$N = 100$ : Es werden nun auch die Spitzen sehr gut nachgebildet. Die Abweichung beträgt nur noch ca. 0.4%.

### A2:

- |              | $A_0$    | $A_1$           | $A_2$    | $A_3$                    | $A_4$    | $A_5$                   |
|--------------|----------|-----------------|----------|--------------------------|----------|-------------------------|
| mit Programm | <b>0</b> | <b>1.273</b>    | <b>0</b> | <b>-0.425</b>            | <b>0</b> | <b>0.255</b>            |
| nach (24)    | <b>0</b> | $\frac{4}{\pi}$ | <b>0</b> | $-\frac{4}{3 \cdot \pi}$ | <b>0</b> | $\frac{4}{5 \cdot \pi}$ |

Die angezeigten Werte stimmen exakt überein.

- $N = 1$ : Die Grundfrequenz hat eine größere Amplitude als das Rechtecksignal selbst, da die Fourierkoeffizienten alternierende Vorzeichen aufweisen.

$N = 3$ : Die Approximation ist deutlich schlechter als beim Dreieckimpuls, da das Rechtecksignal Unstetigkeitsstellen aufweist. Diese Aussage gilt für alle Werte von  $N$ .

$N = 100$ : Bei sehr großen  $N$ -Werten (z.B.  $N = 100$ ) wird der Funktionsverlauf mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen gut nachgebildet. Bei diesen kommt es zu schnell oszillierenden Überschwängern (siehe Punkt c).

- c) Selbst für  $N \rightarrow \infty$  kommt es in der Nähe der Sprungstellen zu Überschwängern bis zu ca. 9% (*Gibbscher Effekt*). Der Wert an der Sprungstelle direkt ergibt sich als der arithmetische Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert.

d)

	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$\Delta t/T = 0.5$	<b>0.5</b>	<b>0.637</b>	<b>0</b>	<b>-0.212</b>	<b>0</b>	<b>0.127</b>
$\Delta t/T = 0.25$	<b>0.25</b>	<b>0.450</b>	<b>0.318</b>	<b>0.150</b>	<b>0</b>	<b>-0.090</b>
$\Delta t/T = 0.75$	<b>0.75</b>	<b>0.450</b>	<b>-0.318</b>	<b>0.150</b>	<b>0</b>	<b>-0.090</b>

Die Koeffizienten  $A_n$  ( $n > 0$ ) sind halb so groß wie unter Punkt a); dies geht auch aus Gl. (24) hervor. Der Gleichanteil ergibt sich nun zu  $A_0 = 0.5$ .

- e) Der Gleichanteil ergibt sich nun zu  $A_0 = 0.25$ , da der Amplitudenwert 1 jetzt nur halb so oft wie unter Punkt d) erscheint. Die Koeffizienten  $A_{2n}$  (d.h.:  $n$  gerade) sind halb so groß wie die Koeffizienten  $A_n$  unter Punkt d). Beispielsweise gilt:  $A_2 = 0.318 = 0.637/2$ . Dies hängt damit zusammen, daß wegen der halb so breiten Rechteckimpulse die Hüllkurve der Spektrallinien doppelt so breit und deshalb auch nur halb so hoch ist. Die Koeffizienten dazwischen sind Interpolationswerte.
- f) Es gilt:  $x_{(f)}(t) = 1 - x_{(e)}(t - T/2)$ . Der Gleichanteil ergibt sich nun zu  $A_0 = 1 - 0.25 = 0.75$ . Die Koeffizienten  $A_n$  besitzen die gleichen Beträge wie unter e), jedoch mit unterschiedlichen Vorzeichen aufgrund der Invertierung und Verschiebung (siehe auch Aufgabe A4(d)).

**A3:**

- a)  $D_n = 1$  für alle  $n$

- b) Es gilt:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} T_0 \cdot \delta(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt$$

Alle anderen Diracimpulse liegen außerhalb des Integrationsintervalls. Für  $t \neq 0$  ist die Diracfunktion gleich 0, für  $t = 0$  ist der Drehfaktor gleich 1. Somit gilt:



$$D_n = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) dt = 1 .$$

c)  $A_0 = 1, A_n = 2$  für alle  $n, B_n = 0$  für alle  $n$

d)

	$N = 1$	$N = 10$	$N = 100$	$N = 1000$	$N \rightarrow \infty$
$x(t = 0)$	3.000	21.00	201.0	2001.0	$\infty$
$\varepsilon$	2.999	20.76	47.6	15.0	0
$\frac{\varepsilon}{x(t = 0)}$	$\approx 1$	0.988	0.237	0.007	0

Je größer  $N$ , desto besser wird der Diracpuls approximiert.

e) Beim Rechtecksignal nehmen die Fourierkoeffizienten  $D_n$  mit wachsendem  $n$  ab. Je kleiner  $\Delta t/T$  ist, um so langsamer geschieht der Abfall. Für  $\Delta t/T = 0.001$  sind alle dargestellten Fourierkoeffizienten gleich 1 (auf 3 Dezimalstellen genau).

Für kleine Werte von  $\Delta t$  kann  $\sin(n \cdot \pi \cdot \Delta t/T) \approx n \cdot \pi \cdot \Delta t/T$  gesetzt werden, so daß für die Fourierkoeffizienten näherungsweise gilt:  $D_n \approx \Delta t/T$ . Das bedeutet, daß  $D_n$  für kleines  $\Delta t$  ebenfalls sehr klein wird. Dies muß durch eine größere Amplitude  $1/\Delta t$  kompensiert werden. Physikalisch bedeutet diese Vergrößerung der Amplitude, daß der Rechteckimpuls ebenso wie der zu approximierende Diracimpuls  $p(t)$  die Impulsfläche 1 besitzt.

**A4:**

a) Der Abbruchfehler macht sich an der Signalspitze am stärksten bemerkbar. Der Fehler ist wieder um so größer, je kleiner  $N$  ist.

b) Nach Vorbereitungsfrage V2(e) gilt:

$$x_1(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \left[ 1 + \frac{2}{3} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - \frac{2}{15} \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{2}{35} \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) - \dots \right]$$

Das Signal  $x_2(t)$  ist doppelt so schnell. Es ergeben sich genau die gleichen Fourierkoeffizienten wie unter Punkt a, wenn man die tatsächliche Periodendauer  $T_0 = T/2$  einsetzt. Daraus folgt für die Kreisfrequenz:  $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 4\pi/T$ . Dies zeigt auch das Programm.

c) Geht man dagegen wieder von der Periodendauer  $T_0 = T$  aus, so sind die Koeffizienten mit ungeradem  $n$  gleich Null, während für gerades  $n$  gilt:

$$A_{2n}(x_2(t)) = A_n(x_1(t)) .$$





**A5:**

- a) **Gauß-Tiefpaß:** Die höherfrequenten Anteile werden weiter gedämpft. Deshalb werden die Ecken abgerundet. Je kleiner die Grenzfrequenz, desto stärker ist dieser Effekt. Phasenverzerrungen treten hier keine auf: auch  $y(t)$  ist eine gerade Funktion.
- b) **Tiefpaß erster Ordnung:** Das Eingangsspektrum wird nach Betrag und Phase verändert (Dämpfungs- und Phasenverzerrungen). Sowohl der Flankenanstieg als auch der Abfall verlaufen nun nach einer Exponentialfunktion. Je kleiner die Grenzfrequenz, desto langsamer erfolgt der Anstieg und Abfall.
- c) **Hochpaß erster Ordnung:** Die hochfrequenten Flanken werden nicht beeinflusst. Dagegen werden die konstanten Signalabschnitte sehr stark verformt (Dämpfungs- und Phasenverzerrungen). Je größer die Grenzfrequenz, desto stärker ist dieser Effekt. Da die sprunghaften Änderungen des Eingangssignals jeweils normiert 2 betragen, ist das (normierte) Ausgangssignal an den Sprungstellen  $\pm 2$ .
- d) **Allpaß erster Ordnung:** Die Fourierkoeffizienten von Ein- und Ausgangssignal sind betragsmäßig gleich (keine Dämpfungsverzerrungen). Trotzdem wird der Signalverlauf aufgrund der Phasenverzerrungen stark verzerrt (siehe auch A12).

**A6:**

Bei den Tiefpässen machen sich die linearen Verzerrungen weniger bemerkbar als in A5, da das Eingangssignal weniger hochfrequente Anteile besitzt. Entsprechend stärker sind die Verzerrungen beim Hochpaß. Das Ausgangssignal läßt hier die Dreiecksform nicht mehr erahnen, lediglich die Spitzen werden einigermaßen richtig wiedergegeben.

**A7:**

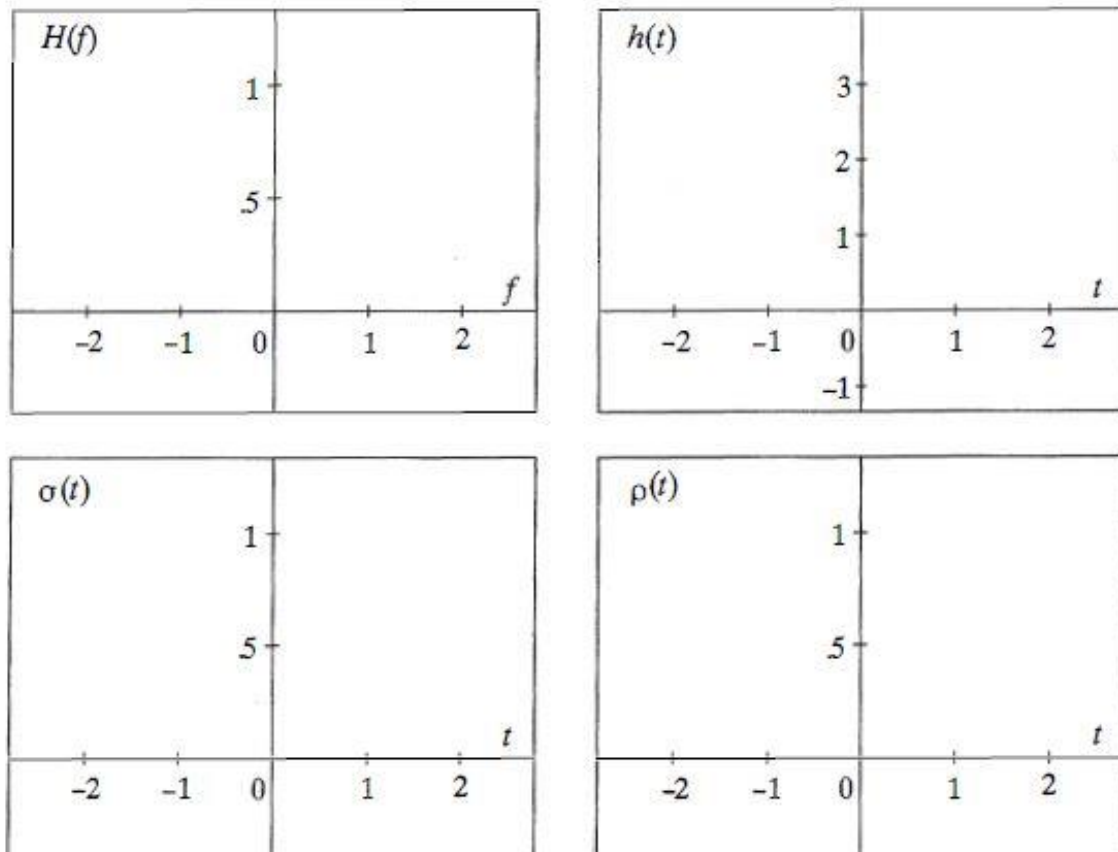
Das Ausgangssignal zeigt eine Summe von Impulsantworten, d.h. es gilt:

$$y(t) = p(t) * h(t) = T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_0) * h(t) = T_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - n \cdot T_0)$$

Das Ausgangsspektrum gibt die Übertragungsfunktion in abgetasteter Form wieder (bei Vielfachen der Grundfrequenz). Dies läßt sich z. B. mit dem Faltungssatz zeigen.

**A8:**

- a) Übertragungsfunktion und Impulsantwort sind gaußförmig. Die Sprungantwort steigt von 0 auf 1 monoton an, es gibt keine Überschwinger. Die Rechteckantwort ist ebenfalls träge und erreicht den gewünschten Maximalwert 1 nicht ganz, sondern lediglich 0.988. Ohne zusätzliche Laufzeit ist der Gaußtiefpaß nicht realisierbar.



- b) Bei größerem  $f_G$  werden auch die höheren Frequenzen besser durchgelassen, die Impulsantwort wird schmaler und höher. Je größer  $f_G$ , desto besser nähert sich die Sprungantwort der Sprungfunktion und die Rechteckantwort der Rechteckfunktion an (steilere Flanken). Entsprechend gegenläufig ist das Verhalten bei kleinerem  $f_G$ .
- c) Je schmaler und höher der Eingangsimpuls, desto mehr nähert sich die Rechteckantwort der Impulsantwort an, was bereits in A3 (Unterpunkt e) deutlich wurde.

#### A9:

- a) Die Vorgehensweise ist genauso wie in der Anleitung beschrieben. Da  $x(t)$  auf den Bereich  $-T/2 \leq t \leq T/2$  und  $h(t)$  auf  $t \geq 0$  begrenzt ist, beginnt  $y(t)$  ebenfalls erst bei  $-T/2$ . Im Bereich bis  $T/2$  ist ein exponentieller Anstieg, anschließend ein exponentieller Abfall feststellbar.
- b) Da nun die Impulsantwort ebenfalls symmetrisch zu  $t = 0$  ist, könnte auf die Spiegelung verzichtet werden. Es ergibt sich ein dreieckförmiger Ausgangsimpuls (falls  $f_G = 1.0$ , d.h. Breite der Impulsantwort ebenfalls 1) bzw. ein trapezförmiger Ausgangsimpuls (falls  $f_G = 0.5$ , d. h. Breite der Impulsantwort gleich 2).
- c) Die Breite des gaußförmigen Eingangsimpulses wird durch die Faltung mit der Impulsantwort vergrößert. Man erhält genau das gleiche Ergebnis, wenn ein rechteckförmiger Eingangsimpuls mit einer gaußförmigen Impulsantwort gefaltet wird.
- d) Die Faltung eines gaußförmigen Eingangsimpulses mit einer gaußförmigen Impulsantwort ergibt wieder einen Gaußimpuls, dessen Breite von den Parametern abhängt. Der Ausgangsimpuls ist stets breiter als Eingangsimpuls und Impulsantwort.







# Praktikum Nachrichtentechnik (LB)

## Versuch: Wahrscheinlichkeit und Statistik ("W&S")

### Inhaltsverzeichnis

1 Wahrscheinlichkeitsrechnung .....	3
1.1 Einige grundlegende Definitionen.....	3
1.2 Mengentheoretische Grundlagen .....	5
1.3 Statistische Abhängigkeit und Unabhängigkeit .....	13
1.4 Vorbereitungsaufgaben .....	17
1.5 Versuchsdurchführung.....	20
2 Diskrete Zufallsgrößen .....	22
2.1 Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit.....	22
2.2 Momente einer diskreten Zufallsgröße .....	24
2.3 Binomialverteilung.....	26
2.4 Poissonverteilung.....	28
2.5 Vorbereitungsaufgaben .....	31
2.6 Versuchsdurchführung.....	33
3 Kontinuierliche Zufallsgrößen .....	34
3.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) .....	34
3.2 Verteilungsfunktion (VTF) .....	36
3.3 Erwartungswerte und Momente .....	39
3.4 Gleichverteilte Zufallsgröße .....	41
3.5 Gaußverteilte Zufallsgröße.....	43
3.6 Vorbereitungsaufgaben .....	47
3.7 Versuchsdurchführung.....	48
Musterlösungen .....	48

**Vorbemerkung:**

Dieser Versuch behandelt die Grundlagen der Wahrscheinlichkeit und der Statistik. Als Vorbereitung sind die Kapitel 1 bis 3 durchzuarbeiten und die Vorbereitungsaufgaben unter

- Kapitel 1.4
- Kapitel 2.5
- Kapitel 3.6

zu lösen. Im Anhang finden Sie die Musterlösungen der Aufgaben zu Ihrer Kontrolle. Die Aufgaben zur Versuchsdurchführung, die Sie im Praktikum bearbeiten müssen, sind in

- Kapitel 1.5
- Kapitel 2.6
- Kapitel 3.7

zusammengestellt. Die vollständigen Versuchsbeschreibungen und die Musterlösungen finden Sie in unserem Lerntutorial „LNTwww“ ([www.lntwww.de](http://www.lntwww.de)) im Buch 3: „Stochastische Signaltheorie“.

Im „LNTwww“ gibt es auch einige Lernvideos zu den entsprechenden Kapiteln, welche zum besseren Verständnis der Thematik beitragen könnten. Diese Videos finden Sie, indem Sie [www.lntwww.de](http://www.lntwww.de) besuchen, das Buch „Stochastische Signaltheorie“ und dort die zweite Seite der Vorbemerkungen auswählen. Im Zusammenhang mit diesem Versuch bieten sich an:

- **Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit** (zu Kapitel 1.1: Dauer 5:19)
- **Mengentheoretische Begriffe . . .** (zu Kapitel 1.2 – 2-teilig: Dauer 6:10 – 6:10)
- **Statistische (Un-)Abhängigkeit** (zu Kapitel 1.3 – 3-teilig: Dauer 4:17 – 3:40 – 3:40)
- **Momente von diskreten Zufallsgrößen** (zu den Kapiteln 2.2 und 3.3: Dauer 6:32)
- **Wahrscheinlichkeit und Dichtefunktion** (zu Kapitel 3.1 – 2-teilig: Dauer 5:30 – 6:35)
- **Zusammenhang WDF – VTF** (zu Kapitel 3.2 – 2-teilig: Dauer 6:40 – 3:20)

Wir hoffen, dass wir Ihnen mit diesem Versuch die Grundideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung näher bringen können, obwohl (oder gerade weil) diese Thematik in Ihren Vorlesungen nicht direkt behandelt wird. Aber vielleicht können Sie noch auf Wissen aus Ihrer Schulzeit zurückgreifen.

**Literaturhinweise:**

- 1 Buch 3 des Lerntutorials LNTwww: „Stochastische Signaltheorie“
- 2 Greiner, M.; Tinhofer, G.: *Stochastik für Studienanfänger der Informatik*. München: Carl Hanser, 1996.
- 3 Papoulis, A.; Pillai, S.U.: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Fourth Edition. New York: McGraw-Hill, 2002.

# 1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

## 1.1 Einige grundlegende Definitionen

### Experiment und Ergebnis

Ausgangspunkt einer jeden statistischen Untersuchung ist ein **Zufallsexperiment**. Darunter versteht man einen unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbaren Versuch mit ungewissem **Ergebnis**  $E$ , bei dem jedoch die Menge  $\{E_\mu\}$  der möglichen Ergebnisse angebar ist.

Die Anzahl der möglichen Ergebnisse bezeichnet man als den **Ergebnisumfang**  $M$ . Dann gilt:

$$\{E_\mu\} \in G = \{E_\mu\} = \{E_1, \dots, E_M\} \quad (1)$$

Hierbei kann die Laufvariable  $\mu$  alle ganzzahligen Werte zwischen 1 und  $M$  annehmen.  $G$  nennt man auch den *Ereignisraum* oder die **Grundmenge**.

**Beispiel:** Beim Experiment „Münzwurf“ sind die beiden möglichen Ergebnisse Zahl und Bild, das heißt, in diesem Fall gilt  $M = 2$ . Dagegen sind beim Zufallsexperiment, „Werfen einer Roulettekugel“ insgesamt  $M = 37$  verschiedene Ergebnisse möglich, so dass für den Ergebnisraum bzw. für die Grundmenge gilt:

$$G = \{E_\mu\} = \{0, 1, 2, \dots, 36\} \quad (2)$$

### Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

**Definition:** Mit der Annahme, dass jeder Versuch genau ein einziges Ergebnis aus  $G$  zur Folge hat und dass jedes dieser  $M$  Ergebnisse in gleicher Weise (ohne Bevorzugung oder Benachteiligung) möglich ist, gilt für die **Wahrscheinlichkeit** eines jeden Ergebnisses  $E_\mu$ :

$$\Pr(E_\mu) = 1/M \quad (2)$$

Dies ist die **klassische Definition** der Wahrscheinlichkeit.  $\Pr(\dots)$  steht dabei für „probability“ und ist als eine mathematische Funktion zu verstehen.

**Beispiel:** Beim Zufallsexperiment „Münzwurf“ gilt für die Wahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Ergebnisse:  $\Pr(\text{Zahl}) = \Pr(\text{Bild}) = 1/2$ . Dies setzt voraus, dass jeder Versuch entweder mit Zahl oder mit Bild ausgeht und dass nicht bei einem Versuch die Münze auf ihrem Rand zu stehen kommt. Auch beim Versuch „Werfen einer Roulettekugel“ sind die Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(E_\mu) = 1/37$  nur dann für alle Zahlen von 0 bis 36 gleich, wenn der Roulettetisch nicht manipuliert wurde.

**Anmerkung:** Die Wahrscheinlichkeitsrechnung – und die darauf aufbauende Statistik – können nur dann fundierte Aussagen liefern, wenn alle implizit vereinbarten Voraussetzungen tatsächlich erfüllt sind. Diese Bedingung zu überprüfen ist nicht Aufgabe der Statistik, sondern von denjenigen, die diese nutzen. Da gegen diese Grundregel oft verstoßen wird, hat die Statistik in der Gesellschaft einen viel schlechteren Ruf, als ihr eigentlich zustehen würde.

### Ereignis und Ereignismenge

Unter einem **Ereignis**  $A_i$  versteht man stets eine Menge bzw. Zusammenfassung von Ergebnissen. Die Menge aller Ereignisse bezeichnet man als die **Ereignismenge**  $\{A_i\}$ . Da die Anzahl  $I$  der möglichen Ereignisse  $\{A_i\}$  im Allgemeinen nicht mit der Anzahl  $M$  der möglichen Ergebnisse – also der Elemente von  $G = \{E_\mu\}$  – übereinstimmt, werden hier unterschiedliche Indizes gewählt.

**Definition:** Für die Wahrscheinlichkeit eines aus  $K$  Ergebnissen zusammengesetzten Ereignisses  $A_i$  gilt:

$$\Pr(A_i) = \frac{K}{M} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} \quad (3)$$

Diese Gleichung nennt man die Wahrscheinlichkeitsdefinition nach Laplace. Günstige Ergebnisse sind dabei solche, die zum zusammengesetzten Ereignis gehören. Aus dieser Gleichung geht bereits hervor, dass eine Wahrscheinlichkeit stets zwischen 0 und 1 liegen muss (einschließlich dieser beiden Grenzen).

**Beispiel:** Betrachten wir zur Verdeutlichung das Experiment „Werfen eines Würfels“. Die möglichen Ergebnisse sind  $E_\mu \in G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Definieren wir nun zwei Ereignisse ( $I = 2$ ), nämlich

$$A_1 = [\text{die Augenzahl ist geradzahlig}] = \{2, 4, 6\}$$

und

$$A_2 = [\text{die Augenzahl ist ungeradzahlig}] = \{1, 3, 5\},$$

so ist die Ereignismenge  $\{A_1, A_2\}$  gleich der Grundmenge  $G$ .  $A_1$  und  $A_2$  stellen hier ein vollständiges System dar. Dagegen ist die weitere Ereignismenge  $\{A_3, A_4\}$  ungleich der Grundmenge  $G$ , wenn man die beiden Einzelereignisse wie folgt definiert:

$$A_3 = [\text{die Augenzahl ist kleiner als 3}] = \{1, 2\},$$

$$A_4 = [\text{die Augenzahl ist größer als 3}] = \{4, 5, 6\}.$$

Hier beinhaltet die gemeinsame Ereignismenge  $\{A_3, A_4\}$  nicht das Element „3“ der Grundmenge. Die Wahrscheinlichkeiten der obigen Ereignisse sind  $\Pr(A_1) = \Pr(A_2) = \Pr(A_4) = 1/2$  und  $\Pr(A_3) = 1/3$ .

## 1.2 Mengentheoretische Grundlagen

### Venndiagramm, Grundmenge und leere Menge

In späteren Kapiteln wird manchmal auf die Mengenlehre Bezug genommen. Deshalb sollen hier die wichtigsten Grundlagen und Definitionen dieser Disziplin kurz zusammengefasst werden.

Ein wichtiges Hilfsmittel der Mengenlehre ist das **Venndiagramm** gemäß dem nachfolgenden Bild.

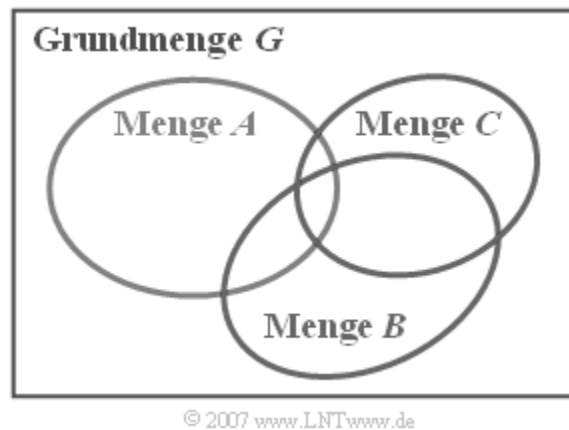


Abbildung 1: Venndiagramm

Angewandt auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung werden hierin die Ereignisse  $A_i$  als Flächenbereiche dargestellt. Zur einfacheren Beschreibung bezeichnen wir hier die Ereignisse im Gegensatz zu *Kapitel 1.1* nicht mit  $A_1, A_2, A_3$  usw., sondern mit  $A, B$  und  $C$ . Die Gesamtfläche entspricht der Grundmenge  $G$ .

Diese beinhaltet alle möglichen Ergebnisse und steht für das **sichere Ereignis**, das definitionsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 1 eintritt:  $\Pr(G) = 1$ . Zum Beispiel ist beim Zufallsexperiment Werfen eines Würfels die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „die Augenzahl ist kleiner oder gleich 6“ identisch 1.

Dagegen beinhaltet die **leere Menge**  $\emptyset$  kein einziges Element. Bezogen auf Ereignisse kennzeichnet die leere Menge das **unmögliche Ereignis** mit der Wahrscheinlichkeit  $\Pr(\emptyset) = 0$ . Beispielsweise ist beim Experiment Werfen eines Würfels die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „die Augenzahl ist größer als 6“ identisch 0.

Weiterhin ist anzumerken, dass nicht jedes Ereignis  $A$  mit  $\Pr(A) = 0$  wirklich nie eintreten kann. So ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „der Rauschwert  $n$  ist identisch 0“ zwar verschwindend klein und es gilt  $\Pr(n = 0) = 0$ , wenn  $n$  durch eine kontinuierliche Zufallsgröße beschrieben wird. Trotzdem ist es natürlich möglich, dass irgendwann auch der exakte Rauschwert  $n = 0$  auftritt.

## Vereinigungsmenge

**Definition:** Die Vereinigungsmenge  $C$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  beinhaltet alle die Elemente, die entweder in der Menge  $A$  oder der Menge  $B$  oder in beiden enthalten sind. Formelmäßig wird dieser Zusammenhang wie folgt ausgedrückt:

$$C = A \cup B (= A + B) \quad (4)$$

In der Literatur ist hierfür auch die Bezeichnung *Summenmenge* gebräuchlich und es wird manchmal das Pluszeichen benutzt. In diesem Versuchsskript und im Lerntutorial wird aber ausschließlich das  $\cup$ -Zeichen verwendet.

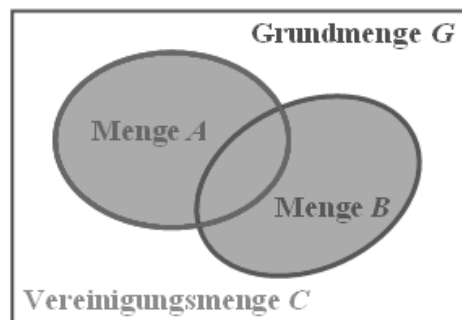


Abbildung 2: Venndiagramm zur Vereinigungsmenge

Anhand des obigen Bildes sind die folgenden Gesetzmäßigkeiten der Mengenlehre leicht einzusehen:

$A \cup \emptyset = A$	(Vereinigung mit der leeren Menge)
$A \cup G = G$	(Vereinigung mit der Grundmenge)
$A \cup A = A$	(Tautologiegesetz)
$A \cup B = B \cup A$	(Kommutativgesetz)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(Assoziativgesetz)

Ist über die Ereignismengen  $A$  und  $B$  nichts weiter bekannt, so können für die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge nur eine untere und eine obere Schranke angegeben werden:

$$\text{Max}(\text{Pr}(A), \text{Pr}(B)) \leq \text{Pr}(A \cup B) \leq \text{Pr}(A) + \text{Pr}(B) \quad (5)$$

Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge ist gleich der unteren Schranke, wenn  $A$  eine **Teilmenge** von  $B$  ist oder umgekehrt. Die obere Schranke gilt für **disjunkte Mengen**.

**Beispiel:** Betrachtet man die beiden Ereignisse  $A =$  „die Augenzahl ist größer oder gleich 5“ =  $\{5, 6\}$  und  $B =$  „die Augenzahl ist geradzahlig“ =  $\{2, 4, 6\}$ , so beinhaltet die Vereinigungsmenge die Elemente  $\{2, 4, 5, 6\}$ . Die Wahrscheinlichkeiten sind  $\text{Pr}(A) = 2/6$ ,  $\text{Pr}(B) = 3/6$  und  $\text{Pr}(A \cup B) = 4/6$ . Die untere und die obere Schranke gemäß den hier angegebenen Ungleichungen ergeben sich zu  $3/6$  und  $5/6$ .

## Schnittmenge

Eine weitere wichtige mengentheoretische Verknüpfung stellt die Schnittmenge dar.

**Definition:** Die **Schnittmenge**  $C$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  beinhaltet alle Elemente, die sowohl in  $A$  als auch in  $B$  enthalten sind. Formelmäßig wird dieser Zusammenhang wie folgt ausgedrückt:

$$C = A \cap B (= A \cdot B) \quad (5)$$

In der Literatur ist hierfür auch die Bezeichnung *Produktmenge* gebräuchlich und man verwendet das Multiplikationssymbol. Im nachfolgenden Bild ist die Schnittmenge dunkelgrau dargestellt.

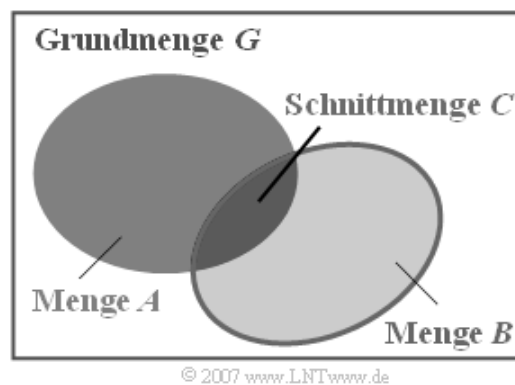


Abbildung 3: Venndiagramm zur Schnittmenge

Analog zur Vereinigungsmenge sind hier folgende Gesetzmäßigkeiten zu nennen:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (\text{Schnitt mit der leeren Menge})$$

$$A \cap G = A \quad (\text{Schnitt mit der Grundmenge})$$

$$A \cap A = A \quad (\text{Tautologiegesezt})$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

Ist über die Ereignismengen  $A$  und  $B$  nichts weiter bekannt, so kann auch für die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge nur eine untere und eine obere Schranke angegeben werden:

$$0 \leq \Pr(A \cap B) \leq \min(\Pr(A), \Pr(B)) \quad (6)$$

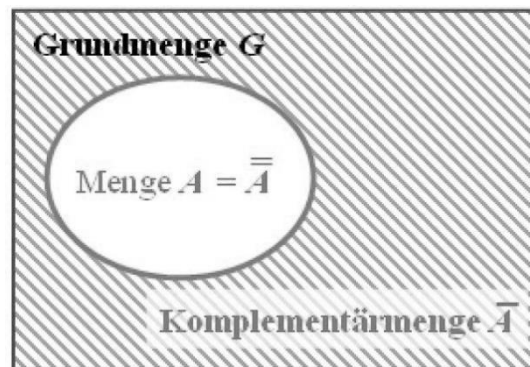
$\Pr(A \cap B)$  wird auch **Verbundwahrscheinlichkeit** genannt und mit  $\Pr(A, B)$  bezeichnet. Sie ist gleich der oberen Schranke, wenn  $A$  eine *Teilmenge* von  $B$  ist oder umgekehrt. Die untere Schranke ergibt sich für die Verbundwahrscheinlichkeit von *disjunkten Mengen*.

**Beispiel:** Geht man wieder von den Ereignissen  $A =$  „die Augenzahl ist größer oder gleich 5“  $= \{5, 6\}$  und  $B =$  „die Augenzahl ist geradzahlig“  $= \{2, 4, 6\}$  aus, so besteht die Schnittmenge aus nur einem Element:  $A \cap B = \{6\}$ . Für die Wahrscheinlichkeiten gilt:  $\Pr(A) = 2/6$ ,  $\Pr(B) = 3/6$ ,  $\Pr(A \cap B) = 1/6$ . Die untere und obere Schranke entsprechend den hier angegebenen Ungleichungen sind 0 und 2/6.

Komplementärmenge

**Definition:** Die **Komplementärmenge** von  $A$  oft gekennzeichnet durch eine überstreichende Linie, beinhaltet alle die Elemente, die in  $A$  nicht enthalten sind, und es gilt für deren Wahrscheinlichkeit:

$$\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A) \quad (7)$$



© 2008 www.LNTwww.de

Abbildung 4: Venndiagramm zur Komplementärmenge

Im obigen Venndiagramm ist die zu  $A$  komplementäre Menge schraffiert dargestellt. Aus diesem Bild sind folgende mengentheoretische Beziehungen zu erkennen:

- Die Komplementärmenge der komplementären Menge von  $A$  ist die Menge  $A$  selbst:  
 $\bar{\bar{A}} = A$
- Die Vereinigungsmenge einer beliebigen Menge  $A$  mit ihrer Komplementärmenge ergibt die Grundmenge:  
 $\Pr(A \cup \bar{A}) = \Pr(G) = 1$
- Die Schnittmenge von  $A$  mit der zugehörigen Komplementärmenge ergibt die leere Menge:  
 $\Pr(A \cap \bar{A}) = \Pr(\emptyset) = 0$

**Beispiel:** Die zu der Menge  $A =$  „die Augenzahl ist kleiner als 5“ gehörige Komplementärmenge lautet: „die Augenzahl ist größer oder gleich 5“. Deren Wahrscheinlichkeit berechnet sich zu  $1 - \Pr(A) = 1/3$ .



### Teilmenge

**Definition:** Man nennt  $A$  eine **echte Teilmenge** von  $B$  und schreibt hierfür  $A \subset B$ , wenn alle Elemente von  $A$  auch in  $B$  enthalten sind, aber nicht gleichzeitig alle Elemente von  $B$  auch in  $A$ . In diesem Fall gilt für die Wahrscheinlichkeiten:

$$\Pr(A) < \Pr(B) \quad (8)$$

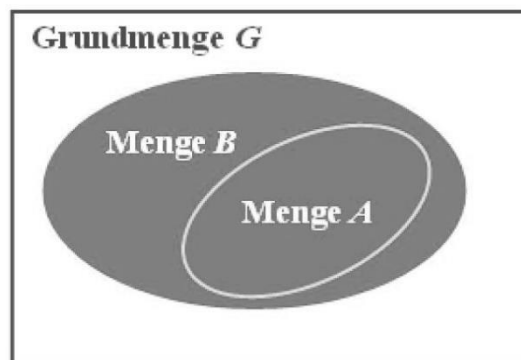
Dagegen bezeichnet man  $A$  als eine **unechte Teilmenge** von  $B$  und verwendet nachfolgende Notation, wenn  $A$  entweder eine echte Teilmenge von  $B$  ist oder  $A$  und  $B$  gleiche Mengen sind:

$$A \subseteq B = (A \subset B) \cup (A = B) \quad (9)$$

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt dann die Größenrelation  $\Pr(A) \leq \Pr(B)$ , wobei das Gleichheitszeichen den Sonderfall identischer Mengen berücksichtigt. Da die Schnittmenge  $A \cap B$  stets eine Teilmenge von  $A$  ist,  $A$  aber auch gleichzeitig eine Teilmenge der Vereinigungsmenge  $A \cup B$ , gelten auch die beiden als **Absorptionsgesetze** bekannten Gleichungen:

$$(A \cap B) \cup A = A$$

$$(A \cup B) \cap A = A$$



© 2008 www.LNTwww.de

Abbildung 5: Venndiagramm zur Teilmenge

**Beispiel:** Die Menge  $A =$  „die Augenzahl ist ungeradzahlig“  $= \{1, 3, 5\}$  ist eine (echte) Teilmenge der Menge  $B =$  „die Augenzahl ist eine Primzahl“  $= \{1, 2, 3, 5\}$ , wenn  $G$  die Zahlen 1 bis 6 enthält. Die Wahrscheinlichkeit  $\Pr(A) = 3/6$  ist deshalb kleiner als  $\Pr(B) = 4/6$ .

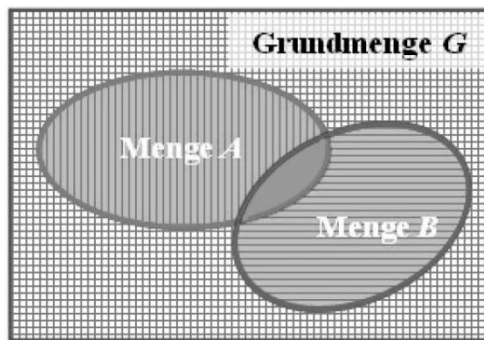
Theoreme von de Morgan

Folgende beiden Theoreme sind in der Statistik elementar wichtig:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (10)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (11)$$

Diese Gesetzmäßigkeiten sind im folgenden Bild veranschaulicht. Die Menge  $A$  ist links dargestellt und die Menge  $B$  rechts. Die Komplementärmenge von  $A$  ist in horizontaler Richtung schraffiert und die zu  $B$  komplementäre Menge in vertikaler. Das Komplement der Vereinigungsmenge ist sowohl horizontal als auch vertikal schraffiert und damit gleich der Schnittmenge der beiden Komplementär Mengen von  $A$  und  $B$ .



© 2008 www.LNTwww.de

Die Schnittmenge  $A \cap B$  ist wie **Abbildung 6: Venndiagramm zu den Theoremen von de Morgan** im Komplement ist dann entweder horizontal, vertikal oder sowohl horizontal als auch vertikal schraffiert. Nach dem zweiten Theorem von de Morgan die Vereinigungsmenge der beiden Komplementär Mengen von  $A$  und  $B$ .

**Beispiel:** Betrachten wir nun die beiden Mengen  $A$  „die Augenzahl ist ungeradzahlig“ =  $\{1, 3, 5\}$  und  $B$  „die Augenzahl ist größer als 2“ =  $\{3, 4, 5, 6\}$ . Daraus folgen die beiden komplementären Mengen „die Augenzahl ist geradzahlig“ =  $\{2, 4, 6\}$  bzw. „die Augenzahl ist kleiner als 3“ =  $\{1, 2\}$ . Weiter erhält man mit den beiden obigen Theoremen folgende Mengen:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 4, 6\} \quad \text{und} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \{2\}$$

## Disjunkte Mengen

Das nachfolgende Bild zeigt zwei disjunkte Mengen  $A$  und  $B$  im Venndiagramm.

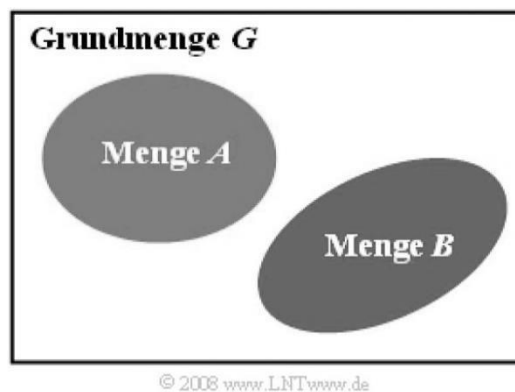


Abbildung 7: Venndiagramm zur disjunkten Menge

**Definition:** Zwei Mengen  $A$  und  $B$  bezeichnet man als **disjunkt** oder miteinander **unvereinbar**, wenn es kein einziges Element gibt, das sowohl in  $A$  als auch in  $B$  enthalten ist.

In diesem Sonderfall gelten die folgenden Aussagen:

- Die Schnittmenge zweier disjunkter Mengen  $A$  und  $B$  ergibt stets die leere Menge:  
 $\Pr(A \cap B) = \Pr(\emptyset) = 0$
- Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge zweier disjunkter Mengen  $A$  und  $B$  ist immer gleich der Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten:  
 $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

**Beispiel:** Die Mengen  $A$  = „die Augenzahl ist kleiner als 3“ =  $\{1, 2\}$  und  $B$  = „die Augenzahl ist größer als 3“ =  $\{4, 5, 6\}$  sind zueinander disjunkt, da sie kein einziges gemeinsames Element beinhalten. Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge  $\{1, 2, 4, 5, 6\}$  ist dementsprechend  $5/6$ .

## Additionstheorem

Der Zusammenhang  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$  für die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge gilt nur für den Sonderfall disjunkter Mengen  $A$  und  $B$ . Wie errechnet sich diese Wahrscheinlichkeit aber bei allgemeinen, nicht notwendigerweise disjunkten Ereignissen?

Betrachten Sie hierzu das folgende Venndiagramm mit der dunkel dargestellten Schnittmenge  $A \cap B$ . Die linke graue Menge beinhaltet alle Elemente, welche zu  $A$  gehören, aber nicht zu  $B$ . Die Elemente von  $B$ , die nicht gleichzeitig in  $A$  enthalten sind, erkennt man an der hellgrauen Farbe auf der rechten Seite. Alle eingefärbten Flächen zusammen ergeben die Vereinigungsmenge  $A \cup B$ .

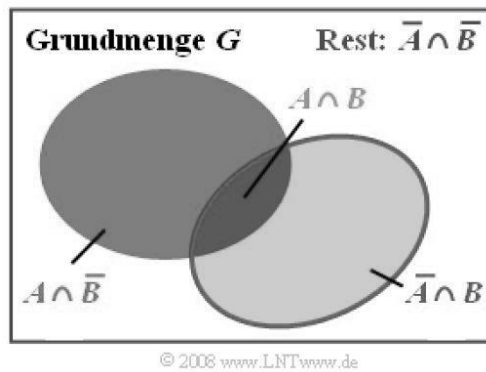


Abbildung 8: Venndiagramm zu den Additionstheoremen

Aus dieser mengentheoretischen Darstellung erkennt man folgende Zusammenhänge:

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \bar{B}),$$

$$\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(\bar{A} \cap B),$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \bar{B}) + \Pr(\bar{A} \cap B),$$

Addiert man die ersten beiden Gleichungen und subtrahiert davon die dritte, so erhält man:

$$\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B)$$

Durch Umstellen dieser Gleichung kommt man zu der Darstellung, die allgemein als das **Additionstheorem** für zwei beliebige, nicht disjunkte Ereignisse bekannt ist:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

**Beispiel:** Betrachtet man wieder die beiden Mengen  $A =$  „die Augenzahl ist ungeradzahlig“  $= \{1, 3, 5\}$  und  $B =$  „die Augenzahl ist größer 2“  $= \{3, 4, 5, 6\}$ . Damit sind die Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(A) = 1/2$ ,  $\Pr(B) = 2/3$  sowie  $\Pr(A \cup B) = 5/6$  und  $\Pr(A \cap B) = 1/3$ . Anhand dieser Zahlenwerte lässt sich die Gültigkeit des Additionstheorems sehr einfach zeigen:  $5/6 = 1/2 + 2/3 - 1/3$ .

### Vollständiges System

Nun betrachten wir wieder mehr als zwei solche Ereignisse, nämlich allgemein  $I$ . Diese Ereignisse werden im Folgenden mit  $A_i$  bezeichnet, und es gilt für den Laufindex:  $1 \leq i \leq I$ .

**Definition:** Eine Konstellation mit den Ereignissen  $A_1, \dots, A_i, \dots, A_I$  bezeichnet man dann und nur dann als ein **vollständiges System**, wenn die beiden nachfolgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Alle Ereignisse sind paarweise disjunkt:  
 $A_i \cap A_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$
- Die Vereinigung aller Ereignismengen ergibt die Grundmenge:

$$\bigcup_{i=1}^I A_i = G$$

Aufgrund dieser beiden Voraussetzungen gilt dann für die Summe aller Wahrscheinlichkeiten:

$$\sum_{i=1}^I \Pr(A_i) = 1$$

**Beispiel:** Die beiden Ereignismengen  $A_1 = \{1,5\}$  und  $A_2 = \{2,3\}$  ergeben beim Zufallsexperiment „Werfen eines Würfels“ zusammen mit der Menge  $A_3 = \{4,6\}$  ein vollständiges System, jedoch nicht beim Experiment Werfen einer Roulettekugel.

### 1.3 Statistische Abhängigkeit und Unabhängigkeit

#### Allgemeine Definition von statistischer Abhängigkeit

Bisher haben wir die **statistische Abhängigkeit** zwischen Ereignissen nicht besonders beachtet, auch wenn wir sie wie im Fall zweier disjunkter Mengen bereits verwendet haben: Gehört ein Element zu  $A$ , so kann es mit Sicherheit nicht auch in der disjunkten Menge  $B$  enthalten sein. Eine **deterministische Abhängigkeit** zwischen zwei Größen ist die stärkste Form von Abhängigkeit überhaupt. Weniger ausgeprägt ist die statistische Abhängigkeit. Beginnen wir mit deren Komplement, also der **statistischen Unabhängigkeit**.

**Definition:** Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  bezeichnet man dann als **statistisch unabhängig**, wenn die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge  $A \cap B$  gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ist:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \quad (12)$$

In manchen Anwendungsfällen ist die statistische Unabhängigkeit offensichtlich, z. B. beim Experiment *Münzwurf*. Die Wahrscheinlichkeit für *Zahl* oder *Bild* ist unabhängig davon, ob beim letzten Wurf *Zahl* oder *Bild* aufgetreten ist. Und auch die einzelnen Ergebnisse beim Zufallsexperiment *Werfen* einer Roulettekugel sind bei fairen Bedingungen stets statistisch unabhängig voneinander, auch wenn einzelne Systemspieler dies nicht so recht wahrhaben wollen.

Bei anderen Anwendungen ist dagegen die Frage, ob zwei Ereignisse statistisch unabhängig sind oder nicht, gefühlsmäßig nicht oder nur sehr schwer zu beantworten. Hier kann man nur durch Überprüfung des oben angegebenen formalen Unabhängigkeitskriteriums zur richtigen Antwort gelangen, wie das nachfolgende Beispiel zeigen soll.

**Beispiel:** Wir betrachten das Zufallsexperiment Werfen mit zwei Würfeln, wobei die beiden Würfel an ihren Farben Rot ( $R$ ) und Blau ( $B$ ) unterschieden werden können. Die Grafik verdeutlicht diesen Sachverhalt, wobei in dem zweidimensionalen Feld ( $R$ ,  $B$ ) die Summe  $S = R + B$  eingetragen ist.

Die beiden Ereignisse  $A_1 = „R < 4“$  und  $A_2 = „B > 4“$  sind im Bild durch schraffierten Hintergrund bzw. hellgrauen Zahlen hervorgehoben.  $A_1$  und  $A_2$  sind statistisch unabhängig, da die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge – also  $\Pr(A_1 \cap A_2) = 1/6$  – gleich dem Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten  $\Pr(A_1) = 1/2$  und  $\Pr(A_2) = 1/3$  ist. Aufgrund der Aufgabenstellung hätte auch jedes andere Ergebnis sehr überrascht.

**B: blauer Würfel →**

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

↓ **R: roter Würfel**

$S = R + B$

© 2008 www.LNTwww.de

**Abbildung 9:** Mögliche Ergebnisse des Zufallsexperimentes Werfen mit 2 Würfeln

Aber auch die zwei Ereignisse  $A_1 = „R < 4“$  und  $A_3 = „S = 7“$  sind wegen  $\Pr(A_1) = 1/2, \Pr(A_3) = 1/6$  und  $\Pr(A_1 \cap A_3) = 1/12$  statistisch voneinander unabhängig. Das Ereignis „ $S = 7$ “ ist in der Grafik durch dicke Umrahmungen gekennzeichnet.

Dagegen bestehen wegen  $\Pr(A_1) = 1/2, \Pr(A_4) = 5/36$  und  $\Pr(A_1 \cap A_4) = 1/18$  statistische Bindungen zwischen  $A_1 = „R < 4“$  und dem Ereignis  $A_4 = „S = 8“$ , welches unter dem Punkt „Bedingte Wahrscheinlichkeit“ visualisiert ist. Die beiden Ereignisse  $A_1 = „R < 4“$  und  $A_5 = „S \geq 10“$  sind sogar disjunkt. Dies zeigt, dass Disjunktivität eine besonders ausgeprägte Form von statistischer Abhängigkeit ist.

### Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bestehen zwischen den zwei Ereignissen  $A$  und  $B$  statistische Bindungen, so ist durch die (unbedingten) Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(A)$  und  $\Pr(B)$  der Sachverhalt im statistischen Sinne nicht eindeutig beschrieben. Man benötigt dann vielmehr noch so genannte bedingte Wahrscheinlichkeiten.

**Definition:** Für die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von  $A$  unter der Bedingung  $B$  gilt:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \quad (13)$$

In gleicher Weise gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $B$  unter der Bedingung  $A$ :

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} \quad (14)$$

Verknüpft man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich der Satz von **Bayes**:

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B) \cdot \Pr(B)}{\Pr(A)} \quad (15)$$

Im Folgenden sind einige wichtige Eigenschaften von bedingten Wahrscheinlichkeiten zusammengestellt:

- Auch eine bedingte Wahrscheinlichkeit liegt stets zwischen 0 und 1 einschließlich dieser beiden Grenzen:  $0 \leq \Pr(A|B) \leq 1$ .
- Kann die Bedingung  $B$  als konstant angesehen werden, so gelten alle im Kapitel 1.2 für die unbedingten Wahrscheinlichkeiten angegebenen Rechenregeln auch weiterhin.
- Sind die existierenden Ereignisse  $A$  und  $B$  disjunkt, so ist  $\Pr(A|B) = \Pr(B|A) = 0$ .
- Ist  $B$  eine echte oder unechte Teilmenge von  $A$ , so ist  $\Pr(A|B) = 1$ .
- Sind zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  statistisch unabhängig, so sind deren bedingte Wahrscheinlichkeiten gleich den unbedingten, und es gilt dann z. B. der Zusammenhang:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A) \cdot \Pr(B)}{\Pr(B)} = \Pr(A)$$

**Beispiel:** Wir betrachten wieder das Zufallsexperiment Werfen mit zwei Würfeln, wobei wie beim letzten Beispiel  $S = R + B$  die Summe des roten und des blauen Würfels bezeichnet. Im nachfolgenden Schema ist das Ereignis  $A_1 = „R < 4“$  wieder schraffiert und das Ereignis  $A_4 = „S = 8“$  durch dicke Umrahmungen markiert.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $Pr(A_1|A_4) = 2/5$  (zwei der fünf dick umrandeten Felder sind auch schraffiert) berechnet sich aus dem Quotienten der Verbundwahrscheinlichkeit  $Pr(A_1 \cap A_4) = 2/36$  und der Wahrscheinlichkeit  $Pr(A_4) = 5/36$ . Da  $A_1$  und  $A_4$  statistisch abhängig sind, ist  $Pr(A_1|A_4) = 2/5$  ungleich  $Pr(A_1) = 1/2$ . Entsprechend ist  $Pr(A_4|A_1) = 1/9$ . Dieses letzte Ergebnis lässt sich z.B. auch über den Satz von Bayes ableiten:

$$\frac{1}{9} = \frac{2/5 \cdot 5/36}{1/2}$$

		B: blauer Würfel →					
		1	2	3	4	5	6
R: roter Würfel ↓	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

$S = R + B$

© 2008 www.LNTwww.de

Abbildung 10: Mögliche Ergebnisse des Zufallsexperimentes Werfen mit 2 Würfeln

Dagegen gelten für  $A_1$  und das hierzu statistisch unabhängige Ereignis  $A_3 = „S = 7“$  die Beziehungen (siehe Grafik zum letzten Beispiel):

$$Pr(A_1|A_3) = Pr(A_1) = 1/2 \text{ bzw. } Pr(A_3|A_1) = Pr(A_3) = 1/6$$

Allgemeines Multiplikationstheorem

Wir betrachten nun wieder mehrere Ereignisse  $A_i$  mit  $1 \leq i \leq I$ . Diese Ereignisse  $A_i$  stellen nun aber kein **vollständiges System** mehr dar, das heißt, sie sind nicht paarweise zueinander disjunkt und es können zwischen den einzelnen Ereignissen auch statistische Bindungen bestehen.

In diesem Fall gilt für die **Verbundwahrscheinlichkeit**, also für die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge aller  $I$  Ereignisse  $A_i$ :

$$Pr(A_1 \cap \dots \cap A_I) = Pr(A_I) \cdot Pr(A_{I-1}|A_I) \cdot Pr(A_{I-2}|A_{I-1} \cap A_I) \cdot \dots \cdot Pr(A_1|A_2 \cap \dots \cap A_I) \tag{16}$$

**Beispiel:** Eine Lostrommel enthält zehn Lose, darunter drei Treffer (Ereignis  $T$ ). Dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass man mit zwei Losen zwei Treffer zieht:

$$Pr(T_1 \cap T_2) = Pr(T_1) \cdot Pr(T_2|T_1) = 3/10 \cdot 2/9 = 1/15 \approx 6,7\%$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass sich bei der zweiten Ziehung nur mehr neun Lose und zwei Treffer in der Urne befinden. Würde man jedoch die Lose nach der Ziehung wieder in die Trommel zurücklegen, so wären die Ereignisse  $T_1$  und  $T_2$  statistisch unabhängig und  $Pr(T_1 \cap T_2) = (3/10)^2 = 9\%$ .

Rückschlusswahrscheinlichkeit

Gegeben seien Ereignisse  $A_i$  mit  $1 \leq i \leq I$ , die ein vollständiges System bilden. Das heißt: Alle Ereignisse sind paarweise disjunkt ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ ) und die Vereinigungsmenge ergibt die Grundmenge:

$$\bigcup_{i=1}^I A_i = G \quad (17)$$

Daneben betrachten wir noch das Ereignis  $B$ , von dem alle bedingten Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(B|A_i)$  mit den Indizes  $1 \leq i \leq I$  bekannt sind. Dann gilt für die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $B$  gemäß dem so genannten **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^I \Pr(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^I \Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i). \quad (18)$$

Aus dieser Gleichung folgt mit dem Satz von Bayes für die **Rückschlusswahrscheinlichkeit**:

$$\Pr(B|A_i) = \frac{\Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i)}{\sum_{k=1}^I \Pr(B|A_k) \cdot \Pr(A_k)} \quad (19)$$

**Beispiel:** In Münchner Studentenheimen wohnen Studierende der LMU (Ereignis  $L=70\%$ ) und der TUM (Ereignis  $T=30\%$ ). Es ist weiterhin bekannt, dass an der LMU 60% aller Studierenden weiblich sind, an der TUM nur 10%. Der Anteil aller Studentinnen (Ereignis  $W$ ) kann dann mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ermittelt werden:

$$\Pr(W) = \Pr(W|L) \cdot \Pr(L) + \Pr(W|T) \cdot \Pr(T) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.3 = 45\%$$

Trifft man eine Studentin, so kann man mit der Rückschlusswahrscheinlichkeit

$$\Pr(L|W) = \frac{\Pr(W|L) \cdot \Pr(L)}{\Pr(W|L) \cdot \Pr(L) + \Pr(W|T) \cdot \Pr(T)} = \frac{0.6 \cdot 0.7}{0.6 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.3} = \frac{14}{15}$$

vorhersagen, dass sie an der LMU studieren wird. Ein durchaus realistisches Ergebnis.



## 1.4 Vorbereitungsaufgaben

### Z1.1: Summe zweier Ternärsignale

Gegeben seien zwei dreistufige Nachrichtenquellen  $X$  und  $Y$ , deren Ausgangssignale jeweils nur die Werte  $-1$ ,  $0$  und  $+1$  annehmen können. Die beiden Signalquellen sind statistisch voneinander unabhängig. Eine einfache Schaltung bildet nun das Summensignal  $S = X + Y$ .

Bei der Signalquelle  $X$  treten die Werte  $-1$ ,  $0$  und  $+1$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf, während bei der Quelle  $Y$  der Signalwert  $0$  doppelt so wahrscheinlich ist wie die beiden anderen Werte  $-1$  bzw.  $+1$ .

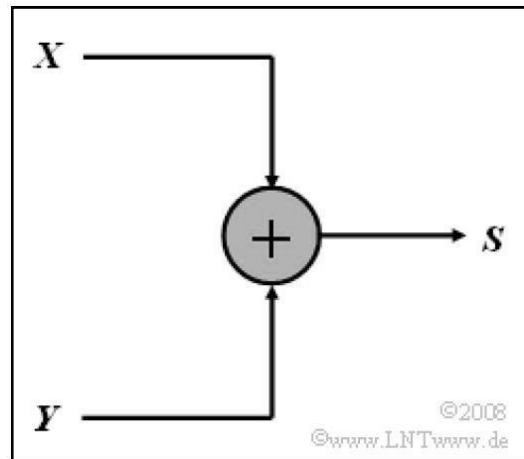


Abbildung 11: Schaubild zur Aufgabe Z1.1

**Hinweis:** Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Stoff von **Kapitel 1.1**.

- a) Wie groß sind die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Signalwerte von  $Y$ ? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $Y = 0$  ist?

$$\Pr(Y = 0) =$$

- b) Wie viele unterschiedliche Signalwerte  $I$  kann das Summensignal  $S$  annehmen? Welche sind dies?

$$I =$$

- c) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten die in b) ermittelten Werte auf? Wie wahrscheinlich ist der Maximalwert  $S_{max}$ ?

*Hinweis:* Lösen Sie die Aufgabe nach der klassischen Definition; berücksichtigen Sie trotzdem die unterschiedlichen Auftrittshäufigkeiten des Signals  $Y$ .

$$\Pr(S = S_{max}) =$$

- d) Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, wenn nun anstelle der Summe die Differenz  $D = X - Y$  betrachtet wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Die Wahrscheinlichkeiten bleiben gleich.  
 Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich. Wie ändern sie sich?

**Z1.2: Ziffernmengen**

Die Grundmenge  $G$  sei die Menge aller Ziffern zwischen 1 und 9. Gegeben sind dazu die folgenden Teilmengen:

$$A = [\text{die Ziffern } \leq 3]$$

$$B = [\text{die durch 3 teilbaren Ziffern}]$$

$$C = [\text{die Ziffern } 5,6,7,8]$$

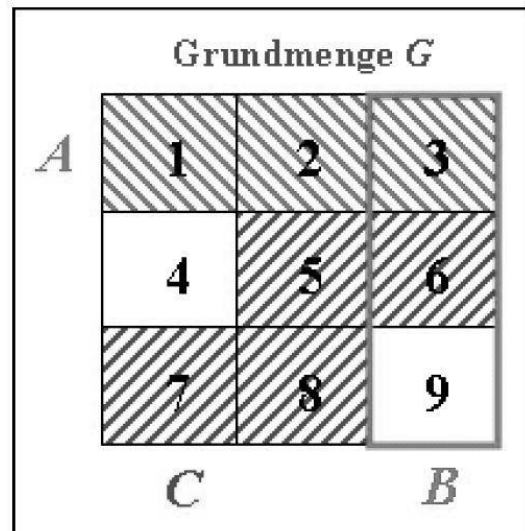
Daneben seien noch weitere Mengen definiert:

$$D = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$E = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$F = (A \cup C) \cap \bar{B}$$

$$H = (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C)$$



Überlegen Sie sich zunächst, welche Ziffern zu den Mengen  $D, E, F$  und  $H$  gehören und beantworten Sie dann die nachfolgenden Fragen. Begründen Sie alle Ihre Antworten mengentheoretisch.

- Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig?
  - $A$  und  $B$  sind disjunkte Mengen.
  - $A$  und  $C$  sind disjunkte Mengen.
  - $B$  und  $C$  sind disjunkte Mengen.
- Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig?
  - Die Vereinigungsmenge  $A \cup B \cup C$  ergibt die Grundmenge.
  - Die Komplementärmenge von  $A \cap B \cap C$  ergibt die Grundmenge.
- Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig?
  - Die Komplementärmenge von  $D$  und  $E$  sind identische Mengen.
  - $F$  ist eine Teilmenge der Komplementärmenge von  $B$ .
  - Die Mengen  $B, C$  und  $D$  bilden ein vollständiges System.
  - Die Mengen  $A, C$  und  $H$  bilden ein vollständiges System.

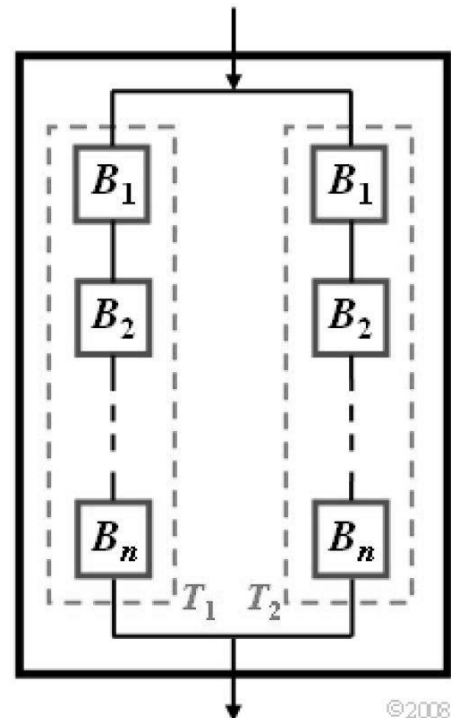
*Hinweis:* Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Stoff von Kapitel 1.2.

**Z1.5: Ausfallwahrscheinlichkeiten**

Ein Geräteteil ist aus mehreren Bausteinen  $B_1, B_2, \dots, B_n$  aufgebaut, deren jeweilige Funktionsfähigkeit unabhängig von allen anderen angenommen werden kann. Das Teil  $T_1$  funktioniert nur dann, wenn alle  $n$  Bausteine funktionsfähig sind. Es ist davon auszugehen, dass alle Bausteine  $B_n$  die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_A$  besitzen. Zur Erhöhung der Zuverlässigkeit werden sehr wichtige Baugruppen häufig dupliziert. Das Gerät  $G$  kann somit mengentheoretisch wie folgt beschrieben werden:

$$G = T_1 \cup T_2$$

Das heißt: Das Gerät  $G$  ist dann einsatzbereit, wenn zumindest eines der beiden baugleichen Teilgeräte ( $T_1$  oder  $T_2$ ) funktionsfähig ist.



©2008  
www.LNTwww.de

- a) Die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_G$  des Gesamtgeräts darf nicht größer sein als 0.04%. Wie groß dürfen die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_T$  der zwei parallel vorhandenen Geräteteile höchstens sein?

$$p_{T,max} =$$

- b) Jedes Teil bestehe aus  $n = 3$  Bausteinen, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p_A = 0.1$  ausfallen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $p_T$  exakt.

$$p_T =$$

- c) Welcher Wert ergibt sich für  $p_A = 0.01$ ? In welcher Form kann man  $p_T$  für kleine Werte von  $p_A$  annähern?

$$p_T =$$

- d) Wie viele Bauteile kann das Teilgerät höchstens enthalten, wenn  $p_T \leq 2\%$  gelten soll und jedes Bauteil eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 0.4% aufweist?

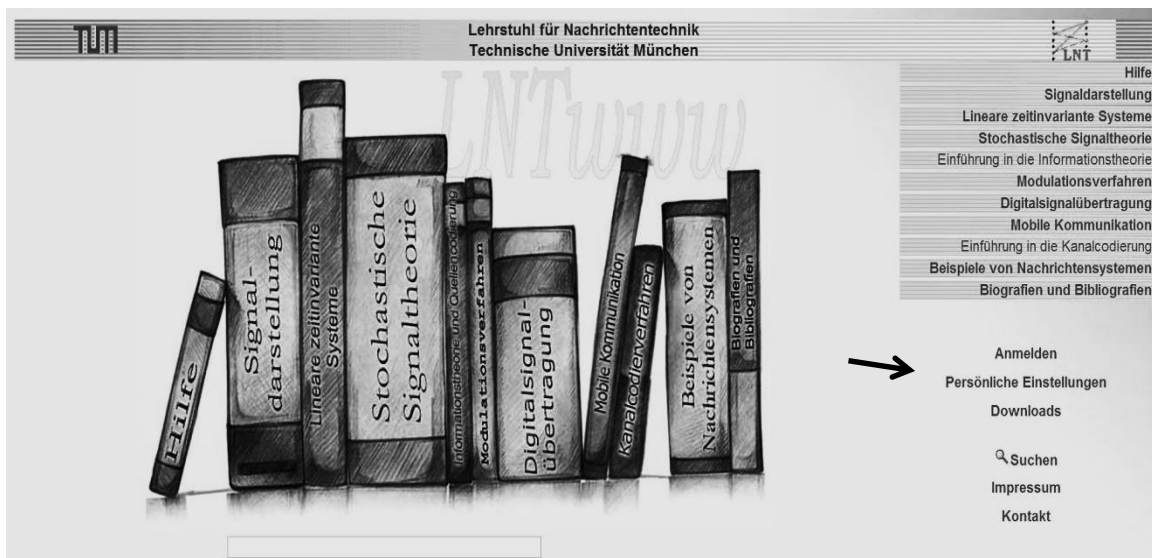
$$n =$$

*Hinweis:* Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von *Kapitel 1.3*.

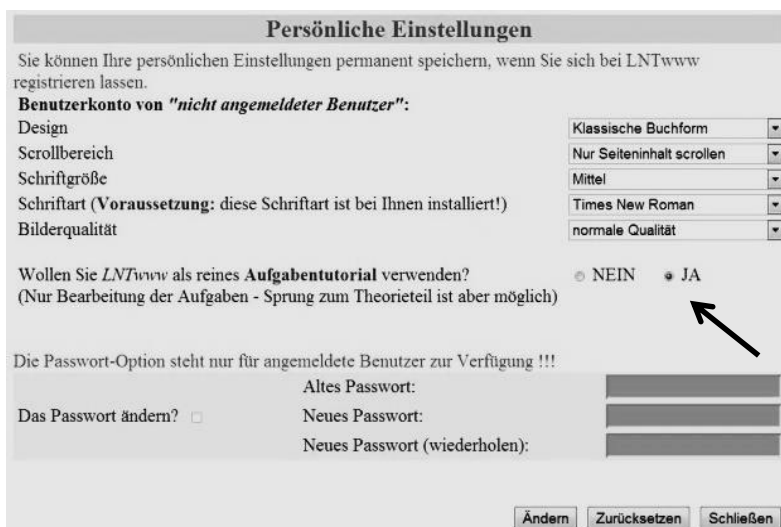
### 1.5 Versuchsdurchführung

Die für die Versuchsdurchführung im Praktikum vorgesehenen Aufgaben (siehe nächste Seite), finden Sie auf dem „LNTwww“ ([www.lntwww.de](http://www.lntwww.de)). Hier klicken Sie auf das Buch „Stochastische Signaltheorie“. Um die Aufgaben leichter zu finden, können Sie vorher noch eine Einstellung vornehmen. Gehen Sie hierzu (Siehe Bild) auf „Persönliche Einstellungen“ und aktivieren Sie das „LNTwww“ als reines „Aufgabentutorial“. Nun können Sie die Aufgaben leicht anhand Ihrer Nummer finden. Die Beantwortung der Fragestellungen erfolgt direkt online und wird sofort korrigiert. Anschließend können Sie den Lösungsweg anhand der Musterlösungen nachvollziehen. Um den Lern-erfolg zu sichern, lösen Sie die Aufgaben bitte gewissenhaft und lassen Sie Ihre Lösungen erst danach korrigieren. Machen Sie sich selbstständig Notizen, welche zur Ergebnissicherung und für die Nachbereitung des Praktikums zuhause dienen sollen.

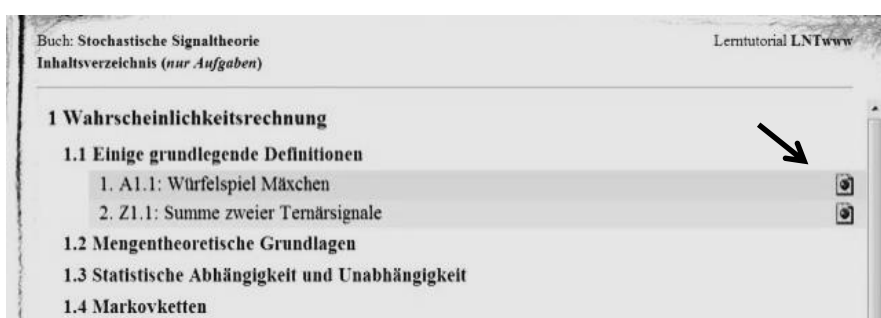
1.



2.



3.



**Aufgaben zu Kapitel 1.**

A1.1: Würfelspiel Mäxchen

A1.2: Schaltlogik (D/B-Wandler)

A1.3: Fiktive Universität Irgendwo

Z1.4: Summe von Ternärgrößen

A1.5: Karten ziehen (optional)

## 2 Diskrete Zufallsgrößen

### 2.1 Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit

#### Zufallsgröße

In Kapitel 1.1 wurde bereits der Begriff **Zufallsexperiment** erläutert. Darunter versteht man einen unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbaren Versuch mit ungewissem Ergebnis  $E$ , bei dem jedoch die Menge  $\{E_\mu\}$  der möglichen Ergebnisse angebar ist.

Häufig sind die Ergebnisse eines Versuchs Zahlenwerte, beispielsweise beim Zufallsexperiment *Werfen eines Würfels*. Dagegen liefert das Experiment *Münzwurf* die zwei möglichen Ergebnisse *Zahl* und *Bild*.

Zur einheitlichen Beschreibung verschiedenartiger Experimente und wegen der besseren numerischen Handhabung verwendet man den Begriff der *Zufallsgröße*, oft auch als *Zufallsvariable* bezeichnet.

**Definition:** Eine *Zufallsgröße*  $z$  ist eine ein-eindeutige Abbildung der Ergebnismenge  $\{E_\mu\}$  auf die Menge der reellen Zahlen. Ergänzend zu dieser Definition wird noch zugelassen, dass die Zufallsgröße neben dem Zahlenwert auch eine Einheit besitzt.

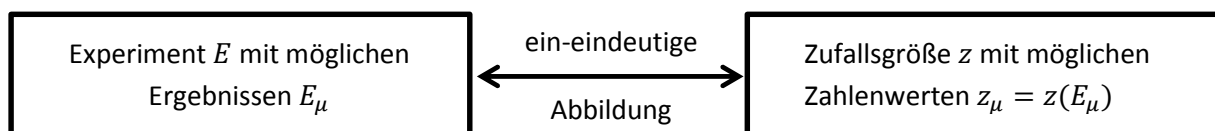


Abbildung 12: Veranschaulichung zur Zufallsgröße

- Beim Zufallsexperiment *Werfen einer Roulettekugel* hat eine Unterscheidung zwischen  $E$  und  $z$  keine praktischen Auswirkungen, kann aber aus formalen Gründen durchaus sinnvoll sein. So bezeichnet  $E_\mu = 8$ , dass die Kugel in der mit „8“ markierten Vertiefung der Roulettescheibe zum Liegen gekommen ist. Arithmetische Operationen wie z. B. eine Erwartungswertbildung sind anhand der Ergebnisse nicht möglich. Dagegen bezeichnet die Zufallsgröße  $z$  tatsächlich einen Zahlenwert (hier ganzzahlig zwischen 0 und 36), aus dem der zu erwartende Mittelwert der Zufallsgröße (hier 18) ermittelt werden kann. Durchaus möglich, aber nicht sinnvoll wäre z. B. die Zuordnung  $E_\mu = 8 \Leftrightarrow z_\mu \neq 8$ .
- Beim Experiment *Münzwurf* sind die möglichen Ergebnisse *Zahl* und *Bild* und es verbieten sich arithmetische Operationen bezüglich der Ergebnismenge ganz von selbst. Erst durch die zwar willkürliche, aber ein-eindeutige Zuordnung zwischen der Ereignismenge  $\{E_\mu\} = \{\text{Zahl}, \text{Bild}\}$  und der Menge  $\{z_\mu\} = \{0,1\}$  der erlaubten Zufallsgrößen kann hier überhaupt ein Kennwert angegeben werden. Ebenso könnte man die Zuordnung „*Bild*  $\Leftrightarrow 0$ ; *Zahl*  $\Leftrightarrow 1$ “ festlegen.
- In der digitalen Schaltungstechnik bezeichnet man die beiden möglichen logischen Zustände einer Speicherzelle – z. B. eines Flipflops – gemäß den möglichen Spannungspegeln mit  $L$  (Low) und  $H$  (High). Diese Bezeichnungen werden im Folgenden auch für Binärsymbole übernommen. Für praktische Arbeiten bildet man diese Symbole meist wieder auf Zufallsgrößen ab, wobei auch diese Zuordnung willkürlich ist, aber sinnvoll gewählt werden sollte. In der Codierungstheorie wird sinnvollerweise  $\{L, H\}$  auf  $\{0,1\}$  abgebildet, um die Möglichkeiten der Modulo-Algebra nutzen zu können. Zur Beschreibung der Modulation mit bipolaren (antipodalen) Signalen wählt man dagegen besser die Zuordnung  $\{L, H\} \Leftrightarrow \{-1, +1\}$ .

#### Kontinuierliche und diskrete Zufallsgrößen

Nach den möglichen Zahlenwerten  $z_\mu = z(E_\mu)$  unterscheiden wir hier zwischen **kontinuierlichen** und **diskreten** Zufallsgrößen:

- Eine kontinuierliche Zufallsgröße  $z$  kann – zumindest in gewissen Bereichen – unendlich viele verschiedene Werte annehmen. Genauer gesagt: Die Menge der möglichen Zufallswerte ist bei solchen Größen auch nicht abzählbar. Beispiele hierfür sind die Geschwindigkeit eines Autos (etwa im innerstädtischen Bereich zwischen 0 und 120 km/h) oder auch die Rauschspannung bei einem Nachrichtensystem. Beide Zufallsgrößen haben sowohl einen Zahlenwert als auch eine Einheit.
- Ist dagegen die Menge  $\{z_\mu\}$  abzählbar, so bezeichnet man die Zufallsgröße als diskret. Meist ist die Zahl der möglichen Werte von  $z$  auf  $M$  begrenzt. In der Nachrichtentechnik nennt man  $M$  den **Symbolumfang** (im Sinne der Codierungs- und Informationstheorie) bzw. die **Stufenzahl** (aus Sicht der Übertragungstechnik).

Zunächst beschränken wir uns auf diskrete,  $M$ -stufige Zufallsgrößen ohne innere statistischen Bindungen, die gemäß *Kapitel 1.1* durch die  $M$  Auftretswahrscheinlichkeiten  $p_\mu = Pr(z = z_\mu)$  vollständig charakterisiert sind. Deren Summe über alle  $M$  Wahrscheinlichkeiten ist definitionsgemäß gleich 1. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit  $Pr(z = z_\mu)$  dafür, dass eine kontinuierliche Zufallsgröße  $z$  einen ganz bestimmten Wert  $z_\mu$  annimmt, identisch Null. Hier muss, wie im Kapitel *Kontinuierliche Zufallsgrößen* beschrieben wird, auf die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) übergegangen werden. Weitere Informationen hierüber finden Sie *in Kapitel 3*.

### Zufallsprozess und Zufallsfolge

Ein **Zufallsprozess** unterscheidet sich von dem bisher betrachteten Zufallsexperiment dadurch, dass er nicht nur ein Ergebnis (Ereignis) liefert, sondern eine zeitliche Folge von Ergebnissen (Ereignissen). Damit kommt man zur **Zufallsfolge**  $\langle z_\nu \rangle$  mit folgenden in unserer Darstellung festgelegten Eigenschaften:

- Die Laufvariable  $\nu$  beschreibt den zeitlichen Ablauf eines Prozesses und kann Werte zwischen 1 und  $N$  annehmen. Häufig wird eine solche Folge auch als  **$N$ -dimensionaler Vektor** dargestellt.
- Zu jedem Zeitpunkt  $\nu$  kann die Zufallsgröße  $z_\nu$  einen von  $M$  verschiedenen Werten annehmen:

$$z_\nu \in Z_\mu \text{ mit } \nu = 1, \dots, N \text{ und } \mu = 1, \dots, M \quad (20)$$

- Ist der Zufallsprozess **ergodisch**, so weist jede beliebige Zufallsfolge  $\langle z_\nu \rangle$  gleiche statistische Eigenschaften auf und kann als Repräsentant für den gesamten Prozess herangezogen werden.
- In diesem Kapitel wird vorausgesetzt, dass zwischen den einzelnen Elementen der Folge keine statistischen Bindungen bestehen, das heißt, es gilt für die **bedingten Wahrscheinlichkeiten**:

$$Pr(z_\nu | z_{\nu-1} \dots z_1) = Pr(z_\nu). \quad (21)$$

**Beispiel:** Wiederholt man das Zufallsexperiment Werfen einer Roulettekugel zehnmal, so ist z. B. die folgende Zufallsfolge möglich:  $\langle z_\nu \rangle = \{8; 23; 0; 17; 36; 0; 33; 11; 11; 25\}$ . Zu jedem Zeitpunkt sind trotzdem – unabhängig von der Vergangenheit – alle Zufallsgrößen zwischen 0 und 36 möglich und gleichwahrscheinlich, was aber aus einer solch kurzen Folge nicht abgelesen werden kann.

### Bernouillisches Gesetz der großen Zahlen

Zur Beschreibung einer  $M$ -stufigen Zufallsgröße verwendet man folgende Beschreibungsgrößen, deren Summe über alle  $\mu = 1, \dots, M$  jeweils den Wert 1 ergeben:

- die **Wahrscheinlichkeiten**  $p_\mu = \Pr(z = z_\mu)$ ; diese liefern Vorhersagen über das zu erwartende Ergebnis eines statistischen Versuchs und sind somit so genannte *A-priori-Kenngrößen*.
- die **relativen Häufigkeiten**  $h_\mu^{(N)}$ ; diese sind *A-posteriori-Kenngrößen* und erlauben statistische Aussagen bezüglich eines vorher durchgeführten Versuches. Sie werden wie folgt ermittelt:

$$h_\mu^{(N)} = \left(\frac{n_\mu}{N}\right) \quad (\mu = 1, \dots, M). \quad (22)$$

Hierbei bezeichnet  $N$  die Anzahl aller Versuche und  $n_\mu$  die Anzahl der Versuche, die zum Ergebnis  $E_\mu$  bzw. zu der Zufallsgröße  $z_\mu$  führen.

Nur im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  stimmen die relativen Häufigkeiten mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten überein, zumindest im statistischen Sinne. Dagegen gilt für endliche Werte von  $N$  entsprechend dem von Bernoulli formulierten **Gesetz der großen Zahlen**:

$$\Pr\left(\left|h_\mu^{(N)} - p_\mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4 \cdot N \cdot \varepsilon^2} \quad (23)$$

Aus dem Bernoullischen Gesetz der großen Zahlen folgt auch die Aussage, dass bei unendlich langen Zufallsfolgen (das heißt für  $N \rightarrow \infty$ ) die relativen Häufigkeiten  $h_\mu^{(N)}$  und die Wahrscheinlichkeiten  $p_\mu$  mit Wahrscheinlichkeit 1 identisch sind.

**Beispiel:** Eine Binärdatei besteht aus  $N = 10^6$  Binärsymbolen (Bit), wobei die Nullen und Einsen gleichwahrscheinlich sind:  $p_0 = p_1 = 0.5$ . Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen (mit  $\varepsilon = 0.01$ ) besagt nun, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „die Anzahl der Nullen bzw. der Einsen in der Datei liegt zwischen 495000 und 505000“ größer oder gleich  $1 - 0.0025 = 99.75\%$  ist.

**Anmerkung:**

- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die relative Häufigkeit  $h_\mu^{(N)}$  eines Ereignisses  $E_\mu$  und die zugehörige Wahrscheinlichkeit  $p_\mu$  betragsmäßig um mehr als einen Wert  $\varepsilon$  unterscheiden, ist nicht größer als  $1/(4 \cdot N \cdot \varepsilon^2)$ . Für ein gegebenes  $\varepsilon$  und eine zu garantierende Wahrscheinlichkeit kann daraus der minimal erforderliche Wert von  $N$  berechnet werden.
- Der monotone Abfall mit  $N$  gilt nur im statistischen Sinne und nicht für jede einzelne Realisierung. Beispielsweise können beim Experiment *Münzwurf* durchaus nach  $N = 1000$  Würfeln die relative Häufigkeiten von *Zahl* und *Bild* exakt gleich 0.5 sein (wenn  $n_{\text{Zahl}} = n_{\text{Bild}} = 500$  ist) und nach einer größeren Anzahl von Versuchen, beispielsweise nach  $N = 2000$ , wieder mehr oder weniger stark davon abweichen.
- Führen mehrere Personen parallel das Experiment *Münzwurf* durch und stellt man jeweils die relative Häufigkeit in Abhängigkeit von  $N$  dar, so ergeben sich dementsprechend Kurvenverläufe, die zwar tendenziell, aber nicht monoton abfallen. Berechnet man den Mittelwert über unendlich viele solcher Kurven, so erhält man den monoton mit  $N$  abfallenden Verlauf gemäß Bernoulli.

## 2.2 Momente einer diskreten Zufallsgröße

Berechnung als Schar- bzw. Zeitmittelwert



Die Wahrscheinlichkeiten bzw. die relativen Häufigkeiten liefern weitreichende Informationen über eine diskrete Zufallsgröße. Reduzierte Informationen erhält man durch die so genannten *Momente*  $m_k$ , wobei  $k$  eine natürliche Zahl darstellt.

Unter der für das Folgende stillschweigend vorausgesetzten **Ergodizität** gibt es zwei unterschiedliche Berechnungsmöglichkeiten für das Moment  $k$ -ter Ordnung:

- die **Scharmittelung** bzw. *Erwartungswertbildung* (Mittelung über alle möglichen Werte):

$$m_k = E[z^k] = \sum_{\mu=1}^M p_{\mu} \cdot z_{\mu}^k \quad \text{mit } E[\dots]: \text{Erwartungswert} \quad (24)$$

- die **Zeitmittelung** über die Zufallsfolge  $\langle z_{\nu} \rangle$  mit der Laufvariablen  $\nu = 1, \dots, N$ :

$$m_k = \overline{z^k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N z_{\nu}^k \quad \text{mit überstreichender Linie: Zeitmittelwert.} \quad (25)$$

Die beiden Berechnungsarten führen für genügend große Werte von  $N$  zum gleichen asymptotischen Ergebnis. Bei endlichem  $N$  ergibt sich ein vergleichbarer Fehler, als wenn die Wahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit angenähert wird.

### Linearer Mittelwert – Gleichanteil

Mit  $k = 1$  erhält man aus der allgemeinen Gleichung für die Momente den **linearen Mittelwert**:

$$m_1 = \sum_{\mu=1}^M p_{\mu} \cdot z_{\mu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N z_{\nu} \quad (26)$$

Der linke Teil dieser Gleichung beschreibt die Mittelung über alle möglichen Werte (Scharmittelung), während die rechte Gleichung die Bestimmung als Zeitmittelwert angibt. In Zusammenhang mit Signalen wird diese Größe auch als der **Gleichanteil** bezeichnet.

**Beispiel:** Ein Binärsignal mit den beiden Amplitudenwerten 1V (für das Symbol L) und 3V (für das Symbol H) sowie den Auftretswahrscheinlichkeiten  $p_L = 0.2$  bzw.  $p_H = 0.8$  hat einen linearen Mittelwert (Gleichanteil) von 2.6 V. Bestimmt man diese Kenngröße durch Zeitmittelung über lediglich  $N = 1000$  Signalwerte, so wird man einen geringfügig anderen Wert erhalten.

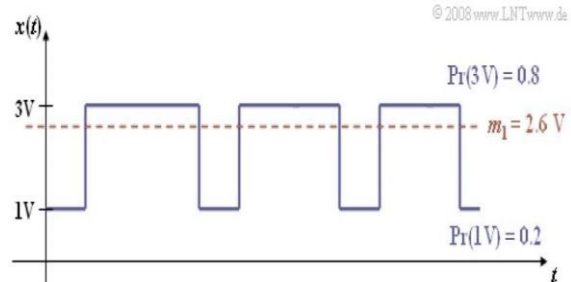


Abbildung 13: Graphische Darstellung zum linearen Mittelwert

### Quadratischer Mittelwert – Varianz – Streuung

In analoger Weise zum linearen Mittelwert erhält man mit  $k = 2$  für den **quadratischen Mittelwert**:

$$m_2 = \sum_{\mu=1}^M p_{\mu} \cdot z_{\mu}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N z_{\nu}^2 \quad (27)$$

Im Zusammenhang mit Signalen gibt  $m_2$  die (mittlere) Leistung an, bezogen auf den Widerstand  $1\Omega$ . Beschreibt  $z$  eine Spannung, so besitzt  $m_2$  die Einheit „ $V^2$ “. Zusammen mit dem Gleichanteil  $m_1$  kann daraus als weitere Kenngröße die **Varianz**  $\sigma^2$  bestimmt werden (Satz von Steiner):

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 \tag{28}$$

Als **Streuung**  $\sigma$  bezeichnet man in der Statistik die Quadratwurzel der Varianz; manchmal wird diese Größe auch *Standardabweichung* genannt.

Bei einem Zufallssignal entspricht die Varianz  $\sigma^2$  physikalisch der *Wechselleistung* und die Streuung  $\sigma$  dem Effektivwert. Bei dieser Definition ist wiederum der Bezugswiderstand  $1\Omega$  zugrunde gelegt.

**Beispiel:** Ein Binärsignal mit den beiden Amplitudenwerten 1V (für das Symbol L) und 3V (für das Symbol H) sowie den Auftretswahrscheinlichkeiten  $p_L = 0.2$  bzw.  $p_H = 0.8$  hat eine Signalleistung von  $7.4V^2$ . Mit  $m_1 = 2.6V$  (siehe Linearer Mittelwert) folgt daraus  $\sigma^2 = 0.64 V^2$  bzw.  $\sigma = 0.8V$ . Die gleiche Varianz und der gleiche Effektivwert ergeben sich für die Amplitudenwerte 0V (für das Symbol L) und 2V (für das Symbol H), vorausgesetzt, die Auftretswahrscheinlichkeiten  $p_L = 0.2$  und  $p_H = 0.8$  bleiben gleich. Dagegen stimmen die Momente – z. B. der lineare Mittelwert  $m_1$  und der quadratische Mittelwert  $m_2$  – dann nicht mehr überein.

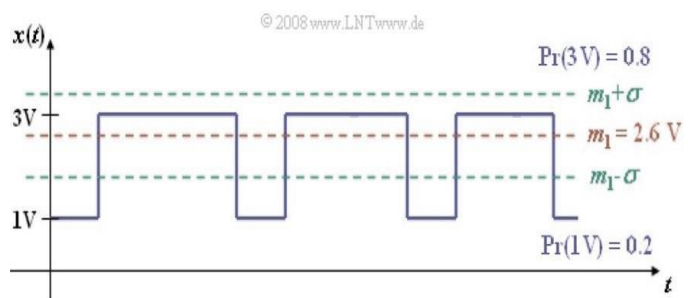


Abbildung 14: Graphische Darstellung zum quadratischen Mittelwert, der Varianz und der Streuung

## 2.3 Binomialverteilung

### Allgemeine Beschreibung

Die **Binomialverteilung** stellt einen wichtigen Sonderfall für die Auftretswahrscheinlichkeiten einer diskreten Zufallsgröße dar. Zur Herleitung der Binomialverteilung gehen wir davon aus, dass  $I$  binäre und statistisch voneinander unabhängige Zufallsgrößen  $b_i$  den Wert 0 mit der Wahrscheinlichkeit  $\Pr(b_i = 0) = 1 - p$  und den Wert 1 mit der Wahrscheinlichkeit  $\Pr(b_i = 1) = p$  annehmen kann. Dann ist die Summe

$$z = \sum_{i=1}^I b_i \tag{29}$$

ebenfalls eine diskrete Zufallsgröße mit dem Symbolvorrat  $\{0,1,2,\dots,I\}$ , die man als binomialverteilt bezeichnet. Der Symbolumfang beträgt somit  $M = I + 1$ .

**Beispiele:** Die Binomialverteilung findet in der Nachrichtentechnik ebenso wie in anderen Disziplinen mannigfaltige Anwendungen:

- Sie beschreibt die Verteilung von Ausschusstücken in der statistischen Qualitätskontrolle.
- Sie wird zur Berechnung der Restfehlerwahrscheinlichkeit bei blockweiser Codierung benötigt.
- Die per Simulation gewonnene Bitfehlerquote eines digitalen Übertragungssystems ist im Grunde genommen ebenfalls eine binomialverteilte Zufallsgröße.

Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung

Für die **Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung** gilt mit  $\mu = 0, \dots, I$ :

$$p_\mu = \Pr(z = \mu) = \binom{I}{\mu} \cdot p^\mu \cdot (1-p)^{I-\mu} \quad (30)$$

Der erste Term gibt hierbei die Anzahl der Kombinationen („I über  $\mu$ “) an:

$$\binom{I}{\mu} = \frac{I!}{\mu! \cdot (I-\mu)!} = \frac{I \cdot (I-1) \cdot \dots \cdot (I-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \mu} \quad (31)$$

**Beispiel:** Mit den Parametern  $I = 6$  und  $p = 0.4$  ergeben sich rechts dargestellte Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:

Für sehr große Werte von  $I$  kann die Binomialverteilung durch die im nächsten Abschnitt beschriebene Poissonverteilung angenähert werden. Ist gleichzeitig das Produkt  $I \cdot p$  sehr viel größer als 1, so geht nach dem Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace die Poisson- und damit auch die Binomialverteilung in eine diskrete Gaußverteilung über.

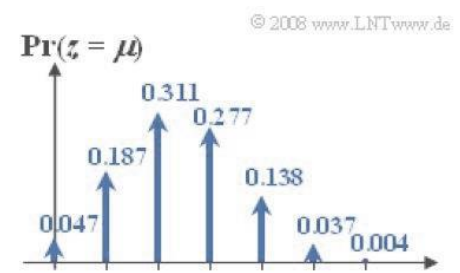


Abbildung 15: Binomialverteilung

Beispiel „Blockfehlerwahrscheinlichkeit“

Überträgt man jeweils Blöcke von  $I = 10$  Symbolen über einen Kanal, der mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 0.01$  das Symbol verfälscht ( $e_i = 1$ ) und entsprechend mit der Wahrscheinlichkeit  $1-p = 0.99$  das Symbol unverfälscht überträgt ( $e_i = 0$ ), so gilt für die neue Zufallsgröße  $f$  (Fehler pro Block):

$$f = \sum_{i=1}^I e_i \quad (32)$$

Die Zufallsgröße  $f$  kann nun alle Werte zwischen 0 (kein Symbol verfälscht) und  $I$  (alle Symbole falsch) annehmen; die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind  $p_\mu$ . Der Fall, dass alle  $I$  Symbole richtig übertragen werden, tritt mit der Wahrscheinlichkeit  $p_0 = 0.99^{10} \approx 0.9044$  ein. Dies ergibt sich auch aus obiger Gleichung für  $\mu = 0$  unter Berücksichtigung der Definition „10 über 0“ = 1. Ein einziger Symbolfehler ( $f = 1$ ) tritt mit folgender Wahrscheinlichkeit auf:

$$p_1 = 10 \cdot 0.01 \cdot 0.99^9 \approx 0.0914 \quad (33)$$

Der erste Faktor berücksichtigt, dass es für die Position eines einzigen Fehlers nun „10 über 1“ = 10 Möglichkeiten gibt. Die beiden weiteren Terme berücksichtigen, dass ein Symbol verfälscht und neun richtig übertragen werden müssen, wenn  $f = 1$  gelten soll.

Für  $f = 2$  gibt es bereits deutlich mehr Kombinationen, nämlich „10 über 2“ =  $(10 \cdot 9)(1 \cdot 2) = 45$  und man erhält:

$$p_2 = 45 \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^8 \approx 0.041. \quad (34)$$

Kann nun ein Blockcode bis zu zwei Fehlern korrigieren, so ist die Restfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_R = p_3 + \dots + p_{10} = 1 - p_0 - p_1 - p_2 \approx 10^{-4} \quad (35)$$

Man erkennt, dass die zweite Berechnungsmöglichkeit über das Komplement schneller zum Ziel führt. Allerdings könnte man auch berücksichtigen, dass bei diesen Zahlenwerten  $p_R \approx p_3$  gilt.

### Momente der Binomialverteilung

Die Momente (oder Mittelwerte) können mit den Gleichungen von *Kapitel 2.2* und den Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung allgemein berechnet werden. Für das **Moment  $k$ -ter Ordnung** gilt:

$$m_k = E[z^k] = \sum_{\mu=0}^I \mu^k \cdot \binom{I}{\mu} \cdot p^\mu \cdot (1-p)^{I-\mu} \quad (36)$$

Daraus erhält man nach einigen Umformungen für den linearen und den quadratischen Mittelwert:

$$m_1 = I \cdot p \quad (37)$$

$$m_2 = (I^2 - I) \cdot p^2 + I \cdot p \quad (38)$$

Die Streuung (Quadratwurzel der Varianz) erhält man durch Anwendung des **Steinerschen Satzes**:

$$\sigma = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{I \cdot p \cdot (1-p)} \quad (39)$$

Die maximale Varianz  $\sigma^2 = I/4$  ergibt sich für die charakteristische Wahrscheinlichkeit  $p = 0.5$ . In diesem Fall gilt die Symmetriebeziehung  $p_\mu = p_{I-\mu}$ . Je mehr  $p$  vom Wert  $p = 0.5$  abweicht, umso kleiner ist die Streuung, und umso unsymmetrischer werden die Wahrscheinlichkeiten um den Mittelwert  $I \cdot p$ .

**Beispiel:** Betrachten wir wie im letzten Beispiel einen Block von  $I = 10$  Symbolen, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 0.01$  unabhängig voneinander verfälscht werden, so ist die mittlere Anzahl von Fehlern pro Block gleich  $m_f = E[f] = I \cdot p = 0.1$ ; die Streuung (Standardabweichung) der Zufallsgröße  $f$  beträgt  $\sigma_f \approx 0.315$ . Im vollständig gestörten Kanal (das heißt:  $p = 0.5$ ) ergeben sich demgegenüber die Werte  $m_f = 5$  und  $\sigma_f \approx 1.581$ .

## 2.4 Poissonverteilung

### Wahrscheinlichkeiten der Poissonverteilung

Die **Poissonverteilung** ist ein Grenzfall der Binomialverteilung, wobei

- zum einen von den Grenzübergängen  $I \rightarrow \infty$  und  $p \rightarrow 0$  ausgegangen wird,

- zusätzlich vorausgesetzt ist, dass das Produkt  $I \cdot p = \lambda$  einen endlichen Wert besitzt, der die mittlere Anzahl der „Einsen“ in einer festgelegten Zeiteinheit angibt und als *Rate* bezeichnet wird.

Im Gegensatz zur Binomialverteilung ( $0 \leq \mu \leq I$ ) kann hier die Zufallsgröße beliebig große (ganzahlige, positive) Werte annehmen, was bedeutet, dass die Menge der möglichen Werte hier nicht abzählbar ist. Da jedoch keine Zwischenwerte auftreten können, spricht man auch hier von einer diskreten Verteilung.

Berücksichtigt man die oben genannten Grenzübergänge in der Gleichung für die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung, so folgt für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der poissonverteilten Zufallsgröße  $z$ :

$$p_\mu = \Pr(z = \mu) = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{I!}{\mu! \cdot (I - \mu)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{I}\right)^\mu \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{I}\right)^{I-\mu} \quad (40)$$

Daraus erhält man nach einigen algebraischen Umformungen:

$$p_\mu = \frac{\lambda^\mu}{\mu!} \cdot e^{-\lambda} \quad (41)$$

**Beispiel:** Nachfolgend sind die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung (mit  $I = 6$  und  $p = 0.4$ ) und der Poissonverteilung (mit  $\lambda = 2.4$ ) gegenübergestellt. Beide Verteilungen besitzen den gleichen Mittelwert  $m_1 = 2.4$ . Bei der Poissonverteilung (im Bild jeweils die rechten Pfeile) sind die äußeren Werte wahrscheinlicher als bei der Binomialverteilung und es können (theoretisch) auch beliebig große Werte auftreten.

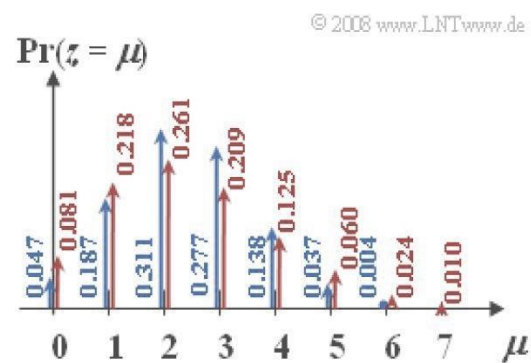


Abbildung 16: Binomialverteilung - Poissonverteilung

### Momente der Poissonverteilung

Der **Mittelwert** und die **Streuung** der Poissonverteilung ergeben sich direkt aus den entsprechenden Gleichungen der Binomialverteilung durch zweifache Grenzwertbildung:

$$m_1 = \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} I \cdot p = \lambda \quad (42)$$

$$\sigma = \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \sqrt{I \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{\lambda} \quad (43)$$

Daraus ist ersichtlich, dass bei der Poissonverteilung stets  $\sigma^2 = m_1 = \lambda$  gilt.

Beispiel: Wie im Beispiel auf der letzten Seite werden die Binomialverteilung (mit  $I = 6$  und  $p = 0.4$ ) und die Poissonverteilung (mit  $\lambda = 2.4$ ) miteinander verglichen. Beide Verteilungen besitzen genau den gleichen Mittelwert  $m_1 = 2.4$ . Bei der Poissonverteilung (im Bild jeweils die rechten Pfeile) ist die Streuung (Standardabweichung)  $\sigma \approx 1.55$ , bei der Binomialverteilung beträgt diese nur  $\sigma = 1.2$ .

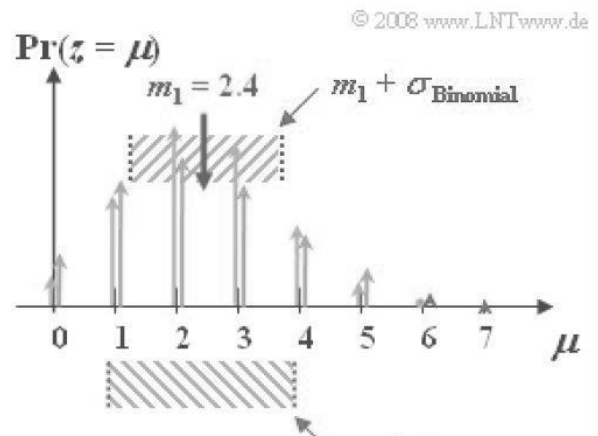


Abbildung 17: Momente der Poissonverteilung

Gegenüberstellung Binomialverteilung - Poissonverteilung

Im Folgenden sollen sowohl die **Gemeinsamkeiten** als auch die **Unterschiede** zwischen binomial- und poissonverteilten Zufallsgrößen nochmals herausgearbeitet werden.

Die **Binomialverteilung** ist zur Beschreibung von solchen stochastischen Ereignissen geeignet, die durch einen vorgegebenen Takt gekennzeichnet sind. Beispielsweise beträgt bei ISDN (Integrated Services Digital Network) mit 64 kbit/s die Taktzeit  $T$  etwa  $15.6\mu s$ .

Nur in diesem Zeitraster treten binäre Ereignisse auf. Solche Ereignisse sind beispielsweise die fehlerfreie ( $e_i = 0$ ) oder fehlerhafte ( $e_i = 1$ ) Übertragung einzelner Symbole. Die Binomialverteilung ermöglicht nun statistische Aussagen über die Anzahl der in einem längeren Zeitintervall  $T_I = I \cdot T$  zu erwartenden Übertragungsfehler entsprechend dem nachfolgenden Bild (die oberen markierten Zeitpunkte).

Auch die **Poissonverteilung** macht Aussagen über die Anzahl der Binäreignisse in einem endlichen Zeitintervall. Geht man hierbei vom gleichen Betrachtungszeitraum  $T_I$  aus und vergrößert die Anzahl  $I$  der Teilintervalle immer mehr, so wird die Taktzeit  $T$ , zu der jeweils ein neues Binäreignis („0“ oder „1“) eintreten kann, immer kleiner. Im Grenzfall geht  $T$  gegen Null. Das heißt: Bei der Poissonverteilung sind die binären Ereignisse nicht nur zu diskreten, durch ein Zeitraster vorgegebenen Zeitpunkten möglich, sondern jederzeit. Das untere Bild verdeutlicht diesen Sachverhalt.

Um im Mittel während der Zeit  $T_I$  genau so viele „Einsen“ wie bei der Binomialverteilung zu erhalten (im gezeichneten Beispiel: 6), muss allerdings die Wahrscheinlichkeit  $p = \text{Pr}(e_i = 1)$  gegen Null tendieren.

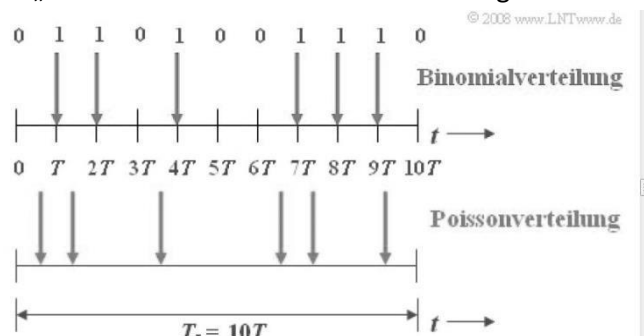


Abbildung 18: Gegenüberstellung Binomialverteilung - Poissonverteilung

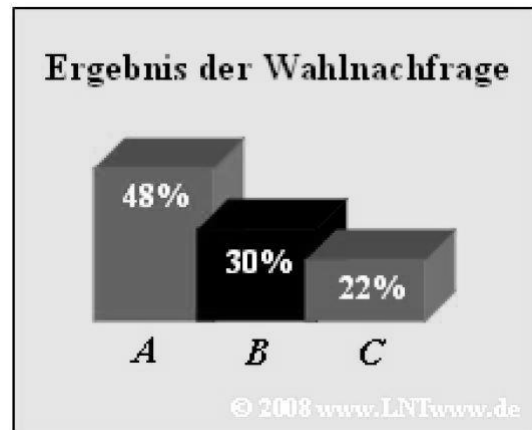
## 2.5 Vorbereitungsaufgaben

### A2.1: Wahlnachfrage

Zu einer Oberbürgermeisterwahl treten die drei Kandidaten  $A$ ,  $B$  und  $C$  an. Gewählt ist derjenige Kandidat, der mehr als 50% der abgegebenen Stimmen erhält. Gelingt dies im ersten Wahlgang keinem der drei Bewerber, so kommt es zwischen den beiden Kandidaten mit den meisten Stimmen zu einer Stichwahl.

Direkt nach Schließung der Wahllokale wird das Ergebnis einer Wahlnachfrage vorgelegt:

Kandidat  $A$ : 48%, Kandidat  $B$ : 30%, Kandidat  $C$ : 22%.



Die Nachfrage basiert auf einer Umfrage unter  $N = 2000$  der insgesamt  $N' = 800.000$  Wählerinnen und Wähler. Gehen Sie bei der Beantwortung der nachfolgenden Fragen von folgenden Voraussetzungen aus:

- Die bei der Wahl von den Kandidaten  $A$ ,  $B$  und  $C$  tatsächlich erzielten Stimmen können als die Wahrscheinlichkeiten  $p_A$ ,  $p_B$  und  $p_C$  aufgefasst werden, obwohl auch diese selbst als relative Häufigkeiten (bezogen auf  $N'$ ) ermittelt werden.
- Die 2000 ausgewählten Wähler repräsentieren die gesamte Wählerschaft im statistischen Sinne ideal und haben bei der Wahlnachfrage wahrheitsgemäß geantwortet.
- Entsprechend dem *Bernouillischen Gesetz der großen Zahlen* sollen die Ergebnisse dieser Nachfrage als relative Häufigkeiten aufgefasst werden:  $h_A = 0.48$ ,  $h_B = 0.3$ ,  $h_C = 0.22$ .

a) Wen erwarten Sie nach dieser Nachfrage als zukünftigen Oberbürgermeister?

- Kandidat  $A$   
 Kandidat  $B$   
 Kandidat  $C$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Stichwahl erforderlich sein wird? Geben Sie hierfür die obere Schranke an.

$$\text{Max: Pr(keine Stichwahl)} =$$

c) Wir setzen nun voraus, dass der Kandidat  $A$  tatsächlich genau 48% der Stimmen erhält. Wie groß ist damit höchstens die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat  $C$  die Stichwahl erreicht?

$$\text{Max: Pr}(C \text{ erreicht Stichwahl}) =$$

*Hinweis:* Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 2.1**.

## Z2.2: Diskrete Zufallsgrößen

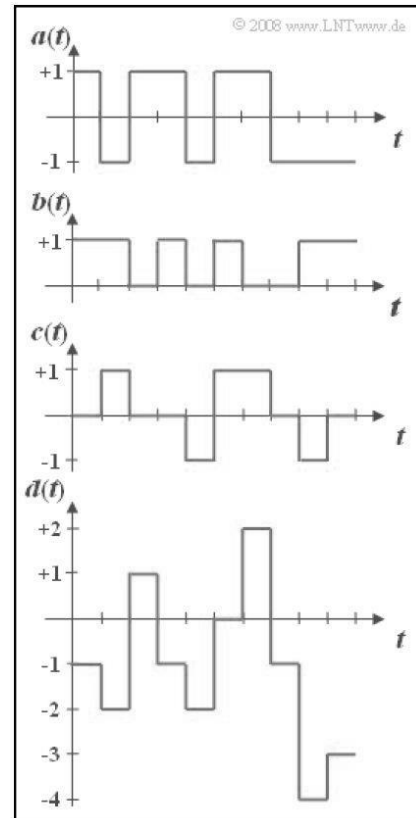
Gegeben seien drei diskrete Zufallsgrößen  $a$ ,  $b$  und  $c$ , die als die Momentanwerte der dargestellten Digitalisignale definiert seien. Diese besitzen folgende Eigenschaften:

- Die Zufallsgröße  $a$  kann die Werte  $+1$  und  $-1$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen.
- Die Zufallsgröße  $b$  ist ebenfalls zweipunktverteilt, aber mit  $\Pr(b = 1) = p$  und  $\Pr(b = 0) = 1 - p$ .
- Die Wahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße  $c$  seien  $\Pr(c = 0) = \frac{1}{2}$  und  $\Pr(c = +1) = \Pr(c = -1) = \frac{1}{4}$ .
- Zwischen diesen drei Zufallsgrößen bestehen keine statistischen Abhängigkeiten.

Aus den Zufallsgrößen  $a$ ,  $b$  und  $c$  wird nun eine weitere Zufallsvariable  $d$  gebildet:

$$d = a - 2b + c$$

Die Grafik zeigt Ausschnitte dieser vier Zufallsgrößen. Es ist zu erkennen, dass  $d$  alle ganzzahligen Werte zwischen  $-4$  und  $+2$  annehmen kann.



- a) Wie groß ist die Streuung der Zufallsgröße  $a$ ?

$$\sigma_a =$$

- b) Wie groß ist die Streuung der Zufallsgröße  $b$ ? Setzen Sie  $p = 0.25$ .

$$p = 0.25: \sigma_b =$$

- c) Wie groß ist die Streuung der Zufallsgröße  $c$ ?

$$\sigma_c =$$

- d) Berechnen Sie den Mittelwert  $m_d$  der Zufallsgröße  $d$  für  $p = 0.25$ .

$$p = 0.25: m_d =$$

- e) Wie groß ist der quadratische Mittelwert  $m_{2d}$  dieser Zufallsgröße  $d$  für  $p = 0.25$ .

$$p = 0.25: m_{2d} =$$

- f) Wie groß ist die Streuung  $\sigma_d$  für  $p = 0.25$ ?

$$p = 0.25: \sigma_d =$$

*Hinweis:* Die Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 2.2**.



## 2.6 Versuchsdurchführung

### Aufgaben zu Kapitel 2.

*Zu Kapitel 2 sind folgende Aufgaben während des Praktikums zu bearbeiten.*

- A2.2: Mehrstufensignale
- A2.3: Summe von Binärzahlen
- A2.4: Zahlenlotto (6 aus 49)
- A2.5: Binomial- oder poissonverteilt?
- Z2.5: Blumenwiese (optional)

### 3 Kontinuierliche Zufallsgrößen

#### 3.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)

##### Eigenschaften kontinuierlicher Zufallsgrößen

Im *Kapitel 2* wurde gezeigt, dass die Amplitudenverteilung einer diskreten Zufallsgröße durch ihre  $M$  Auftretswahrscheinlichkeiten bestimmt ist, wobei die Stufenzahl  $M$  meist einen endlichen Wert besitzt.

Nun betrachten wir kontinuierliche Zufallsgrößen. Darunter versteht man Zufallsgrößen, deren mögliche Zahlenwerte nicht abzählbar sind („wertkontinuierlich“). Über eine eventuelle *Zeitdiskretisierung* wird hier keine Aussage getroffen, das heißt, kontinuierliche Zufallsgrößen können durchaus zeitdiskret sein. Weiter setzen wir für dieses dritte Kapitel voraus, dass zwischen den einzelnen Abtastwerten  $x_v$  keine statistischen Bindungen bestehen.

Im Weiteren kennzeichnen wir kontinuierliche Zufallsgrößen (meist) mit  $x$  im Gegensatz zu den diskreten Zufallsgrößen, die wie im *Kapitel 2* weiterhin mit  $z$  bezeichnet werden.

**Beispiel:** Das nachfolgende Bild zeigt einen Ausschnitt eines stochastischen Rauschsignals  $x(t)$ , dessen Momentanwert als eine kontinuierliche Zufallsgröße  $x$  aufgefasst werden kann.

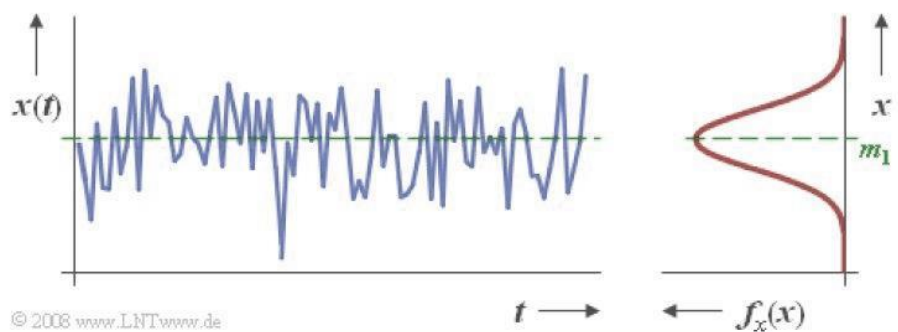


Abbildung 19: stochastisches Rauschsignal  $x(t)$

Aus der rechts  
dargestellten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion erkennt man, dass in diesem Beispiel Momentanwerte um den Mittelwert  $m_1$  am häufigsten auftreten. Da zwischen den Abtastwerten  $x_v$  keine statistischen Bindungen bestehen, spricht man hier von „Weißem Rauschen“.

##### Allgemeine Definition der WDF

Bei einer kontinuierlichen Zufallsgröße ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese ganz bestimmte Werte annimmt, identisch 0. Deshalb muss zur Beschreibung einer kontinuierlichen Zufallsgröße stets auf die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** – abgekürzt WDF – übergegangen werden.

**Definition:** Der Wert der WDF  $f_x(x)$  an der Stelle  $x_\mu$  ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Momentanwert der Zufallsgröße  $x$  in einem (unendlich kleinen) Intervall der Breite  $\Delta x$  um  $x_\mu$  liegt, dividiert durch  $\Delta x$ :

$$f_x(x = x_\mu) = \frac{\Pr\left\{x_\mu - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_\mu + \frac{\Delta x}{2}\right\}}{\Delta x} \quad (44)$$

Diese für stochastische Signale äußerst wichtige Beschreibungsgröße weist folgende Eigenschaften auf:

- Obwohl aus dem beispielhaften Zeitverlauf auf der letzten Seite zu ersehen ist, dass die häufigsten Anteile bei  $x = m_1$  liegen und die WDF hier ihren größten Wert besitzt, ist die Wahrscheinlichkeit  $\Pr(x = m_1)$ , dass der Momentanwert exakt gleich dem Mittelwert  $m_1$  ist, identisch 0.
- Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße im Bereich zwischen  $x_u$  und  $x_o$  liegt, gilt:

$$\Pr(x_u \leq x \leq x_o) = \int_{x_u}^{x_o} f_x(x) dx \quad (45)$$

- Als wichtige Normierungseigenschaft ergibt sich daraus für die Fläche unter der Dichtefunktion mit den Grenzübergängen  $x_u \rightarrow -\infty$  und  $x_o \rightarrow +\infty$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1 \quad (46)$$

- Die entsprechende Gleichung für diskrete,  $M$ -stufige Zufallsgrößen sagt aus, dass die Summe über die  $M$  Auftretswahrscheinlichkeiten den Wert 1 ergibt.

### WDF-Definition für diskrete Zufallsgrößen

Aus Gründen einer einheitlichen Darstellung ist es zweckmäßig, die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auch für diskrete Zufallsgrößen zu definieren. Wendet man die Definitionsgleichung der letzten Seite auf diskrete Zufallsgrößen an, so nimmt die WDF an einigen Stellen  $x_\mu$  aufgrund des nicht verschwindend kleinen Wahrscheinlichkeitswertes und des Grenzübergangs  $\Delta x \rightarrow 0$  unendlich große Werte an. Somit ergibt sich für die WDF eine Summe von **Diracfunktionen**, die man auch als Distributionen bezeichnet:

$$f_x(x) = \sum_{\mu=1}^M p_\mu \cdot \delta(x - x_\mu) \quad (47)$$

Die Gewichte der einzelnen Diracfunktionen sind dabei gleich den Wahrscheinlichkeiten  $p_\mu = \Pr(x = x_\mu)$ .

Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion stehen in ähnlichem Verhältnis zueinander wie ein diskreter Spektralanteil (Linienspektrum einer harmonischen Schwingung) zu einem kontinuierlichen Spektrum (siehe die entsprechenden Kapitel 2 und 3 im Buch „Signaldarstellung“).

**Beispiel:** Nachfolgend sehen Sie einen Ausschnitt eines Rechtecksignals mit den 3 möglichen Werten  $-1V, 0V$  und  $+1V$ , wobei der Signalwert  $0V$  doppelt so häufig wie die äußeren Signalwerte auftritt.

Somit lautet die dazugehörige WDF (Anteile von oben nach unten):

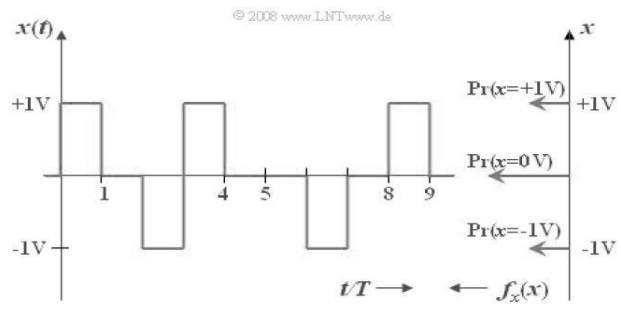


Abbildung 20: WDF eines Rechtecksignals

$$f_x(x) = 0.25 \cdot \delta(x - 1V) + 0.5 \cdot \delta(x) + 0.25 \cdot \delta(x + 1V) \tag{48}$$

### 3.2 Verteilungsfunktion (VTF)

#### VTF bei kontinuierlichen Zufallsgrößen

Zur Beschreibung von Zufallsgrößen wird neben der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auch häufig die Verteilungsfunktion (VTF) herangezogen, die wie folgt definiert ist:

**Definition:** Die **Verteilungsfunktion**  $F_x(r)$  entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße  $x$  kleiner oder gleich einem reellen Zahlenwert  $r$  ist:

$$F_x(r) = \Pr(x \leq r) \tag{49}$$

Bei einer kontinuierlichen Zufallsgröße sind bezüglich der VTF folgende Aussagen möglich:

- Die Verteilungsfunktion kann aus der WDF  $f_x(x)$  durch Integration berechnet werden. Es gilt:

$$F_x(r) = \int_{-\infty}^r f_x(x) dx \tag{50}$$

- Da die WDF nie negativ ist, steigt  $F_x(r)$  zumindest schwach monoton an, und liegt stets zwischen den beiden Grenzwerten  $F_x(r \rightarrow -\infty) = 0$  und  $F_x(r \rightarrow +\infty) = 1$ .
- Umgekehrt lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus der Verteilungsfunktion durch Differentiation bestimmen:

$$f_x(x) = \left. \frac{dF_x(r)}{dr} \right|_{r=x} \tag{51}$$

Der Zusatz „ $r = x$ “ soll deutlich machen, dass das Argument der WDF die Zufallsgröße selbst ist, während das Argument der VTF eine beliebige reelle Variable  $r$  ist. Anzumerken ist, dass in mancher Literatur auch zwischen der Zufallsgröße und dem WDF-Argument unterschieden wird.

**Beispiel:** Das linke Bild zeigt das Foto Lena, das häufig als Testvorlage für Bildcodierverfahren dient. Wird dieses Bild in  $256 \times 256$  Bildpunkte (Pixel) unterteilt, und ermittelt man für jede einzelne Pixel die Helligkeit, so erhält man eine Folge  $\langle x_v \rangle$  von Grauwerten, deren Länge  $N = 256^2 = 65536$  beträgt. Der Grauwert  $x$  ist dabei eine wertkontinuierliche Zufallsgröße, wobei die Zuordnung zu Zahlenwerten willkürlich erfolgt. Beispielsweise sei „Schwarz“ durch den Wert  $x = 0$  und „Weiß“ durch  $x = 1$  charakterisiert. Der Zahlenwert  $x = 0.5$  kennzeichnet dann eine mittlere Graufärbung.

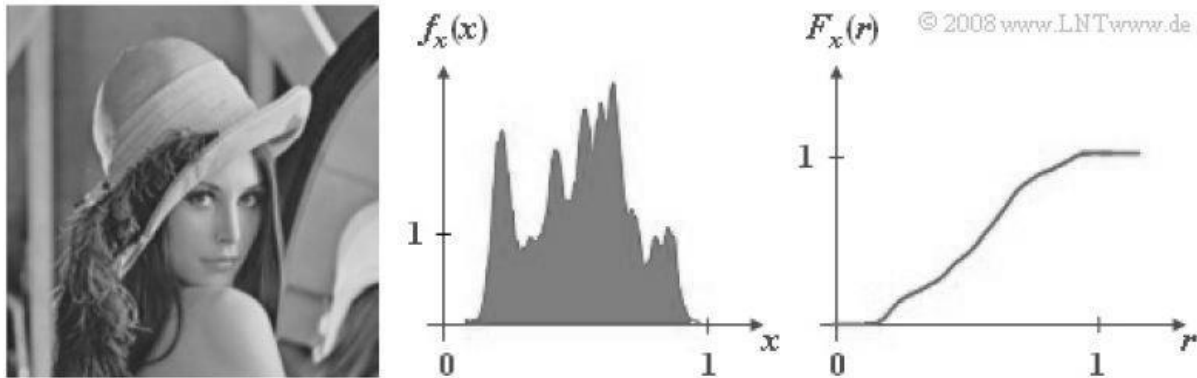


Abbildung 21: Lena - WDF  $f_x(x)$  - Verteilungsfunktion  $F_x(r)$

Im mittleren Bild ist die WDF  $f_x(x)$  dargestellt, die in der Literatur auch oft als Grauwertstatistik bezeichnet wird. Es ist ersichtlich, dass im Originalbild einige Grauwerte bevorzugt sind und die beiden Extremwerte  $x = 0$  („tiefes Schwarz“) bzw.  $x = 1$  („reines Weiß“) nur sehr selten auftreten. Die Verteilungsfunktion  $F_x(r)$  dieser kontinuierlichen Zufallsgröße ist stetig und steigt, wie das rechte Bild zeigt, von 0 auf 1 monoton und stetig an.

Anmerkung: Genau genommen ist bei einem am Computer darstellbaren Bild – im Gegensatz zu einem echten Foto – der Grauwert stets eine diskrete Zufallsgröße. Bei großer Auflösung der Farbinformation („Farbtiefe“) kann man diese Zufallsgröße allerdings näherungsweise als kontinuierlich betrachten.

VTF bei diskreten Zufallsgrößen

Für die Berechnung der **Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße**  $x$  aus deren WDF muss stets von einer etwas allgemeineren Gleichung ausgegangen werden. Hier gilt mit  $\varepsilon > 0$ :

$$F_x(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{r+\varepsilon} f_x(x) dx \tag{52}$$

Die Berechnung der Verteilungsfunktion durch Grenzwertbildung ist aufgrund des " $\leq$ "-Zeichens in der Definitionsgleichung erforderlich. Berücksichtigt man weiterhin, dass bei einer diskreten Zufallsgröße die WDF aus einer Summe von gewichteten **Diracfunktionen** besteht, so erhält man:

$$F_x(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{r+\varepsilon} \sum_{\mu=1}^M p_\mu \cdot \delta(x - x_\mu) dx \tag{53}$$

Vertauscht man in dieser Gleichung Integration und Summation, und berücksichtigt man weiterhin, dass die Integration über die Diracfunktion die Sprungfunktion ergibt, so erhält man:

$$F_x(r) = \sum_{\mu=1}^M p_\mu \cdot \gamma_0(r - r_x), \quad \text{mit } \gamma_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} \delta(u) du = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \tag{54}$$

Hierzu ist zu bemerken:

- Die Funktion  $\gamma_0(x)$  unterscheidet sich von der in der Systemtheorie sonst üblichen Sprungfunktion  $\gamma(x)$  dadurch, dass an der Sprungstelle  $x = 0$  der rechtsseitige Grenzwert Eins gültig ist (anstelle des Mittelwertes  $1/2$  zwischen links- und rechtsseitigem Grenzwert).
- Mit obiger VTF-Definition gilt dann für die Wahrscheinlichkeit von kontinuierlichen und diskreten Zufallsgrößen sowie von gemischten Zufallsgrößen mit diskreten und kontinuierlichen Anteilen gleichermaßen:

$$\Pr(x_u < x \leq x_0) = F_x(x_0) - F_x(x_u) \quad (55)$$

- Bei rein kontinuierlichen Zufallsgrößen können in dieser Gleichung das „Kleiner“-Zeichen und das „Kleiner / Gleich“ – Zeichen gegenseitig ersetzt werden.

**Beispiel:** Wird nun der Grauwert des Bildes auf der letzten Seite mit 8 Stufen quantisiert, so dass jedes einzelne Pixel durch 3 Bit dargestellt und übertragen werden kann, so ergibt sich die diskrete Zufallsgröße  $q$ . Durch die Quantisierung geht allerdings ein Teil der Bildinformation verloren, was sich im quantisierten Bild durch – mehr oder weniger – ausgeprägte Konturen auswirkt.

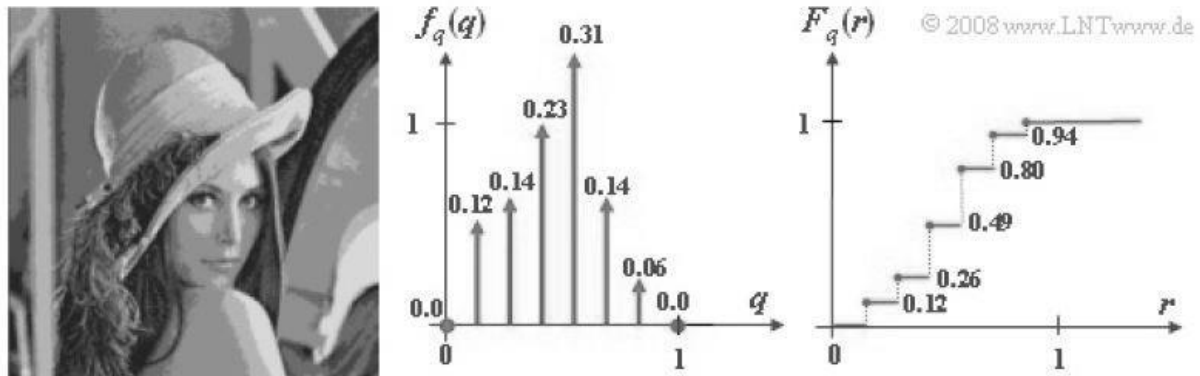


Abbildung 22: Lena - WDF  $f_q(q)$  - Verteilungsfunktion  $F_q(r)$

Die dazugehörige WDF  $f_q(q)$  setzt sich allgemein aus  $M = 8$  Diracfunktionen zusammen, wobei bei der hier gewählten Quantisierung den möglichen Graustufen die Werte  $q_\mu = (\mu - 1)/7$  mit  $\mu = 1, 2, \dots, 8$  zugeordnet sind. Die Gewichte der Diracfunktionen kann man aus der WDF  $f_x(x)$  des Originalbildes berechnen. Man erhält:

$$p_\mu = \Pr(q = q_\mu) = \Pr\left(\frac{2\mu - 3}{14} < x \leq \frac{2\mu - 1}{3}\right) = \int_{(2\mu-3)/14}^{(2\mu-1)/14} f_x(x) dx$$

wobei für die beiden undefinierten Randbereiche ( $x < 0$  bzw.  $x > 1$ ) jeweils  $f_x(x) = 0$  zu setzen ist. Da im Originalbild die Graustufen  $x \approx 0$  bzw.  $x \approx 1$  weitgehend fehlen, sind die Wahrscheinlichkeiten  $p_1 \approx p_8 \approx 0$ , so dass in der WDF tatsächlich nur sechs Diracfunktionen sichtbar sind. Die beiden fehlenden Diracfunktionen bei 0 und 1 sind im Bild durch Punkte markiert. Die Verteilungsfunktion  $F_q(r)$  in der rechten Grafik weist entsprechend dem oben Gesagten Unstetigkeitsstellen auf, bei denen jeweils der rechtsseitige Grenzwert gültig ist.

### 3.3 Erwartungswerte und Momente

#### Berechnung als Scharmittelwert

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) bietet weitreichende Informationen über die betrachtete Zufallsgröße. Die so genannten *Erwartungswerte* und *Momente* liefern nur reduzierte Informationen. Für diskrete Zufallsgrößen wurden deren Berechnungsmöglichkeiten bereits in Kapitel 2.2 angegeben. Nun werden diese Beschreibungsgrößen allgemeiner und im Zusammenhang mit der WDF betrachtet.

**Definition:** Der **Erwartungswert** bezüglich einer beliebigen Gewichtungsfunktion  $g(x)$  kann mit der WDF  $f_x(x)$  in folgender Weise berechnet werden:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x) dx \tag{56}$$

Setzt man in diese Gleichung für  $g(x) = x^k$  ein, so erhält man das **Moment  $k$ -ter Ordnung**:

$$m_k = E[x^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_x(x) dx \quad (57)$$

Aus dieser Gleichung folgt mit  $k = 1$  für den linearen Mittelwert, der in Zusammenhang mit Signalen auch als der **Gleichanteil** bezeichnet wird:

$$m_1 = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x) dx \quad (58)$$

Analog gilt mit  $k = 2$  für den quadratischen Mittelwert:

$$m_2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_x(x) dx \quad (59)$$

Diese Größe kennzeichnet die (auf den Einheitswiderstand  $1\Omega$  bezogene) **Signalleistung**. Bezeichnet  $x$  beispielsweise eine Spannung, so hat  $m_2$  die Einheit „ $V^2$ “.

Bei einer diskreten,  $M$ -stufigen Zufallsgröße erhält man auch mit den hier angegebenen Formeln wieder die bereits in *Kapitel 2.2* angegebenen Gleichungen (Berechnung als Scharmittelwert):

Hierbei ist berücksichtigt, dass das Integral über die Diracfunktion  $\delta(x)$  gleich 1 ist.

$$m_1 = \sum_{\mu=1}^M p_\mu \cdot x_\mu \quad (60)$$

$$m_2 = \sum_{\mu=1}^M p_\mu \cdot x_\mu^2 \quad (61)$$

### Zentralmomente

Eine besonders große Bedeutung haben in der Statistik die **Zentralmomente**, die im Gegensatz zu den herkömmlichen Momenten jeweils auf den Mittelwert  $m_1$  bezogen sind:

$$\mu_k = E[(x - m_1)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k \cdot f_x(x) dx \quad (62)$$

Die zentrierten und die nichtzentrierten Momente  $\mu_k$  bzw.  $m_k$  – können direkt ineinander umgerechnet werden. Dabei gilt:

$$\mu_k = \sum_{\kappa=0}^k \binom{k}{\kappa} \cdot m_\kappa \cdot (-m_1)^{k-\kappa} \quad (63)$$

$$m_k = \sum_{\kappa=0}^k \binom{k}{\kappa} \cdot \mu_\kappa \cdot (m_1)^{k-\kappa} \quad (64)$$

Die formalen Größen  $m_0$  und  $\mu_0$  ergeben sich nach den allgemein gültigen Gleichungen (siehe letzte Seite) jeweils zu 1. Für das Zentralmoment erster Ordnung gilt nach obiger Definition stets  $\mu_1 = 0$ .



**Beispiel:** Alle Momente  $m_k$  einer binären Zufallsgröße mit den Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(0) = 1-p$  und  $\Pr(1) = p$  sind gleich  $p$ . Mit obigen Gleichungen erhält man dann für die ersten Zentralmomente:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = p - p^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3 \cdot m_2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_1^3 = p - 3 \cdot p^2 + 2 \cdot p^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4 \cdot m_3 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2 \cdot m_1^2 - 3 \cdot m_1^4 = p - 4 \cdot p^2 + 6 \cdot p^3 - 3 \cdot p^4$$

### 3.4 Gleichverteilte Zufallsgröße

#### Allgemeine Beschreibung und Definition

**Definition:** Eine Zufallsgröße  $x$  nennt man **gleichverteilt**, wenn sie nur Werte in einem Bereich von  $x_{\min}$  bis  $x_{\max}$  annehmen kann, und jeder Wert innerhalb dieses Intervalls gleichwahrscheinlich ist.

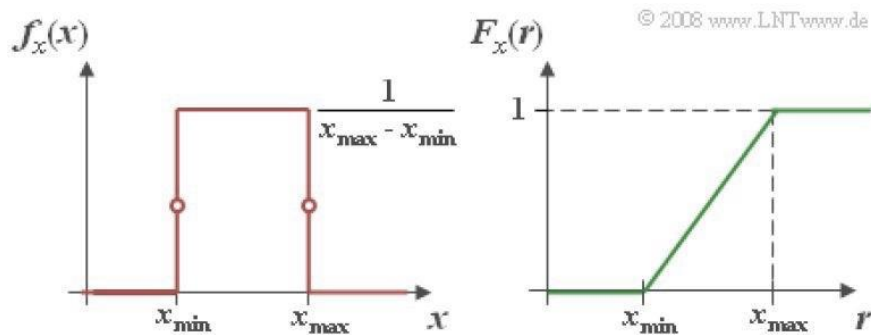


Abbildung 23: WDF  $f_x(x)$  - Verteilungsfunktion  $F_x(r)$

Obiges Bild zeigt links die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) und rechts die Verteilungsfunktion (VTF) einer gleichverteilten Zufallsgröße  $x$ . Daraus können folgende **Eigenschaften** abgeleitet werden:

- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_x(x)$  besitzt im Bereich von  $x_{\min}$  bis  $x_{\max}$  den konstanten Wert  $1/(x_{\max} - x_{\min})$ , wobei an den beiden Grenzstellen für  $f_x(x)$  jeweils nur der halbe Wert – also der Mittelwert zwischen links- und rechtsseitigem Grenzwert – zu setzen ist.
- Die Verteilungsfunktion  $F_x(r)$  steigt im Bereich von  $x_{\min}$  bis  $x_{\max}$  linear von 0 auf 1 an.
- Mittelwert und Streuung haben bei der Gleichverteilung folgende Werte:

$$m_1 = \frac{(x_{\max} + x_{\min})}{2} \quad (65)$$

$$\sigma = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2\sqrt{3}} \quad (66)$$

- Bei symmetrischer WDF ( $x_{\max} = -x_{\min}$ ) erhält man als Sonderfall  $m_1 = 0$  und  $\sigma_2 = \frac{x_{\max}^2}{3}$ .

**Beispiel:** Nachfolgend sehen Sie zwei Signalverläufe mit gleichförmiger Amplitudenverteilung. Im linken Bild ist statistische Unabhängigkeit der einzelnen Abtastwerte vorausgesetzt, das heißt,  $x_v$  kann alle Werte zwischen  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen, und zwar unabhängig davon, welche Werte in der Vergangenheit ( $x_{v-1}, x_{v-2}, \dots$ ) aufgetreten sind. Beim rechts dargestellten Sägezahnsignal  $y(t)$  ist diese Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Signalwerte nicht mehr gegeben.

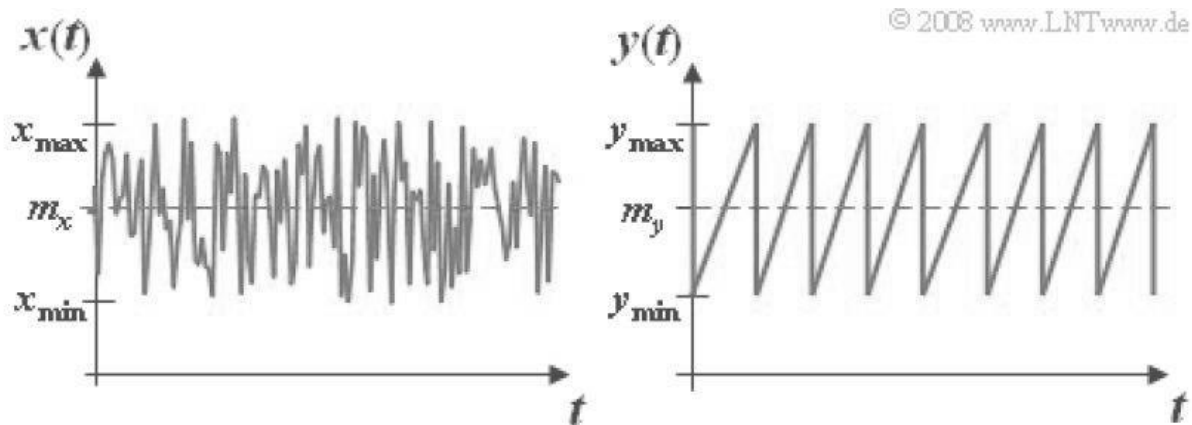


Abbildung 24: statistisch abhängige Funktion  $y(t)$  und statistisch unabhängige Funktion  $x(t)$

### Bedeutung der Gleichverteilung für die Nachrichtentechnik

Hier sind unter anderen, folgenden Punkte zu nennen:

- Bei der Beschreibung und Modellierung von nachrichtentechnischen Systemen sind gleichverteilte Zufallsgrößen eher die Ausnahme. Ein Beispiel für eine solche Zufallsgröße ist die **Phase** bei kreissymmetrischen Störungen, wie sie z. B. bei *Quadraturmodulationsverfahren* auftreten.
- Auch in der *Bildverarbeitung* und *Bildcodierung* wird oft vereinfachend mit der Gleichverteilung anstelle der tatsächlichen, meist sehr viel komplizierteren Verteilung des Originalbildes gerechnet, da der Unterschied des Informationsgehaltes zwischen einem **natürlichen Bild** und dem auf der Gleichverteilung basierenden Modell relativ gering ist.
- Die Bedeutung gleichverteilter Zufallsgrößen für die Informations- und Kommunikationstechnik – insbesondere für die Simulation nachrichtentechnischer Systeme – ist darauf zurückzuführen, dass entsprechende **Zufallsgeneratoren** relativ einfach zu realisieren sind, und andere Verteilungen sich daraus leicht ableiten lassen. Mit dem nachfolgend genannten Berechnungstool können Sie sich unter anderem die Kenngrößen der Gleichverteilung für beliebige  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  anzeigen lassen:  
Dieses Tool finden Sie im „LNTwww“.



### 3.5 Gaußverteilte Zufallsgröße

#### Allgemeine Beschreibung

Zufallsgrößen mit **Gaußscher Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** – diese Bezeichnung geht auf den Mathematiker, Physiker und Astronomen Carl Friedrich Gauß zurück – sind wirklichkeitsnahe Modelle für viele physikalische Größen und haben daher auch für die Nachrichtentechnik eine große Bedeutung. Dies hat mehrere Gründe:

- Nach dem zentralen Grenzwertsatz besitzt jede Linearkombination statistischer Größen, z. B.

$$x = \sum_{i=1}^I x_i$$

im Grenzfall ( $I \rightarrow \infty$ ) eine Gaußsche WDF, so lange die einzelnen Komponenten keine statistischen Bindungen besitzen. Dies gilt (nahezu) für alle Dichtefunktionen der einzelnen Summanden  $x_i$ .

- Viele Rauschprozesse erfüllen genau diese Voraussetzung, das heißt, sie setzen sich additiv aus einer sehr großen Anzahl unabhängiger Einzelbeiträge zusammen, so dass ihre Musterfunktionen (Rauschsignale) eine Gaußsche Amplitudenverteilung aufweisen.
- Legt man ein gaußverteiltes Signal zur spektralen Formung an ein lineares Filter an, so genügt das Ausgangssignal ebenfalls der Gaußverteilung. Es ändern sich nur die Verteilungsparameter wie Mittelwert und Streuung sowie die inneren statistischen Bindungen der Abtastwerte.

**Beispiel:** Das Bild zeigt links ein Gaußsches Zufallssignal  $x_1(t)$  und rechts ein gleichverteiltes Signal  $x_2(t)$  mit gleichem Mittelwert  $m_1$  und gleicher Streuung  $\sigma$ . Man erkennt, dass bei der Gaußverteilung im Gegensatz zur Gleichverteilung beliebig große und beliebig kleine Amplitudenwerte auftreten können, auch wenn diese sehr unwahrscheinlich sind.

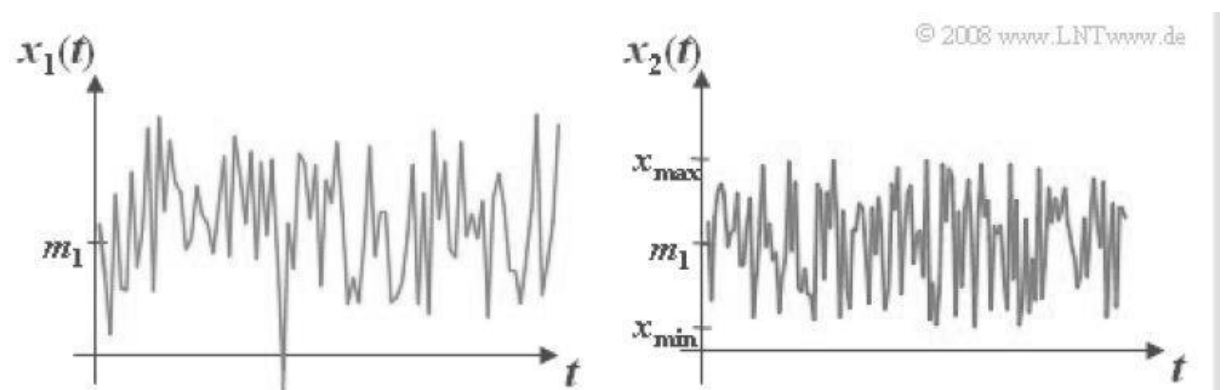


Abbildung 25: gaußverteiltes Signal  $x_1(t)$  und gleichverteiltes Signal  $x_2(t)$

Wahrscheinlichkeitsdichte- und Verteilungsfunktion

Die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** einer gaußverteilten Zufallsgröße lautet allgemein:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}} \tag{67}$$

Die Parameter einer Gaußschen WDF sind der Mittelwert  $m_1$  und die Streuung  $\sigma$ . Aus der linken unteren Darstellung geht hervor, dass die Streuung  $\sigma$  als der Abstand von Maximalwert und Wendepunkt aus der glockenförmigen WDF  $f_x(x)$  auch grafisch ermittelt werden kann. Ist  $m_1 = 0$  und  $\sigma = 1$ , so spricht man oft auch von der **Normalverteilung**.

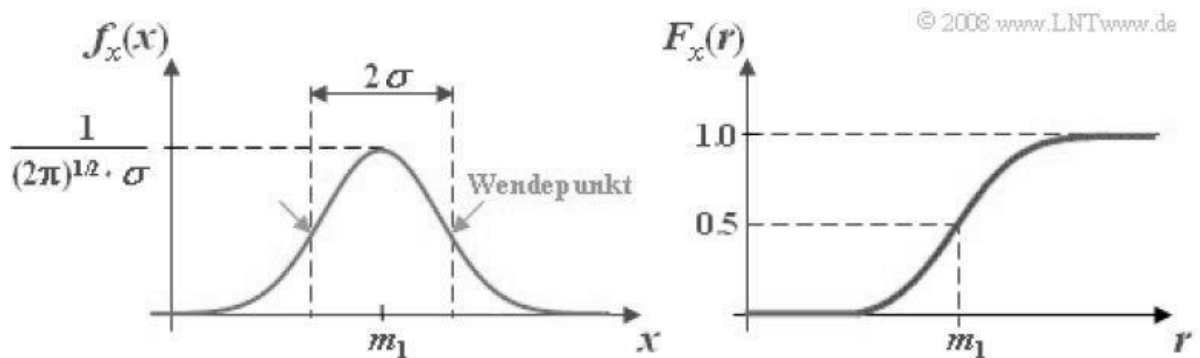


Abbildung 26: Gaußsche Normalverteilung

Die **Verteilungsfunktion**  $F_x(r)$  einer gaußverteilten Zufallsgröße ist im rechten Bild dargestellt; diese ist punktsymmetrisch um den Mittelwert  $m_1$ . Durch Integration über die Gaußsche WDF erhält man:

$$F_x(r) = \Phi\left(\frac{r - m_1}{\sigma}\right) \text{ mit } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{68}$$

Man bezeichnet  $\Phi(x)$  als das **Gaußsche Fehlerintegral**. Dessen Funktionsverlauf ist analytisch nicht berechenbar und muss aus Tabellen entnommen werden.  $\Phi(x)$  kann durch eine Taylorreihe angenähert oder aber aus der in Programmbibliotheken oft vorhandenen Funktion „erf(x)“ berechnet werden.

Überschreitungswahrscheinlichkeit

Bei der Untersuchung digitaler Übertragungssysteme muss oft die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass eine gaußverteilte Zufallsgröße  $x$  mit Varianz  $\sigma^2$  einen vorgegebenen Wert  $x_0$  überschreitet. Für diese Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\Pr(x > x_0) = Q\left(\frac{x_0}{\sigma}\right) \tag{69}$$

Hierbei bezeichnet  $Q(x) = 1 - \Phi(x)$  die Komplementärfunktion zu  $\Phi(x)$ ; man nennt diese Funktion das **Komplementäre Gaußsche Fehlerintegral** und es gilt folgende Berechnungsvorschrift:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \Phi(x) \tag{70}$$

Auch dieses Integral kann analytisch nicht gelöst werden und muss aus Tabellen entnommen werden. In Bibliotheken findet man häufiger die Funktion „erfc(x)“, die mit  $Q(x)$  in einfachem Zusammenhang steht:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (71)$$

Speziell für größere Werte von  $x$  – also für kleine Fehlerwahrscheinlichkeiten – liefern die nachfolgend angegebenen Schranken eine brauchbare Abschätzung für das Komplementäre Gaußsche Fehlerintegral.  $Q_o(x)$  bezeichnet hierbei eine obere und  $Q_u(x)$  eine untere Schranke:

$$Q_o(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}, \quad Q_u(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot x} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} = Q_o(x) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (72)$$

Das nachfolgende Bild zeigt die  $Q$ -Funktion in logarithmischer Darstellung für lineare (obere Achse) und logarithmische Abszissenwerte (untere Achse). Die obere Schranke (Kreise) ist ab ca.  $x = 1$  brauchbar, die untere Schranke (Rauten) ab etwa  $x = 2$ . Für  $x$ -Werte  $\geq 4$  sind beide Schranken innerhalb der Zeichengenauigkeit vom tatsächlichen Funktionsverlauf nicht mehr zu unterscheiden.

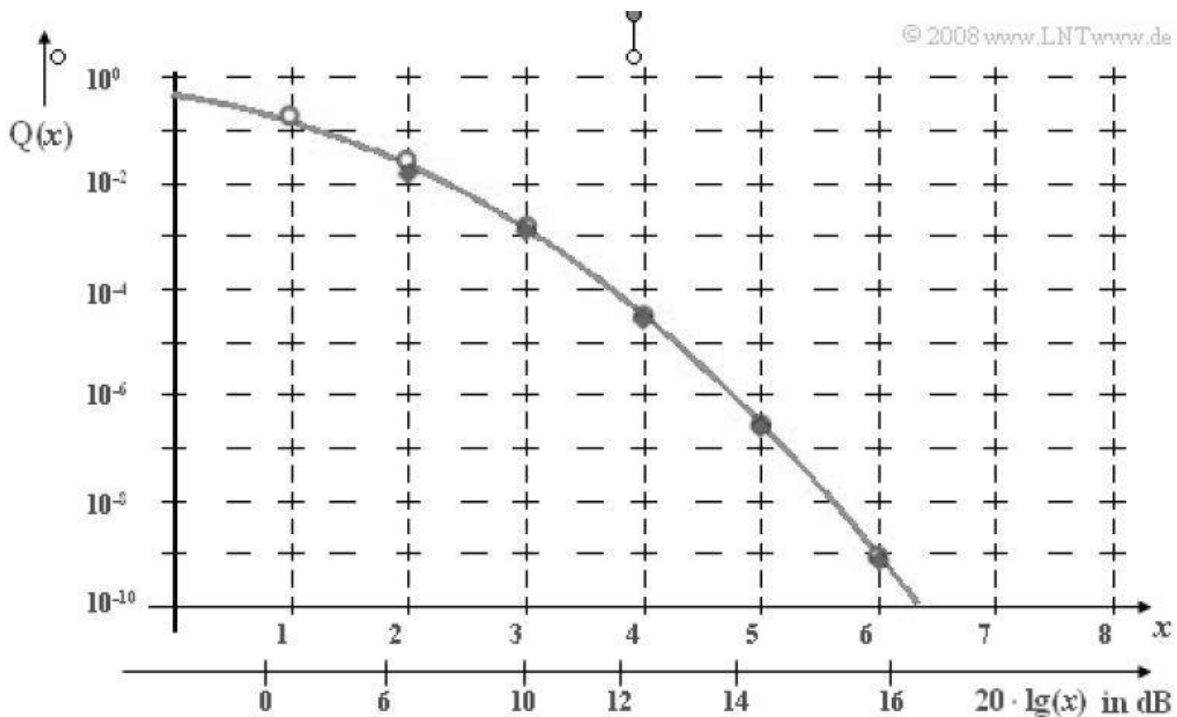


Abbildung 27: Komplementäres Gaußsches Fehlerintegral

## Zentralmomente und Momente

Die **Kenngößen der Gaußverteilung** weisen einige charakteristische Eigenschaften auf, nämlich:

- Die Zentralmomente  $\mu_k$  (identisch mit den Momenten  $m_k$  der äquivalenten mittelwertfreien Zufallsgröße  $x - m_1$ ) sind bei der Gaußschen WDF wie auch bei der Gleichverteilung aufgrund der symmetrischen Verhältnisse für ungerade Werte von  $k$  identisch 0. Das Zentralmoment  $\mu_2$  ist definitionsgemäß gleich  $\sigma^2$ .
- Alle höheren Zentralmomente mit geradzahligem Wert von  $k$  lassen sich bei gaußförmiger WDF – wohlgemerkt: ausschließlich bei dieser – durch die Varianz  $\sigma^2$  ausdrücken:  
 $\mu_k = (k - 1) \cdot (k - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 \cdot \sigma^k$  (falls  $k$  gerade).
- Daraus können die nichtzentrierten Momente  $m_k$  mit nachfolgender Gleichung bestimmt werden:

$$m_k = \sum_{\kappa=0}^k \binom{k}{\kappa} \cdot \mu_{\kappa} \cdot m_1^{k-\kappa}. \quad (73)$$

Es ist anzumerken, dass diese Gleichung allgemein gilt, also für beliebige Verteilungen.

- Aus der oberen Gleichung folgt direkt  $\mu_4 = 3\sigma^4$  und daraus für die Kurtosis der Wert  $K=3$ . Den Wert  $K-3$  bezeichnet man deshalb auch häufig als die **Gaußabweichung**. Ist diese negativ, so erfolgt der WDF-Abfall schneller als bei der Gaußverteilung. Beispielsweise hat bei einer Gleichverteilung die Gaußabweichung stets den Zahlenwert  $1.8 - 3 = -1.2$

**Beispiel:** Die ersten Zentralmomente einer gaußverteilten Zufallsgröße mit Streuung  $\sigma = 1/2$  lauten:

$$\mu_2 = \frac{1}{4}, \mu_4 = \frac{3}{16}, \mu_6 = \frac{15}{64}, \mu_8 = \frac{105}{256}$$

Alle Zentralmomente mit ungeradem Index sind identisch 0.

### 3.6 Vorbereitungsaufgaben

#### A3.1: $\cos^2$ - und Dirac-WDF (optional)

Die Grafik zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (WDF) zweier Zufallsgrößen  $x$  und  $y$ .

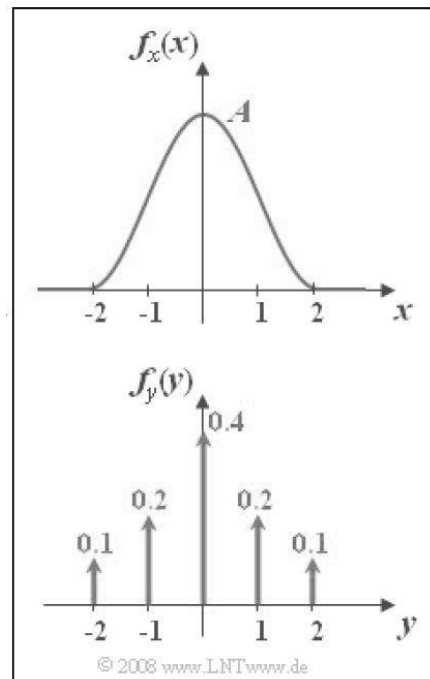
Die WDF der Zufallsgröße  $x$  lautet in analytischer Form:

$$f_x(x) = \begin{cases} A \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) & \text{für } -2 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dagegen besteht die WDF der Zufallsgröße  $y$  aus insgesamt fünf Diracfunktionen mit den im Bild unten angegebenen Gewichten. Betrachtet man diese Zufallsgrößen als Momentanwerte zweier Zufallssignale  $x(t)$  und  $y(t)$ , so ist offensichtlich, dass die beiden Signale jeweils auf den Wertebereich  $\pm 2$  „amplitudenbegrenzt“ sind. Beträgsmäßig größere Werte kommen nicht vor.

*Hinweis:* Die Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Lehrstoff von **Kapitel 2.1** und **Kapitel 3.1**. Es gilt folgende Gleichung:

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax)$$



- a) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen uneingeschränkt zu?
- Die Zufallsgröße  $x$  ist wertkontinuierlich.
  - Die Zufallsgröße  $y$  ist wertdiskret.
  - Die Zufallsgröße  $y$  ist gleichzeitig zeitdiskret.
  - Die WDF liefert keine Aussage bzgl. „zeitdiskret/zeitkontinuierlich“.
- b) Berechnen Sie den Parameter  $A$  der WDF  $f_x(x)$ .

$$A =$$

- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße  $x$  exakt gleich 0 ist?

$$Pr(x = 0) =$$

- d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $x$  größer als 0 ist?

$$Pr(x > 0) =$$

- e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $y$  größer als 0 ist?

$$Pr(y > 0) =$$

- f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $y$  betragsmäßig kleiner als 1 ist?

$$Pr(|y| < 1) =$$

- g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $x$  betragsmäßig kleiner als 1 ist?

$$Pr(|x| < 1) =$$

### 3.7 Versuchsdurchführung

#### Aufgaben zu Kapitel 3.

Zu Kapitel 3 sind folgende Aufgaben während des Praktikums zu bearbeiten.

- Z3.2: Zusammenhang WDF/VTF
- Z3.5: Antennengebiete (optional)
- A3.6: Verrauschtes Gleichsignal
- Z3.6: Prüfungskorrektur

### Musterlösungen

#### Musterlösung zur Vorbereitungsaufgabe Z1.1

- a) Da die Wahrscheinlichkeiten von  $\pm 1$  gleich sind und  $\Pr(Y = 0) = 2 \cdot \Pr(Y = 1)$  gilt, erhält man:

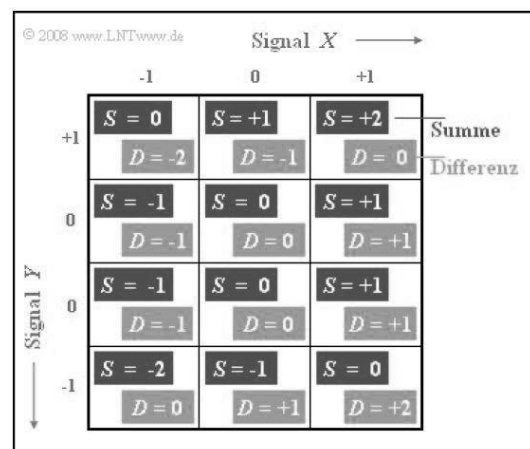
$$\begin{aligned} \Pr(Y = 1) + \Pr(Y = 0) + \Pr(Y = -1) &= 1 \\ \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \Pr(Y = 0) + \Pr(Y = 0) + \frac{1}{2} \cdot \Pr(Y = 0) &= 1 \\ \rightarrow \Pr(Y = 0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- b)  $S$  kann insgesamt  $I = 5$  Werte annehmen, nämlich  $-2, -1, 0, +1$  und  $+2$ .

- c) Da  $Y$  nicht gleichverteilt ist, kann die klassische Wahrscheinlichkeits-Definition hier eigentlich nicht angewandt werden. Teilt man  $Y$  jedoch gemäß dem Bild in vier Bereiche auf, wobei man zwei der Bereiche dem Ereignis  $Y = 0$  zuordnet, so kann man die klassische Definition dennoch anwenden. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} \Pr(S = 0) &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ \Pr(S = +1) &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ \Pr(S = -1) &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ \Pr(S = +2) &= \frac{1}{12} \\ \Pr(S = -2) &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- d) Aus obiger Darstellung ist auch ersichtlich, dass das Differenzsignal  $D$  und das Summensignal  $S$  die gleichen Werte mit gleichen Wahrscheinlichkeiten annehmen. Dies war zu erwarten, da  $\Pr(Y = 1)$  gleich  $\Pr(Y = -1)$  vorgegeben ist.



#### Musterlösung zur Vorbereitungsaufgabe Z1.2

Für die weiteren Mengen gilt:

$$D = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = [\{1,2,3\} \cap \{1,2,4,5,7,8\}] \cup [\{4,5,6,7,8,9\} \cap \{3,6,9\}] = \{1,2,6,9\}$$



$$E = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (B \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = D = \{1,2,6,9\}$$

$$F = (A \cup C) \cap \bar{B} = \{1,2,3,5,6,7,8\} \cap \{1,2,4,5,7,8\} = \{1,2,5,7,8\}$$

$$H = (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C) = (\bar{A} \cap \bar{C}) = \{4,9\}$$

a)

- (a1) ist falsch:  $A$  und  $B$  beinhalten jeweils die „3“.
- (a2) ist richtig: Es liegt kein gemeinsames Element vor.
- (a3) ist falsch:  $B$  und  $C$  beinhalten jeweils die „6“.

b)

- (b1) ist falsch: Es fehlt die „4“.
- (b2) ist richtig:  $A \cap B \cap C = \emptyset$  (es gibt keine Ziffer, die gleichzeitig in  $A$ ,  $B$  und  $C$  enthalten ist).

Bildung der Komplementärmenge:

$$\overline{A \cap B \cap C} = \emptyset = G$$

c)

- (c1) ist richtig: Die Mengen  $D$  und  $E$  enthalten genau die gleichen Elemente und somit auch deren Komplementärmenge.
- (c2) ist richtig: Allgemein, das heißt für beliebige  $X$  und  $B$  gilt:  

$$X \cap \bar{B} \subset \bar{B} \Rightarrow \text{Mit } X = A \cup C \text{ folgt somit } F \subset \bar{B}$$
- (c3) ist falsch: Beispielsweise sind  $B$  und  $C$  nicht disjunkt.
- (c4) ist richtig:  $A = \{1,2,3\}$ ,  $C = \{5,6,7,8\}$ ,  $H = \{4,9\}$

### Musterlösung zur Vorbereitungsaufgabe Z1.5

a) Da die beiden Teilgeräte unabhängig voneinander ausfallen, gilt mengentheoretisch:

$$\Pr(G \text{ fällt aus}) = \Pr(T_1 \text{ fällt aus}) \cdot \Pr(T_2 \text{ fällt aus})$$

Da die Teile  $T_1$  und  $T_2$  baugleich sind, fallen sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $p_T$  aus.

$$\text{Daraus folgt: } p_G = p_T^2 \text{ bzw. } p_T = \sqrt{p_G} \leq \sqrt{0.0004} = 0.02$$

b) Dieses Ergebnis ist einfacher über das Komplementärereignis zu bestimmen:

$$\Pr(T_1 \text{ funktioniert}) = \Pr(B_1 \text{ funktioniert} \cap B_2 \text{ funktioniert} \cap B_3 \text{ funktioniert})$$

$$\Rightarrow 1 - p_T = (1 - p_A)^3 \Rightarrow 1 - p_T = (0.9)^3 = 0.729 \Rightarrow p_T = 27.1\%$$

c) Mit  $p_A = 0.01$  erhält man  $p_T = 2.97\%$ . Allgemein gilt die Näherung:  $p_T \approx n \cdot p_A (= 3\%)$ .d) Mit der Näherung aus (c) folgt direkt  $n = 5$ . Bei größerem  $p_A$  müsste man wie folgt vorgehen:

$$0.996^n \geq 0.98 \Rightarrow n \leq \frac{\log(0.98)}{\log(0.996)} = 5.0406 \approx 5$$

### Musterlösung zur Vorbereitungsaufgabe A2.1

- a) Man sollte dieser Nachfrage zumindest glauben, dass Kandidat  $A$  wahrscheinlich gewinnt.  
 b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nachfrage ( $h_A$ ) vom endgültigen Ergebnis ( $p_A$ ) betragsmäßig um mehr als 2% abweicht, ist nach dem Bernouillischen Gesetz der großen Zahlen mit  $N = 2000$ :

$$\Pr(|h_A - p_A| \geq 0.02) \leq \frac{1}{4 \cdot 2000 \cdot 0.02^2} = 0.3125.$$

Diese Wahrscheinlichkeit beinhaltet die beiden Fälle, dass  $p_A \leq 46\%$  und  $p_A \geq 50\%$  ist. Nur im letzten Fall gibt es keine Stichwahl:

$$\Pr(\text{keine Stichwahl}) \leq 15,6\%$$

- c) Mit  $\varepsilon = 4\%$  (ergibt sich aus 0.26–0.22) liefert das Gesetz der großen Zahlen:

$$\Pr(|h_C - p_C| \geq 0.04) \leq \frac{1}{4 \cdot 2000 \cdot 0.04^2} = 0.078.$$

Daraus folgt: Die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat  $C$  mindestens 26% der Stimmen erhält, ist nicht größer als 3.9%.

Da  $p_A = 0.48$  fest vorausgesetzt wurde, gilt in diesem Fall gleichzeitig  $p_B \leq 0.26$ . Da es sich hier um kontinuierliche Zufallsgrößen handelt, sind  $(p_C \geq 0.26; p_B \leq 0.26)$  und  $(p_C > 0.26; p_B < 0.26)$  gleich. Damit ist die Wahrscheinlichkeit  $\Pr(C \text{ erreicht die Stichwahl})$  ebenfalls auf 3.9% beschränkt.

### Musterlösung zur Vorbereitungsaufgabe Z2.2

- a) Aufgrund der Symmetrie gilt:

$$m_a = 0; \quad m_{2a} = 0.5 \cdot (-1)^2 + 0.5 \cdot (1)^2 = 1$$

Daraus erhält man mit dem Satz von Steiner:

$$\sigma_a^2 = \sqrt{1 - 0^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_a = 1$$

- b) Allgemein gilt für das Moment  $k$ -ter Ordnung:

$$m_k = (1 - p) \cdot 0^k + p \cdot 1^k = p$$

Daraus folgt mit  $p = 1/4$ :

$$m_b = m_{2b} = p, \quad \sigma_b = \sqrt{p \cdot (1 - p)} = 0.433$$

- c) Für die Zufallsgröße  $c$  gilt:

$$m_c = 0 \text{ (symmetrisch um 0)}, \quad m_{2c} = \frac{1}{4} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot (1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_c = \sqrt{(1/2)} = 0.707$$

- d) Nach den allgemeinen Regeln für Erwartungswerte gilt mit  $p = 0.25$ :

$$\begin{aligned} m_d &= E[a - 2b + c] = E[a] - 2 \cdot E[b] + E[c] \\ &= m_a - 2 \cdot m_b + m_c = 0 - 2 \cdot p + 0 = -0.5 \end{aligned}$$

- e) Analog zu Punkt d) erhält man für den quadratischen Mittelwert:

$$m_d = E[(a - 2b + c)^2] = E[a^2] - 4 \cdot E[b^2] + E[c^2]$$

$$-4 \cdot E[a \cdot b] + 2 \cdot E[a \cdot c] - 4E[b \cdot c]$$

Da aber  $a$  und  $b$  statistisch voneinander unabhängig sind, gilt auch:

$$E[a \cdot b] = E[a] \cdot E[b] = m_a \cdot m_b = 0, \text{ da } m_a = 0$$

Gleiches gilt für die anderen gemischten Terme. Daher erhält man mit  $p = 0.25$ :

$$m_{2d} = m_{2a} + 4 \cdot m_{2b} + m_{2c} = 1 + 4 \cdot p + 0.5 = 2.5$$

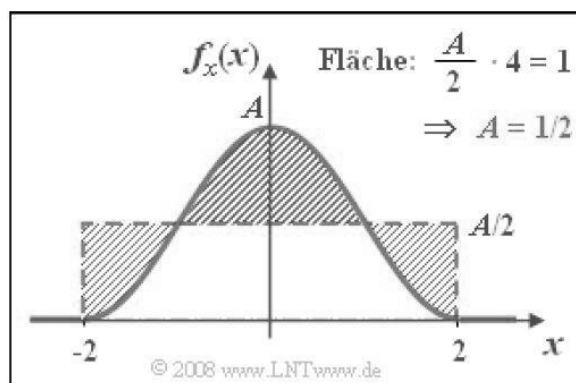
f) Für allgemeines  $p$  bzw. für  $p = 0.25$  ergibt sich:

$$\sigma_d^2 = 1.5 + 4 \cdot p - 4 \cdot p^2 = 2.25 \Rightarrow \sigma_d = 1.5$$

Die maximale Varianz ergäbe sich für  $p=0.5$  zu  $\sigma_d^2 = 2.5$ .

### Musterlösung zur Vorbereitungsaufgabe A3.1

- Richtig sind die beiden ersten Aussagen:  $x$  ist wertkontinuierlich und  $y$  wertdiskret ( $M = 5$ ). Die WDF liefert keine Aussagen darüber, ob eine Zufallsgröße zeitdiskret oder zeitkontinuierlich ist.
- Die Fläche unter der WDF muss 1 ergeben. Durch einfache geometrische Überlegungen kommt man zum Ergebnis  $A = 0.5$ .



- Die Wahrscheinlichkeit, dass die wertkontinuierliche Zufallsgröße  $x$  einen festen Wert  $x_0$  annimmt, ist stets vernachlässigbar klein. Daraus folgt  $\Pr(x = 0) = 0$ . Für die wertdiskrete Zufallsgröße  $y$  dagegen, gilt gemäß der Angabe:  $\Pr(y = 0) = 0.4$  (Gewicht der Diracfunktion bei  $y = 0$ ).
- Wegen  $\Pr(x = 0)$  und der WDF-Symmetrie ergibt sich  $\Pr(x > 0) = 0.5$ .
- Da  $y$  eine diskrete Zufallsgröße ist, addieren sich die Wahrscheinlichkeiten für  $y = 1$  und  $y = 2$ :  
 $\Pr(y > 0) = \Pr(y = 1) + \Pr(y = 2) = 0.3$
- Das Ereignis „ $|y| < 1$ “ ist hier identisch mit „ $y = 0$ “. Damit erhält man:  
 $\Pr(|y| < 1) = \Pr(y = 0) = 0.4$
- Die Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Integral von  $-1$  bis  $+1$  über die WDF der kontinuierlichen Zufallsgröße  $x$ . Unter Berücksichtigung der Symmetrie und der angegebenen Gleichung erhält man:

$$\Pr(|x| < 1) = 2 \int_0^1 \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \approx 0.818.$$







## Praktikum Nachrichtentechnik (LB)

# Versuch: Pulsmodulation ("PCM")

### Inhaltsverzeichnis

1 Eigenschaften von Digitalsystemen .....	3
2 Blockschaltbild und Signalverläufe.....	4
3 Signalabtastung und – rekonstruktion.....	8
4 Quantisierung und Signalstörabstand .....	13
5 Ungleichmäßige Quantisierung.....	17
6 PCM-Codierung .....	18
7 Versuchsdurchführung.....	19
8 Musterlösungen zu den Vorbereitungsaufgaben .....	32
9 Musterlösungen der Versuchsdurchführung .....	34

*Konzeption und Ausarbeitung:* Günter Söder (1999). Die Autoren der im Versuch verwendenden Lehrprogramme sind Erik Hogl, Günter Söder und Peter Werthan.

Überarbeitung und Digitalisierung: Johannes Krönung (2013)

**Vorbemerkungen:**

Dieser Praktikumsversuch behandelt die Pulsmodulation (PCM). Als Vorbereitung sollten Sie die theoretischen Grundlagen der nachfolgenden sechs Kapitel durcharbeiten und die mit "V" gekennzeichneten Vorbereitungsfragen beantworten.

**Hinweise zum Lerntutorial LNTwww:**

Die Anleitung ist zur Versuchsvorbereitung ausreichend. Mehr Informationen zum Thema finden Sie in Kapitel 4.1 des LNTwww-Buches *Modulationsverfahren*. Dort finden Sie auch einige passende Lernvideos (LV) und interaktive Multimedia-Elemente (IM):

- Pulsmodulation (LV)  
Teil 1: Prinzip der Pulsmodulation (Dauer 11:28)  
  
Teil 2: Abtastung und Signalrekonstruktion (Dauer 12:53)  
  
Teil 3: Quantisierung und erreichbares SNR (Dauer 22:20)
- Abtastung analoger Signale und Signalrekonstruktion (IM)

**Literaturhinweise:**

- [1] Hanik, N.: Vorlesungsmanuskript "Nachrichtentechnik 1 (LB)".
- [2] Hanik, N.: Vorlesungsmanuskript "Nachrichtentechnik 2 (LB)".
- [3] Mäusl, R.: "Digitale Modulationsverfahren". Heidelberg: Hüthig-Verlag, 1988.
- [4] Söder, G.: "Modellierung, Simulation und Optimierung von Nachrichtensystemen". Berlin: Springer-Verlag, 1993.

**Hinweise zur Programmbedienung:**

Die Durchführung des Versuchs findet an Personal Computern statt. Es werden jedoch keinerlei programmiertechnische, sondern lediglich mathematische sowie einige nachrichtentechnische Grundkenntnisse vorausgesetzt. Ansonsten genügt diese Anleitung.

Für die Versuchsdurchführung benötigen Sie den Menüpunkt Pulsmodulation (abgekürzt *pcm*) des Lehrsoftware Programmpakets LNTsim. Die Dateneingabe dieses Programms erfolgt weitgehend menü- und mausgesteuert, wobei standardmäßig die linke Maustaste zu betätigen ist. Durch Drücken der rechten Maustaste wird dagegen meist ein Eingabefenster geöffnet, das die Parameterwert-eingabe per Tastatur erlaubt.



# 1 Eigenschaften von Digitalsystemen

Die bis Mitte der 80er Jahre dominierenden analogen Nachrichtensysteme wurden mehr und mehr durch Digitalsysteme ersetzt. Alle in den letzten Jahren entstandenen Telekommunikationssysteme sind digital. Dafür gibt es mehrere Gründe:

- Durch die einheitliche Digitalübertragung von Sprach-, Bild- und Datensignalen kann ein sehr leistungsfähiges und flexibles Netz aufgebaut werden, das eine Reihe verschiedener Telekommunikationsdienste zur Verfügung stellt. Solche Digitalsysteme sind z.B. für das Festnetz ISDN (*Integrated Services Digital Network*), im Bereich des Mobilfunks GSM (*Global System for Mobile Communication*), UMTS (*Universal Mobile Telecommunications System*), LTE (*Long Term Evolution*) sowie beim Schnurlostelefon DECT (*Digital European Cordless Telephone*).
- Die Übertragung eines Datensignals bietet sich in digitaler Form an, da dieses selbst ein Digitalsignal ist. Dagegen muss für die digitale Übertragung eines Analsignals – z.B. eines Sprach- oder Bildsignals – dieses vorher "digitalisiert" werden, z.B. mittels der Pulscodemodulation mit den Verarbeitungsschritten Abtastung, Quantisierung und Codierung.
- Ein weiteres wichtiges Argument für den Einsatz der Digitaltechnik sind die heutigen Speichermedien und die Möglichkeit, eigentlich analoge Signale mittels Multimedia Anwendungen digital zu bearbeiten.
- Bei digitaler Übertragung kann der störende Einfluss von statistischen Störungen (z.B. dem unvermeidbaren thermischen Rauschen) vollständig eliminiert werden, solange diese Störung eine gewisse Schwelle nicht überschreitet. Deshalb ist im Allgemeinen mit einem Digitalsystem eine bessere Übertragungsqualität als bei Analogsystemen zu erzielen.
- Bei Digitalsignalübertragung können - eventuell zusätzlich zum Frequenzmultiplex (FDMA) - auch die Vorteile anderer Vielfachzugriffsverfahren wie beispielsweise Zeitmultiplex (TDMA), Codemultiplex (CDMA) und Raummultiplex (SDMA) genutzt werden.
- Für Digitalsignalübertragung sind einfache und sehr effiziente Datensicherungs- und Verschlüsselungsmechanismen bekannt. Durch die Anwendung von Quellen- und Kanal-codierverfahren und geeigneten Decodieralgorithmen beim Empfänger lässt sich die Übertragungsqualität zusätzlich steigern.
- Jedes Digitalsignal ist in gewissen Grenzen regenerierbar. Das bedeutet: Bei sehr langen Übertragungswegen (Weitverkehrssysteme) können in festen Abständen Regenerativverstärker eingesetzt werden, die quasi wie eine Kombination aus Digiteempfänger für den letzten Abschnitt und Sendeeinrichtung für den nächsten Abschnitt wirken. Damit lassen sich - bei gleicher Übertragungsqualität - deutlich größere Entfernungen als mit Analogsystemen überbrücken.

Diesen vielen Vorteilen stehen natürlich auch einige Nachteile gegenüber. Insbesondere bei der Übertragung von Sprach- und Bildsignalen mittels PCM ergeben sich aufgrund der Quantisierung irreversible Verfälschungen (vgl. Abschnitt 2).

## 2 Blockschaltbild und Signalverläufe

Wir betrachten in diesem Versuch mit der Pulsmodulation (PCM) ein sehr grundlegendes und bereits seit langem etabliertes digitales Übertragungsverfahren. Abbildung 1 zeigt das Blockschaltbild. In Abbildung 2 auf der nächsten Seite sind beispielhafte Signalverläufe dargestellt. Wie jedes Nachrichtenübertragungssystem kann auch das PCM-System in die Blöcke Sender (oben), Kanal (rechts) und Empfänger (unten) eingeteilt werden.

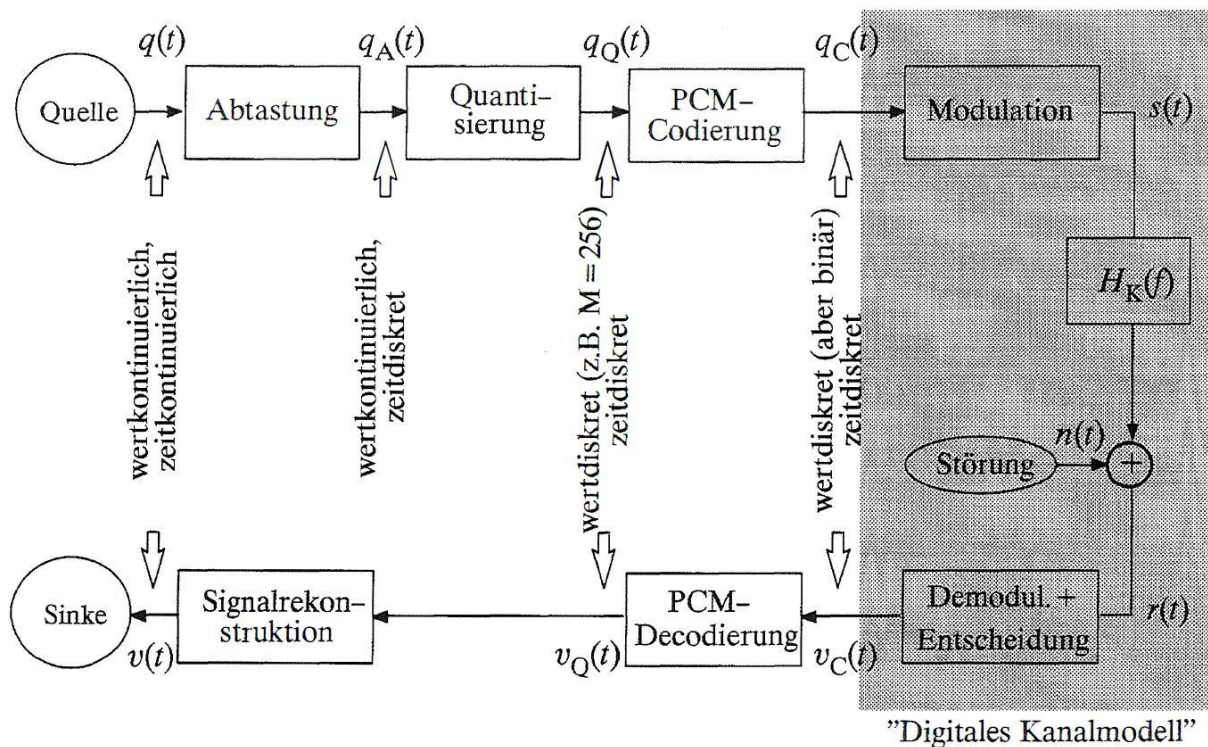
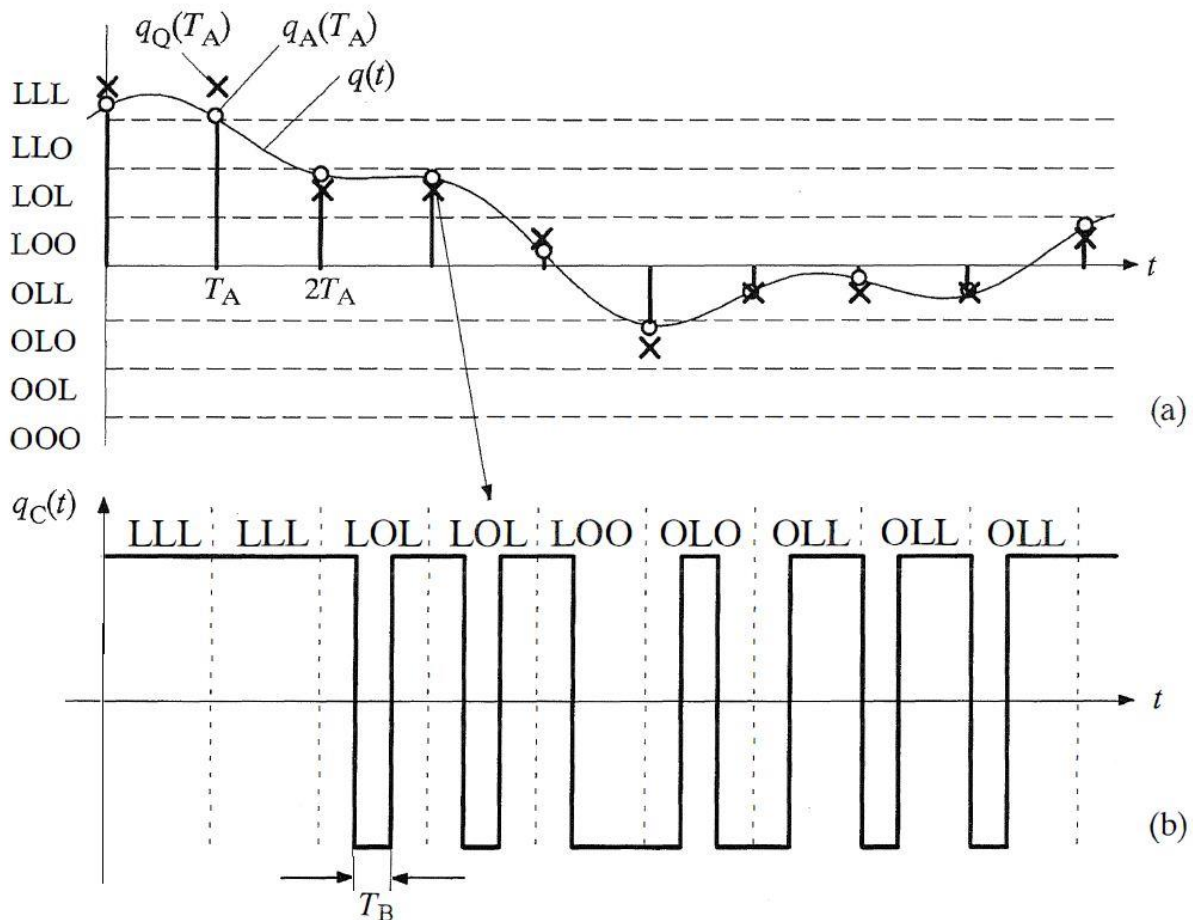


Abbildung 1: Blockschaltbild eines PCM-Übertragungssystems

Die Nachrichtenquelle gibt das analoge Quellensignal  $q(t)$  ab, das sowohl wert- als auch zeit-kontinuierlich ist (durchgezogener Kurvenverlauf in Abbildung 2a). Daraus entsteht durch Abtastung das weiterhin wertkontinuierliche, nun aber zeitdiskrete Signal  $q_A(t)$  entsprechend den Kreisen in Bild 2a. Die Abtastrate  $f_A = 1/T_A$  ist hierbei durch das Abtasttheorem (siehe Abschnitt 3) vorgegeben.

Im Block Quantisierung wird jeder Abtastwert  $q_A(v \cdot T_A)$  einem von  $M$  möglichen Quantisierungswerten zugeordnet, wobei man  $M$  als die Stufenzahl bezeichnet. Bei der Quantisierung teilt man den gesamten Wertebereich des Signals  $q(t)$  in  $M$  Intervalle auf und ordnet jedem Intervall einen Repräsentanten zu, z.B. den Intervallmittelwert.

In Abbildung 2(a) ist die Zuordnung der (mit Kreuzen markierten) Quantisierungswerte  $q_Q(v \cdot T_A)$  zu den als Kreise dargestellten Abtastwerten  $q_A(v \cdot T_A)$  für die Stufenzahl  $M = 8$  veranschaulicht. Die Intervalle sind hier alle gleich groß gewählt; man spricht dann von linearer Quantisierung. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Quantisierung zu nichtreversiblen Signalverfälschungen führt. Quantitativ werden diese Verzerrungen durch das *Quantisierungs-Signalrauschleistungsverhältnis*  $\rho_Q$  erfasst, welches in Abschnitt 4 berechnet wird. Bei linearer Quantisierung mit der Stufenzahl  $M$  - wie für Abbildung 2(a) zugrunde gelegt und einem sägezahnförmigen Nachrichtensignal gilt:  $\rho_Q = M^2$ .

Abbildung 2: Signalverläufe eines PCM-Übertragungssystems mit  $M = 8$ 

Häufig wählt man die Intervallbreite bei kleinen Amplitudenwerten kleiner als bei größerer Signalamplitude (*nichtlineare Quantisierung*). Die Signalverfälschung wird dann für kleine Signalwerte (leise Töne) geringer. Eine solche ungleichmäßige Quantisierung kann z.B. durch eine nichtlineare Kennlinie (*Kompondierung*) mit anschließender linearer Quantisierung realisiert werden. Natürlich muss dann beim Empfänger diese Verformung durch eine inverse Nichtlinearität (*Expander*) rückgängig gemacht werden.

Die quantisierten Abtastwerte  $q_Q(v \cdot T_A)$  sind wertdiskret, doch ist die Stufenzahl  $M$  meist sehr hoch. Im Block *Codierung* erfolgt nun eine Zuordnung der Abtastwerte zu Binärfolgen. Ist  $M$  eine Zweier-potenz, was für das Folgende meist vorausgesetzt wird, so kann jeder Wert durch  $N = \text{ld}(M)$  Binärsymbole (jeweils "O" oder "L") dargestellt werden. Hierbei kennzeichnet "ld" den Logarithmus zur Basis 2 (*Logarithmus dualis*).

Die Dauer  $T_B$  eines Rechteckimpulses ist nun um den Faktor  $N$  kleiner als das Abtastintervall  $T_A$ . Man bezeichnet  $T_B$  als die Bitdauer und den Kehrwert  $1/T_B$  als die *Bitrate* des Übertragungssystems mit der Einheit „bit/s“.

Die Zuordnung der quantisierten Abtastwerte zu Binärfolgen der Länge  $N$  kann auf verschiedene Weise erfolgen. Dem Bild 2b ist zum Beispiel der sogenannte *Dualcode* zugrunde gelegt. Bei diesem werden die  $M = 2^N$  Quantisierungsintervalle von 0 bis  $M - 1$  durchnummeriert und jedem Intervall die Binärdarstellung der Intervallnummer zugeordnet. Der im Versuch D5 beschriebene *Gray-Code* hat demgegenüber einige Vorteile.

Zur Übertragung des bipolaren (antipodischen) Binärsignals  $q_C(t)$  über den Kanal können alle aus der digitalen Übertragungstechnik bekannten Modulationsverfahren verwendet werden, zum Beispiel die

Basisbandsignalübertragung (vgl. Versuch "DSÜ") oder eine digitale Amplitudenmodulation (ASK, *Amplitude Shift Keying*), eine digitale Frequenzmodulation (FSK, *Frequency Shift Keying*) oder eine digitale Phasenmodulation (PSK, *Phase Shift Keying*).

Das Sendesignal  $s(t)$  ist im Allgemeinen wieder ein Analogsignal, allerdings derart geformt, dass einer der Signalparameter (z.B. Amplitude, Frequenz oder Phase) nur eine endliche Anzahl  $M$  verschiedener Werte annehmen kann. Bei der Übertragung über den Kanal – hier gekennzeichnet durch den Kanal­frequenzgang  $H_k(f)$  – treten eventuell (lineare) Verzerrungen auf, so dass  $r(t) \neq s(t)$  gilt. Außerdem beinhaltet das Empfangssignal  $r(t)$  stets noch einen additiven Störanteil  $n(t)$ , der zum Beispiel vom thermischen Rauschen herrührt.

Aufgabe des Demodulators ist - wie bei den analogen Modulationsverfahren auch - die Rücksetzung des empfangenen Signals  $r(t)$  in das Basisband. Bei Basisbandübertragung entfällt diese Funktionseinheit. Im Gegensatz zu analoger Übertragung folgt jedoch beim PCM-System mit dem Entscheider (Detektor) ein weiterer Block, der das binäre Empfangssignal  $v_c(t)$  liefert.

Sind die Verzerrungen und Störungen auf dem Übertragungskanal hinreichend klein, so sind die Signale  $v_c(t)$  und  $q_c(t)$  identisch. Stärkere Signalverformungen auf dem Kanal führen dagegen zu Bitfehlern. Ein solcher liegt vor, wenn  $v_c(v \cdot T_B) \neq q_c(v \cdot T_B)$  ist. Die Wahrscheinlichkeit  $p_B$  eines solchen Bitfehlers ist das entscheidende Gütekriterium aller Digitalsysteme.

Bei Systemuntersuchungen kann der in Abbildung 1 grau hinterlegte Block durch ein sog. *Digitales Kanalmodell* ersetzt werden, der entsprechend einer vorgebbaren Statistik Bitfehler generiert. Häufig verwendet man das Modell "statistisch unabhängige Fehler".

Betrachten wir nun die beiden weiteren Blöcke des Empfängers. Der Decoder hat die Aufgabe, die PCM-Codierung rückgängig zu machen. Das decodierte Signal  $v_q(t)$  ist somit wieder  $M$ -stufig und zeitdiskret. Bei fehlerfreier Übertragung, das heißt  $v_c(t) = q_c(t)$ , gilt stets auch  $v_q(t) = q_q(t)$ .

Als letzte Einheit folgt die Signalrekonstruktion mit der Aufgabe der Digital-/ Analogwandlung. Dieser Block stellt das Gegenstück zur Abtastung dar und wird wie diese in Abschnitt 3 genauer untersucht. Abbildung 1 zeigt auch, dass die Quantisierung kein Pendant auf der Empfängerseite hat. Dies bedeutet aber, dass die auf die Quantisierung zurückzuführenden Verfälschungen irreversibel sind. Auch bei fehlerfreier Übertragung wird somit  $v(t) \neq q(t)$  gelten. Die Signalverformung aufgrund der Quantisierung ist umso geringer, je größer die Stufenzahl  $M$  ist.

**V1:** Seit vielen Jahren wird in Deutschland das PCM-System 30/32 eingesetzt. Dieses Digitalsystem erlaubt die digitale Übertragung von bis zu 30 Sprachkanälen (jeweils für eine maximale NP-Frequenz von  $f_{N, \max} = 4$  kHz zusammen mit einem Synchronisations- und einem Wählzeichenkanal, so dass die Gesamtkanzahl  $Z = 32$  ist (Zeitmultiplexsystem). Die nachfolgenden Fragen beziehen sich auf dieses System.

- 
- a) Mit welcher Abtastfrequenz  $f_A$  müssen die Sprachsignale abgetastet werden? In welchem zeitlichen Abstand  $T_A$  erfolgt die Abtastung, wenn man den kleinstmöglichen Wert von  $f_A$  heranzieht?
- b) Die abgetasteten Sprachsignale werden jeweils mit  $M = 256$  Stufen quantisiert und jeder Quantisierungswert wird mit  $N$  Binärsymbolen übertragen. Wie groß ist  $N$ ?
- c) Welche Zeit  $T_B$  würde zur Übertragung eines Binärsymbols zur Verfügung stehen, wenn nur ein Kanal vorhanden wäre? (Hinweis:  $T_B$  bezeichnet die Bitdauer)
- d) Welche Zeit  $T_B$  steht zur Übertragung eines Binärsymbols zur Verfügung, wenn alle  $Z = 32$  Kanäle berücksichtigt werden?
- e) Geben Sie eine allgemeingültige Gleichung für  $T_B$  an. Wie groß ist die Bitrate  $f_B$ ? *Hinweis:* Im Gegensatz zur Frequenz in „Hz“ hat die Bitrate die Einheit „bit/s“.

### 3 Signalabtastung und – rekonstruktion

Nun betrachten wir die ideale Abtastung des Analogsignals  $q(t) \leftrightarrow Q(f)$ , also die Zeitdiskretisierung. Die Abtastung von  $q(t)$  kann als Multiplikation mit einem Diracpuls

$$p_\delta(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} T_A \cdot \delta(t - v \cdot T_A) \quad \circ \text{---} \bullet \quad P_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot f_A) \quad (1)$$

aufgefasst werden. Unter einem Diracpuls  $p_\delta(t)$  wird eine unendliche Summe (um gleiche Abstände  $T_A$ ) verschobener Diracimpulse gleichen Gewichts verstanden. Obige Fourierkorrespondenz soll in der Vorbereitungsfrage **V2** bewiesen werden.

Somit gilt für das abgetastete Signal im Zeit- und Frequenzbereich:

$$q_A(t) = q(t) \cdot p_\delta(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad Q_A(f) = Q(f) * P_\delta(f) \quad (2)$$

Abbildung 3 verdeutlicht diesen Sachverhalt im Zeitbereich. Nach dem Abtasttheorem ist allerdings nur dann die gesamte Information des Analogsignals  $q(t)$  im abgetasteten Signal  $q_A(t)$  enthalten, wenn die Abtastfrequenz  $f_A = 1/T_A$  mindestens doppelt so groß ist wie die maximale Frequenz  $f_{N, \max}$  des Nachrichtensignals:

$$f_A \geq 2 \cdot f_{N, \max} \quad \text{bzw.} \quad T_A \leq \frac{1}{2 \cdot f_{N, \max}} \quad (3)$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur bei einem Signal mit kontinuierlichem Spektrum  $Q(f)$ . Bei einem periodischen Signal mit einer Dirac-Komponente bei  $f_{N, \max}$  muss dagegen die Abtastfrequenz  $f_A$  stets (geringfügig) größer sein als  $2 \cdot f_{N, \max}$  (siehe Versuch **D1**).

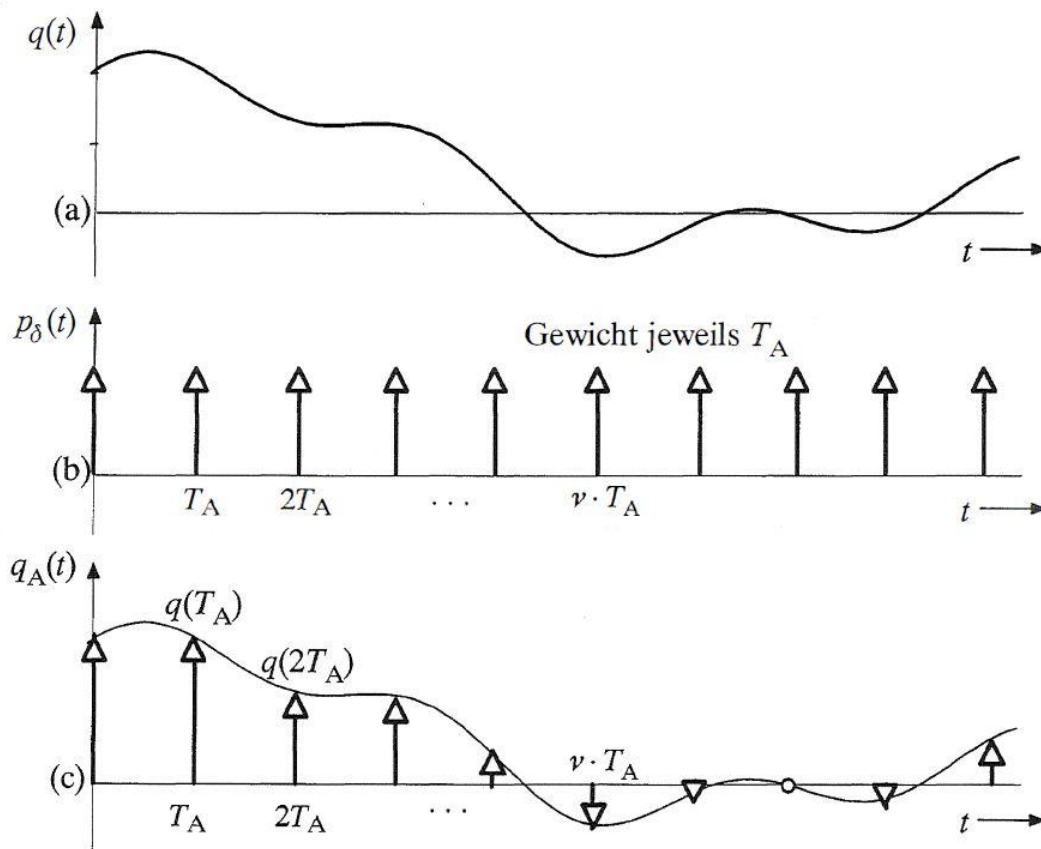


Abbildung 3: Abgetastetes Signal (c) als Produkt von Analogsignal (a) und Diracimpuls(b).

**V2:** Der Diracpuls  $p_\delta(t)$  ist eine Folge von äquidistanten Diracimpulsen  $\delta(t)$ :

$$p_\delta(t) = T_A \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \nu \cdot T_A) . \quad (4)$$

Die Impulsgewichte sind alle gleich. Sie sind hier willkürlich gleich dem Abstand  $T_A$  der einzelnen Diracimpulse gewählt. Somit ist  $p_\delta(t)$  dimensionslos. Ein solcher Diracpuls eignet sich zur Beschreibung der idealen, äquidistanten Abtastung in besonderer Weise. Hier sollen zunächst seine spezifischen Eigenschaften erarbeitet werden.

- a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung (Darstellung des Diracpulses durch eine komplexe Fourierreihe):

$$p_\delta(t) = T_A \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \nu \cdot T_A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot 2\pi \cdot n \cdot t / T_A} . \quad (5)$$

- b) Ermitteln Sie die Spektralfunktion  $P_\delta(f)$  als die Fouriertransformierte von  $p_\delta(t)$  mit Hilfe des Verschiebungssatzes:

$$e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} \longleftrightarrow \delta(f - f_0) . \quad (6)$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.



Zur Interpretation des Abtasttheorems betrachten wir nun den Frequenzbereich. Das Spektrum eines Diracpulses  $p_\delta(t)$  im Zeitbereich ist entsprechend (1) ein Diracpuls  $P_\delta(f)$  im Frequenzbereich, wobei der Abstand der einzelnen Spektrallinien  $f_A$  beträgt. Die Herleitung dieser wichtigen Beziehung sollte in der Vorbereitungsfrage **V2** erfolgen. Das Spektrum  $Q_A(f)$  ergibt sich nach (2) aus der Faltung von  $Q(f)$  mit  $p_\delta(f)$ . Daraus folgt, dass  $Q_A(f)$  gleich der im Abstand  $f_A$  periodisch fortgesetzten Funktion  $Q(f)$  ist. Das Spektrum des abgetasteten Signals ist somit unendlich breit (vgl. Abbildung 4).

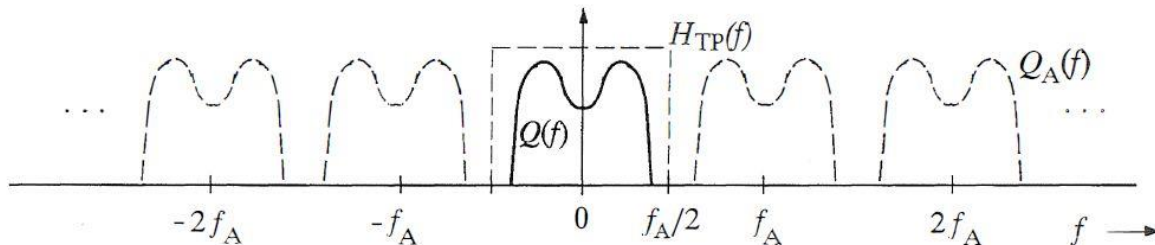


Abbildung 4: Spektren  $Q(f)$  und  $Q_A(f)$  von analogem bzw. abgetastetem Signal

Betrachten wir abschließend noch die *Signalrekonstruktion*, also die Gewinnung des wert- und zeitkontinuierlichen Sinkensignals  $v(t)$  aus dem wert- und zeitdiskreten Signal  $v_Q(t)$ . Vereinfachend - aber ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit - nehmen wir an, dass  $v_Q(t) \approx q_A(t)$  sei. Dies entspricht einer Vernachlässigung der Quantisierungsverzerrungen sowie einer fehlerfreien Übertragung. Aus Abbildung 4 ist zu ersehen, dass die Signalrekonstruktion durch einen ideal rechteckförmigen Tiefpass  $H_{TP}(f)$  mit der Grenzfrequenz  $f_G = f_A/2$  realisiert werden kann. Man spricht hier auch von einem Kuppfmüller-Tiefpass. Dann gilt:

$$V(f) = V_Q(f) \cdot H_{TP}(f) \approx Q_A(f) \cdot H_{TP}(f) = Q(f) . \tag{7}$$

Im Zeitbereich bedeutet die Filterung mit dem Kuppfmüller-Tiefpass eine Interpolation von  $v_Q(t)$  mittels einer si-Funktion (Impulsantwort des Kuppfmüller-Tiefpasses). Die Wiederherstellung des Analogsignals beim Empfänger ist allerdings nur dann verzerrungsfrei möglich ( $v(t) = q(t)$ ), wenn sendeseitig das Abtasttheorem beachtet wurde. Ist dieses nicht erfüllt (d.h. ist  $T_A$  zu groß bzw.  $f_A$  zu klein), so kommt es zu nichtreversiblen Überschneidungen im Spektralbereich (vgl. Abbildung 5). Die Spektren können dann durch einen Tiefpass nicht mehr getrennt werden und man spricht von Aliasing.

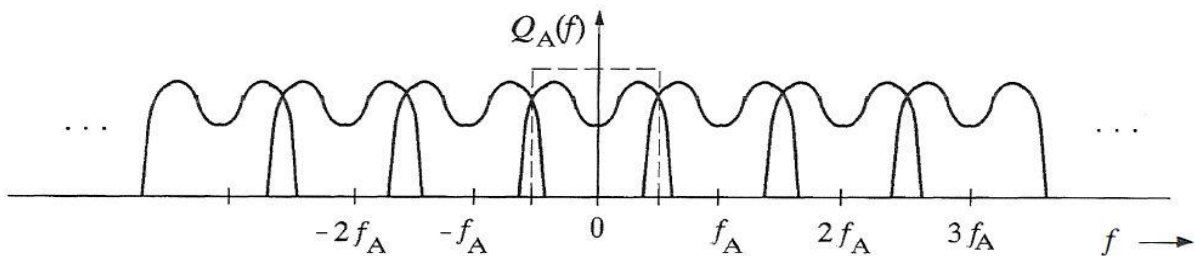


Abbildung 5: Spektrum  $Q_A(f)$  bei Nichteinhaltung des Abtasttheorems

In der Praxis wird anstelle des idealen, diracförmigen Pulses  $p_\delta(t)$  zur Abtastung oft ein Puls  $p_R(t)$  mit schmalen Rechteckimpulsen verwendet. Dies führt zu geringfügigen und gleichzeitig reversiblen Verfälschungen (vgl. Vorbereitungsfrage **V3**).



**V3:** Die ideale Abtastung lässt sich mathematisch durch die Multiplikation mit dem Diracpuls  $p_\delta(t)$  exakt beschreiben (vgl. Abbildung 3). In der Praxis muss zur Abtastung jedoch anstelle des idealen, diracförmigen Pulses  $p_\delta(t)$  stets ein Puls  $p_R(t)$  mit schmalen Rechteckimpulsen verwendet werden, und man spricht von natürlicher Abtastung. Die Breite eines einzelnen Rechteckimpulses  $\rho(t)$  sei  $T_R$ , die Höhe  $1/T_R$  (siehe Abbildung 6).

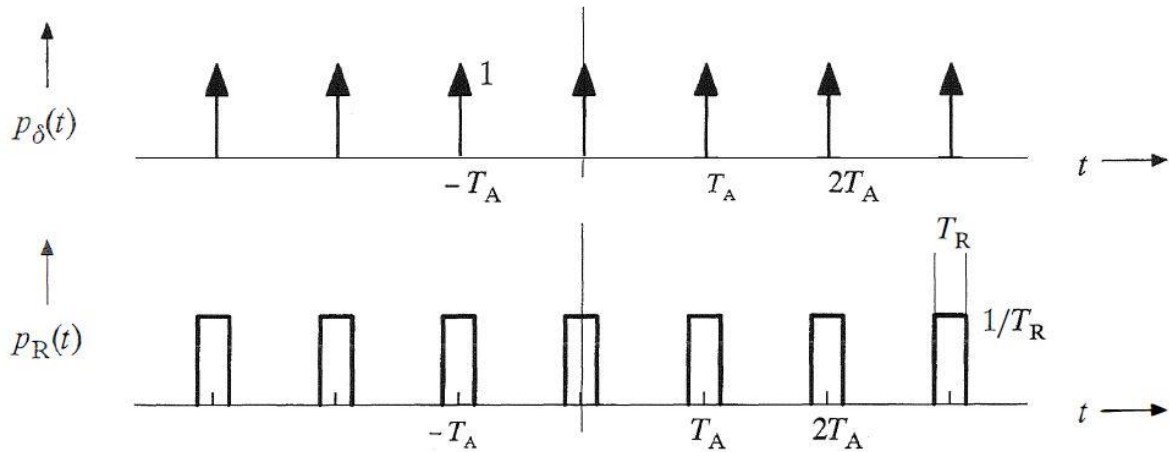
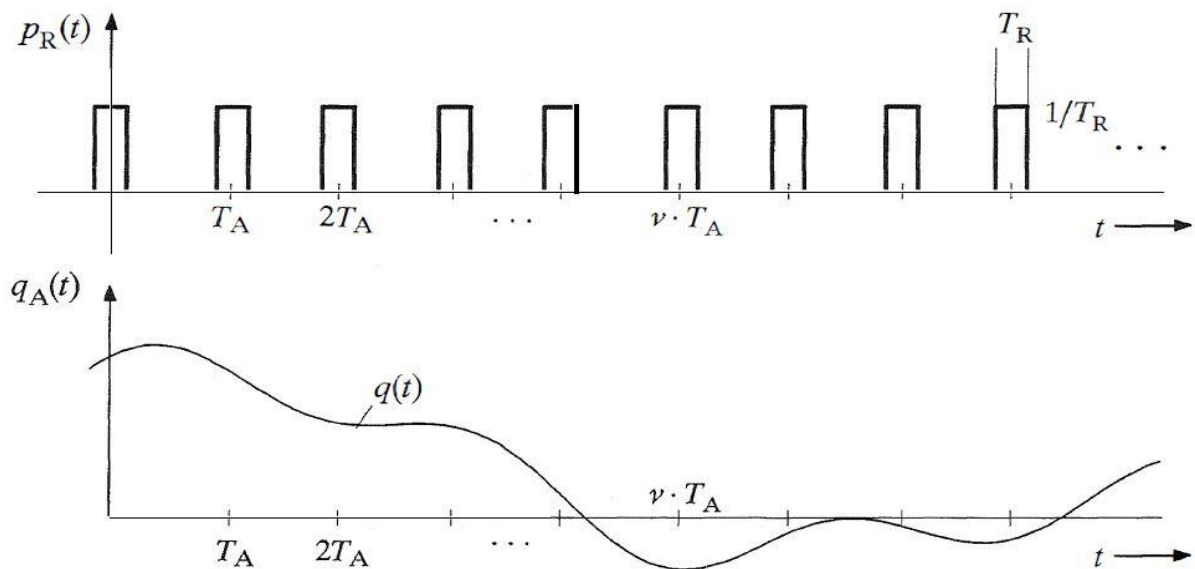


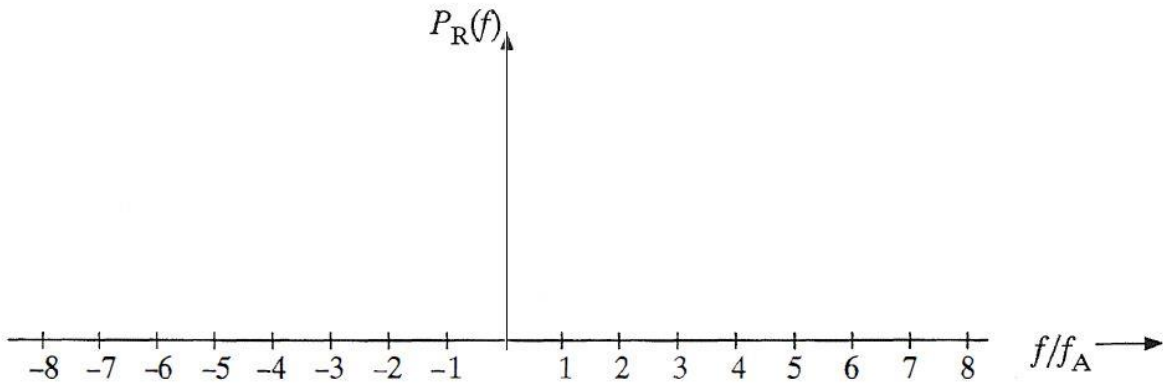
Abbildung 6: Diracpuls  $p_\delta(t)$  und der Rechteckpuls  $p_R(t)$

- a) Zeichnen Sie in das untere Diagramm das Signal  $q_A(t)$  ein, das sich ergibt, wenn man das Analogsignal  $q(t)$  mittels des Rechteckpulses  $p_R(t)$  natürlich abtastet. Hinweis: Im Versuch **D2** wird auf den Unterschied zwischen der bisher betrachteten natürlichen und der sogenannten diskreten Abtastung ausführlicher eingegangen.

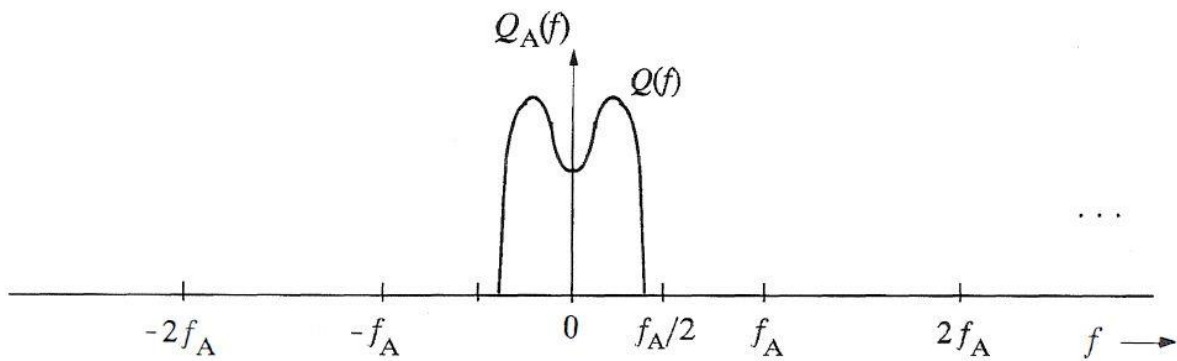


- b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Pulsen  $p_\delta(t)$  und  $p_R(t)$ ?

- c) Geben Sie das Spektrum  $P_R(f)$  des Rechteckpulses  $p_R(t)$  formelmäßig an. Skizzieren sie  $P_R(f)$  in das nachfolgende Diagramm für  $T_R/T_A = 0.25$ .



- d) Skizzieren Sie qualitativ das Spektrum  $Q_A(f)$  eines mit einem Rechteckpuls  $p_R(t)$  abgetasteten bandbegrenzten Nachrichtensignals  $q(t) \leftrightarrow Q(f)$ . Interpretation.



- e) Wie kann das Nachrichtensignal am Empfänger rekonstruiert werden?

## 4 Quantisierung und Signalstörabstand

Das Prinzip der Quantisierung wurde bereits im Abschnitt 1.2 anhand von Abbildung 2 erläutert. Nun soll die damit verbundene Beeinträchtigung der PCM-Übertragung durch die Quantisierungsverzerrungen quantitativ erfasst werden, wobei zunächst von linearer Quantisierung ausgegangen wird (vgl. Abbildung 7).

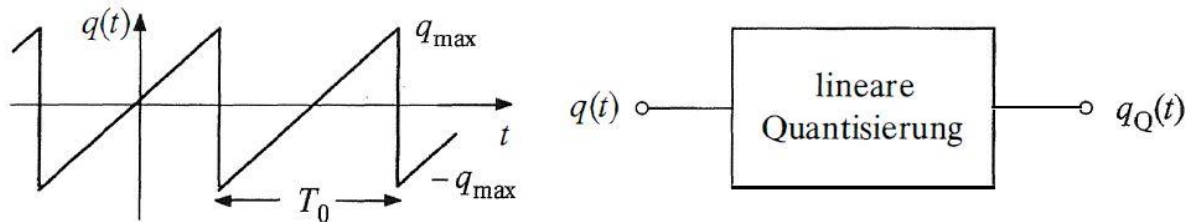


Abbildung 7: Zur Berechnung der Quantisierungsverzerrungen.

Wir gehen wir von einem sägezahnförmigen NF-Signal  $q(t)$  gemäß Abbildung 7a aus, das innerhalb der Zeitdauer  $T_0$  von  $-q_{max}$  auf  $+q_{max}$  ansteigt (im Folgenden gelte stets  $q_{max} = 6V$ ). Bei Quantisierung mit  $M = 6$  Stufen, wobei die Quantisierungsintervalle alle gleich seien (Breite  $\Delta$ , hier gleich  $2V$ ), erhält man das in Abbildung 8a eingezeichnete quantisierte Signal  $q_Q(t)$ . Unter der weiteren Voraussetzung, dass der Quantisierungsbereich ( $\pm Q$ ) mit dem Signalbereich ( $\pm q_{max}$ ) exakt übereinstimmt, ergeben sich für  $M = 6$  die Intervallgrenzen  $0V, \pm 2V$  und  $\pm 4V$ . Die möglichen Amplitudenwerte für das quantisierte Signal sind dementsprechend  $\pm 1V, \pm 3V$  und  $\pm 5V$ .

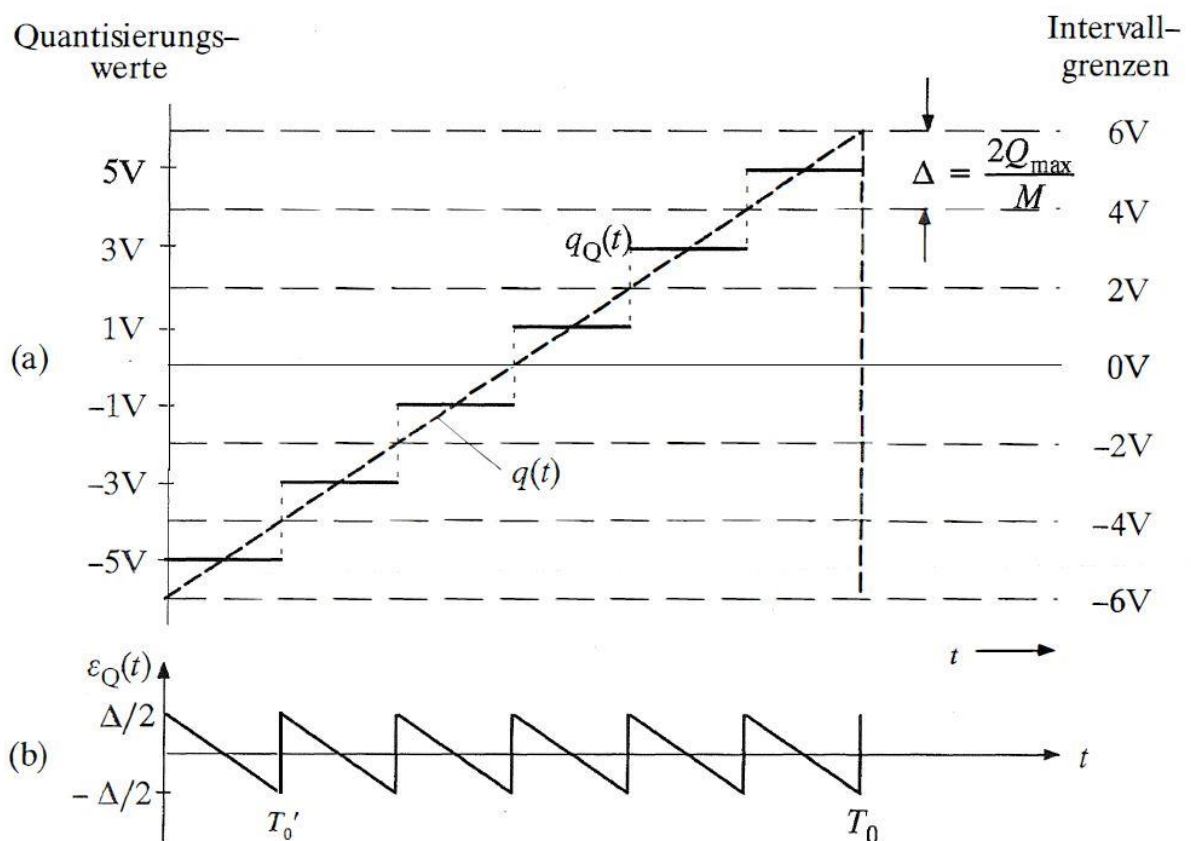


Abbildung 8: (a) Quantisierung eines sägezahnförmigen NF-Signals  $q(t)$  mit  $M = 6$  Stufen, (b) dazugehöriges Verfälschungssignal  $\varepsilon_Q(t) = q_Q(t) - q(t)$

In Abbildung 8b ist die auf die Quantisierung zurückzuführende Signalverfälschung dargestellt. Es ist zu erkennen, dass das Differenzsignal  $\varepsilon_Q(t)$  zwischen dem quantisierten Signal  $q_Q(t)$  und dem Analogsignal  $q(t)$  nie größer als  $\Delta/2 = Q_{max}/M$  ist. Den quadratischen Mittelwert dieses Fehler-signals bezeichnet man als die "Quantisierungsverzerrungsleistung":

$$P_Q = \overline{\varepsilon_Q(t)^2} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \varepsilon_Q(t)^2 dt . \quad (8)$$

Aufgrund des vorliegenden Nachrichtensignals genügt es, die Integration auf die Zeitdauer  $T_0'$  zu beschränken ( $T_0' = T_0/M$ ). Man erhält:

$$P_Q = \frac{\Delta^2}{4T_0'} \cdot \int_0^{T_0'} \left(-1 + 2\frac{t}{T_0'}\right)^2 dt = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{Q_{max}^2}{3 \cdot M^2} . \quad (9)$$

In gleicher Weise erhält man für die Leistung des Nutzsignals  $q(t)$ , also für die „Signalleistung“:

$$P_S = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} q(t)^2 dt = \frac{q_{max}^2}{3} . \quad (10)$$

Bildet man den Quotienten der Nutzleistung aus (10) und der Verzerrungsleistung nach (9), so erhält man das sogenannte Quantisier-Signalrauschverhältnis. Mit  $Q_{max} = q_{max}$ , d.h. bei Anpassung des Quantisierers an den Maximalwert des Signals, ergibt sich:

$$\varrho_Q = \frac{P_S}{P_Q} = M^2 . \quad (11)$$

Anzumerken ist, dass diese Gleichung nur für die hier betrachtete Konstellation (sägezahnförmiges Nachrichtensignal, lineare Quantisierung,  $Q_{max} = q_{max}$ ) exakt zutrifft. Bei anderen Signalen kann diese Gleichung nur als Näherung verwendet werden. Auf diesen Sachverhalt wird in der Versuchsdurchführung noch ausführlich eingegangen.

Vergleichen wir abschließend das PCM-System mit den bekannten Analogverfahren Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (ZSB-AM) und Frequenzmodulation (FM) hinsichtlich des Rauschverhaltens. Als Grundlage dieses Vergleichs wird vorausgesetzt:

- ein cosinusförmiges Nachrichtensignal  $q(t)$  der Frequenz  $f_{N,max}$
- eine konstante Sendeleistung  $P_S$ ,
- eine konstante Rauschleistungsdichte  $N_0$  und
- ein für alle Frequenzen gleicher (verzerrungsfreier) Kanal mit  $H_K(f) = a$ .

Quantitativ kann das Rauschverhalten zum Beispiel durch das Signalstörleistungsverhältnis an der Sinke erfasst werden:

$$Q_v = \frac{P_{Nutz}}{P_{Stör}} = \frac{\text{Nutzleistung von } v(t)}{\text{Störleistung von } v(t)} . \quad (12)$$

Die Störleistung  $P_{Stör}$  kann beispielsweise als die mittlere quadratische Abweichung zwischen dem Sinke-signal  $v(t)$  und dem Quellsignal  $q(t)$  berechnet werden. Dagegen kann man die Nutzleistung

des Sinkensignals gleich der in (9) berechneten Signalleistung  $P_S$  setzen. Dabei muss sichergestellt sein, dass ohne Rauschen die beiden Signale  $v(t)$  und  $q(t)$  tatsächlich identisch sind.

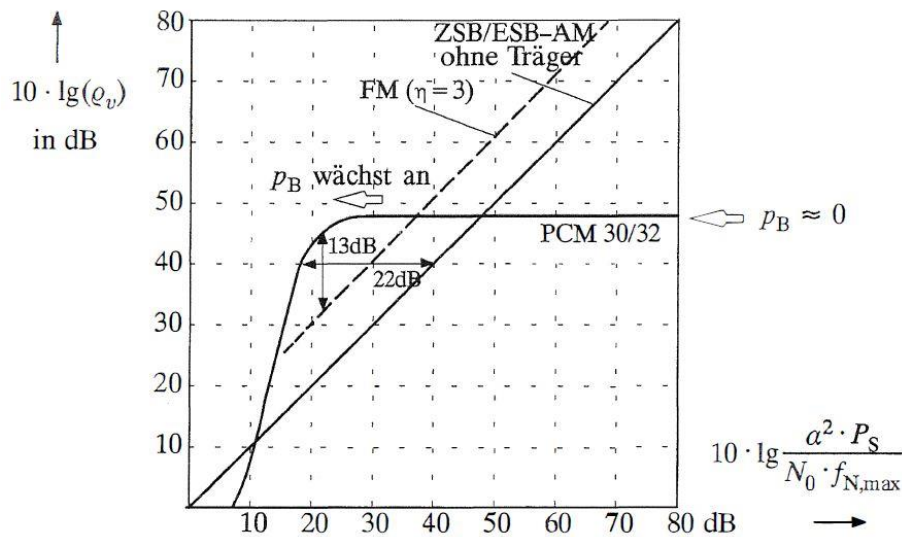


Abbildung 9: Vergleich AM, FM und PCM (8 Bit) hinsichtlich Signalstörabstand

In Abbildung 9 ist der erreichbare Signalstörabstand  $10 \cdot \lg(q_v)$  dargestellt. Bei den beiden Analogverfahren ist die Störleistung  $P_{\text{Stör}}$  ausschließlich auf das thermische (Gaußsche weiße) Rauschen zurückzuführen. Die Kurve der AM (gültig für ESB und ZSB ohne Träger) ist aufgrund der hier gewählten Abszisse eine Gerade mit 45° Steigung. Die FM-Kurve (gültig für den Modulationsindex  $\mu = 3$ , gestrichelt) liegt für Abszissenwerte größer als ca. 13 dB um etwa 11,3 dB darüber. Dies entspricht dem Wert  $10 \cdot \lg(3/2 \cdot \mu^2)$ .

Betrachten wir aber nun die Kurve des PCM-Systems 30/32. Für Abszissenwerte zwischen 13 und 38 dB liegt dieses System oberhalb der FM-Vergleichskurve. Der maximale Störabstandsgewinn von ca. 13 dB ergibt sich bei einem Abszissenwert von 23 dB.

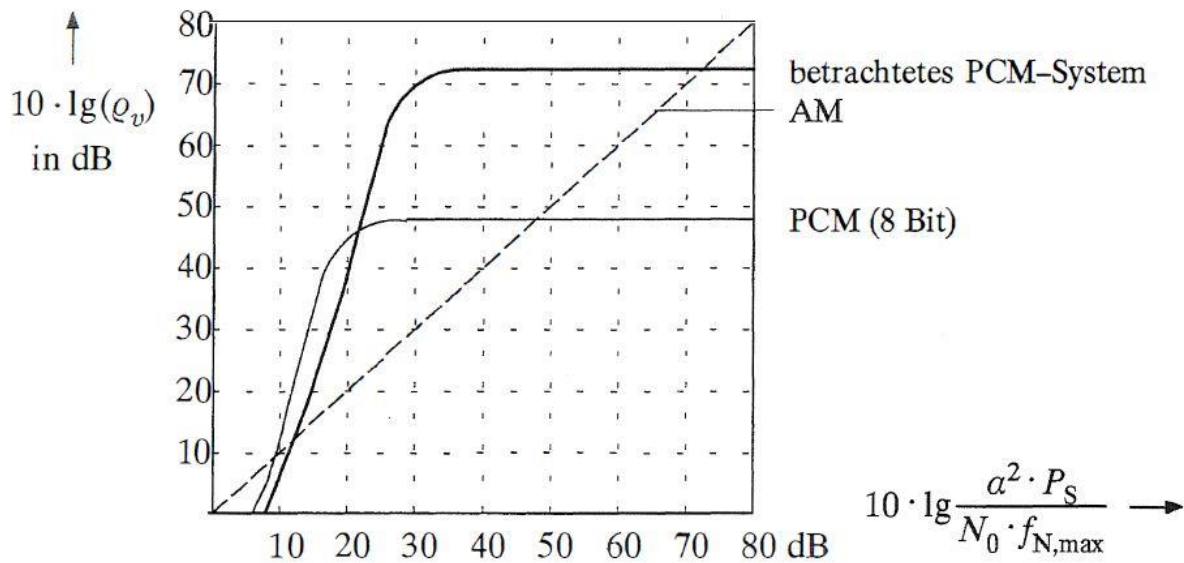
Weiterhin ist aus Abbildung 9 zu ersehen, dass bei PCM der maximal erreichbare Signalrauschabstand begrenzt ist. Auch bei sehr guten Kanälen, bei denen durch das Rauschen  $n(t)$  praktisch keine Bitfehler verursacht werden, ergibt sich aufgrund der Quantisierungsverzerrungen stets ein endlicher Wert:  $q_v \approx q_Q$

Für Abbildung 9 sind  $M = 256$  gleich große Quantisierungsintervalle zugrunde gelegt, so dass man  $10 \cdot \lg(q_Q) = 20 \cdot \lg(M) \approx 48,2$  dB erhält. Diese Gleichung gilt allerdings nur unter der vereinfachenden Annahme, dass das Nachrichtensignal alle möglichen Amplitudenwerte mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt, was z.B. bei einem sägezahnförmigen Signal zutrifft (siehe Abbildung 7).

Der PCM-Kurvenzug, von rechts nach links betrachtet, entspricht einer Zunahme der Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$ , z.B. aufgrund der Erhöhung der Rauschleistungsdichte  $N_0$  bei konstanter Sendeleistung  $P_S$  oder einer Verminderung der Sendeleistung bei konstanter Rauschleistung:

- Im horizontalen Ast sind die Auswirkungen von Übertragungsfehlern auf das S/N-Verhältnis des Analogsignals im Vergleich zur Quantisierung vernachlässigbar ( $q_v \approx q_Q$ ).
- Erst wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit  $10^{-4}$  und mehr beträgt, wirkt sich dies auch auf die Qualität des Sprachsignals aus. Ist  $p_B$  zu groß (beispielsweise 1% oder mehr), so ist das Digitalsystem sogar schlechter als die analoge ZSB-AM.

**V4:** Im nachfolgenden Diagramm ist zusätzlich zu den aus Abbildung 9 bekannten Kurven für die Amplitudenmodulation (AM) und die 8 Bit-PCM auch der Verlauf des Sinken-Signalstöranstandes  $10 \cdot \lg(\rho_v)$  eines weiteren PCM-Systems eingezeichnet (oberer Kurvenverlauf).



- Kennzeichnen Sie dieses System hinsichtlich der Quantisierungsstufenzahl  $M$ . Wie groß ist die Bitanzahl pro Abtastwert?
- Unter welchen Voraussetzungen gilt Gl. (11) für das Quantisier-Signalrausch-Verhältnis?
- Um welchen Faktor kann man die Sendeleistung  $P_s$  gegenüber dem AM-System verringern, sodass sich in beiden Fällen ein Sinken-Signalstöranstand von 70 dB ergibt?
- Kann bei der 8Bit-PCM ein Sinken-Signalstöranstand von 70 dB erzielt werden? Wenn Ja, wie?

## 5 Ungleichmäßige Quantisierung

Bei Sprach- und Musiksignalen werden Verfälschungen bei den leisen Signalanteilen (d.h. die Werte in der Nähe der Nulllinie) als störender empfunden als Beeinträchtigungen großer Amplitudenwerte. Diese Tatsache legt eine von den Bereichsgrenzen zur Nulllinie hin zunehmend feinere Quantisierung nahe. Durch eine solche *Kompression* wird die Auflösung bei gleichbleibender Quantisierungsstufenzahl  $M$  gegenüber einem Vergleichssystem im relevanten Wertebereich erhöht.

Eine *ungleichmäßige Quantisierung* kann z.B. dadurch realisiert werden, in dem die abgetasteten Werte  $q_A(v \cdot T_A)$  zunächst durch eine nichtlineare Kennlinie  $y(x)$  verformt und die entstehenden Ausgangswerte – wie in den Abschnitten 1.2 und 1.4 beschrieben – gleichmäßig quantisiert werden.

Ungleichmäßige Quantisierung bedeutet eine Verstärkung kleiner und eine Abschwächung großer Signalwerte. Diese bewusste Signalverzerrung muss beim Empfänger durch die Umkehrfunktion der jeweils verwendeten Kompressorkennlinie wieder rückgängig gemacht werden. Den Gesamtvorgang der sendeseitigen Kompression und der empfängerseitigen Expansion nennt man auch *Kompan-dierung*.

Bei den ersten (etwa 1960) in den USA eingesetzten 24 Kanal-PCM-Geräten war der Wertebereich nach der sogenannten  $\mu$ -Kennlinie (vgl. [4]) in  $2^7$  Stufen mit  $\mu = 100$  aufgeteilt. Für das PCM-System 30/32 wurde etwa zur gleichen Zeit vom CCITT eine Kennlinie empfohlen, die dem sogenannten A-Gesetz folgt:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1 + \ln(A \cdot x)}{1 + \ln A} & \text{für } \frac{1}{A} \leq x \leq 1, \\ \frac{A \cdot x}{1 + \ln A} & \text{für } -\frac{1}{A} \leq x \leq \frac{1}{A}, \\ -\frac{1 + \ln(-A \cdot x)}{1 + \ln A} & \text{für } -1 \leq x \leq -\frac{1}{A}. \end{cases} \quad (13)$$

Hierbei ist  $x = q_Q(v \cdot T_A)/Q_{\max}$  zu setzen. Die A-Kennlinie mit dem in der Praxis eingeführten Wert von  $A = 87.56$  hat eine sich ständig ändernde Steigung, wodurch alle Quantisierungsintervalle unterschiedliche Größe haben. Als Konsequenz werden zur anschließenden Codierung (und auch zur Decodierung)  $M/2$  Vergleichsnormale benötigt, was für größeres  $M$  technisch schwer zu realisieren ist.

Dieser Nachteil ist bei der sogenannten 13-Segment-Kennlinie nicht mehr gegeben. Für  $|x| > 1/64$  ist diese Kennlinie identisch mit der A-Kennlinie. Für  $|x| < 1/64$  ergeben sich mit  $k = 1, \dots, 6$  folgende 12 Bereiche:

$$y(x) = \begin{cases} 2^{4-k} \cdot x + \frac{k}{8} & \text{für } 2^{k-7} \leq x \leq 2^{k-6}, \\ 2^{4-k} \cdot x - \frac{k}{8} & \text{für } -2^{k-6} \leq x \leq -2^{k-7}. \end{cases} \quad (14)$$

Die Steigungen und damit auch die Größe der Quantisierungsintervalle sind jetzt innerhalb eines Segmentes gleich und verhalten sich bei benachbarten Abschnitten wie 2:1.



## 6 PCM-Codierung

Die Zuordnung der quantisierten Abtastwerte zu Binärfolgen der Länge  $N$  kann auf verschiedene Weise erfolgen. In Abbildung 10 (links oben) ist der Dualcode verdeutlicht und zwar für die Stufen-zahl  $M = 8$  (d.h.  $N = 3$ ). Bei diesem werden die  $M = 2^N$  Quantisierungsintervalle von 0 bis  $M - 1$  durchnummeriert und jedem Intervall die Binärdarstellung der Intervallnummer zugeordnet.

Wird bei der Übertragung ein Bit verfälscht ( $0 \Rightarrow 1$  bzw.  $1 \Rightarrow 0$ ), so hat das Auswirkungen auf das decodierte Signal. Beim Dualcode hängt die Größe der Verfälschung davon ab, welches Bit verfälscht wurde. In Abbildung 10 wurde bei der Übertragung des dritten Quantisierungswertes das letzte Bit LSB (**Least Significant Bit**) von  $1 \Rightarrow 0$  verändert; der Fehler (F) beträgt nur ein Quantisierungsintervall. Dagegen ist der Fehler (D) bei der Übertragung des 5. Quantisierungswertes deutlich größer (Verfälschung um 4 Stufen), da hier das erste Bit MSB (**Most Significant Bit**) verfälscht wurde.

Der in den Abbildung 10 rechts eingetragene Gray-Code hat demgegenüber einige Vorteile. Dieser ist so konstruiert, dass sich benachbarte Quantisierungswerte genau um ein Bit unterscheiden. Mit Ausnahme einer Verfälschung des ersten Bits wirkt sich jeder Fehler unabhängig von der Bitposition aus (F bzw. G), nämlich nur um ein Intervall.

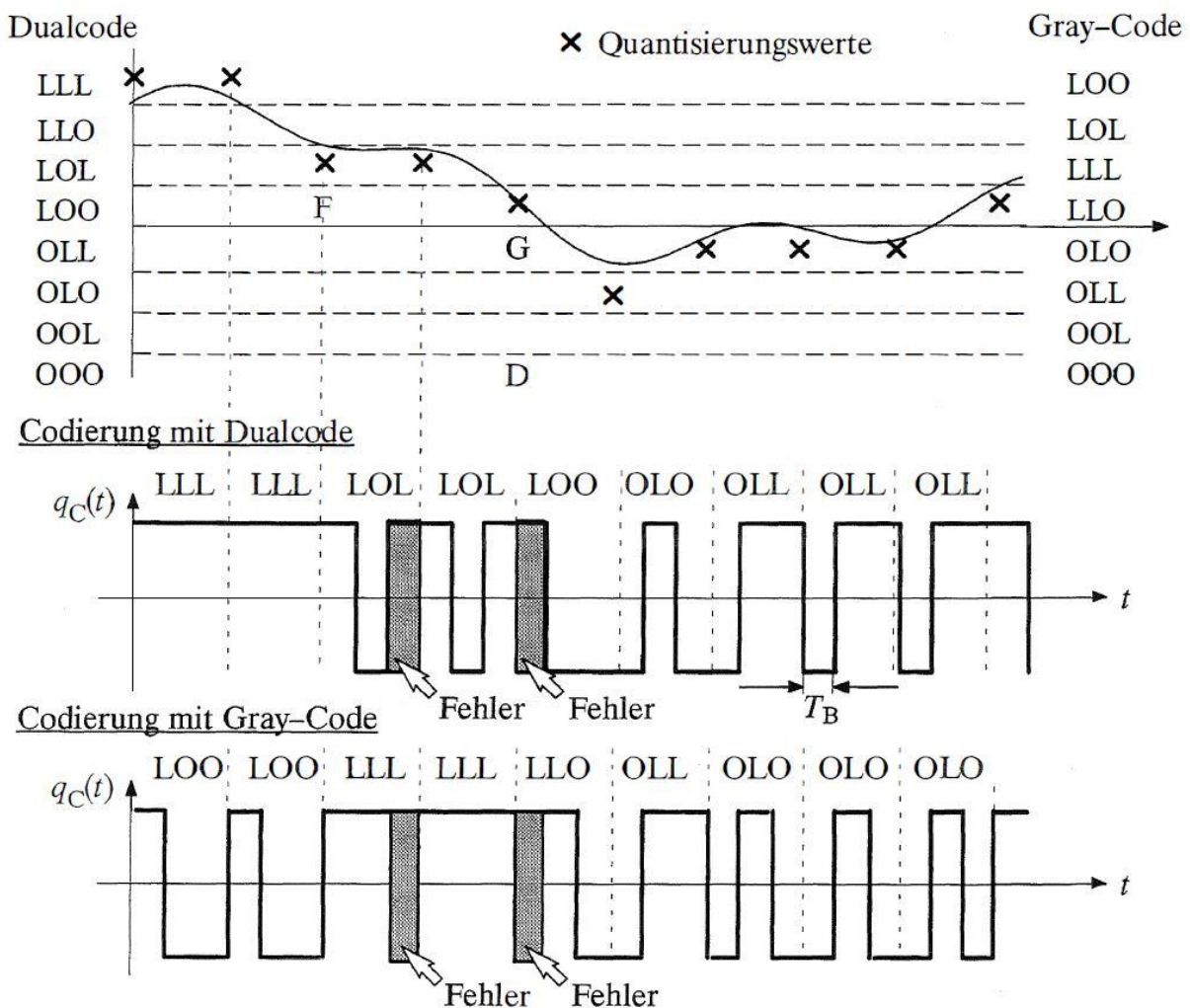


Abbildung 10: Zur PCM-Codierung mit Dual- und Gray-Code



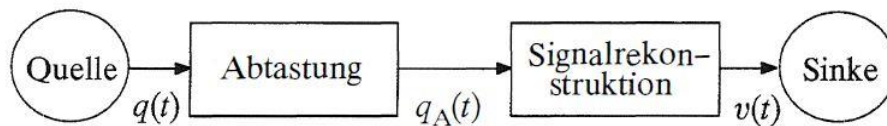
## 7 Versuchsdurchführung

Alle nachfolgenden Aufgaben sollen mit dem Programm „pcm“ durchgeführt werden. Hierbei gilt für das Quellsignal (frei wählbare Parameter sind mit Pfeilen markiert):

$$q(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{10} C_i \cdot \cos(2\pi \cdot i \cdot f_0 \cdot t - \varphi_i) \quad \text{mit} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (15)$$

*Hinweis:* Aufgrund des nichtvorhandenen Zeichens " $\phi$ " wird bei der Programmeingabe " $-\Phi$ " verwendet. Dies entspricht der im Praktikum verwendeten Nomenklatur.

**D1:** Der erste Versuch beschäftigt sich mit der Signalabtastung und -rekonstruktion. Wählen Sie zunächst das *Standardsystem A*. Damit wird für  $q(t)$  ein 5 kHz-Cosinussignal ausgewählt ( $T_0 = 1 \text{ ms}$ ,  $C_5 = 1$ , alle anderen Signalparameter sind 0) und ein PCM-System ohne Quantisierungsverzerrungen simuliert ( $M \rightarrow \infty$ ). Das Eingangssignal des Blockes "Signalrekonstruktion" (idealer Tiefpass mit Grenzfrequenz  $f_G$ ) ist in diesem Fall identisch mit dem abgetasteten Signal (siehe nachfolgendes Modell).



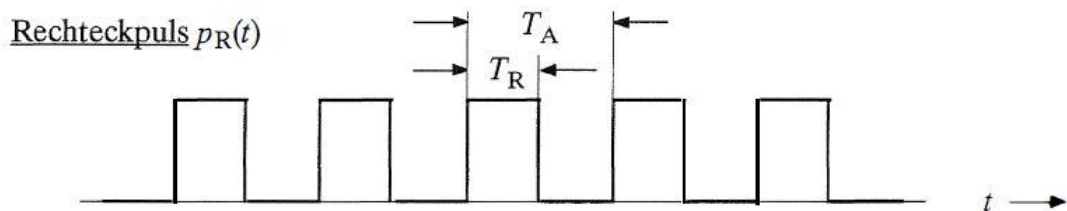
- Wieviele Abtastwerte sind zur Beschreibung des gesamten Signalverlaufs (das heißt von  $-\infty \dots +\infty$ ) einer harmonischen Schwingung  $q(t) = A \cos(\omega_q \cdot t - \varphi_q)$  erforderlich?
- Betrachten Sie nun die äquidistante Abtastung mittels eines Diracpulses. Welche ist die kleinstmögliche Abtastfrequenz  $f_A$  für ein auf 5 kHz bandbegrenztetes Signal  $q(t)$ , wenn dessen Spektrum bei 5 kHz keine Spektrallinie aufweist? Wie groß muss die Grenzfrequenz  $f_G$  des idealen Tiefpasses zur Signalrekonstruktion gewählt werden?
- Betrachten Sie im Programm „pcm“ die Signale  $q_A(t)$  und  $v(t)$  sowie deren Spektren, wenn  $q(t)$  ein 5 kHz-Cosinussignal ist und die Abtastfrequenz  $f_A = 10 \text{ kHz}$  beträgt. Das heißt, es sei  $f_A/f_0 = T_0/T_A = 10$ . Kann dieses Signal verzerrungsfrei rekonstruiert werden?

- d) Wählen Sie nun die Phase des 5 kHz-Signals zu  $45^\circ$ . Ist dieses Signal ebenfalls mit der Abtastfrequenz  $f_A = 10$  kHz vollständig rekonstruierbar? Begründen Sie das Ergebnis durch eine (komplexe) Frequenzbereichsbetrachtung.
- e) Welches Sinkensignal erhält man bei sinusförmigem Nachrichtensignal (Phase  $90^\circ$ )?
- f) Zeigen und begründen Sie, dass bereits durch eine geringfügige Erhöhung der Abtastfrequenz das Signal nun verzerrungsfrei rekonstruiert werden kann. Wählen Sie hier-zu  $f_A = 11$  kHz (Anmerkung: Im Programm muss das Verhältnis  $f_A/f_0$  stets ganzzahlig eingegeben werden).
- g) Wählen Sie nun das „Mustersignal 1“ mit den folgenden Parametern:  $T_0 = 1$  ms,  $A_0 = 0.1$ ,  $C_1 = 0.26$  ( $\varphi_1: -10^\circ$ ),  $C_2 = 0.54$  ( $\varphi_2: 180^\circ$ ),  $C_3 = 0.30$ ,  $C_4 = 0.14$  ( $\varphi_4: 20^\circ$ ). Zeigen Sie mit dem Programm, dass auch dieses Analogsignal verzerrungsfrei rekonstruiert werden kann, wenn die Abtastung mit  $f_A = 10$  kHz erfolgt und die Grenzfrequenz  $f_G$  des idealen Tiefpasses 5 kHz beträgt.
- h) Wählen Sie nun bei gleichem Abtastsignal  $q_A(t)$  die (normierte) Grenzfrequenz  $f_G/f_A$  zu 0.35 bzw. 0.65. Interpretieren Sie die unzureichenden Ergebnisse.

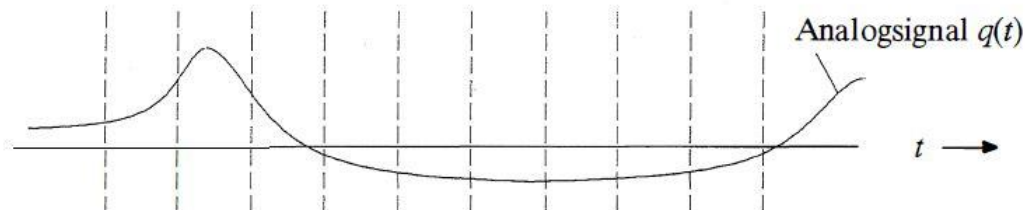
**D2:** Nun sollen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der natürlichen und der diskreten Abtastung sowohl im Zeit- wie auch im Frequenzbereich herausgearbeitet werden. Wählen Sie hierzu das „Mustersignal 1“ und das Tastverhältnis  $T_R/T_A = 0.5$  (siehe Skizze).

- a) Betrachten Sie das Signal  $q_A(t)$  bei natürlicher und diskreter Abtastung. Skizzieren Sie jeweils  $q_A(t)$  für das vorgegebene Analogsignal und beschreiben Sie die Unterschiede.

*Hinweis:* Entsprechend der Voreinstellung im Programm „pcm“ ergibt sich bei der diskreten Abtastung stets ein akausales Signal. Mit dem Menüpunkt P (*Programmeinstellungen: Rechteckpuls ungerade*) lässt sich dieses ändern. Arbeiten Sie aber trotzdem mit der Einstellung „Rechteckpuls gerade“, um komplexe Spektren zu vermeiden.



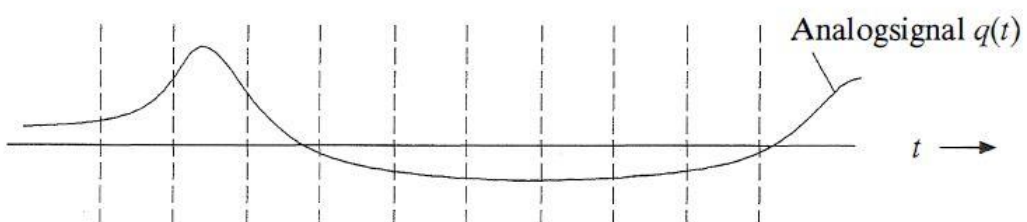
natürliche Abtastung



diskrete Abtastung (kausale Darstellung: Rechteckimpuls ungerade)



diskrete Abtastung (akausale Darstellung: Rechteckimpuls gerade)



- b) Geben Sie für beide Abtastarten eine analytische Beschreibung des Zeitsignals  $q_A(t)$  an, und zwar unter Verwendung des Analogsignals  $q(t)$ , des Diracpulses  $p_\delta(t)$  und eines Rechteckimpulses  $\rho(t)$  mit der Breite  $T_R$  und der Höhe  $1/T_R$  (siehe V 12.3).
- c) Welche Folgerungen ergeben sich aus dem Ergebnis der Teilaufgabe b) für die dazugehörigen Spektren  $Q_A(f)$ ? Verwenden Sie die Fourierkorrespondenz  $g(t) \leftrightarrow R(f)$ .
- d) Wählen Sie nun im Menüpunkt P (*Programmeinstellungen*) die Option „Normierung“ sowie „Mustersignal 2“ mit den Parameterwerten  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$  (alle Phasenwinkel  $0^\circ$ ) und  $T_0 = 1$  ms,  $A_0 = 0$ . Betrachten Sie im Programm (Menüpunkt B) das Spektrum  $Q_A(f)$  bei natürlicher Abtastung. Interpretieren Sie Ihre Berechnungen aus c) anhand der ausgegebenen Graphen. *Hinweis:* Im Programm ist die Höhe der Rechtecke nicht  $1/T_R$ , sondern 1.
- e) Wie groß ist bei diskreter Abtastung und Signalrekonstruktion mittels Kuppfmüller-Tiefpass der mittlere quadratische Fehler? Begründen Sie das Ergebnis anhand des Spektrums  $Q_A(f)$ .

- f) Versuchen Sie, den mittleren quadratischen Fehler durch ein geeignetes Tiefpassfilter (praktisch) zu Null zu machen. Welchen Frequenzgang hat dieses Filter?

**D3:** Nun soll der Einfluss der Quantisierung untersucht werden. Wählen Sie hierzu ein 1 kHz-Cosinus-signal und gleichmäßige Quantisierung mit der Quantisierungsstufenzahl  $M = 2^4 = 16$ ; diese ist aus Demonstrationszwecken bewusst klein gewählt.

Mit dem Menüpunkt Q5 (*Quantisierungskennlinien/MQF bei spontaner Quantisierung*) kann das Fehlersignal  $\varepsilon_Q(t) = q_Q(t) - q(t)$  gemäß der Definition von V12.2 sowohl für das eingestellte Cosinus-signal (mit der Nutzleistung  $P_S = 1/2$ ) als auch für ein sägezahnförmiges Nachrichtensignal ( $P_S = 1/3$ ) dargestellt werden. Außerdem wird hier noch jeweils die Quantisierungsrauschleistung  $P_Q$  gemäß Gl. (2) und der Quantisierungs-Rauschabstand  $10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 10 \cdot \lg(P_S/P_Q)$  ausgegeben.

a) Betrachten und beschreiben Sie die jeweiligen Fehlersignale.

b) Welche Werte ergeben sich für die Quantisierungsrauschleistung  $P_Q$  und für den Rauschabstand  $10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 10 \cdot \lg(P_S/P_Q)$ ? Vergleichen Sie den vom Programm ausgegebenen Rauschabstand (in dB) mit dem in V12.2 für das Sägezahnsignal berechneten Wert.

NF-Signal	$P_S$ (simuliert)	$P_Q$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (berechnet)
Sägezahn				
Cosinus				—

c) Wiederholen Sie den Versuch b) mit  $M = 2^8 = 256$ .

NF-Signal	$P_S$ (simuliert)	$P_Q$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (berechnet)
Sägezahn				
Cosinus				—
Muster-signal 1				

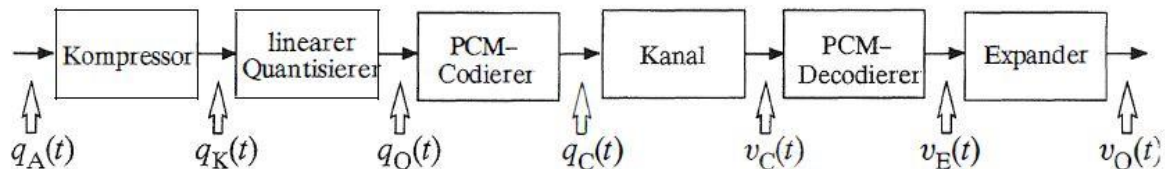
- d) Wählen Sie nun als Quellensignal das „Mustersignal 1“. Die anderen Einstellungen bleiben gegenüber c) unverändert: Abtastfrequenz  $f_A = 10$  kHz, Quantisierung mit  $M = 256$  (8 Bit). Welche Werte ergeben sich für  $P_S, P_Q$  und  $10 \cdot \lg(\rho_Q) = 10 \cdot \lg(P_S/P_Q)$ ? Tragen Sie diese Werte in die letzte Tabelle ein und interpretieren Sie die neuen Ergebnisse.
- e) Betrachten und beschreiben Sie für die getroffene Einstellung insbesondere die Signale  $q(t), q_A(t), q_Q(t), q_C(t), v_C(t), v_Q(t)$  und  $v(t)$ . Welche Signale sind gleich?
- f) Welche Störabstände ergeben sich, wenn der Quantisierungsbereich ( $\pm Q_{\max}$ ) nicht mit dem Signalbereich ( $\pm q_{\max}$ ) übereinstimmt? Beim Mustersignal 1 gilt näherungsweise  $q_{\max} = 1$ . Wählen Sie hierzu  $Q_{\max} = 0.7, 0.8$  und  $1.3$ . Begründen Sie die Ergebnisse. Warum ist hier  $Q_{\max} = 0.8$  sogar günstiger als  $Q_{\max} = 1$ ?

$$Q_{\max} = 0.7 : 10 \cdot \lg(\rho_v) =$$

$$Q_{\max} = 0.8 : 10 \cdot \lg(\rho_v) =$$

$$Q_{\max} = 1.3 : 10 \cdot \lg(\rho_v) =$$

**D4:** Bei Sprach- und Musiksignalen werden Verfälschungen der leisen Signalanteile (Werte in der Nähe der Nulllinie) als störender empfunden als Beeinträchtigungen großer Amplitudenwerte. Diese Tatsache legt eine von den Bereichsgrenzen zur Nulllinie hin zunehmend feinere Quantisierung nahe. Eine solche *ungleichmäßige Quantisierung* kann zum Beispiel dadurch realisiert werden, in dem die abgetasteten Werte  $q_A$  zunächst durch eine nichtlineare Kennlinie  $y(x)$  verformt und die Ausgangswerte  $q_K$  gleichmäßig quantisiert werden. Damit ergibt sich folgende Signalkette:



Eine solche ungleichmäßige Quantisierung bedeutet die Verstärkung kleiner und eine Abschwächung großer Signalwerte (*Kompression*). Diese bewusste Signalverzerrung muss beim Empfänger durch die Umkehrfunktion der jeweils verwendeten Kompressorkennlinie wieder rückgängig gemacht werden (*Expandierung*). Den Gesamtvorgang von sendeseitiger Kompression und empfängerseitiger Expansion nennt man auch *Kompandierung*.

Für das PCM-System 30/32 wurde vom CCITT (*Comite Consultatif International des Tetegraphique et Tetephonique*) die A-Kennlinie gemäß Gl. (13) empfohlen. Hierbei ist  $x = q_A(v \cdot T_A)/Q_{\max}$  und  $y = q_K(v \cdot T_A)/Q_{\max}$  zu setzen. Diese Kennlinie mit dem in der Praxis eingeführten Wert  $A = 87.56$  hat eine sich ständig ändernde Steigung.

- a) Gehen Sie wieder vom „Mustersignal 1“ aus. Stellen Sie die Quantisierungsstufenzahl  $M = 2^8$  ( $Q_{\max} = 1$ ) und die ungleichmäßige Quantisierung gemäß der A-Kennlinie ( $A = 87.56$ ) ein. Betrachten Sie die vom Programm angezeigten Quantisierungskennlinien (Menüpunkt „Q“). Welche Bedeutung haben die einzelnen Kennlinien?



$$q_K = f(q_A):$$

$$q_Q = f(q_K):$$

$$q_Q = f(q_A):$$

$$v_Q = f(v_E):$$

$$v_Q = f(q_A):$$

- b) Welche Verfälschungen ergeben sich bei gleichmäßiger Quantisierung, welche bei ungleichmäßiger Quantisierung (*Kompandierung*) gemäß der A-Kennlinie? Tragen Sie die Ergebnisse in die erste Zeile der unteren Tabelle ein und bewerten Sie diese.

	Quantisierungskennlinie		
	gleichmäßig	mit $A = 87.56$	mit 13-Segmente
Mustersignal 1 (MS1)	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$
$0.1 \cdot \text{MS1}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$
$0.9 + 0.1 \cdot \text{MS1}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$

- c) **Optional:**

Betrachten Sie nun ein gegenüber Punkt b) um den Faktor 10 kleineres Nachrichtensignal ( $A_0 = 0.010, C_1 = 0.026, C_2 = 0.054, C_3 = 0.030, C_4 = 0.014$ ), jeweils gleiche Phase wie bei Mustersignal 1. Damit ergibt sich  $q_{\max} = 0.1$ . Welche Verfälschungen ergeben sich nun bei gleichmäßiger bzw. ungleichmäßiger Quantisierung? Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die zweite Zeile obiger Tabelle ein und bewerten Sie diese.

- d) **Optional:**

Überlagern Sie nun dem Signal nach Punkt c) noch einen zusätzlichen Gleichanteil von 0.9 ( $A_0 = 0.910, C_1 = 0.026, C_2 = 0.054, C_3 = 0.030, C_4 = 0.014$ ), so dass der Maximalwert des Signals wieder  $q_{\max} = 1$  ist. Welche Ergebnisse liefern hier die gleichmäßige bzw. die ungleichmäßige Quantisierung? Wie ist dieses Ergebnis zu interpretieren?

Die A-Kennlinie hat eine sich ständig ändernde Steigung, wodurch alle Quantisierungsintervalle unterschiedliche Größe haben. Als Konsequenz werden somit zur anschließenden Codierung, und auch zur Decodierung,  $2^{N-1}$  Vergleichsnormale benötigt, was für größere  $N$  technisch schwer zu realisieren ist.

Dieser Nachteil ist bei der sogenannten 13-Segment-Kennlinie nicht mehr gegeben. Für  $|x| \leq 1/64$  ist diese Kennlinie identisch mit der A-Kennlinie. Für  $|x| > 1/64$  ergeben sich gemäß Gl. (14) weitere 12 Bereiche der Kompressorkennlinie. Die Steigungen und damit auch die Größe der Quantisierungsintervalle sind jetzt innerhalb eines Segmentes gleich und verhalten sich bei benachbarten Abschnitten wie 2:1.

d) Die Stufenzahl sei weiterhin  $M = 2^8$ . Verwenden Sie nun die ungleichmäßige Quantisierung mit der 13-Segment-Kennlinie. Welcher prinzipielle Unterschied ist an den Kennlinien  $q_K = f(q_A)$  und  $v_Q = f(q_A)$  gegenüber Punkt b) festzustellen?

**e) Optional:**

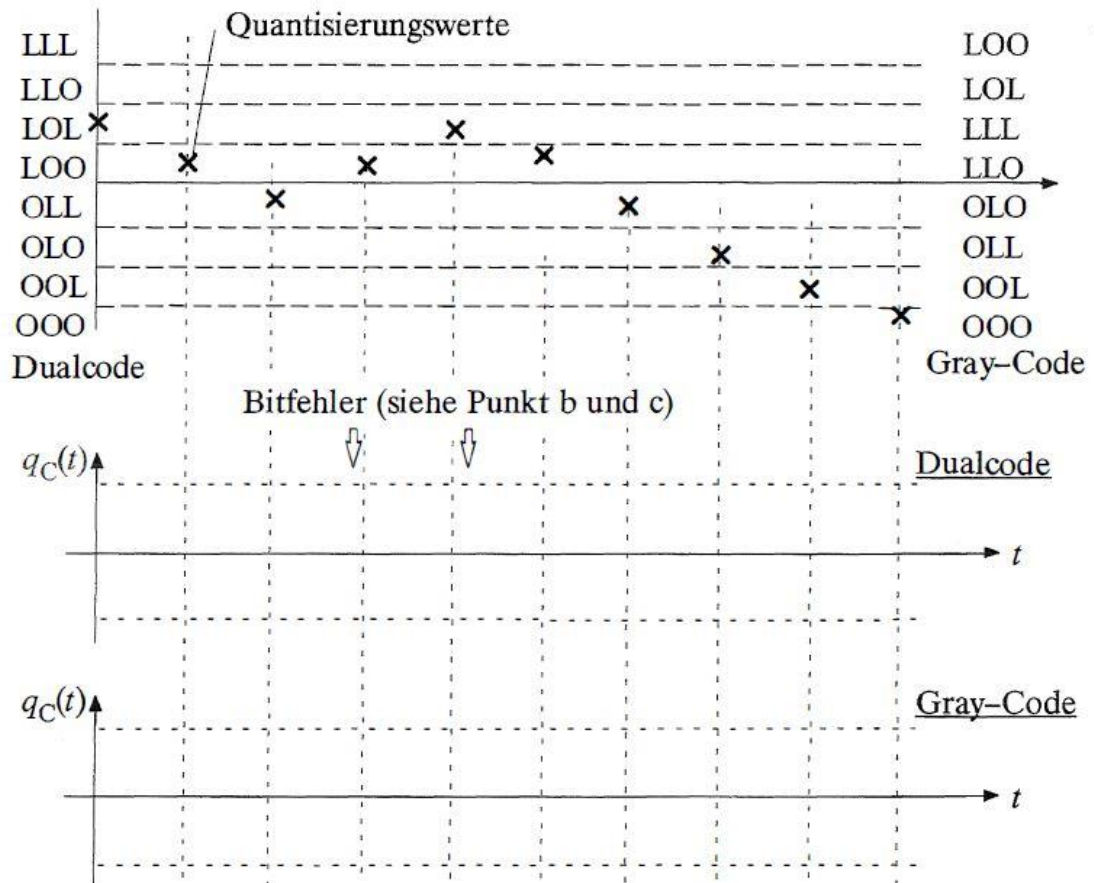
Wiederholen Sie nun die Versuche b) bis d) mit der 13-Segment-Kennlinie? Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die Tabelle bei Punkt b) ein und bewerten Sie diese.

**D5:** Nun wird die PCM-Codierung/-Decodierung sowie der Einfluss von Bitfehlern untersucht. Gehen Sie vom Standardsystem B aus. Eingestellt ist damit das Mustersignal 1 sowie eine gleichmäßige Quantisierung (mit  $M = 2^8$ ), und die Umsetzung der quantisierten Abtastwerte  $q_Q(v \cdot T_A)$  in das Binärsignal  $q_c(t)$  erfolgt gemäß dem Dualcode.

- Diese Zuordnung ist für  $M = 8$  ( $N = 3$ ) in der Skizze auf der nächsten Seite links angegeben.
- Rechts sehen Sie die Zuordnung des Gray-Codes angegeben, ebenfalls für  $M = 8$  ( $N = 3$ ).

Der Gray-Code ist so konstruiert, dass sich benachbarte Quantisierungswerte (fast) immer genau um ein Bit unterscheiden. Mit Ausnahme einer Verfälschung des ersten Bits wirkt sich somit jeder Übertragungsfehler im Mittel weniger stark aus als beim Dualcode.

- a) Skizzieren Sie für die eingezeichneten Quantisierungswerte das codierte Signal  $q_c(t)$  bei Dual- und Gray-Codierung.



b) Betrachten Sie die Dualcodierung. Welche Werte würden für  $v_Q(3 \cdot T_A)$  und  $v_Q(5 \cdot T_A)$  nach der Decodierung ausgegeben, wenn bei der Übertragung des dritten Quantisierungswertes das letzte Bit (*LSB, Least Significant Bit*) und bei der Übertragung des fünften Quantisierungswertes das erste Bit (*MSB, Most Significant Bit*) verfälscht wurde?

c) Welche Auswirkungen haben obige Fehler dagegen bei der Gray-Codierung?

d) Betrachten Sie nun die Signale vor und nach dem PCM-Coder ( $M = 2^8$ ) und überprüfen Sie die Dualcode-Zuordnung der quantisierten Werte zu den Bitfolgen.

- e) Erzeugen Sie im Programm "pcm" jeweils einen Bitfehler für den Abtastwert mit Nr. 3. Betrachten Sie dessen Auswirkungen auf das rekonstruierte Signal? Verwenden Sie als Kriterium hierzu wieder den Sinken-Signalstörabstand  $10 \cdot \lg(q_v)$ . Diesen können Sie z.B. im Fenster "Zeitsignalverläufe/Sinkensignal" ablesen.

	kein Bitfehler	ein Bitfehler (LSB)	ein Bitfehler (3. Bit)	ein Bitfehler (MSB)
$10 \cdot \lg(q_v)$				

Für den Gray-Code gilt die folgende Konstruktionsregel: Ausgangspunkt für  $N = 1$  sind die beiden Symbole "O" und "L". Beim Übergang von  $N$  auf  $N + 1$  wird der „Kern“ übernommen und darunter noch einmal in umgekehrter Reihenfolge geschrieben. Der obere Block wird dann vorne mit „O“ und der untere mit „L“ ergänzt:

$N=1:$	$N=2:$	$N=3:$	
Nr. 0: O	Nr. 0: OO	Nr. 0: OOO	
Nr. 1: L	Nr. 1: OL	Nr. 1: OOL	wie $N=2$
	Nr. 2: LL	Nr. 2: OLL	
	Nr. 3: LO	Nr. 3: OLO	wie $N=2$ , aber von unten nach oben
		Nr. 4: LLO	
		Nr. 5: LLL	
		Nr. 6: LOL	
		Nr. 7: LOO	

- f) Wie lautet der Gray-Code für  $N = 4$ ? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Programm.

- g) Wiederholen Sie den Versuch von Punkt e) für den Gray-Code, wieder mit  $M = 2^8$ . Interpretieren Sie die unterschiedlichen Ergebnisse.

	kein Bitfehler	ein Bitfehler (LSB)	ein Bitfehler (3. Bit)	ein Bitfehler (MSB)
$10 \cdot \lg(q_v)$				

## 8 Musterlösungen zu den Vorbereitungsaufgaben

**V1:**

- a) Nach dem Abtasttheorem muß gelten:

$$f_A \geq 2 \cdot f_{N,\max} = 8 \text{ kHz} = 8000 \text{ Abtastwerte/s.}$$

$$\Leftrightarrow T_A = \frac{1}{f_A} = \frac{1}{8000 \text{ Hz}} = 125 \mu\text{s.}$$

- b)  $N = \text{ld}(M) = \text{ld}(256) = 8 \text{ Bit/Abtastwert.}$

c)  $T_B = \frac{T_A}{N} = \frac{125 \mu\text{s}}{8} = 15.625 \mu\text{s.}$

d)  $T_B = \frac{15.625 \mu\text{s}}{32} = 0.488 \mu\text{s.}$

e)  $T_B = \frac{T_A}{Z \cdot N} = \frac{1}{2 \cdot f_{N,\max} \cdot Z \cdot N} \Leftrightarrow f_B = \frac{1}{T_B} = 2 \cdot f_{N,\max} \cdot Z \cdot N = 2.048 \text{ Mbit/s.}$

Hinweis:  $f_{N,\max}$  in Hz, aber  $f_B$  in bit/s!

**V2:**

- a) Komplexe Fourierreihendarstellung (siehe Skript zu NT1):

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{j2\pi \cdot n t / T_A} \quad \text{mit} \quad D_n = \frac{1}{T_A} \cdot \int_{-T_A/2}^{T_A/2} p_\delta(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot n t / T_A} dt.$$

Im Bereich  $-\frac{T_A}{2} \leq t \leq \frac{T_A}{2}$  gilt:  $p_\delta(t) = T_A \cdot \delta(t)$

$$t \neq 0 : \delta(t) = 0 ;$$

$$t = 0 : e^{-j2\pi \cdot n t / T_A} = 1$$

$$\Leftrightarrow D_n = \frac{T_A}{T_A} \cdot \underbrace{\int_{-T_A/2}^{T_A/2} \delta(t) dt}_{\text{nach Def.} = 1} = 1 \quad (\text{für alle } n)$$

$$\Leftrightarrow p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \cdot n t / T_A} \quad \text{q.e.d.}$$

b) Mit  $f_0 = \frac{n}{T_A} : e^{j2\pi \cdot n t / T_A} \circ \rightarrow \delta(f - \frac{n}{T_A}) \Leftrightarrow P_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_A}) .$

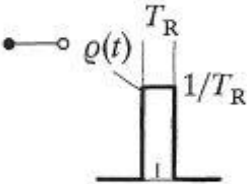
Die Fouriertransformierte eines Diracpulses im Zeitbereich (Abstand  $T_A$ , Gewicht  $T_A$ ) ist ein Diracpuls im Frequenzbereich mit Abstand  $1/T_A$  und Gewichten 1.

**V3:**

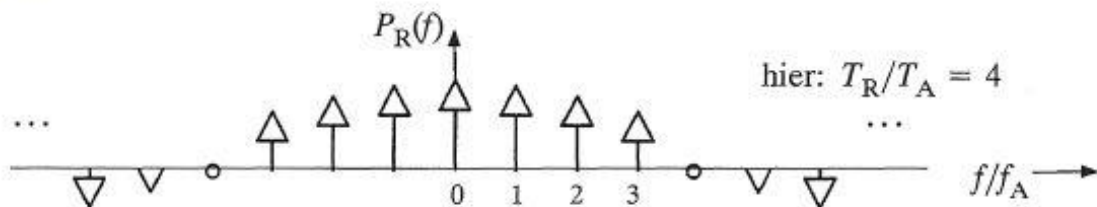
- a) Das Signal  $q_A(t)$  ergibt sich bei natürlicher Abtastung aus der Multiplikation von  $q(t)$  mit  $p_R(t)$ . In den Bereichen  $p_R(t) \neq 0$  gilt somit  $q_A(t) = q(t)$ .

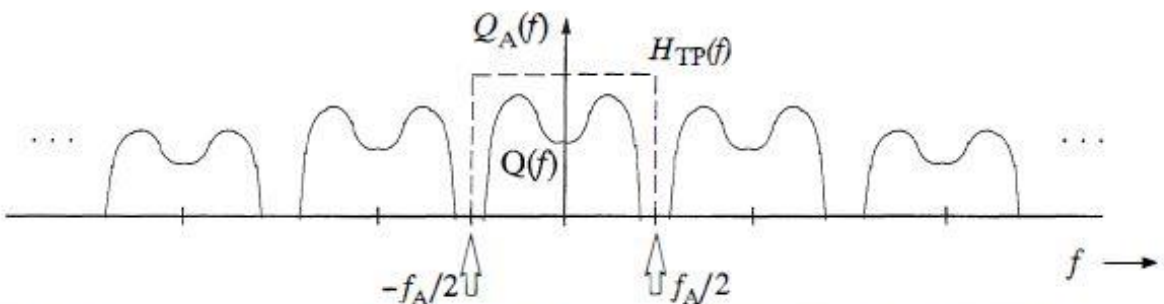
- b) Den Rechteckpuls kann man sich durch Faltung des Diracpulses mit der Rechteckfunktion entstanden denken:  $p_R(t) = p_\delta(t) * \varrho(t)$ .



- c) Nach Faltungssatz:  $P_R(f) = P_\delta(f) \cdot R(f)$  mit  $R(f) = \text{si}(\pi \cdot f \cdot T_R)$    $\Leftrightarrow P_R(f) = \text{si}(\pi \cdot f \cdot T_R) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot f_A)$

D.h., die Gewichte der Diracfunktionen sind jetzt nicht mehr konstant, sondern gemäß einer si-Funktion verändert.



- d) 

Bei Abtastung mit einem Rechteckpuls  $p_R(t)$  ist das Spektrum  $Q_A(f)$  nicht mehr periodisch, sondern die "Seitenbänder" sind gedämpft.

- e) Wie bei der Abtastung mit einem Diracpuls genügt hier ebenfalls ein idealer Tiefpaß zwischen  $\pm f_A/2$  (Küpfmüller-Tiefpaß, siehe Skizze bei Punkt d).

#### V4

- a)  $10 \cdot \lg(\rho_Q) = 20 \cdot \lg(M) = 20 \cdot \lg(2) \cdot \lg(M)$  in dB  $\approx 72.2$  dB .

$$\Leftrightarrow N = \lg(M) = 12 \Leftrightarrow M = 4096 .$$

- b) 1. Alle Amplitudenwerte gleichwahrscheinlich (z.B. sägezahnförmiges NF-Signal),  
2. lineare Quantisierung,  
3. Quantisierer ist genau an das Nachrichtensignal angepaßt ( $Q_{\max} = q_{\max}$ ).

- c) AM:  $10 \cdot \lg \frac{a^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_{N,\max}} = 70\text{dB}$  ; PCM:  $10 \cdot \lg \frac{a^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_{N,\max}} = 30\text{dB}$   $\Leftrightarrow$

Beim AM-System müßte man die Sendeleistung um den Faktor 10000 erhöhen.

- d) Nein. Aufgrund der Quantisierung ist hier kein größerer Wert als ca. 48 dB erreichbar.

## 9 Musterlösungen der Versuchsdurchführung

### D1:

- Das Signal wird durch nur 3 Parameter (Amplitude, Frequenz, Phase) beschrieben. Durch diese 3 Parameter ist der gesamte Signalverlauf  $q(t)$  festgelegt.
- Entsprechend dem Abtasttheorem muß gelten:  $f_A = 10 \text{ kHz}$ ,  $f_G = 5 \text{ kHz}$ .
- Ja, es ist  $v(t) = q(t)$ . Bei dieser Parameterwahl besteht  $Q(f)$  aus zwei Diracfunktionen, jeweils mit reellem Gewicht 0.5. Das Spektrum  $Q_A(f)$  ergibt sich aus der periodischen Fortsetzung von  $Q(f)$  im Abstand  $f_A$ . Insgesamt ergibt sich für  $Q_A(f)$  ein Diracpuls mit Impulsgewichten 1; die einzelnen Diraclinien liegen bei  $\pm 5 \text{ kHz}$ ,  $\pm 15 \text{ kHz}$ ,  $\pm 25 \text{ kHz}$  usw. Wegen  $H(f_G) = 0.5$  werden die beiden Linien bei  $\pm 5 \text{ kHz}$  halbiert, alle anderen unterdrückt. Dies führt dazu, daß  $v(t) = q(t)$  richtig rekonstruiert wird.
- Bei dieser Parameterwahl besteht  $Q(f)$  auch aus zwei Diracfunktionen bei  $\pm 5 \text{ kHz}$ , nun aber mit komplexen Gewichten. Bei der periodischen Fortsetzung von  $Q(f)$  im Abstand  $f_A$  addieren sich nur deren Realteile konstruktiv; dagegen löschen sich die Imaginärteile aus. Dies bedeutet, daß die Phaseninformation verlorengeht: Das Sinkensignal verläuft nun cosinusförmig (Phase  $0^\circ$ ) und ist gegenüber  $q(t)$  auch um den Amplitudenfaktor  $\cos(45^\circ) = 0.707$  verfälscht.
- Aus den unter e) genannten Gründen ergibt sich  $v(t) = 0$ .
- Nun fallen die Faltungsprodukte nicht zusammen; z.B. ist  $Q_A(5 \text{ kHz}) = Q(5 \text{ kHz})$  und  $Q_A(6 \text{ kHz}) = Q(-5 \text{ kHz})$ . Mit dem idealen Tiefpaß ( $f_G = 5.5 \text{ kHz}$ ) lassen sich somit auch die Signale nach d) und e) phasenrichtig rekonstruieren.
- Mit  $f_{N,\max} = 4 \text{ kHz}$  und  $f_A = 10 \text{ kHz}$  ist das Abtasttheorem erfüllt und  $v(t) = q(t)$ .
- Mit  $f_G/f_A = 0.35$  (d.h.  $f_G = 3.5 \text{ kHz}$ ) wird der Anteil bei  $f = 4 \text{ kHz}$  fälschlicherweise unterdrückt und es gilt  $v(t) \neq q(t)$ . Bei zu großer Grenzfrequenz (z.B.  $f_G = 6.5 \text{ kHz}$ ) wird dagegen der aufgrund der Abtastung entstehende Signalanteil bei  $f = 6 \text{ kHz}$  durch den Tiefpaß nicht entfernt; dies führt ebenfalls zu einer Signalverfälschung.

### D2:

- Bei natürlicher Abtastung ist innerhalb der durch den Rechteckpuls vorgegebenen Zeitintervalle das abgetastete Signal  $q_A(t)$  gleich dem Nachrichtensignal  $q(t)$ , außerhalb Null. Bei diskreter Abtastung setzt sich  $q_A(t)$  aus Rechteckimpulsen zusammen, deren unterschiedliche Amplituden durch die Abtastwerte von  $q(t)$  bestimmt werden.
- Bei natürlicher Abtastung ist

$$q_A(t) = q(t) \cdot p_R(t) = q(t) \cdot [p_\delta(t) * \varrho(t)] .$$

Dagegen gilt bei diskreter Abtastung:

$$q_A(t) = [q(t) \cdot p_\delta(t)] * \varrho(t) .$$

- Natürliche Abtastung: Diskrete Abtastung:

$$Q_A(f) = Q(f) * [P_\delta(f) \cdot R(f)] ,$$

$$Q_A(f) = [Q(f) * P_\delta(f)] \cdot R(f) .$$



- d) Bei natürlicher Abtastung erfolgt zuerst die Multiplikation des Diracspektrums  $P_\delta(f)$  mit  $R(f)$ , anschließend die Faltung mit  $Q(f)$ . Im Bereich von  $-5\text{ kHz} \dots 5\text{ kHz}$  sind deshalb alle Spektrallinien gleich hoch; wegen  $T_R/T_A = 0.5$  sind diese allerdings nur halb so hoch wie diejenigen von  $Q(f)$ . Die Spektrallinien im Bereich von  $\pm 5\text{ kHz} \dots \pm 15\text{ kHz}$  sind ebenfalls alle gleich hoch, aber (entsprechend der si-Funktion) um den Faktor 0.636 kleiner als diejenigen im inneren Bereich.
- e) Der MQF zwischen Sinken- und Quellensignal ist nun mit  $2.9 \cdot 10^{-3}$  deutlich größer. Dies hat folgenden Grund: Bei diskreter Abtastung treten durch die Faltung von  $Q(f)$  mit  $P_\delta(f)$  konstant hohe Linien auf, wie es auch bei Abtastung mit einem Diracpuls der Fall ist. Durch die anschließende Multiplikation mit  $R(f)$  entsprechend c) werden diese Spektrallinien nun unterschiedlich gewichtet. Die Folge ist, daß auch im Bereich von  $-5\text{ kHz} \dots 5\text{ kHz}$  alle Linien von  $Q_A(f)$  unterschiedlich hoch sind. Mit dem Kuppfmüller-Tiefpaß zur Signalrekonstruktion gilt nun  $V(f) = Q_A(f) \cdot H(f) = Q(f) \cdot R(f)$ , so daß der Fehler durch die diskrete Abtastung auch in  $v(t)$  erhalten bleibt. Der si-förmige Abfall muß durch den inversen Verlauf korrigiert werden. Damit muß das Rekonstruktionsfilter folgenden Frequenzverlauf besitzen:

$$f) \quad H(f) = \frac{1}{\text{si}(\pi f T)} \cdot H_{\text{KTP}}(f) .$$

Mit diesem Filter, das im Programm als "1/si-KTP" bezeichnet wird, ist der mittlere quadratische Fehler zwischen Sinken- und Quellensignal wieder vernachlässigbar klein, solange  $H(0) = T_A/T_R = 2$  gilt.

### D3:

- a) Bei sägezahnförmigem Nachrichtensignal ist auch das Fehlersignal sägezahnförmig (vgl V12.2a). Das Fehlersignal  $\varepsilon(t)$  bei sinusförmigem Nachrichtensignal unterscheidet sich demgegenüber besonders im flachen Signalverlauf.

b) NF-Signal	$P_S$ (simuliert)	$P_Q$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (berechnet)
Sägezahn	0.333	$1.31 \cdot 10^{-3}$	24.07 dB	24.06 dB
Cosinus	0.500	$1.48 \cdot 10^{-3}$	25.30 dB	—

c) NF-Signal	$P_S$ (simuliert)	$P_Q$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (berechnet)
Sägezahn	0.333	$5.10 \cdot 10^{-6}$	48.15 dB	48.12 dB
Cosinus	0.500	$4.75 \cdot 10^{-6}$	50.23 dB	—
Muster-signal 1	0.244	$5.02 \cdot 10^{-6}$	46.87 dB	—



- d) Das erreichbare S/N-Verhältnis  $\rho_Q$  hängt auch vom Quellensignal ab. Die Näherung  $\rho_Q = M^2$  gilt nur für das sägezahnförmige Quellensignal. Bei anderer Signalform sind Abweichungen von ca. 2 dB durchaus im Bereich des Möglichen.
- e)  $q_A(v \cdot T_A)$  ist wertkontinuierlich,  $q_Q(v \cdot T_A)$  dagegen wertdiskret mit  $M = 256$  Stufen. Die Signale  $q_C(t)$  und  $v_C(t)$  sind binär. Die Zuordnung von  $q_Q$  zu  $q_C$  geschieht nach der Dualcodierung. Bei den Voraussetzungen gilt  $v_C(t) = q_C(t)$  und  $v_Q(t) = q_Q(t)$ . Zu den Abtastzeitpunkten  $v \cdot T_A$  hat das Sinkensignal die gleichen Werte wie das quantisierte Signal:  $v(v \cdot T_A) = q_Q(v \cdot T_A) \neq q(v \cdot T_A)$ . Zwischen den Abtastwerten wird auch das Fehlersignal  $\varepsilon_{v_q}(t) = v(t) - q(t)$  durch den Kूपfmüller-Tiefpaß interpoliert.
- f)  $Q_{\max} = 0.7: 10 \cdot \lg(\rho_v) = 25.99 \text{ dB}$  (Quantisierung im Sättigungsbereich),  
 $Q_{\max} = 1.3: 10 \cdot \lg(\rho_v) = 45.83 \text{ dB}$  (unnötig große Quantisierungsintervalle).

In beiden Fällen ist ein merkbarer Störabstandsverlust feststellbar. Im ersten Fall ( $Q_{\max}$  zu klein) hängt das damit zusammen, daß das Signal begrenzt wird. Ist dagegen  $Q_{\max} > q_{\max}$ , so sind die Quantisierungsintervalle größer als erforderlich. Dagegen liefert  $Q_{\max} = 0.8: 10 \cdot \lg(\rho_v) = 49.61 \text{ dB}$ . Dieser Störabstand ist um ca. 2.7 dB besser als bei  $Q_{\max} = 1$ . Der Grund hierfür ist, daß der maximale Abtastwert des Signalausschnitts nur 0.775 beträgt und nicht  $q_{\max} = 1$ . Bei einer anderem Phasenverlauf wäre jedoch  $Q_{\max} = 1$  der optimale Wert.

#### D4:

- a)  $q_K = f(q_A)$ : Kompressorkennlinie (kleine Werte werden gespreizt, große gestaucht); bei gleichmäßiger Quantisierung ist diese Kennlinie eine Gerade.  
 $q_Q = f(q_K)$ : Kennlinie bei gleichmäßiger Quantisierung (beschreibbar durch  $M$ ).  
 $q_Q = f(q_A)$ : Quantisierungskennlinie allgemein; bei gleichmäßiger Quantisierung ist diese Kennlinie gleich  $q_Q = f(q_K)$ .  
 $v_Q = f(v_E)$ : Expanderkennlinie (Gegenstück zur Kompressorkennlinie  $q_K = f(q_A)$ ).  
 $v_Q = f(q_A)$ : Kennlinie des Gesamtsystems; berücksichtigt die kleineren Intervalle innen und die größeren außen.
- b) Der Vorteil der ungleichmäßigen Quantisierung, kleinere Signalwerte feiner aufzulösen, kommt bei diesem Nachrichtensignal nicht zum Tragen; der Störabstand bewertet alle Amplituden gleichermaßen. Hier führt die nichtlineare Quantisierung mit der A-Kennlinie sogar zu einer Verschlechterung



	Quantisierungskennlinie		
	gleichmäßig	mit $A = 87.56$	mit 13-Segmente
Mustersignal 1 (MS1)	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 4.05 \cdot 10^{-6}$ $\varrho_v = 47.81 \text{ dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 6.32 \cdot 10^{-5}$ $\varrho_v = 35.88 \text{ dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 3.82 \cdot 10^{-5}$ $\varrho_v = 38.06 \text{ dB}$
$0.1 \cdot \text{MS1}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 6.23 \cdot 10^{-6}$ $\varrho_v = 25.94 \text{ dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 2.97 \cdot 10^{-7}$ $\varrho_v = 39.15 \text{ dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 3.62 \cdot 10^{-7}$ $\varrho_v = 38.30 \text{ dB}$
$0.9 + 0.1 \cdot \text{MS1}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 6.82 \cdot 10^{-6}$ $\varrho_v = 50.85 \text{ dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 1.15 \cdot 10^{-4}$ $\varrho_v = 38.60 \text{ dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 6.54 \cdot 10^{-5}$ $\varrho_v = 41.07 \text{ dB}$

- c) Bei diesem Signal ist durch eine nichtlineare Quantisierung aufgrund der kleinen Amplitudenwerte eine Verbesserung zu erzielen. Eine gleichmäßige Quantisierung mit  $Q_{\max} = 0.1$  würde allerdings auch hier zu  $10 \cdot \lg(\varrho_v) = 47.81 \text{ dB}$  führen.
- d) Das Signal nach Punkt c) war für die Anwendung einer gleichmäßigen Quantisierung ungünstig. Ein Signal mit ausschließlich großen Signalwerten ist dagegen für die Anwendung einer ungleichmäßigen Quantisierung äußerst ungünstig, da nur große Amplitudenwerte auftreten.
- e) Bei der A-Kennlinie sind alle Quantisierungsintervalle unterschiedlich, nicht jedoch bei der 13-Segment-Kennlinie. Bei letzterer ist die Intervallbreite  $\Delta$  in jedem der 13 Segmente gleich, da auch die Steigung in den einzelnen Abschnitten der bereichsweise linear beschreibbaren Kennlinie  $q_K = f(q_A)$  jeweils konstant ist.
- f) Die unter Punkt b) bis d) gemachten Aussagen gelten für die 13-Segment-Kennlinie in gleicher Weise wie für die A-Kennlinie.

**D5:**

- a) Dualcode: LOL LOO OLL LOO LOL LOO OLL OLO OOL OOO  
Graycode: LLL LLO OLO LLO LLL LLO OLO OLL OOL OOO
- b) Bei der Übertragung des 3. Quantisierungswertes wurde das letzte Bit (LSB) von L  $\rightarrow$  O verändert; der Fehler beträgt hier nur ein Quantisierungsintervall. Dagegen ist der Fehler bei der Übertragung des 5. Quantisierungswertes deutlich größer, da hier das erste Bit (MSB) verfälscht wurde. Damit ergibt sich eine Verfälschung um 4 Stufen.
- c) Beim Gray-Code haben die beiden Bitfehler folgende Auswirkungen: von OLO nach LLO (ein Intervall) bzw. von LLL nach OLL (drei Intervalle). Eine Verfälschung von OOO nach LOO (oder umgekehrt) würde das decodierte Signal sogar um 7 Quantisierungsintervalle verändern.
- d) Wie erwartet.

- e) Die Auswirkung des LSB-Fehlers ist mit dem Auge fast nicht zu erkennen. Trotzdem beträgt der Störabstandsverlust ca. 1.7 dB. In den beiden anderen Fällen ergeben sich jeweils sehr große Abweichungen zwischen  $v(t)$  und  $q(t)$ , und  $10 \cdot \lg(\rho_v)$  ist sehr klein.

	kein Bitfehler	ein Bitfehler (LSB)	ein Bitfehler (3. Bit)	ein Bitfehler (MSB)
$10 \cdot \lg(\rho_v)$	47.81 dB	46.15 dB	16.19 dB	4.12 dB

- f)  $N=4$ :
- |        |         |
|--------|---------|
| Nr. 0: | O O O O |
| Nr. 1: | O O O L |
| Nr. 2: | O O L L |
| Nr. 3: | O O L O |
| Nr. 4: | O L L O |
| Nr. 5: | O L L L |
| Nr. 6: | O L O L |
| Nr. 7: | O L O O |
- |         |         |
|---------|---------|
| Nr. 8:  | L L O O |
| Nr. 9:  | L L O L |
| Nr. 10: | L L L L |
| Nr. 11: | L L L O |
| Nr. 12: | L O L O |
| Nr. 13: | L O L L |
| Nr. 14: | L O O L |
| Nr. 15: | L O O O |

wie  $N=3$                       von unten nach oben

- g) Ein LSB-Fehler hat die gleichen Auswirkungen wie beim Dualcode. Bei Fehlern im mittleren Bereich sind die Auswirkungen meist weniger stark als beim Dualcode. Ein MSB-Fehler bewirkt dagegen fast eine Vorzeichenumkehrung. Der MQF ist dann um so größer, je größer der Betrag des Abtastwertes ist.

	kein Bitfehler	ein Bitfehler (LSB)	ein Bitfehler (3. Bit)	ein Bitfehler (MSB)
$10 \cdot \lg(\rho_v)$	47.81 dB	46.15 dB	29.68 dB	0.28 dB

# Praktikum Nachrichtentechnik (LB)

## Versuch: Amplitudenmodulation (AM)

### Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen .....	5
1.1	Allgemeines .....	5
1.1.1	Blockschaltbild eines Nachrichtenübertragungssystems .....	5
1.1.2	Zielsetzungen von Modulation und Demodulation .....	6
1.1.3	Allgemeingültiges Modell der Modulation .....	7
1.1.4	Darstellungsformen harmonischer Schwingungen .....	8
1.2	Amplitudenmodulation (AM) .....	10
1.2.1	Ideale Amplitudenmodulation .....	10
1.2.2	ZSB-Amplitudenmodulation mit Träger .....	13
1.2.3	Zeigerdiagramm und Ortskurve .....	15
1.2.4	ESB-Amplitudenmodulation .....	17
1.3	AM-Demodulation .....	20
1.3.1	Synchrondemodulation .....	20
1.3.2	Hüllkurvendemodulation .....	21
1.4	Verzerrungen .....	23
1.4.1	Lineare Kanalverzerrungen .....	23
1.4.2	Lineare Verzerrungen im demodulierten AM-Signal .....	24
1.4.3	Nichtlineare Verzerrungen durch Hüllkurvendemodulation .....	24
2	Vorbereitungsfragen .....	27
2.1	Spektrum der Amplitudenmodulation .....	27
2.2	Einseitenband-Amplitudenmodulation .....	28
2.3	Synchrondemodulation .....	30
2.4	Nichtlineare Verzerrungen .....	31
2.5	Lineare Verzerrungen .....	33
3	Versuchsdurchführung .....	35
3.1	Reelles und komplexes Signal .....	36

---

3.2 Signale und Spektren bei ZSB-Modulation.....	37
3.3 Synchrondemodulation.....	40
3.4 Zeigerdiagramm und Ortskurve .....	42
3.5 Hüllkurvendemodulation .....	44
3.6 Einseitenbandmodulation.....	46
3.7 Lineare Verzerrungen.....	48
4 Musterlösungen der Vorbereitungsfragen .....	50
5 Musterlösungen der Versuchsdurchführung .....	55

**Vorbemerkung:**

Die Versuche *Amplitudenmodulation (AM)* und *Winkelmodulation (WM)* des Praktikums *Nachrichtentechnik (LB)* sollen die in Vorlesungen und Übungen erläuterte Theorie der analogen Amplituden-, Frequenz- und Phasenmodulation anschaulich darstellen, sowie deren wesentliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede verdeutlichen. Behandelt werden neben den systemtheoretischen Beschreibungen der in der Praxis eingesetzten Modulatoren und Demodulatoren insbesondere die Auswirkungen von linearen und nichtlinearen Verzerrungen sowie die Beeinträchtigung durch Rauschen. Weiterhin wird auf die Möglichkeit der Basisbanddarstellung von Bandpasssignalen näher eingegangen.

Vielleicht erscheint es manchen von Ihnen als unlogisch und zudem im Zeitalter der Digitalsysteme auch als unangemessen, dass zwei Versuche eines Praktikums namens *Nachrichtentechnik* die alt her bekannten Analogsysteme behandeln. Ich kann mich dieser Meinung aus zwei Gründen nicht anschließen: Zum einen sind auch die heute eingesetzten digitalen Modulationsverfahren (z.B. ASK, FSK, BPSK, QPSK, DQPSK, QAM) nichts anderes als - eventuell leicht abgewandelte - Varianten der Analogverfahren mit digitalem Nachrichtensignal. Zum anderen lässt sich die typische nachrichtentechnische Vorgehensweise bei der Beschreibung und Untersuchung von Bandpasssystemen anhand von AM, FM und PM sehr viel allgemeingültiger aufzeigen als bei ASK, FSK und PSK.

Die vorliegende Anleitung gliedert sich in die drei Kapitel *Theoretische Grundlagen*, *Vorbereitungsfragen* und *Versuchsdurchführung*. Anhand dieses Heftes und des zugrundeliegenden Lehrprogramms „AMV“ sollte ein Teilnehmer mit Grundkenntnissen der Nachrichtentechnik in der Lage sein, sich die wesentlichen Merkmale der analogen Modulationsverfahren AM und WM in jeweils etwa 6 Stunden (jeweils ca. 3 Stunden für Vorbereitung sowie Versuchsdurchführung) zu erarbeiten.

Die Musterlösungen der Vorbereitungsfragen und der Versuchsdurchführung sind am Ende des Heftes (ab Seite 50) beigefügt. Ich möchte an dieser Stelle - ebenso ausdrücklich wie überflüssig - erwähnen, dass Sie sicher einen besseren Lernerfolg erzielen, wenn Sie diese Musterlösungen nur zur Kontrolle Ihrer Ergebnisse benutzen. Auf Seite 4 finden Sie noch eine Zusammenstellung einschlägiger Literaturstellen, die für eine erfolgreiche Versuchsdurchführung durchaus nützlich sein können, jedoch nicht vorausgesetzt werden. Hierfür reicht diese Anleitung aus.

Das interaktive WINDOWS-Demonstrations- und Lehrprogramm „AMV“ wurde von Herrn Dipl.-Ing. Andreas Widmann im Zeitraum vom 1.6.1995 bis zum 11.1.1996 im Rahmen seiner von mir betreuten Diplomarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Technischen Universität München mit großer Sorgfalt konzipiert und implementiert. Das gezippte Windows-Programm finden Sie auf meiner Homepage unter [www.lnt.ei.tum.de](http://www.lnt.ei.tum.de) unter Mitarbeiter → Söder → Links (deutsche Version!). Die Installation des ausführbaren Programms erfolgt wie unter WINDOWS üblich. Ebenso gelten für die Programmbeutzung die unter WINDOWS üblichen Konventionen.

Ich danke meinen Kollegen Prof. Dr.-Ing. Norbert Hanik und Dr.-Ing. Klaus Eichin für viele wertvolle Diskussionen und Anregungen. Ebenso bedanke ich mich herzlich bei Herrn Klaus Madl, der 2012 im Rahmen seiner Bachelorarbeit unter der Betreuung von Dr.-Ing. Christoph Hausl ein auf GNU Radio basierendes Demonstrationsprogramm erstellt hat, das im Rahmen des Versuchs „WM“ ebenfalls zum Einsatz kommt. Außerdem hat er mit großer Sorgfalt die Anleitungen an den Wissensstand der Studenten im Lehramt an Beruflichen Schulen (LB) angepasst.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg und etwas Spaß beim Durcharbeiten dieses Versuches.

München, im April 2013

Günter Söder



**Literaturhinweise:**

- /1/ Hanik, N.: Vorlesungsmanuskript *Nachrichtentechnik 1 (LB)*
- /2/ Hanik, N.: Vorlesungsmanuskript *Nachrichtentechnik 2 (LB)*
- /3/ Mäusl, R.: *Analoge Modulationsverfahren*. Heidelberg: Hüthig-Verlag, 1988
- /4/ Söder, G.: *Modellierung, Simulation und Optimierung von Nachrichtensystemen*. Berlin: Springer-Verlag, 1993
- /5/ Söder, G. et al.: *Lerntutorial LNTwww (www.LNTwww.de)*, Buch Modulationsverfahren, Kapitel 2

**Hinweise zum Lerntutorial LNTwww:**

Die Anleitung ist zur Versuchsvorbereitung ausreichend. Mehr Informationen zum Thema finden Sie in Kapitel 2 des LNTwww-Buches *Modulationsverfahren*. Dort finden Sie auch einige passende Lernvideos (LV) und interaktive Multimedia-Elemente (IM):

- Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (LV, 2-teilig, Dauer 5:50 min bzw. 7:40 min),
- Einfluss einer Bandbegrenzung bei Sprache und Musik (IA),
- Zeigerdiagramm-Darstellung des analytischen Signals (IA),
- Ortskurve-Darstellung des äquivalenten TP-Signals (IA),
- Eigenschaften des Synchrondemodulators bei ZSB und ESB (IM)

**Hinweise zur Programmbedienung:**

Zur Versuchsdurchführung benötigen Sie das Programm „amv“ des Lernsoftwarepakets „LNTwin“. Dieses können Sie von der Homepage des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik herunterladen.



# 1 Theoretische Grundlagen

**Inhalt:** Dieser Versuch soll die Eigenschaften des analogen Modulationsverfahrens *Amplitudenmodulation* und die zugehörigen Demodulatoren anhand von Signalverläufen, Spektren, Zeigerdiagrammen und Ortskurven verdeutlichen. Außerdem werden die Auswirkungen von (linearen und nichtlinearen) Verzerrungen auf das demodulierte Signal beschrieben und auf die Möglichkeit der Basisbanddarstellung von Bandpass-Signalen ausführlicher eingegangen.

## 1.1 Allgemeines

Die im Folgenden definierten und interpretierten Systemgrößen spielen nicht nur zur Beschreibung der klassischen analogen Modulationsverfahren eine große Rolle, sondern sind auch für das Verständnis der heute üblichen digitalen Modulationsverfahren wie *ASK (Amplitude Shift Keying)*, *FSK (Frequenz Shift Keying)* und *PSK (Phase Shift Keying)* von großer Wichtigkeit.

### 1.1.1 Blockschaltbild eines Nachrichtenübertragungssystems

Abbildung 1 zeigt ein sehr allgemeines Modell eines Nachrichtenübertragungssystems, das für Analog- und Digitalübertragung in gleicher Weise gültig ist. Die Nachrichtenquelle liefert das zu übertragende Quellsignal  $q(t)$ , das sowohl ein Sprach- bzw. Musiksignal (z.B. bei Telefon und Rundfunk), ein Bildsignal (z.B. beim Fernsehen bzw. Satellitenbilder) oder ein Datensignal (z.B. zur Prozesssteuerung, Datei im Internet) bezeichnen kann.

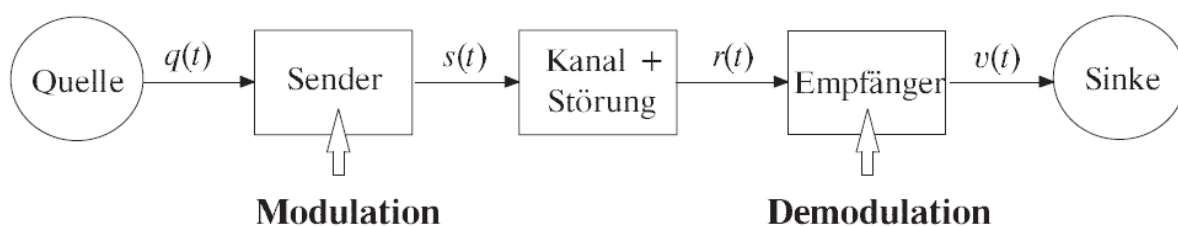


Abbildung 1: Allgemeines Modell eines Nachrichtenübertragungssystems

Das Quellsignal  $q(t)$  soll über den Kanal, der beispielsweise eine elektrische Leitung (Zweidrahtleitung, Koaxialkabel), ein Lichtwellenleiter (Glasfaser) oder eine Funkverbindung (z.B. Mobilfunk, Richtfunk, Satellitenverbindung etc.) sein kann, zur räumlich entfernten Senke übertragen werden. Diese kennzeichnet z.B. einen Anrufaufzeichner, ein Videoband oder einen Host im Internet.

Das Sinkensignal  $v(t)$  am anderen Ende des Übertragungssystems soll sich „möglichst wenig“ vom Quellsignal  $q(t)$  unterscheiden. Im Idealfall sollte  $v(t) = q(t)$  sein. Ist das Nachrichtensystem wenigstens verzerrungs- und rauschfrei, so muss gelten:

$$v(t) = \alpha \cdot q(t - \tau). \quad (1)$$

Hierbei beschreibt  $\alpha < 1$  einen frequenzunabhängigen Dämpfungsfaktor und  $\tau$  eine (bei unidirektionaler Übertragung nicht weiter störende) Signalverzögerung.

Häufig ist der Übertragungskanal für eine direkte Übertragung des Quellsignals  $q(t)$  ungeeignet, z.B. weil dieses für ihn ungünstige Frequenzen beinhaltet. Abhilfe schafft hier möglicherweise eine geeignete Signalumsetzung beim Sender (*Modulation*) und die entsprechende Signalarücksetzung beim Empfänger (*Demodulation*).

### 1.1.2 Zielsetzungen von Modulation und Demodulation

#### g) Anpassung des Sendesignals an die Übertragungseigenschaften des Kanals:

Verschiebung des Nachrichtensignals in eine andere Frequenzlage mit günstigeren Kanaleigenschaften durch Zusetzen eines höherfrequenten Trägersignals.

##### Beispiele:

- *Rundfunk*: Sprache und Musik im Frequenzbereich von 15 Hz ... 20 kHz (sehr gute Qualität); Funkübertragung ist jedoch erst ab ca. 100 kHz möglich; deshalb vorher Umsetzung auf 525 ... 1610 kHz (MW) bzw. 87.5 ... 108 MHz (UKW).
- *Fernsehen*: Bildsignal im Bereich 0 ... 5 MHz (gute Qualität für Analogtechnik) wird umgesetzt auf 41 ... 68 / 174 ... 223 MHz (VHF) bzw. 470 ... 850 MHz (UHF).
- *Mobilfunk*: C-Netz (analog, 450 MHz), D-Netz (digital, 900 MHz, nur wenige Kanäle von Telekom und Vodafone), E-Netz (digital, 1.8 GHz, viele Kanäle aller deutschen Mobilfunkbetreiber).
- *Glasfaser*: Umsetzung des elektrischen Signals in Licht, d.h. auf Frequenzen zwischen 200 und 350 THz (entsprechend 1.55 bis 0.85  $\mu\text{m}$  Wellenlänge).
- *Modem*: Umsetzung des niederratigen (z.B. rechteckförmigen) Datensignals in ein höher-frequentes (sinusförmiges) Signal, da eine Telefonleitung für sehr niedrige Frequenzen („Gleichstrom“) ungeeignet ist.

#### h) Anpassung an das Störspektrum:

Verschieben des Nutzsignals in einen Frequenzbereich, in dem (äußere) Störungen nur eine untergeordnete Rolle spielen.

#### i) Bündelung von Kanälen (Frequenzmultiplex):

Mehrere Sprachsignale (Kanäle) werden sendeseitig mit unterschiedlichen Trägerfrequenzen moduliert, zusammengefasst und gemeinsam übertragen. Die notwendige Kanalseparierung beim Empfänger erfolgt durch Demodulation mit unterschiedlichen Trägerfrequenzen und anschließender Filterung.

##### Beispiel: Hierarchischer Aufbau des früheren analogen Fernsprechnetzes:

- Kanäle à 4 kHz ergeben eine Vorgruppe (12 kHz),
- 4 Vorgruppen à 12 kHz ergeben eine Primärgruppe (48 kHz),
- bis zu 10800 Kanäle (V10800) mit ca. 60 MHz Gesamtbandbreite.

#### j) Verbesserung des Signalrauschabstandes (Qualität):

Bessere Rauschunterdrückung (messbar durch einen größeren Störabstand) und damit eine höhere Qualität auf Kosten einer größeren Bandbreite. Beispiele hierfür sind FM (Frequenzmodulation) gegenüber AM, PCM (Pulsmodulation), Spread Spectrum-Systeme.

### 1.1.3 Allgemeingültiges Modell der Modulation

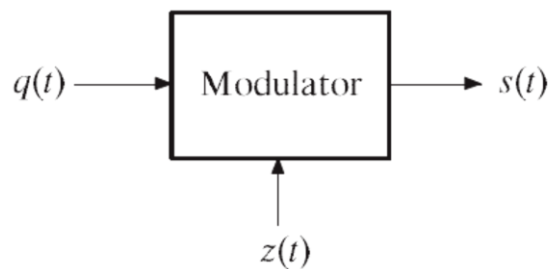


Abbildung 2: Ein sehr allgemeines Modell eines (analogen) Modulators.

Das modulierte Signal  $s(t)$ , im Folgenden auch Sendesignal genannt, wird aus dem (niederfrequenten) Nachrichtensignal  $q(t)$  unter Zuhilfenahme eines höherfrequenten Trägersignals  $z(t)$  erzeugt (Abbildung 2). Dieses sei eine harmonische Schwingung, gekennzeichnet durch die Amplitude  $\hat{z}$ , die Träger(kreis)frequenz  $\omega_T = 2\pi f_T$  und die Trägerphase  $\varphi_T$ :

$$z(t) = \hat{z} \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T). \quad (2)$$

Entsprechend dieser (auch bei der Fourierreihendarstellung verwendeten) Definition bedeutet ein positiver Wert von  $\varphi_T$  eine Verzögerung gegenüber einem cosinusförmigen Verlauf. Beispielsweise steht der Phasenwinkel  $\varphi_T = 90^\circ$  für das Sinussignal.

Anzumerken ist, dass zur Beschreibung der Modulationsverfahren meist der Phasenwinkel mit umgekehrtem Vorzeichen verwendet wird. Um mit der einschlägigen Literatur übereinzustimmen, wird dies auch hier berücksichtigt. Mit  $\Phi_T = -\varphi_T$  gilt somit auch:

$$z(t) = \hat{z} \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \Phi_T). \quad (3)$$

Das Sendesignal lautet in allgemeiner (allerdings etwas vereinfacht dargestellter) Form:

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(\omega(t) \cdot t + \Phi(t)). \quad (4)$$

Hierbei bezeichnen:  $a(t)$  eine zeitabhängige Amplitude,  
 $\omega(t)$  eine zeitabhängige (Kreis-)Frequenz,  
 $\Phi(t)$  eine zeitabhängige Phase.

Als Sonderfälle sind in Gl. (4) enthalten:

- Amplitudenmodulation (AM):  
Hier ändert sich der Verlauf der Amplitude  $a(t)$  entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$ , während die Frequenz  $\omega(t) = \omega_T$  und die Phase  $\Phi(t) = \Phi_T$  jeweils konstant sind.
- Phasenmodulation (PM):  
Bei konstanter Amplitude  $a(t) = \hat{z}$  und konstanter Frequenz  $\omega(t) = \omega_T$  ändert sich die Phasenlage  $\Phi(t)$  entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$ .
- Frequenzmodulation (FM):  
Die Amplitude  $a(t) = \hat{z}$  und die Phase  $\Phi(t) = \Phi_T$  sind entsprechend dem Trägersignal  $z(t)$  konstant, der Frequenzverlauf  $\omega(t)$  ändert sich mit  $q(t)$ . *Hinweis:* Im Versuch *Winkelmodulation* wird gezeigt werden, dass bei FM die Verhältnisse doch etwas komplizierter sind.

Gemeinsam ist all diesen Modulationsarten, dass  $s(t)$  ein Bandpasssignal ist und somit in allen Fällen entsprechend den Abschnitten 1.1.4 bzw. 1.2.3 dargestellt werden kann.

### 1.1.4 Darstellungsformen harmonischer Schwingungen

Die Darstellungsmöglichkeiten eines Bandpasssignals sollen hier am einfachsten Beispiel, nämlich für ein unmoduliertes Signal  $s(t)$ , aufgezeigt werden. Die in Abbildung 3 skizzierte harmonische Schwingung ist durch drei Parameter für alle Zeiten  $t$  eindeutig festgelegt.

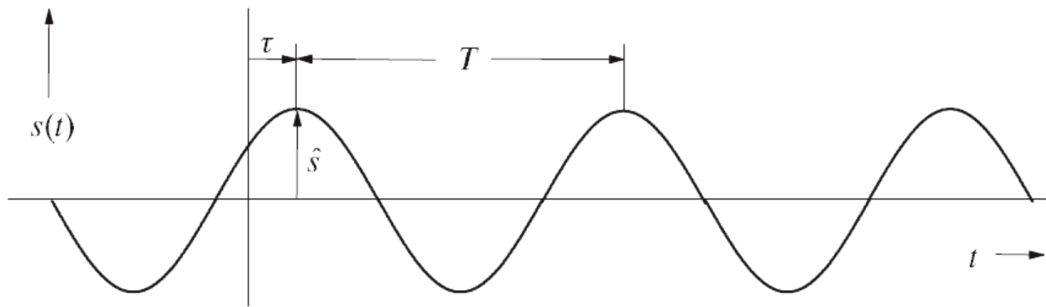


Abbildung 3: Harmonische Schwingung  $s(t)$ .

Als Parameter wurden hier die Amplitude  $\hat{s}$ , die Periodendauer  $T$  sowie die Verschiebung  $\tau$  gegenüber einer Cosinusfunktion gewählt. Somit kann geschrieben werden:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (t - \tau)}{T}\right). \tag{5}$$

Um auf die übliche Darstellungsform entsprechend Gl. (2),

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T), \tag{6}$$

zu kommen, sind folgende Umrechnungen notwendig:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T}, \quad \varphi_T = \omega_T \cdot \tau = 2\pi \cdot \frac{\tau}{T}. \tag{7}$$

Der Phasenwinkel  $\varphi_T$  hat somit das gleiche Vorzeichen wie die Verzögerungszeit  $\tau$ ,  $\Phi(t)$  jedoch das umgekehrte. Ein positiver Wert von  $\varphi_T$  sagt deshalb aus, dass - wie beispielsweise in Abbildung 3 dargestellt - die Schwingung gegenüber einem Cosinussignal nachläuft.

Die Spektralfunktion  $S(f) \leftrightarrow s(t)$  besteht aus zwei Diracfunktionen bei  $\pm f_T$ , wobei  $f_T = \omega_T / (2\pi) = 1/T$  ist, und (im Allgemeinen) komplexen Impulsgewichten:

$$S(f) = \frac{\hat{s}}{2} \cdot e^{-j\varphi_T} \cdot \delta(f - f_T) + \frac{\hat{s}}{2} \cdot e^{j\varphi_T} \cdot \delta(f + f_T). \tag{8}$$

Es wird sich in den späteren Abschnitten zeigen, dass durch die Einführung des analytischen Signals  $s_+(t)$  und der dazugehörigen Spektralfunktion  $S_+(f) \leftrightarrow s_+(t)$  manche Eigenschaften der Bandpasssignale leichter interpretiert werden können. Dabei gilt:

$$S_+(f) = S(f) \cdot (1 + \text{sign}(f)), \tag{9}$$

wobei die Signumfunktion für positives  $f$  gleich +1 und für negatives  $f$  gleich -1 ist. Die durch Gl. (9) beschriebene Operation entspricht demnach einem „Abschneiden“ der negativen und dem Verdoppeln der positiven Frequenzanteile der Spektralfunktion  $S(f)$ .

Abbildung 4 verdeutlicht diesen Sachverhalt für ein cosinusförmiges Signal ( $\varphi_T = 0$ ).

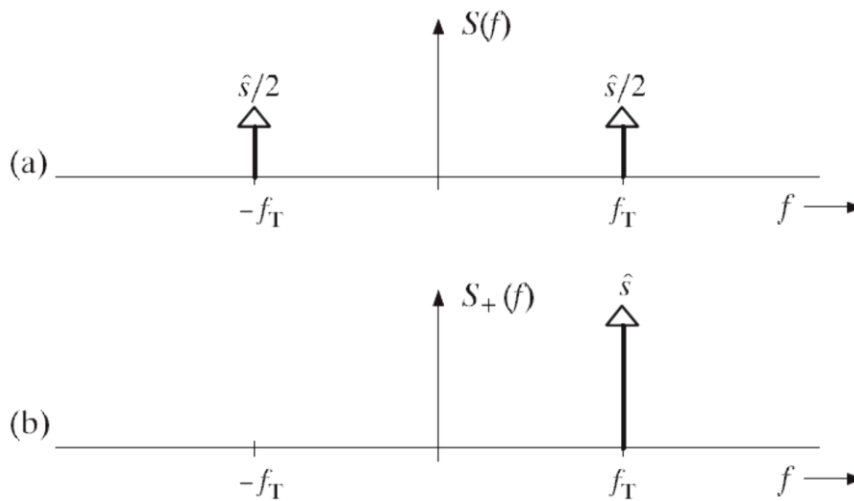
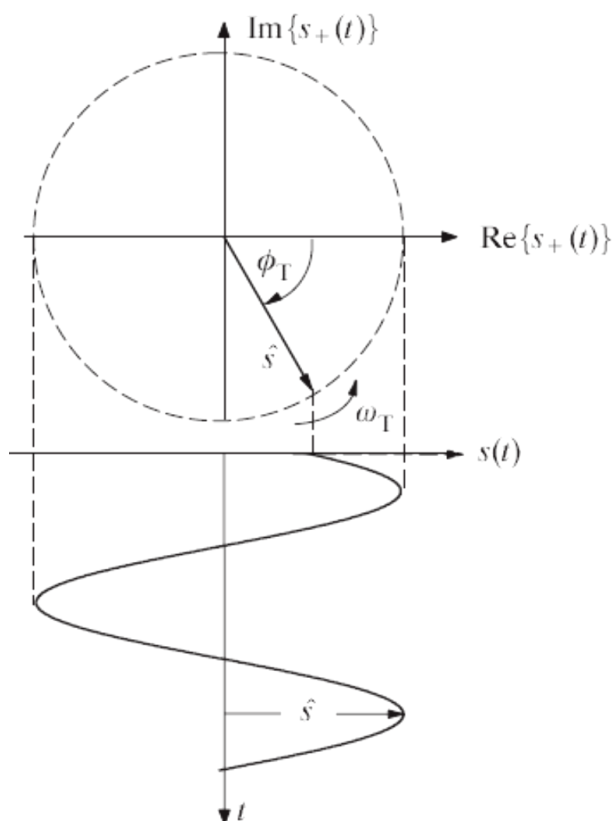


Abbildung 4: (a) Spektrum  $S(f)$  eines cosinusförmigen Signals  $s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$ ,  
(b) Spektrum  $S_+(f)$  des dazugehörigen analytischen Signals  $s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j\omega_T t}$ .

Das zu  $s(t)$  gemäß Gl. (6) gehörige analytische Signal lautet (mit der Phase  $\varphi_T$ ):

$$s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j(\omega_T t - \varphi_T)}. \quad (10)$$

Dieses Ergebnis erhält man aus der Fourierreücktransformation von  $S_+(f)$  durch Anwendung des Verschiebungssatzes (vgl. Kapitel 3, Versuch 3.1). Abbildung 5 zeigt das analytische Signal der harmonischen Schwingung  $s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t - 60^\circ)$  in der komplexen Ebene.



1. Bei  $t=0$  gilt mit  $\phi_T = -60^\circ$ :  
$$s_+(t=0) = \hat{s} \cdot e^{j\phi_T}.$$
2. Zeiger dreht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ("Kreisfrequenz")  $\omega_T$  in "positiver" Richtung (d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn) mit genau einer Umdrehung pro Periodendauer  $T$ .
3. Die Projektion von  $s_+(t)$  auf die reelle Achse ergibt das reelle Signal  $s(t)$ :  
$$s(t) = \text{Re}\{s_+(t)\}.$$

Abbildung 5: Darstellung des analytischen Signal  $s_+(t)$  einer harmonischen Schwingung ( $\varphi_T = 60^\circ$ ,  $\Phi_T = -60^\circ$ ) in der komplexen Ebene (Zeigerdiagramm)

## 1.2 Amplitudenmodulation (AM)

Der Abschnitt 1.2.1 beschreibt die Zweiseitenband-Amplitudenmodulation ohne Träger (Ideale *Amplitudenmodulation*). Diese wird z.B. im UKW-Stereo-Rundfunk angewandt, indem man das Differenzsignal zwischen dem linken und dem rechten Kanal bei 38 kHz ohne Träger amplitudenmoduliert. Anschließend werden das Summensignal der beiden Kanäle (welches im Frequenzbereich von 30 Hz bis 15 kHz liegt), ein Hilfsträger bei 19 kHz und das modulierte Differenzsignal zusammengefasst und frequenzmoduliert.

Die in Abschnitt 1.2.2 behandelte *Zweiseitenband-Amplitudenmodulation* mit Träger findet im Rundfunk auf Kurz-, Mittel- und Langwelle teilweise noch heute Anwendung. Signalleistungen in der Größenordnung von 100 kW werden hier vereinzelt noch mit Röhren erzeugt.

Um bei der Übertragung von Telefongesprächen die Kanalbandbreite möglichst effizient zu nutzen, bedient man sich hierbei der *Einseitenband-Amplitudenmodulation* ohne Träger (siehe Abschnitt 1.2.4). Um allzu großen Schaltungsaufwand zu vermeiden, fasst man jeweils drei Gesprächskanäle zu Vorgruppen zusammen, die dann in einer gemeinsamen zweiten Umsetzungsstufe in die endgültige Frequenzlage gebracht werden.

Einen Kompromiss zwischen ESB- und ZSB-AM stellt die sogenannte *Restseitenbandmodulation* (RSB-AM) dar. Diese Modulationsart, die z.B. beim analogen Farbfernsehen eingesetzt wird, entspricht einer ZSB-AM, bei der nur die trägernahen Anteile des unteren Seitenbandes übertragen werden. Auf eine detaillierte Beschreibung der Restseitenbandmodulation wird im Programm „*amv*“ verzichtet. Gleiches gilt für die *Quadratur-Amplitudenmodulation* (QAM), die z.B. beim digitalen Richtfunk zum Einsatz kommt. Hier werden beispielsweise zwei quaternär codierte Datensignale (d.h.: die Amplitude jedes dieser Signale kann vier verschiedene Werte annehmen) auf zueinander um 90° phasenverschobene Träger moduliert und die resultierenden Signale addiert. Das Ausgangssignal kann somit 16 verschiedene Zustände annehmen (16 QAM).

### 1.2.1 Ideale Amplitudenmodulation

Abbildung 6(a) zeigt zwei Prinzipschaltbilder des idealen Amplitudenmodulators.

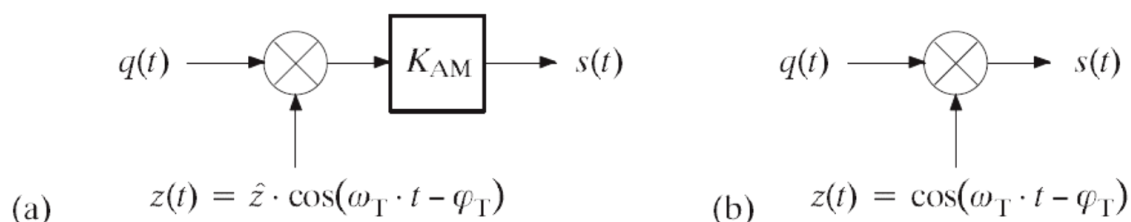


Abbildung 6: Zwei äquivalente Modelle des „idealen Amplitudenmodulators“.

Das Quellensignal  $q(t)$  wird mit dem Trägersignal  $z(t)$  multipliziert, dessen Frequenz  $f_T = \omega_T / (2\pi)$  meist deutlich größer ist als die maximale im Signal  $q(t)$  vorkommende Nachrichtenfrequenz  $f_{N,max}$ . Für das amplitudenmodulierte Signal gilt dann:

$$s(t) = K_{AM} \cdot q(t) \cdot z(t). \quad (11)$$

Hierbei ist  $K_{AM}$  eine dimensionsbehaftete Konstante, z.B. mit der Einheit 1/V. Wählt man die Konstante  $K_{AM} = 1/\hat{z}$ , so erhält man das vereinfachte Modell gemäß Abbildung 6(b) mit dem auf 1 normierten Trägersignal  $z(t)$ . Beide Modelle liefern das Sendesignal:

$$s(t) = q(t) \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T). \quad (12)$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, dass bei dieser Art von Modulation die Frequenz und Phase (d.h. die Lage der Nulldurchgänge) des Trägersignals  $z(t)$  im modulierten Signal  $s(t)$  erhalten bleiben, während die Amplituden der einzelnen Cosinushalbwellen durch das Nachrichtensignal  $q(t)$  verändert werden. Die Nulldurchgänge des Signals  $q(t)$  sind in  $s(t)$  zusätzlich enthalten. In der nachfolgenden Skizze ist das modulierte Signal  $s(t)$  für die beiden cosinusförmigen Signale  $q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$  und  $z(t) = \cos(\omega_T \cdot t)$  dargestellt.

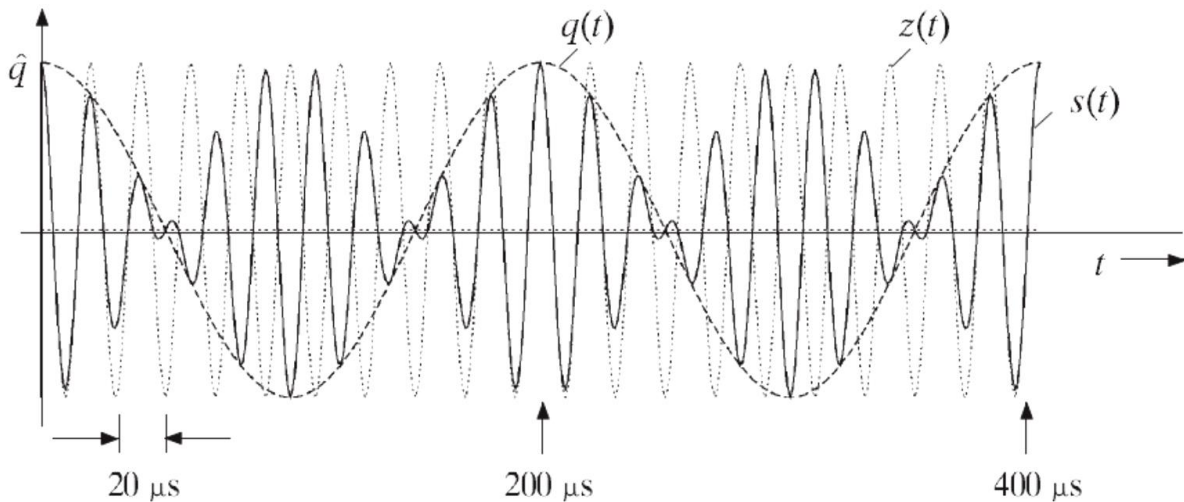


Abbildung 7: Beispiel eines ideal amplitudenmodulierten Signals ( $\omega_T=50$  kHz,  $\omega_N=5$  kHz).

Durch Anwendung des Faltungssatzes erhält man für das Spektrum des AM-Sendesignals ("\*" kennzeichnet die Faltungsoperation):

$$S(f) = Q(f) * Z(f), \quad (13)$$

wobei die Fourierkorrespondenzen  $Q(f) \leftrightarrow q(t)$  sowie

$$\begin{aligned} z(t) &= \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T), \quad \omega_T = 2\pi \cdot f_T \\ &\Downarrow \\ Z(f) &= \frac{1}{2} \cdot e^{-j\varphi_T} \cdot \delta(f - f_T) + \frac{1}{2} \cdot e^{j\varphi_T} \cdot \delta(f + f_T) \end{aligned} \quad (14)$$

einzusetzen sind. Hier und im Folgenden wird also das Trägersignal  $z(t)$  entsprechend Abbildung 6(b) stets auf 1 normiert betrachtet.

Die Spektralfunktion  $Z(f)$  setzt sich aus zwei diskreten Linien zusammen. Die Beträge der Gewichte sind jeweils  $1/2$ , der Phasenfaktor hängt von der Trägerphase  $\varphi_T$  ab. Da die Faltung einer beliebigen Funktion  $f(x)$  mit einer verschobenen Diracfunktion  $\delta(x - x_0)$  die verschobene Funktion  $f(x - x_0)$  ergibt, erhält man aus Gl. (13):

$$S(f) = \frac{1}{2} \cdot e^{-j\varphi_T} \cdot Q(f - f_T) + \frac{1}{2} \cdot e^{j\varphi_T} \cdot Q(f + f_T). \quad (15)$$

Für das Folgende wird sehr oft das Trägersignal  $z(t) = \cos(\omega_T \cdot t)$  und damit die Trägerphase  $\varphi_T = 0$  vorausgesetzt. In diesem Sonderfall vereinfacht sich Gl. (15) zu

$$S(f) = \frac{1}{2} \cdot Q(f - f_T) + \frac{1}{2} \cdot Q(f + f_T). \quad (16)$$

Der erste Term dieser Gleichung beschreibt den Anteil um  $+f_T$ , der zweite den Anteil um  $-f_T$ . Abbildung 8 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen  $Q(f)$  und  $S(f)$ .

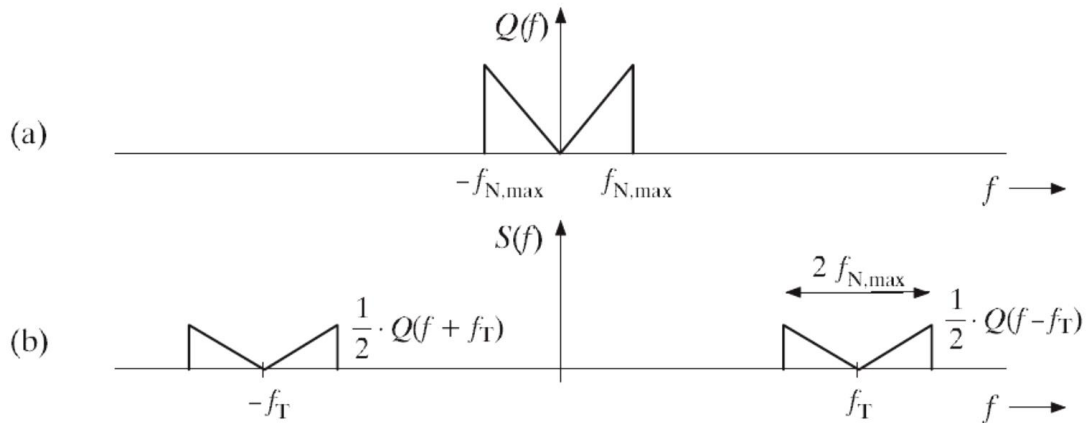


Abbildung 8: Spektren  $Q(f)$  und  $S(f)$  bei idealer Amplitudenmodulation (ZSB-AM ohne Träger).

Man erkennt folgende Eigenschaften des idealen AM-Modulators:

- a) Durch die Modulation wird das Tiefpasspektrum  $Q(f)$  zu einem Bandpasspektrum  $S(f)$  um die Trägerfrequenz ( $\pm f_T$ ).
- b) Ist  $Q(f)$  ein reelles Spektrum und das Trägersignal  $z(t)$  cosinusförmig (d.h.  $\varphi_T = 0^\circ$ ), so ist  $S(f)$  ebenfalls reell.
- c) Die erforderliche Bandbreite des Übertragungskanals ist doppelt so groß wie die Bandbreite des Nachrichtensignals.
- d) Im Spektrum  $S(f)$  des modulierten Signals ist kein zusätzlicher diskreter Anteil bei der Trägerfrequenz ( $\pm f_T$ ) vorhanden.

Aufgrund der beiden letztgenannten Eigenschaften bezeichnet man die Modulation gemäß Abbildung 6 auch als *Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (ZSB-AM) ohne Träger*.

Eine Realisierung eines solchen Modulators zeigt Abbildung 9.

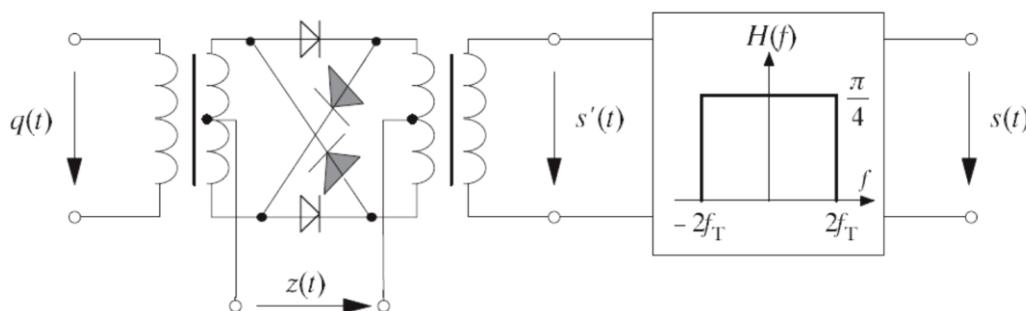


Abbildung 9: Realisierung der ZSB-AM (Doppel-Gegentakt-Diodenmodulator).

Das Trägersignal  $z(t)$  ist hierbei ein Cosinussignal, dessen Amplitude  $\hat{z}$  sehr viel größer als die Amplitude  $\hat{q}$  des Nachrichtensignals ist. Somit werden die Dioden als Schalter betrieben. Bei positiver Halbwelle (d.h. falls  $z(t) > 0$ ) leiten die „weißen“ Dioden, während die grau hinterlegten Dioden sperren. Das Signal  $s'(t)$  ist somit gleich  $q(t)$ . Im anderen Fall (d.h. für  $z(t) < 0$ ) leiten die grau hinterlegten Dioden und die „weißen“ sperren. Das Quellsignal wird somit umgepolt, und es ist  $s'(t) = -q(t)$ .



Aufgrund der Mittelanzapfungen der Übertrager heben sich die vom Trägersignal  $z(t)$  herreichenden induzierten Spannungen auf, so dass  $z(t)$  in den Signalen  $s'(t)$  und  $s(t)$  selbst nicht erscheint („Amplitudenmodulation ohne Träger“).

Die Schaltfunktion der Dioden erfolgt im Takt der Trägerfrequenz  $f_T$ . Das Ausgangssignal  $s'(t)$  lässt sich somit als Produkt des Quellensignals  $q(t)$  mit einem rechteckförmigen (weil  $\hat{z} \gg \hat{q}$ ) bipolaren Signal  $b(t)$  mit den möglichen Amplitudenwerten  $+1$  und  $-1$  deuten. Damit hat das Ausgangssignal  $s'(t) = q(t) \cdot b(t)$  nicht die Form von Gl. (12).

Das bipolare Rechtecksignal  $b(t)$  kann jedoch entsprechend der Fourierreihe wie folgt dargestellt werden:

$$b(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left[ \cos(\omega_T \cdot t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3 \omega_T \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5 \omega_T \cdot t) \dots \right]. \tag{17}$$

Daraus ist ersichtlich, dass durch eine Bandbegrenzung (z.B. auf die doppelte Trägerfrequenz) und eine Pegelanpassung (Dämpfung um den Faktor  $\pi/4$ ) auch hier genau die gewünschte Signalform  $s(t)$  nach Gl. (12) erreicht wird.

### 1.2.2 ZSB-Amplitudenmodulation mit Träger

Die Demodulation eines entsprechend Abschnitt 1.2.1 amplitudenmodulierten Signals ist technisch nicht einfach, da das am Empfänger ankommende Signal  $r(t)$  keine Information über das Trägersignal  $z(t)$  beinhaltet, dem Empfänger jedoch dessen Phase und Frequenz exakt bekannt sein muss (siehe Abschnitt 1.3.1). Um die Demodulation einfacher zu gestalten, wird dem Sendesignal  $s(t)$  zusätzlich Information über das Trägersignal  $z(t)$  hinzugefügt. Abbildung 10 verdeutlicht diesen Zusammenhang anhand der Spektren  $Q(f)$  und  $S(f)$ .

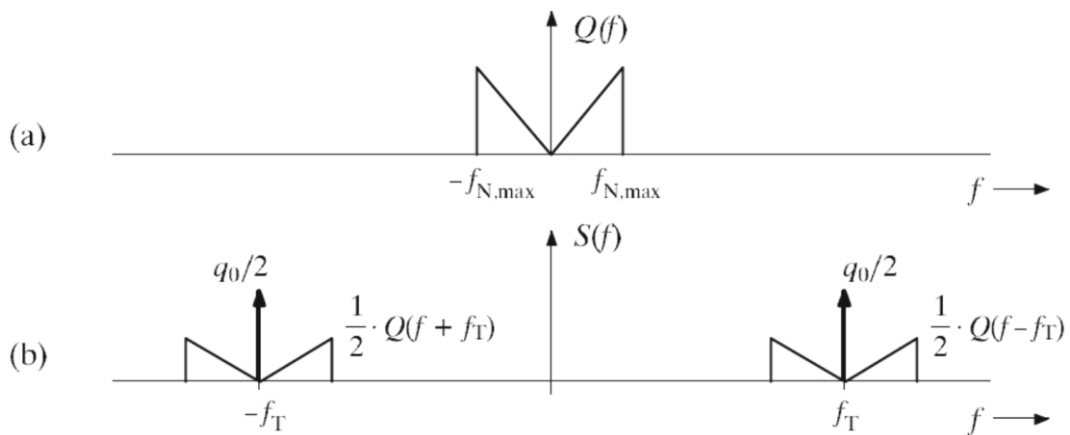


Abbildung 10: Spektren  $Q(f)$  und  $S(f)$  bei ZSB-AM mit Träger.

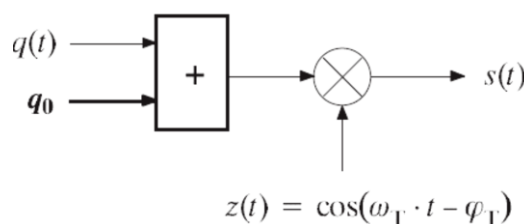


Abbildung 11: ZSB-Modulator mit Träger (Änderung gegenüber Abbildung 6 fett hervorgehoben)

Das Prinzipschaltbild eines ZSB-Amplitudenmodulators mit Träger ist in Abbildung 11 dargestellt. Die Signale  $q(t)$  und  $s(t)$  zeigt Abbildung 12.

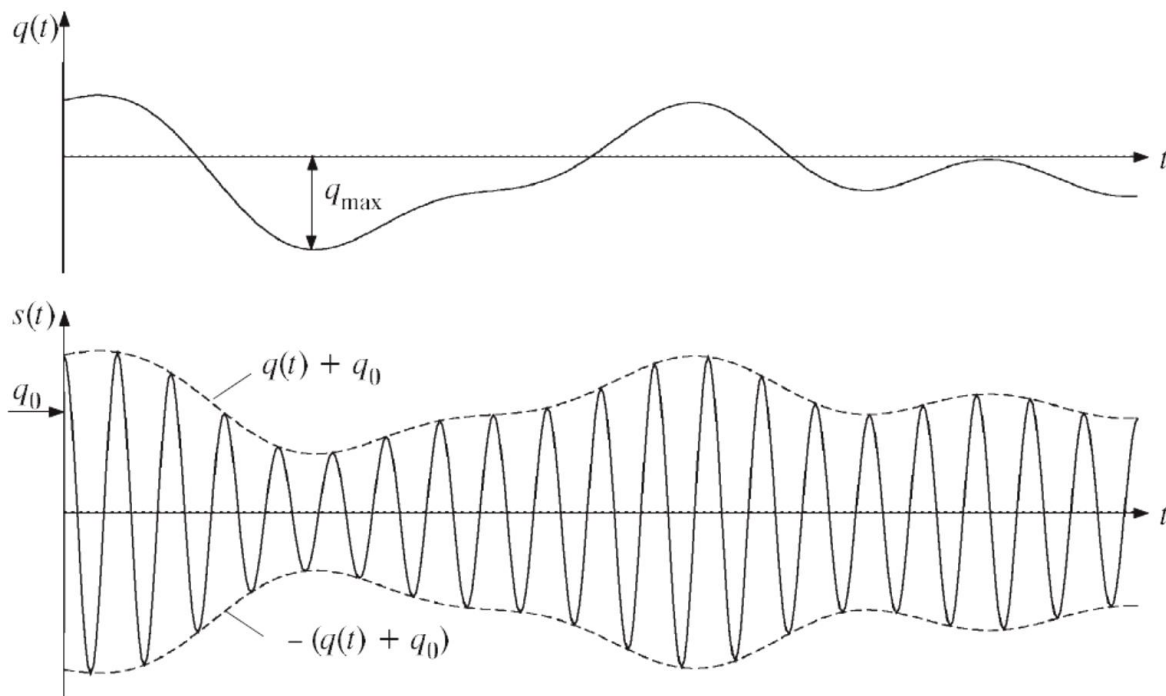


Abbildung 12: Signale  $q(t)$  und  $s(t)$  bei einem ZSB-Modulator mit Träger ( $\varphi_T = 0^\circ$ ).

Vor der Multiplikation mit dem Trägersignal  $z(t)$  wird dem Nachrichtensignal  $q(t)$  ein Gleichanteil  $q_0$  additiv überlagert, so dass für das Sendesignal gilt:

$$s(t) = (q(t) + q_0) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) + q_0 \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T). \quad (18)$$

Der erste Term des Sendesignals ist identisch mit dem modulierten Signal bei ZSB-AM ohne Träger (vgl. Abschnitt 1.2.1). Der zweite Term bewirkt die zusätzlichen Diracfunktionen im Spektrum  $S(f)$  bei der positiven und negativen Trägerfrequenz, deren Gewichte durch den Gleichanteil  $q_0$  bestimmt werden.

Eine Möglichkeit der Realisierung eines ZSB-Amplitudenmodulators mit Träger ist, die Summe  $x(t) = q(t) + z(t)$  aus Nachrichten- und Trägersignal auf ein nichtlineares Schaltungselement zu geben. Beispielsweise besitzt ein Feldeffekttransistor (FET) näherungsweise eine Kennlinie  $y(t) = f(x(t))$  mit quadratischem Anteil ( $c_1$  und  $c_2$  bezeichnen Konstanten, die durch die Beschaltung des FET festgelegt sind):

$$y(t) = c_1 \cdot x(t) + c_2 \cdot x^2(t). \quad (19)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man dann für das Ausgangssignal:

$$y(t) = c_1 \cdot q(t) + \underline{c_1 \cdot z(t)} + c_2 \cdot q^2(t) + \underline{\underline{2 \cdot c_2 \cdot q(t) \cdot z(t)}} + c_2 \cdot z^2(t). \quad (20)$$

Begrenzt man dieses Signal durch einen geeignet dimensionierten Bandpass um die Trägerfrequenz, so entfallen alle in Gl. (20) nicht unterstrichenen Anteile. Es verbleiben nur der Träger (einfach unterstrichen) sowie das Modulationsprodukt (Seitenbänder, doppelt unterstrichen).

Als Maß für die Stärke der Modulation wird häufig der Modulationsgrad

$$m = \frac{q_{max}}{q_0} \text{ mit } q_{max} = \text{Max}_t |q(t)| \quad (21)$$

angegeben. Die ZSB-AM ohne Träger ist in dieser Definition als Sonderfall für  $m \rightarrow \infty$  mitenthalten. Je größer der Modulationsgrad, desto mehr Energie wird für die eigentliche Modulation investiert. Dagegen wird bei sehr kleinem Modulationsgrad  $m$  die verfügbare Energie fast ausschließlich zur Übertragung des Gleichanteils  $q_0$  aufgewandt.

Ist der Modulationsgrad  $m < 1$ , d.h. der Maximalwert  $q_{max}$  kleiner als der Gleichanteil  $q_0$ , so ist das Nachrichtensignal  $q(t)$  in der Hüllkurve von  $s(t)$  erkennbar (siehe Abbildung 12) und die in Abschnitt 1.3.2 beschriebene Hüllkurvendemodulation anwendbar.

Anmerkung: Das vorliegende Programm „amv“ verwendet als Beschreibungsparameter für den Amplitudenmodulator den Gleichanteil  $q_0$  und nicht den Modulationsgrad  $m$ , da dieser auch von der Amplitude des Nachrichtensignals abhängt. Für ein gegebenes Nachrichtensignal  $q(t)$  kann der Modulationsgrad  $m$  mit Gl. (21) berechnet werden. Bei einem Sprachsignal (von seinen Eigenschaften her ein stochastisches Signal) wird mit  $q_{max}$  meist derjenige Wert bezeichnet, der nur in 1% aller Zeiten überschritten wird.

### 1.2.3 Zeigerdiagramm und Ortskurve

Die bei Amplitudenmodulation entstehenden Signale lassen sich anschaulich anhand des sogenannten Zeigerdiagramms deuten. Hierbei wird das in Abschnitt 1.1.4 eingeführte analytische Signal  $s_+(t)$  in der komplexen Ebene betrachtet. Für ein unmoduliertes Signal ergibt sich ein mit der Kreisfrequenz  $\omega_T$  gleichmäßig rotierender Zeiger (vgl. Abbildung 5).

Im Fall einer ZSB-AM mit Träger gilt mit Gl. (18) für das reelle und das analytische (komplexe) Signal:

$$s(t) = (q(t) + q_0) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T), \quad (22)$$

$$s_+(t) = (q(t) + q_0) \cdot e^{j(\omega_T \cdot t - \varphi_T)}. \quad (23)$$

Es ist nochmals anzumerken, dass  $s_+(t)$  nicht wirklich existiert, sondern nur deshalb eingeführt wird, um schwierige algebraische Berechnungen zu vermeiden, indem man das Problem auf anschauliche geometrische Überlegungen zurückführt. Dies soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, nämlich für das Nachrichtensignal

$$q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t - \varphi_N). \quad (24)$$

Nach dem Satz von Euler kann hierfür auch geschrieben werden:

$$q(t) = \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{j(\omega_N \cdot t - \varphi_N)} + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{-j(\omega_N \cdot t - \varphi_N)} = \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{-j\varphi_N} \cdot e^{j\omega_N \cdot t} + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{j\varphi_N} \cdot e^{-j\omega_N \cdot t}. \quad (25)$$

Setzt man ein cosinusförmiges Trägersignal voraus ( $\varphi_T = 0^\circ$ ), so erhält man aus (23):

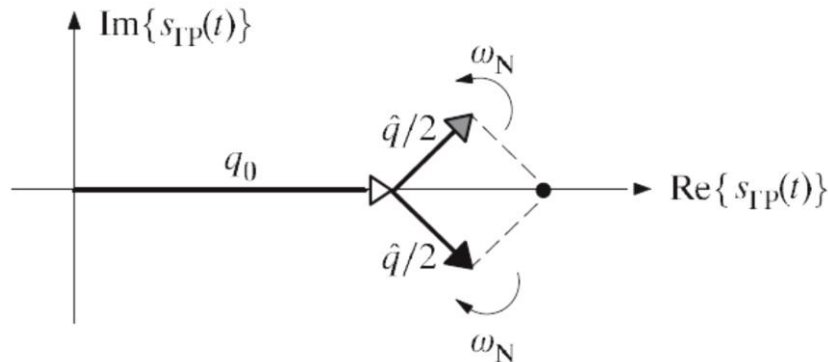
$$s_+(t) = \left( q_0 + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{-j\varphi_N} \cdot e^{j\omega_N \cdot t} + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{j\varphi_N} \cdot e^{-j\omega_N \cdot t} \right) \cdot e^{j\omega_T \cdot t}. \quad (26)$$

Betrachten wir die Zeitabhängigkeit dieses komplexen Signals, also das Zeigerdiagramm. Bei der hier dargestellten Zweiseitenband-Amplitudenmodulation mit Träger rotiert im Gegensatz zum unmodulierten Signal (dieses ergibt sich für  $\hat{q} = 0$ ) nicht nur ein Zeiger mit konstanter Kreisfrequenz  $\omega_T$ , sondern der aus drei komplexen Zeigern bestehende Verbund.

Allgemein lässt sich das analytische Signal in folgender Form schreiben:

$$s_+(t) = s_{TP}(t) \cdot e^{j\omega_T t}, \tag{27}$$

wobei man  $s_{TP}(t)$  oft als das zum Bandpasssignal  $s(t)$  zugehörige *äquivalente Tiefpasssignal* bezeichnet. Bei den meisten Modulationsverfahren ist  $s_{TP}(t)$  ebenso wie  $s_+(t)$  komplex. Nur bei der hier betrachteten ZSB-AM ergibt sich ein reelles Signal, wie Abbildung 13 zeigt.



**Abbildung 13:** Äquivalentes Tiefpasssignal  $s_{TP}(t)$  bei Zweiseitenband-Amplitudenmodulation  
(Anmerkung: Die Phase des Nachrichtensignals beträgt hier  $\varphi_N = -45^\circ$ ).

Bei ZSB-AM ist das äquivalente Tiefpasssignal gleich dem Klammerausdruck von (26):

$$s_{TP}(t) = q_0 + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{-j\varphi_N} \cdot e^{j\omega_N t} + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{j\varphi_N} \cdot e^{-j\omega_N t}. \tag{28}$$

Der erste Term ergibt den Zeiger der Länge  $q_0$ . Dieser liegt in Richtung der reellen Achse. Der zweite und dritte Term der komplexen Amplitude werden durch die beiden Zeiger der Länge  $\hat{q}/2$  beschrieben, wobei der zweite Term durch die graue und der dritte durch die schwarze Pfeilspitze gekennzeichnet ist.

Die vektorielle Addition dieser 3 Zeiger ergibt das äquivalente Tiefpasssignal zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Die Spitze des resultierenden Zeigers ist in Abbildung 13 als Punkt markiert. Für Zeiten  $t > 0$  drehen sich nun die beiden letztgenannten Zeiger mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ( $\omega_N$ ), aber in gegenläufigen Richtungen. Der den zweiten Term beschreibende Zeiger dreht aufgrund des positiven Exponenten in mathematisch positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn). Der dritte Zeiger (schwarze Pfeilspitze) dreht dagegen wegen des negativen Exponenten mathematisch negativ.

Da diese beiden Zeiger stets mit gleicher Winkelgeschwindigkeit entgegengesetzt drehen, ist die Summe der drei Zeiger stets in Richtung des ersten Zeigers (oder entgegengesetzt) und somit reell. Der Endpunkt des resultierenden Zeigers liegt also stets auf der reellen Achse und kann zu den verschiedenen Zeitpunkten alle Werte zwischen  $q_0 - \hat{q}$  und  $q_0 + \hat{q}$  annehmen.

Man bezeichnet die Linie, auf der die Spitze des resultierenden Zeigers in der komplexen Ebene (Phasendiagramm) zu irgendeinem Zeitpunkt liegen kann, als die *Ortskurve*. Bei ZSB-AM unter idealen, verzerrungsfreien Bedingungen ist die Ortskurve stets eine horizontale Gerade. Weist dagegen der Kanal eine frequenzabhängige Dämpfung auf (d.h. Amplitudenverzerrungen), so sind die Zeiger unterschiedlich lang, und die Ortskurve der ZSB-AM wird zu einer Ellipse (siehe Abschnitt 1.4.2 und Versuch 3.7). In diesem Fall ist auch für  $m < 1$  keine verzerrungsfreie Demodulation möglich.

Zusammenfassend kann man sagen: Die Ortskurve stellt das (äquivalente) Tiefpasssignal in der komplexen Ebene dar. Bei ZSB-AM (und nur bei dieser) ist  $s_{TP}(t) = q_0 + q(t)$ . Bei der Ortskurve wird der zeitabhängige Drehfaktor des Trägers außer Acht gelassen im Gegensatz zum analytischen Signal

$s_+(t)$ , dessen Darstellung in der komplexen Ebene das Zeigerdiagramm ergibt (Rotation der Ortskurve entgegen dem Uhrzeigersinn mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T$ ). Abbildung 14 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen den oben definierten Signalen  $s(t)$ ,  $s_+(t)$  und  $s_{TP}(t)$  anhand ihrer (normierten) Betragsspektren. Das Spektrum  $S_+(f)$  ergibt sich aus  $S(f)$  mit Gl. (9), vom Spektrum (b) zum Spektrum (c) kommt man über die Beziehung  $S_{TP}(f) = S_+(f + f_T)$ .

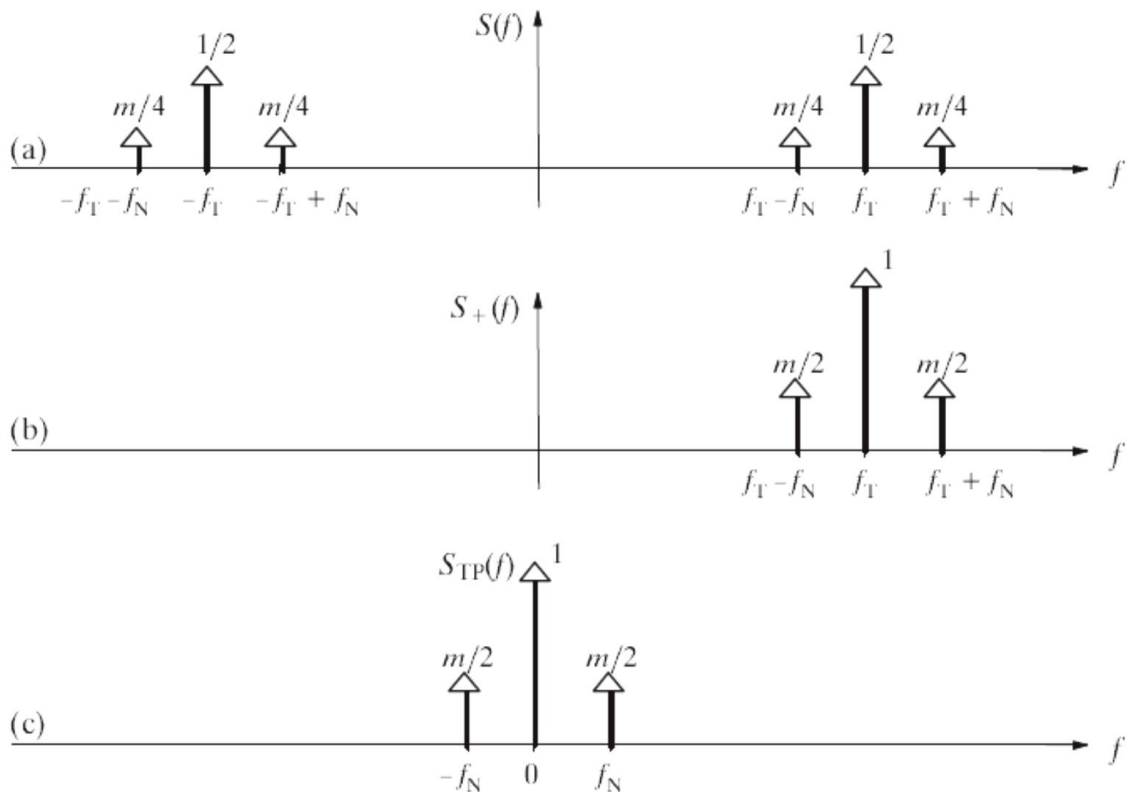


Abbildung 14: Spektren  $S(f)$ ,  $S_+(f)$  und  $S_{TP}(f)$  bei cosinusförmigem Nachrichtensignal und ZSB-AM (alle Spektren normiert, d.h.  $q_0 = 1$ ,  $\hat{q}/q_0 = m$ ).

### 1.2.4 ESB-Amplitudenmodulation

Die ZSB-Modulation (sowohl mit als auch ohne Träger) hat folgende Eigenschaften:

- Das ZSB-modulierte Signal  $s(t)$  benötigt die doppelte Bandbreite wie das zu übertragende Quellsignal  $q(t)$ .
- Die vollständige Information über  $q(t)$  steckt sowohl im oberen Seitenband (OSB) als auch im unteren Seitenband (USB). Das obere Seitenband liegt in Regellage, das untere in Kehrlage.

Deshalb genügt es, wenn man nur ein Seitenband überträgt. Man spricht dann von „*Einseitenbandmodulation (ESB-AM)*“. Abbildung 15 verdeutlicht deren Eigenschaften im Frequenzbereich und gibt gleichzeitig eine Realisierungsform des ESB-Modulators an.

Abbildung 15(b) zeigt das Spektrum  $S(f)$  bei ZSB-AM, wobei das schematische Spektrum  $Q(f)$  entsprechend Skizze (a) zugrundeliegt. Man erkennt die Verdoppelung der Bandbreite (bei positiven und negativen Frequenzen jeweils  $2 \cdot f_{N,max}$  anstelle von  $f_{N,max}$ ).

Das ESB-Spektrum ergibt sich aus dem ZSB-Spektrum durch Filterung. Bei OSB-Modulation wird die untere Grenzfrequenz des Bandpasses zu  $f_T - f_\varepsilon$  gewählt ( $f_\varepsilon$  ist eine beliebig kleine positive Frequenz). Die obere Grenzfrequenz muss größer als  $f_T + f_{N,max}$  sein.

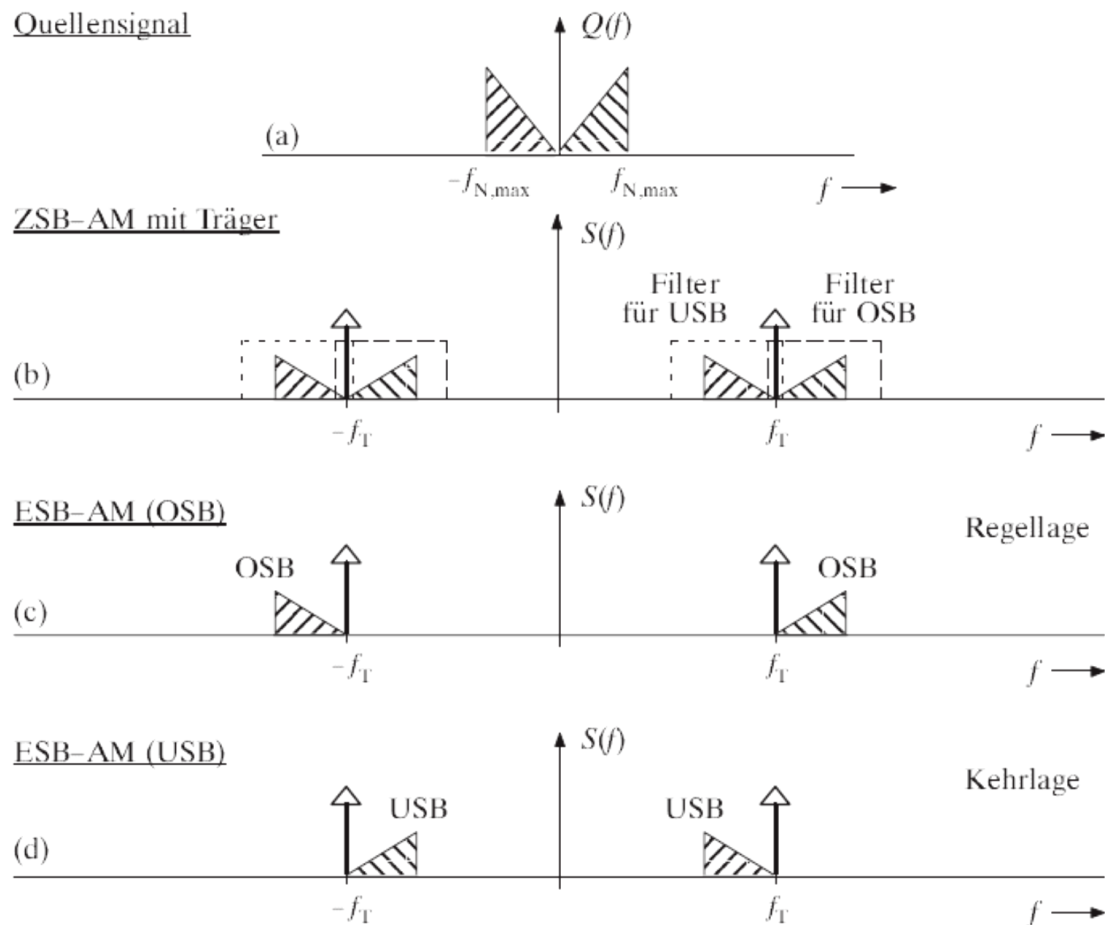


Abbildung 15: Spektren bei Einseitenbandmodulation (c), (d) im Vergleich zur ZSB-AM (b).

Das OSB-Spektrum  $S(f)$  beinhaltet somit nur das obere Seitenband und (nicht notwendigerweise) den Träger. Abbildung 15(c) zeigt, dass bei positiven Frequenzen das OSB-Spektrum die gleiche Lage wie das Nachrichtenspektrum  $Q(f)$  aufweist („Regellage“).

Dagegen ist bei USB-Modulation eine Kehrlage des Spektrums feststellbar. Das USB-Spektrum von Abbildung 15(d) ergibt sich aus dem ZSB-Spektrum beispielsweise durch Filterung mit einem Bandpass, dessen untere Grenzfrequenz kleiner als  $f_T - f_{N,max}$  ist, während die obere Grenzfrequenz  $f_T + f_\varepsilon$  beträgt. Die erforderliche Filterfunktion ist in der Skizze (b) kurz-gestrichelt eingezeichnet. Auch hier bezeichnet  $f_\varepsilon$  eine beliebig kleine, aber positive Frequenz.

Bei ESB-Modulation definiert man den Modulationsgrad sinnvollerweise als

$$\mu = \frac{q_{max}}{2 \cdot q_0} \tag{29}$$

Diese gegenüber der ZSB-AM abweichende Definition des Modulationsgrads ist hier auch durch eine unterschiedliche Nomenklatur berücksichtigt ( $\mu$  anstelle von  $m$ ).

Betrachten wir wie in Abschnitt 1.2.3 wieder ein cosinusförmiges Nachrichtensignal ( $\omega_N, \varphi_N = 0$ ) und ein cosinusförmiges Trägersignal ( $\omega_T, \varphi_T = 0$ ). Mit  $q_0 = 1$  (Normierung) und Gl. (29) kann somit für das Bandpasssignal bei OSB-AM geschrieben werden:

$$s(t) = \cos(\omega_T \cdot t) + \mu \cdot \cos((\omega_T + \omega_N) \cdot t). \tag{30}$$

Abbildung 16(a) zeigt das dazugehörige Spektrum, bestehend aus vier Diracfunktionen.

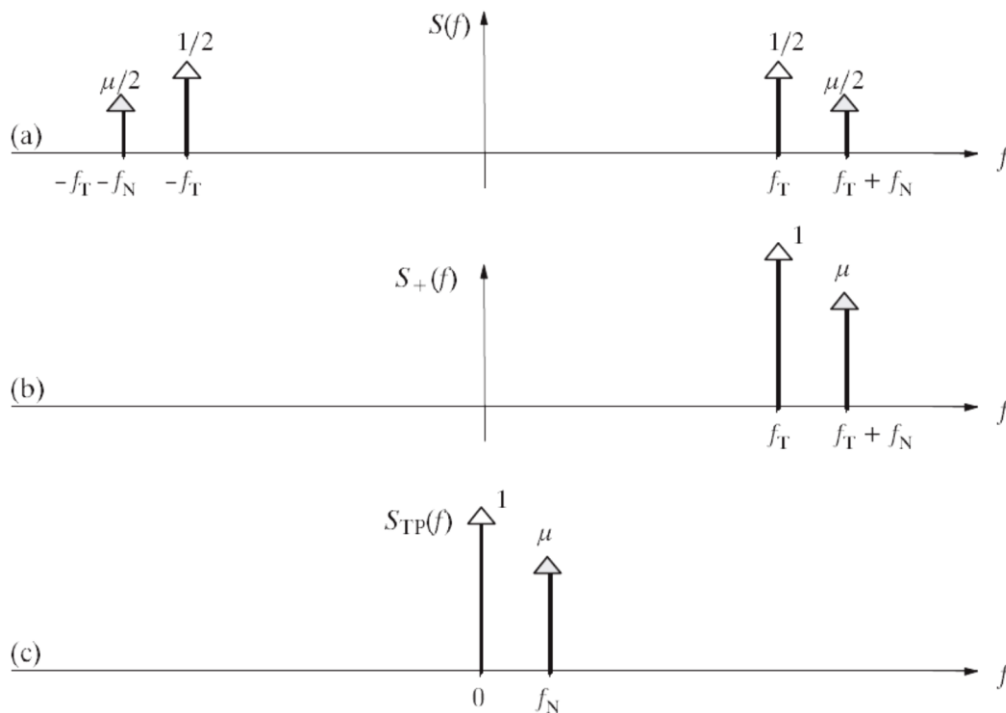


Abbildung 16: Spektren  $S(f)$ ,  $S_+(f)$  und  $S_{TP}(f)$  bei cosinusförmigem Nachrichtensignal und OSB-AM (alle Spektren normiert, d.h.  $q_0 = 1$ ,  $\hat{q}/(2q_0) = \mu$ ).

Das Spektrum  $S_+(f)$  des analytischen Signals erhält man wieder durch Abschneiden der Anteile bei negativen Frequenzen und Verdoppeln der Spektralanteile für  $f > 0$ . Von Abbildung 16(b) zu (c) kommt man durch Frequenzverschiebung um  $f_T$  nach links.

Damit erhält man für das äquivalente OSB-Tiefpasssignal (wiederum normiert):

$$s_{TP}(t) = 1 + \mu \cdot e^{j\omega_N t} \tag{31}$$

Das bedeutet: Bei ESB-AM verschwindet gegenüber Gl. (28) der dritte Term (OSB) bzw. der zweite Term (USB) und dementsprechend auch der schwarz- bzw. graugefüllte Zeiger. Hier ist die Ortskurve ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $(1, 0)$  und dem Radius  $\mu$  (siehe Abbildung 17). Die Spitze des resultierenden Zeigers legt in einer Periodendauer  $1/f_N$  genau eine Kreisumdrehung entgegen dem Uhrzeigersinn (da OSB) zurück.

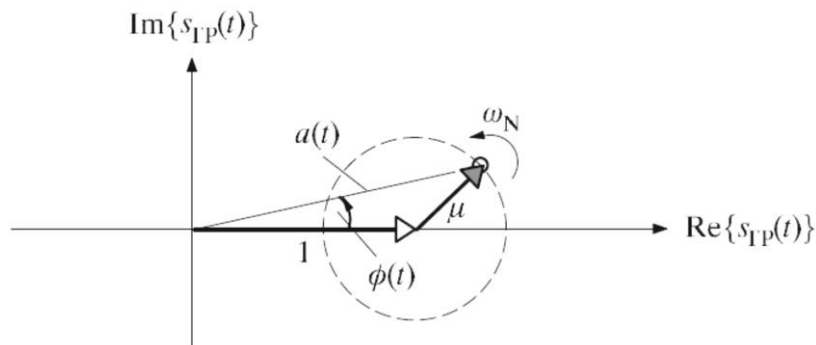


Abbildung 17: Ortskurve (normiert) bei cosinusförmigem Nachrichtensignal und OSB-AM.

Im Gegensatz zur ZSB-AM ist hier das äquivalente Tiefpasssignal komplex. Es kann deshalb auch wie folgt dargestellt werden:

$$s_{TP}(t) = a(t) \cdot e^{j\Phi(t)}. \tag{32}$$

Hierbei bezeichnet  $a(t)$  die Betragsfunktion und  $\Phi(t)$  die Phasenfunktion.

Das Zeigerdiagramm - also das analytische Signal  $s_+(t)$  - erhält man wie in Abschnitt 1.2.3 beschrieben durch Rotation des gesamten Zeigerverbands der Ortskurve mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T$ . Daraus kann das (tatsächliche) ESB-Bandpasssignal  $s(t)$  wieder durch Realteilbildung (Projektion auf die reelle Achse) ermittelt werden.

Die Betragsfunktion  $a(t)$  des äquivalenten Tiefpasssignals  $s_{TP}(t)$  gibt die Hüllkurve des reellen Bandpasssignals  $s(t)$  an, während die Phasenfunktion  $\Phi(t)$  die Abweichungen der Nulldurchgänge von  $s(t)$  gegenüber dem Trägersignal  $z(t)$  beschreibt.

Da bei ESB-AM nicht nur die Hüllkurve  $a(t)$ , sondern auch die Phasenfunktion  $\Phi(t)$  entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$  beeinflusst wird, überlagert sich hier der gewünschten Amplitudenmodulation eine (unerwünschte) Phasenmodulation. Deshalb ist die verzerrungsfreie Demodulation eines ESB-modulierten Signals mit Hilfe eines Hüllkurvendemodulators nicht möglich (vgl. Abschnitt 1.3.2).

In der Vorbereitungsfrage 2.2 und der Versuchsdurchführung 3.6 werden die Eigenschaften der Einseitenbandmodulation noch eingehend behandelt.

### 1.3 AM-Demodulation

Amplitudenmodulation am Sender macht nur Sinn, wenn es möglich ist, am Empfänger diese Signalumsetzung wieder rückgängig zu machen, und zwar möglichst ohne Informationsverlust. Eine Möglichkeit hierzu bietet der Synchrondemodulator (Abschnitt 1.3.1). Bei Zweiseitenband-AM mit Träger - und nur bei dieser - ist jedoch auch mit dem Hüllkurvendemodulator (Abschnitt 1.3.2) eine verzerrungsfreie Demodulation möglich.

#### 1.3.1 Synchrondemodulation

Die Synchrondemodulation ist sowohl bei ZSB-AM (egal ob mit oder ohne Träger) als auch bei ESB-AM anwendbar. Die folgende Beschreibung bezieht sich auf eine ideale AM (d.h. ZSB-AM ohne Träger). In Abbildung 18 ist das betrachtete Übertragungssystem einschließlich Synchrondemodulator (rechter gestrichelter Block) dargestellt.

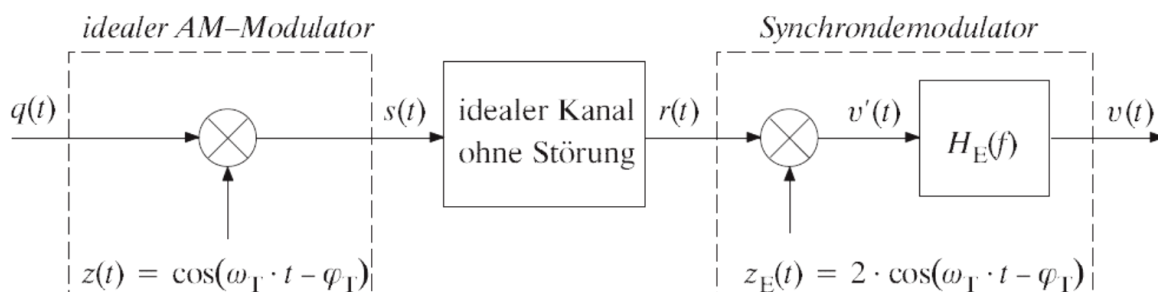


Abbildung 18: Übertragungssystem mit idealem AM-Modulator als Synchrondemodulator

Unter der Voraussetzung eines idealen, verzerrungs- und störungsfreien Kanals gilt mit Gl. (12) für das Signal am Eingang des Synchrondemodulators:

$$r(t) = s(t) = q(t) \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T). \tag{33}$$



Im Synchrondemodulator wird dieses Signal mit dem empfängerseitigen Trägersignal

$$z_E(t) = 2 \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) \quad (34)$$

multipliziert, das genau die gleiche Frequenz und Phasenlage wie das sendeseitige Trägersignal  $z(t)$  aufweisen muss. Das Ergebnis der Multiplikation ist das Signal

$$v'(t) = r(t) \cdot z_E(t) = 2 \cdot q(t) \cdot \cos^2(\omega_T \cdot t - \varphi_T). \quad (35)$$

Mit der trigonometrischen Umformung

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2 \cdot \alpha)] \quad (36)$$

erhält man daraus:

$$v'(t) = q(t) + q(t) \cdot \cos(2 \cdot \omega_T \cdot t - 2 \cdot \varphi_T). \quad (37)$$

Der zweite Term liegt (symmetrisch) um die doppelte Trägerfrequenz. Ist  $f_T > f_{N,max}$ , was in der Praxis stets zutrifft, so kann dieser Anteil durch ein ideales (rechteckförmiges) Tiefpassfilter  $H_E(f)$  vollständig unterdrückt werden, und man erhält  $v(t) = q(t)$ .

Das bedeutet: Das Nachrichtensignal  $q(t)$  wird durch Synchrondemodulation vollständig und verzerrungsfrei rekonstruiert, falls

- die maximale NF-Frequenz  $f_{N,max}$  kleiner als die Trägerfrequenz  $f_T$  ist,
- der Kanal innerhalb der Übertragungsbandbreite  $2 \cdot f_{N,max}$  verzerrungsfrei ist,
- die Trägerfrequenzen bei Sender und Empfänger übereinstimmen,
- die Trägerphasenlagen bei Sender und Empfänger gleich sind.

In der Versuchsdurchführung 3.3 wird gezeigt, dass eine Phasenabweichung bei ZSB nur zu einer frequenzunabhängigen Dämpfung, aber nicht zu Verzerrungen führt. Dagegen kommt es zu einer - auch bei der Sprachübertragung deutlich hörbaren - Schwebung, wenn die Trägerfrequenzen von Sender und Empfänger nicht exakt übereinstimmen.

Wendet man die Synchrondemodulation bei einem ZSB-AM-Übertragungssystem mit Träger an, so muss anstelle des Tiefpassfilters in Abbildung 18 ein Bandpass eingesetzt werden, durch den auch der Gleichanteil  $q_0$  entfernt wird.

Anmerkung: Die Beschreibung des Synchrondemodulators erfolgte hier im Zeitbereich. Zu gleichen Ergebnissen kommt man bei der Berechnung im Frequenzbereich durch Anwendung der Faltungsoperation. Dies soll in Vorbereitungsfrage 2.3 geschehen.

### 1.3.2 Hüllkurvendemodulation

Aufgabe des Demodulators ist es, aus dem Empfangssignal  $r(t)$  das Sinkensignal  $v(t)$  zu gewinnen. Dieses sollte möglichst gleich dem gesendeten Nachrichtensignal  $q(t)$  sein.

Wie aus Abbildung 12 deutlich hervorgeht, ist bei ZSB-AM das Nachrichtensignal  $q(t)$  in der Hüllkurve des modulierten Signals erkennbar, falls der Modulationsgrad  $m < 1$  ist. Diese Eigenschaft kann zur Demodulation des Empfangssignals  $r(t)$  ausgenutzt werden.

Für die folgende Beschreibung setzen wir ideale Übertragungseigenschaften (keine Verzerrungen, kein Rauschen) voraus, so dass  $r(t) = s(t)$  gilt. Unter dieser Voraussetzung sind auch die äquivalenten Tiefpasssignale identisch, und Ortskurve sowie Zeigerdiagramm gemäß Abschnitt 1.2.3 gelten auch für das Empfangssignal. Man spricht von idealer Hüllkurvendemodulation, wenn das Ausgangssignal gleich dem Betrag des äquivalenten Tiefpasssignals  $r_{TP}(t)$  gesetzt wird (vgl. Abschnitt 1.2.4):  $v(t) = a_r(t) = |r_{TP}(t)|$ .

Eine (nicht ideale) Realisierungsform des Hüllkurvendemodulators zeigt Abbildung 19.

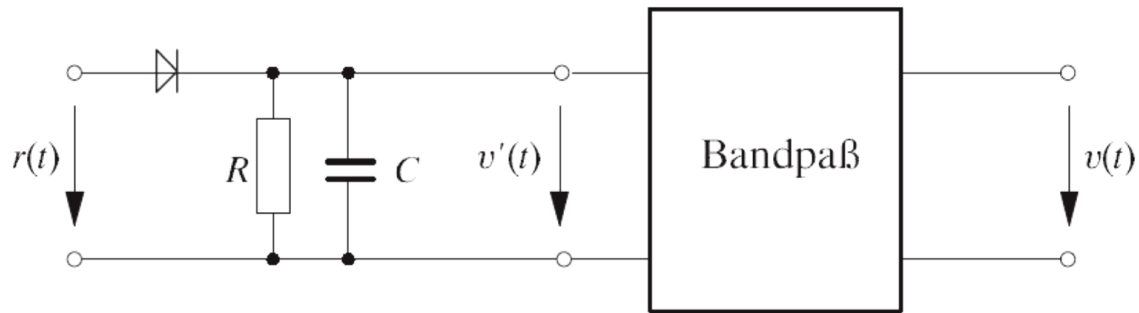


Abbildung 19: Hüllkurvendemodulator.

Das Empfangssignal  $r(t)$  wird zunächst über eine Diode, einen Widerstand  $R$  und eine Kapazität  $C$  geführt. Das Signal am Ausgang dieses Teilvierpols sei  $v'(t)$ . Ist  $v'(t) < r(t)$ , so leitet die Diode, und die Kapazität lädt sich bis zum Spitzenwert auf, d.h. in diesem Bereich gilt  $v'(t) = r(t)$ . Ist dagegen  $v'(t)$  größer als das Empfangssignal  $r(t)$ , so sperrt die Diode und die Kapazität  $C$  entlädt sich über den Widerstand  $R$  exponentiell mit der Zeitkonstanten  $\tau = RC$ . Ist nun die Trägerfrequenz sehr viel größer als die maximale Nachrichtenfrequenz, so gibt  $v'(t)$  näherungsweise die Hüllkurve von  $r(t)$  wieder.

Als Faustformel für die Dimensionierung des Hüllkurvendemodulators kann gelten:

$$\frac{1}{f_T} \ll \tau \ll \frac{1}{f_{N,max}}. \quad (38)$$

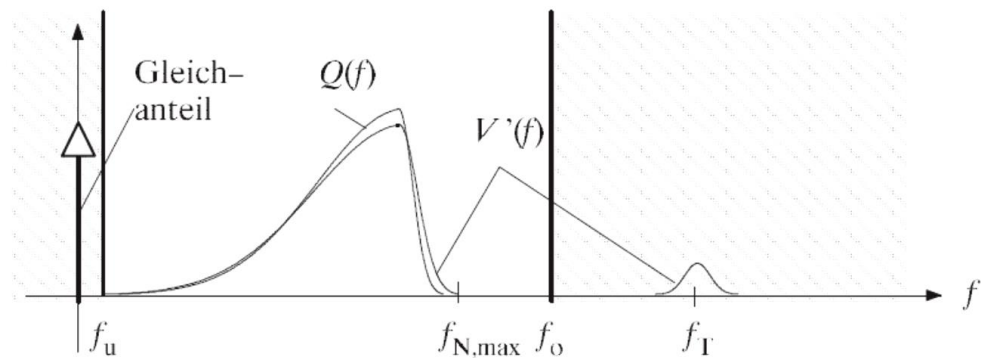
Weiterhin ist bei Verwendung eines Hüllkurvendemodulators im Empfänger bereits bei der Dimensionierung des Senders zu beachten, dass  $f_T \gg f_{N,max}$  ist (Faktor 100 oder mehr).

Ein guter Kompromiss ist dann gegeben, wenn die Zeitkonstante entsprechend dem geometrischen Mittel gesetzt wird:

$$\tau_{opt} \approx \sqrt{\frac{1}{f_T \cdot f_{N,max}}}. \quad (39)$$

Ist die Zeitkonstante zu groß ( $\tau > \tau_{opt}$ ), so entlädt sich die Kapazität zu langsam und  $v'(t)$  kann der Hüllkurve nicht folgen. Ist die Zeitkonstante dagegen zu klein ( $\tau < \tau_{opt}$ ), so entlädt sich demzufolge die Kapazität zu schnell, so dass die Trägerfrequenz und deren Harmonische (Oberwellen) im Signal  $v'(t)$  verstärkt enthalten sind. Diese unerwünschten Frequenzanteile können durch den Bandpass entfernt werden, ebenso wie der Gleichanteil  $q_0$  bei ZSB-AM mit Träger (siehe Abbildung 20). Es verbleiben jedoch Abweichungen zwischen  $Q(f)$  und  $V(f)$  im interessierenden Frequenzbereich.

Wie in der Versuchsdurchführung 3.5 noch gezeigt werden wird, ist Hüllkurvendemodulation nur bei ZSB-AM mit einem Modulationsgrad  $m \leq 1$  anwendbar.



untere Grenzfrequenz  $f_u$ : Herausfiltern des Gleichanteils  $q_0$ .

obere Grenzfrequenz  $f_o$ : Herausfiltern unerwünschter Frequenzanteile um  $f_I$ , die bei der Hüllkurvendemodulation entstehen.

Abbildung 20: Zur Bedeutung des Bandpasses beim Hüllkurvendemodulator

## 1.4 Verzerrungen

Ideale Modulation und Demodulation bedeutet, dass das Sinkensignal  $v(t)$  identisch mit dem Quellsignal  $q(t)$  ist. Gilt zumindest der Zusammenhang  $v(t) = \alpha \cdot q(t - \tau)$ , so liegt eine verzerrungsfreie Übertragung vor. Die Größen  $\alpha$  und  $\tau$  bezeichnen hierbei einen Dämpfungsfaktor und eine Laufzeit des Signals. Beides kann toleriert werden.

Da die beiden Größen  $\alpha$  und  $\tau$  für alle Frequenzen gleich sind, bleibt in diesem Fall die prinzipielle Signalform des Quellsignals  $q(t)$  im Sinkensignal  $v(t)$  erhalten. In allen anderen Fällen ist dagegen das demodulierte Nachrichtensignal  $v(t)$  gegenüber  $q(t)$  verzerrt. Hierbei unterscheidet man zwischen linearen und nichtlinearen Verzerrungen.

### 1.4.1 Lineare Kanalverzerrungen

Von linearen Verzerrungen spricht man dann, wenn zwar eine harmonische Schwingung am Eingang eine ebensolche Schwingung mit gleicher Frequenz am Ausgang bewirkt, deren Amplitude und Phase jedoch frequenzabhängig ist. Besteht das Eingangssignal aus einer Summe von harmonischen Schwingungen, so werden bei einem solchen Kanal die einzelnen Frequenzanteile unterschiedlich stark gedämpft und/oder verzögert, und es entsteht eine störende Signalverformung.

Lineare Verzerrungen des Kanals werden durch die Kanalübertragungsfunktion

$$H_k(f) = e^{-a_k(f)} \cdot e^{-jb_k(f)}. \quad (40)$$

beschrieben. Ist der Dämpfungsverlauf  $a_k(f)$  innerhalb der Signalbandbreite konstant und der Phasenverlauf  $b_k(f)$  eine mit der Frequenz  $f$  linear ansteigende Funktion (oder identisch 0), so bewirkt der Kanal nur eine frequenzunabhängige Signaldämpfung und Signallaufzeit, aber keine Signalverzerrungen.

Die linearen Verzerrungen kann man unterteilen in

- **Dämpfungsverzerrungen:** Diese treten auf, wenn der Dämpfungsverlauf  $a_k(f)$  im interessierenden Frequenzbereich nicht konstant ist. Eine Bandbegrenzung des Signals ist ein Sonderfall von Dämpfungsverzerrungen.

- *Phasenverzerrungen:* Diese sind darauf zurückzuführen, dass der Phasenverlauf  $b_k(f)$  nichtlinear mit der Frequenz ansteigt.

### 1.4.2 Lineare Verzerrungen im demodulierten AM-Signal

Lineare Kanalverzerrungen führen auch zu einer linearen Verzerrung des demodulierten Signals, wenn ZSB-Amplitudenmodulation zusammen mit Synchrondemodulation eingesetzt wird. In diesem Fall besitzt das Sinkensignal  $v(t)$  genau die gleichen Spektralanteile wie das sendeseitige Nachrichtensignal  $q(t)$ , doch sind die einzelnen Frequenzanteile an der Senke entsprechend dem Dämpfungs- und Phasenverlauf des Kanals amplituden- und phasenmäßig anders zusammengesetzt als an der Quelle.

Bereits an dieser Stelle wird darauf hingewiesen, dass lineare Kanalverzerrungen bei anderen Systemvarianten als der Kombination ZSB-Amplitudenmodulation/Synchrondemodulation stets zu nichtlinearen Verzerrungen führen (vgl. Abschnitt 1.4.3).

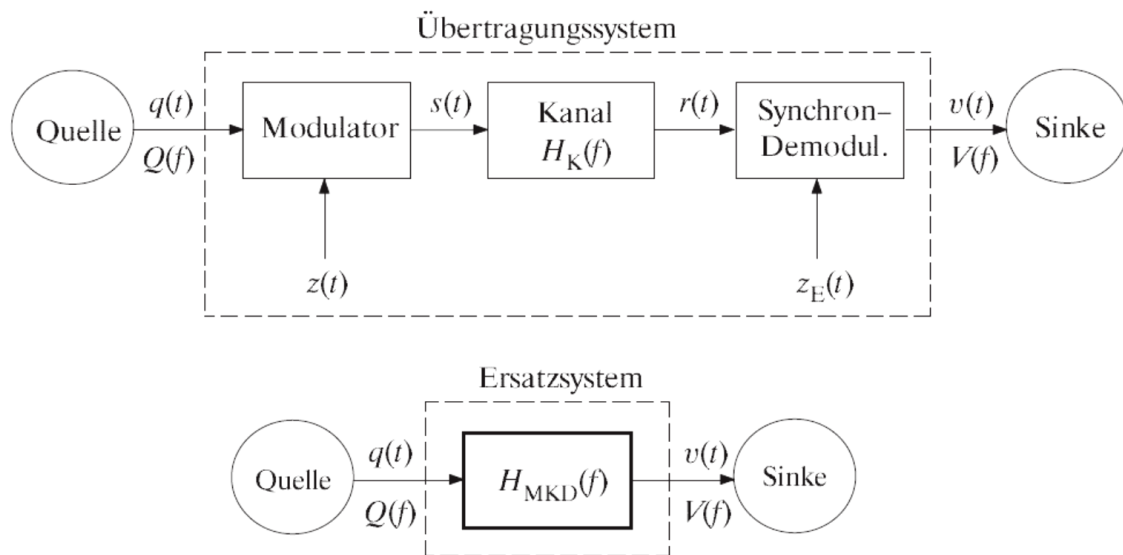


Abbildung 21: Zur Definition der resultierenden Übertragungsfunktion  $H_{MKD}(f)$ .

Bei Synchrondemodulation kann der Einfluss linearer Kanalverzerrungen auf das Nachrichtensignal durch eine resultierende Übertragungsfunktion beschrieben werden, die aus den Spektralfunktionen am Ein- und Ausgang abgeleitet wird (vgl. Abbildung 21):

$$H_{MKD}(f) = \frac{V(f)}{Q(f)} \tag{41}$$

Hierbei steht „MKD“ für „Modulator-Kanal-Demodulator“. Bei ZSB-Modulation und Synchrondemodulation gilt dabei folgender Zusammenhang:

$$H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot [H_K(f + f_T) + H_K(f - f_T)] = \frac{1}{2} \cdot [H_K(f_T + f) + H_K^*(f_T - f)]. \tag{42}$$

Aus Gl. (42) folgt direkt, dass unterschiedliche Frequenzen unterschiedlich übertragen werden. Besteht  $Q(f)$  aus mehreren Frequenzanteilen (z.B. kontinuierliches Spektrum), so kommt es zu linearen Verzerrungen.

### 1.4.3 Nichtlineare Verzerrungen durch Hüllkurvendemodulation

Von nichtlinearen Verzerrungen spricht man, wenn im demodulierten Nachrichtensignal  $v(t)$  Frequenzen erscheinen, die im ursprünglichen Signal  $q(t)$  nicht enthalten waren. Sie entstehen z.B. bei der

Hüllkurvendemodulation eines ESB-modulierten Signals oder eines ZSB-modulierten Signals mit Modulationsgrad  $m > 1$ . Ist das Nachrichtensignal  $q(t)$  eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $f_N$ , so weist das rekonstruierte Signal  $v(t)$  auch Anteile bei Vielfachen von  $f_N$  auf („Oberwellen“). Das Sinkensignal  $v(t)$  ist dann nicht mehr cosinusförmig; es kommt zu „Klirren“. Mathematisch lässt sich dieser Sachverhalt wie folgt ausdrücken: Aus der Schwingung  $q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$  wird nach der Demodulation ein Signal mit Oberwellen:

$$v(t) = v_1 \cdot \cos(\omega_N \cdot t) + v_2 \cdot \cos(2\omega_N \cdot t) + v_3 \cdot \cos(3\omega_N \cdot t) + \dots \quad (43)$$

Die Stärke der nichtlinearen Verzerrung wird durch den Klirrfaktor

$$K = \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + \dots}}{v_1} \quad (44)$$

beschrieben. Der Klirrfaktor  $n$ -ter Ordnung ist dabei wie folgt definiert ( $n \geq 2$ ):

$$K_n = \frac{|\hat{v}_n|}{|\hat{v}_1|} \quad (45)$$

Somit kann für den Gesamtklirrfaktor auch geschrieben werden:

$$K = \sqrt{K_2^2 + K_3^2 + K_4^2 + \dots} \quad (46)$$

Bei ESB-Modulation mit Modulationsgrad  $\mu$  und Hüllkurvendemodulation gilt z.B.:

$$K_{ESB/HKD} \approx \frac{\mu}{4}. \quad (47)$$

Ist  $q(t)$  eine harmonische Schwingung, so können die Oberwellen durch einen Tiefpass entfernt werden. Ist  $q(t)$  dagegen ein „natürliches“ Quellensignal, also eine Summe verschiedener Frequenzanteile, so fallen die Oberwellen der niedrigen Frequenzen wiederum in den Bereich des Spektrums, und es entstehen nichtkorrigierbare Verfälschungen. Der Einfluss linearer Verzerrungen soll hier am Beispiel der Dämpfungsverzerrungen verdeutlicht werden. Steigt der Dämpfungsverlauf  $a_K(f)$  mit der Frequenz an, so kommt das obere Seitenband (OSB) schwächer am Empfänger als das untere Seitenband (USB) an. Die Ortskurve des Empfangssignals  $r(t)$  ist dann nicht mehr eine horizontale Gerade, wie in Abschnitt 1.2.3 beschrieben, sondern eine Ellipse (vgl. Abbildung 22), und es ergeben sich bei Hüllkurvendemodulation nichtlineare Verzerrungen (Oberwellen).

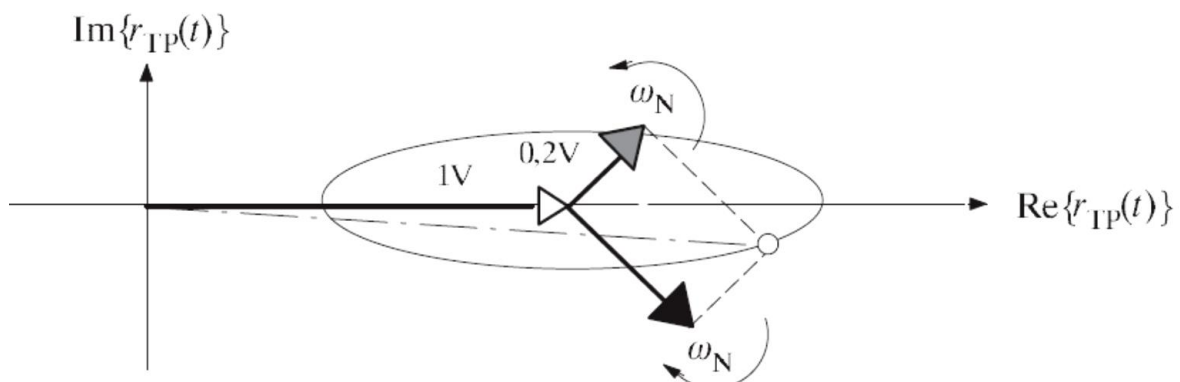


Abbildung 22: Ortskurve des Empfangssignals  $r(t)$  bei ZSB-AM mit Träger für den Fall, dass das OSB (graue Pfeilspitze) schwächer ankommt als das USB (schwarze Pfeilspitze).

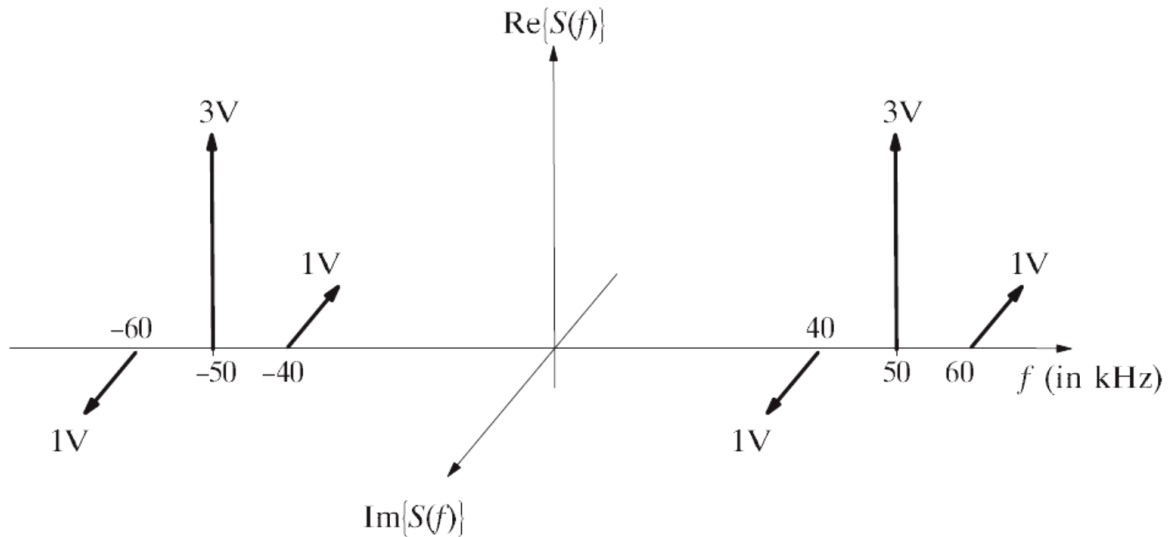
Bei Phasenverzerrungen bleibt die Ortskurve zwar weiterhin eine Gerade, aber diese ist dann nicht mehr horizontal, sondern gedreht. Auch (lineare) Phasenverzerrungen des Kanals bewirken bei Hüllkurvendemodulation nichtlineare Verzerrungen im Signal  $v(t)$ . Die hier beschriebenen nichtlinearen

Verzerrungen entstehen aufgrund eines nicht idealen Demodulators. Weist der Kanal selbst nichtlineare Verzerrungen auf, so machen sich diese natürlich auch im demodulierten Signal  $v(t)$  bemerkbar, und zwar auch dann, wenn anstelle des Hüllkurvendemodulators ein Synchrondemodulator eingesetzt wird.

## 2 Vorbereitungsfragen

### 2.1 Spektrum der Amplitudenmodulation

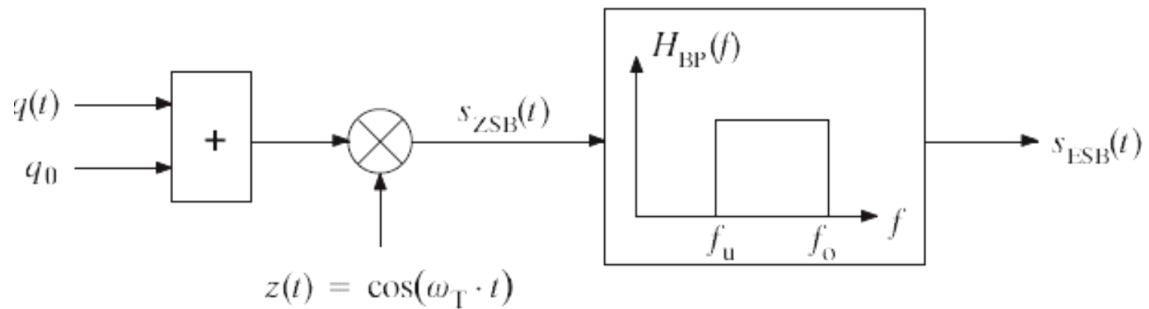
Gegeben ist durch die nachfolgende Skizze das Spektrum des Signals  $s(t)$ , das sich aus der Amplitudenmodulation eines Trägersignals  $z(t)$  der Frequenz  $f_T = 50$  kHz mit einer harmonischen Schwingung  $q(t)$  ergibt.



- Berechnen Sie das modulierte Signal  $s(t)$  aus obigem Spektrum.
- Welche Art von Amplitudenmodulation liegt hier vor? Geben Sie  $s(t)$  allgemein an.
- Bestimmen Sie die Parameter von Trägersignal, Nachrichtensignal und Modulator.
- Erklären Sie das obige Spektrum  $S(f)$  mit Hilfe der Faltung.
- Kann das Nachrichtensignal  $q(t)$  mit einem Hüllkurvendemodulator verzerrungsfrei zurückgewonnen werden? Begründung.

### 2.2 Einseitenband-Amplitudenmodulation

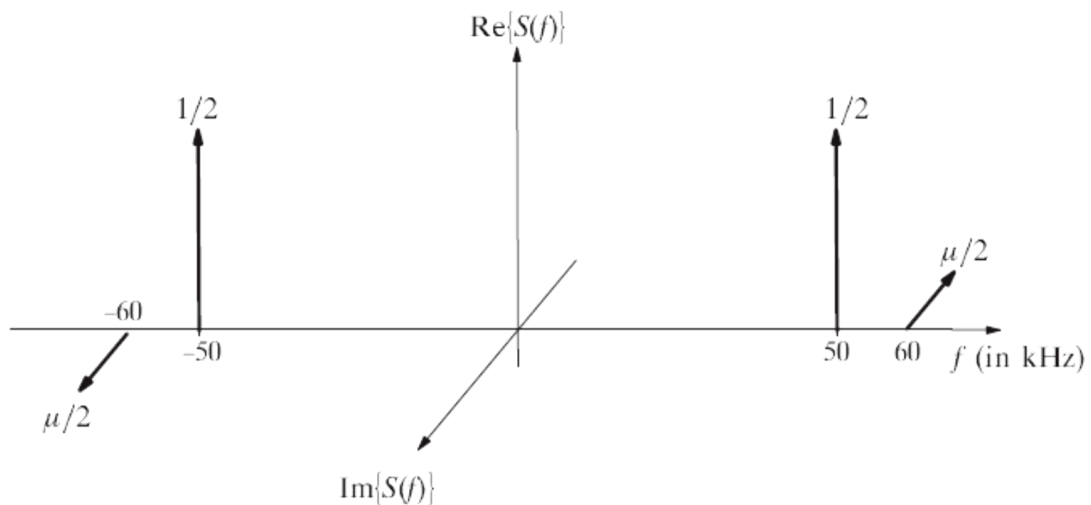
Betrachtet wird nun die Einseitenbandmodulation mit Träger. Hinsichtlich Trägersignal  $z(t)$ , Nachrichtensignal  $q(t)$  und Gleichanteil  $q_0$  gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Vorbereitungsfrage 2.1, so dass das Signal  $s_{ZSB}(t)$  vor dem Bandpass identisch mit dem Sendesignal  $s(t)$  von 2.1 ist (siehe Skizze).



- a) In welchen Bereichen können die Grenzfrequenzen  $f_u$  und  $f_o$  des (rechteckförmigen) Bandpasses liegen, damit sich eine OSB- bzw. USB-Modulation ergibt?
  
- b) Wie groß ist der Modulationsgrad  $\mu$  bei Einseitenbandmodulation?

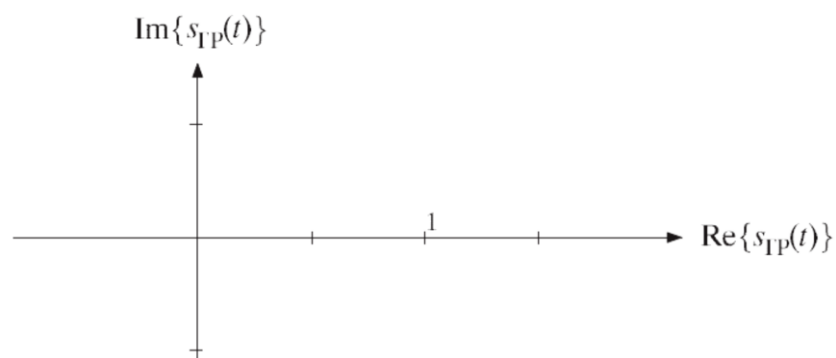
Im Folgenden sei  $f_u = 45$  kHz und  $f_o = 65$  kHz, so dass sich eine OSB-Modulation ergibt.

- c) Begründen Sie, dass das ESB-modulierte Signal  $s(t) = s_{ESB}(t)$  das folgende (auf den Gleichanteil  $q_0$  normierte) Spektrum aufweist.





- d) Welche Form hat das (normierte) ESB-modulierte Signal  $s(t) = s_{ESB}(t)$ ?
- e) Wie lauten das zu Punkt d) gehörige analytische Signal  $s_+(t)$  und das äquivalente Tiefpasssignal  $s_{TP}(t)$  sowie deren Spektren?
- f) Skizzieren Sie die Ortskurve für  $\mu = 0.5$ . Markieren Sie den Zeitpunkt  $t = 0$ .



- g) Geben Sie die Betragsfunktion  $a(t)$  und die Phasenfunktion  $\Phi(t)$  des äquivalenten Tiefpasssignals formelmäßig an. Interpretieren Sie diese Funktionen anhand von  $s(t)$ .
- h) In welchen Wertebereichen variieren die Betragsfunktion  $a(t)$  und die Phasenfunktion  $\Phi(t)$  für  $\mu = 0.5$ . Es genügt eine graphische Lösung anhand der Skizze von f).



## 2.4 Nichtlineare Verzerrungen

Ein nichtlinearer Vierpol mit dem Eingangssignal  $s(t)$  und dem Ausgangssignal  $r(t)$  wird durch folgende Kennlinie beschrieben:

$$r(t) = c_1 \cdot s(t) + c_2 \cdot s^2(t) + c_3 \cdot s^3(t).$$

- a) Berechnen Sie das Ausgangssignal, wenn am Eingang ein cosinusförmiges Signal (mit Amplitude  $\hat{s}$  und Frequenz  $f_0$ ) anliegt. Berücksichtigen Sie hierbei die trigonometrischen Beziehungen:

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2a)] , \quad \cos^3(a) = \frac{1}{4} \cdot [3 \cdot \cos(a) + \cos(3a)].$$

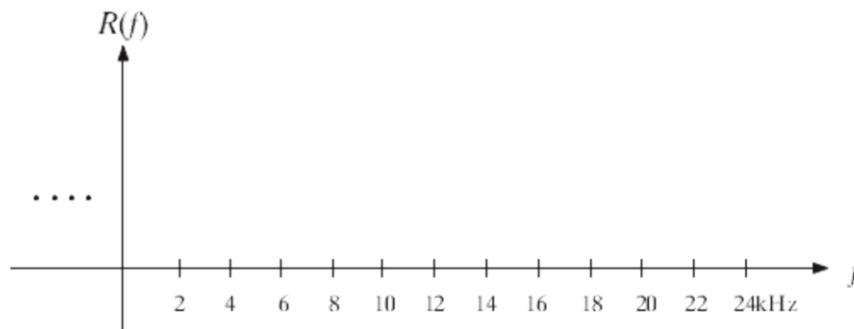
- b) Berechnen Sie den Klirrfaktor zweiter und dritter Ordnung sowie den Gesamtklirrfaktor für dieses cosinusförmige Eingangssignal.

- c) Welche Zahlenwerte ergeben sich für  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = \frac{0.4}{\hat{s}}$ ,  $c_3 = \frac{0.2}{\hat{s}^2}$ ?

Das Eingangssignal  $s(t)$  sei nun ein ZSB-amplitudenmoduliertes Signal (ohne Träger). Die Amplituden werden vereinfachend zu 1 gesetzt, so dass gilt:

$$s(t) = \cos((\omega_T + \omega_N) \cdot t) + \cos((\omega_T - \omega_N) \cdot t).$$

- d) Berechnen und skizzieren Sie das Spektrum  $R(f)$  am Ausgang des nichtlinearen Vierpols für die Parameter  $\hat{s} = 1$ ,  $f_T = 10$  kHz,  $f_N = 1$  kHz,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = \frac{0.4}{\hat{s}}$ ,  $c_3 = 0$ .



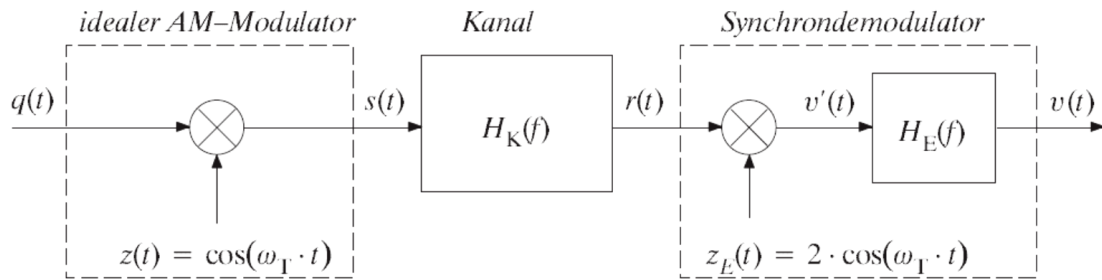
- e) Kommt es bei idealer Synchrondemodulation mit  $f_T = 10$  kHz und anschließender Tiefpassfilterung auf  $\pm 5$  kHz zu nichtlinearen Verzerrungen? Begründung.

- f) Begründen Sie, dass es dagegen für  $c_3 \neq 0$  stets zu nichtlinearen Verzerrungen kommt. Welche Signalfrequenz wird nach der Synchrondemodulation und Tiefpassfilterung entsprechend Punkt e) zusätzlich vorhanden sein?

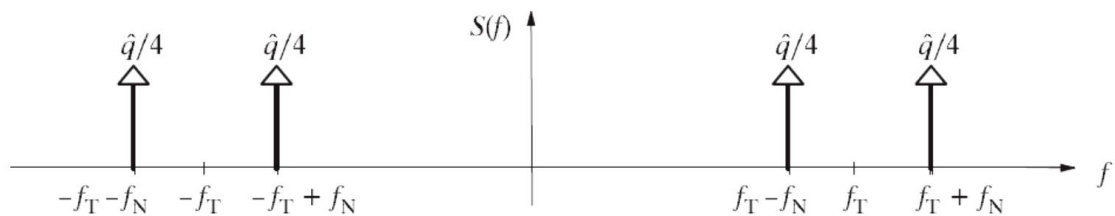
### 2.5 Lineare Verzerrungen

Anmerkung: Diese letzte Vorbereitungsfrage ist nur für die wirklich Unermüdlichen gedacht, die sich durch die bisherigen Aufgaben noch immer nicht ausgelastet fühlen.

Ein Cosinussignal  $q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$  wird entsprechend nachfolgender Skizze ZSB-amplitudenmoduliert (ohne Träger) und über einen Kanal mit der Übertragungsfunktion  $H_K(f)$  übertragen. Anschließend wird das Empfangssignal  $r(t)$  synchrondemoduliert.

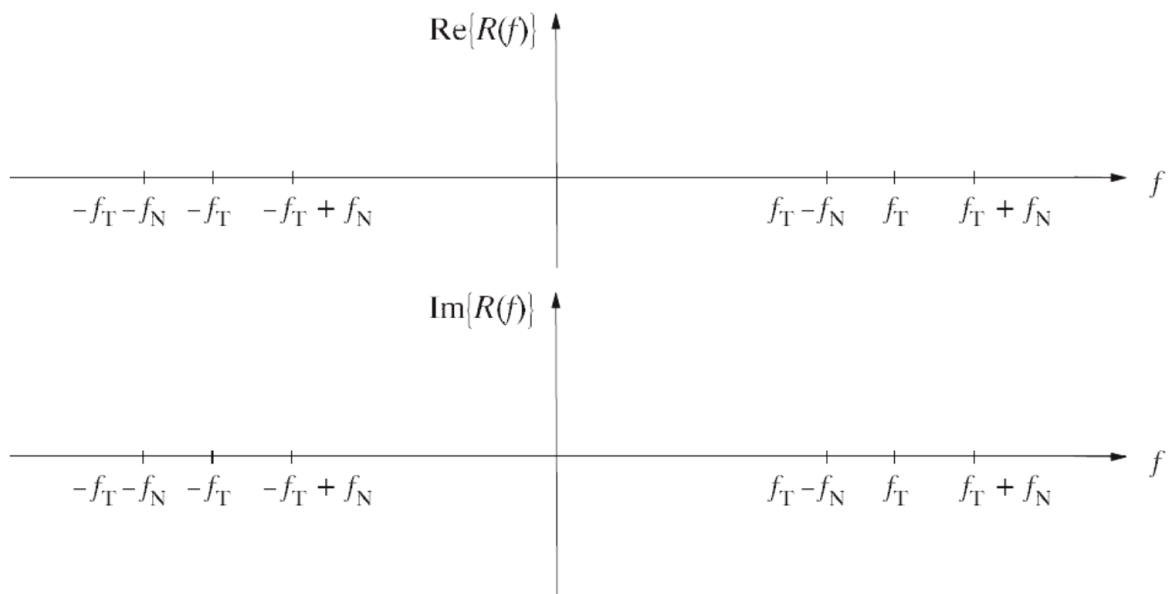


Die folgende Abbildung zeigt das Spektrum des ZSB-AM-Signals  $s(t)$ :



- a) Berechnen und skizzieren Sie das Spektrum  $R(f)$  am Kanalausgang. Berücksichtigen Sie, dass  $H_K(-f) = H_K^*(f)$  ist und benutzen Sie die Abkürzungen:

$$H_K(f_T + f_N) = R_o + j \cdot I_o, \quad H_K(f_T - f_N) = R_u + j \cdot I_u$$



b) Berechnen Sie das Spektrum  $V(f)$  nach der Synchrondemodulation. Berücksichtigen Sie hierbei die Tiefpassfilterung in geeigneter Weise. Wie lauten  $V(f)$  und  $v(t)$ ?

c) Leiten Sie das Ergebnis von b) auch über Gl. (42) ab.

d) Interpretieren Sie nun das in b) und c) berechnete Ausgangssignal  $v(t)$  für  $I_o = I_u$ .  
Hinweis: Alle Ergebnisse gelten in vergleichbarer Weise auch für ZSB mit Träger.

e) Welches Ausgangssignal  $v(t)$  stellt sich bei Synchrondemodulation ein, wenn für den Kanalfrequenzgang bei positiven Frequenzen gilt:

$$H_K(f) = \frac{1}{1 + j \cdot (f - f_T)/f_T}$$

Geben Sie  $v(t)$  insbesondere für  $f_N/f_T = 0.1$  an.

### 3 Versuchsdurchführung

Die Durchführung der folgenden Versuche erfolgt unter Windows mithilfe des Programmes „amv“. Mit dieser Software können die Eigenschaften der analogen Amplituden-, Phasen- und Frequenzmodulation sowie deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede verdeutlicht werden. Dabei können die Signale  $q(t)$ ,  $s(t)$ ,  $r(t)$ ,  $v(t)$  und  $v(t) - q(t)$  im Zeitbereich (siehe Abbildung 1) sowie  $Q(f)$ ,  $S(f)$ ,  $R(f)$ ,  $V(f)$  und  $V(f) - Q(f)$  im Frequenzbereich betrachtet und analysiert werden. Außerdem können verschiedene Ortskurven (für das analytische Signal sowie für das äquivalente Tiefpasssignal) beobachtet werden.

Um die Optionen für ein bestimmtes Fenster festzulegen, kann man ein Kontextmenü öffnen, indem man mit der rechten Maustaste auf das jeweilige Fenster klickt. Hier können z.B. die Skalierung der Darstellung oder bei Ortskurven die Geschwindigkeit verändert werden.

Die Einstellungen für das Quellensignal, den Modulator, den Kanal und den Demodulator können im Menü „Parameter“ verändert werden. Es stehen dabei zwei Parametersätze zur Verfügung, die mithilfe des Menüpunktes „aktiv“ aktiviert oder deaktiviert werden können. Es können auch beide Parametersätze gleichzeitig aktiviert werden. Dann werden die Signale in unterschiedlichen Farben dargestellt.

*Hinweis:*

Bei allen nachfolgenden Versuchen sollten Sie die mit einfacher Klammer, z.B. "a)", gekennzeichneten Teilaufgaben auf jeden Fall bearbeiten. Dagegen sind die mit einer Doppelklammer, z.B. "(b)", versehenen Unterpunkte optional.

### 3.1 Reelles und komplexes Signal

Voreinstellung: Taste F1

Geöffnete Fenster: Zeigerdiagramm

Die Darstellungsmöglichkeiten von Bandpasssignalen sollen zunächst am Beispiel eines unmodulierten Signals veranschaulicht werden. Dazu wird die harmonische Schwingung

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T)$$

näher betrachtet. Diese beschreibt natürlich stets ein reelles Signal. Insbesondere im Zusammenhang mit der Winkelmodulation wird häufig auch mit dem analytischen Signal

$$s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j(\omega_T \cdot t - \varphi_T)}$$

gearbeitet. Dieses komplexwertige Signal ist jedoch nur als Rechengröße zu verstehen und in der Realität nicht existent. Es dient lediglich dazu, manche Eigenschaften des reellen Signals  $s(t)$  anhand geometrischer Überlegungen anschaulich erklären zu können.

In diesem ersten Versuch soll der Zusammenhang zwischen diesen unterschiedlichen Darstellungsformen erarbeitet werden. Die Amplitude sei jeweils 1V (fest eingestellt), die Trägerfrequenz  $f_T = 50$  kHz. Zunächst sei die Trägerphase  $\varphi_T = 0^\circ$ .

(a) Stellen Sie das analytische Signal  $s_+(t)$  mit Real- und Imaginärteil dar ( $\varphi_T = 0^\circ$ ).

(b) Geben Sie die Fouriertransformierte von Real- und Imaginärteil an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen und den Spektralfunktionen  $S(f)$  bzw.  $S_+(f)$ ?



- c) Betrachten Sie mit dem Programm „amv“ das Zeigerdiagramm, also die zeitabhängige Darstellung von  $s_+(t)$  in der komplexen Ebene. Interpretieren Sie den Verlauf für  $f_T = 50$  kHz. Hinweis: Zur Darstellung des unmodulierten Signals können Sie im Programm z.B. folgende Einstellung wählen: AM mit Träger, Quellensignal  $q(t) = 0$ .
- d) Wählen Sie bei den Optionen des Zeigerdiagramms den Schaltknopf „Zeitsignal“. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem komplexen, analytischen Signal  $s_+(t)$  und dem reellen Signal  $s(t)$ ?
- e) Welche Ortskurve ergibt sich für diesen Fall. Interpretieren Sie das Ergebnis.
- f) Wählen Sie nun im Block „Modulator“ die Anfangsphase  $\varphi_T = 60^\circ$ . Interpretieren Sie das Zeigerdiagramm.
- g) Interpretieren Sie die Parameter  $\hat{s}$ ,  $\omega_T$  und  $\varphi_T$  im Zeigerdiagramm.

### 3.2 Signale und Spektren bei ZSB-Modulation

Voreinstellung: Taste F2

Geöffnete Fenster:    *Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 1ms,*  
                                  *Zeitsignal 2: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 1ms,*  
                                  *Spektrum 1:  $Q(f)$  zwischen -80kHz und 80kHz,*  
                                  *Spektrum 2:  $S(f)$  zwischen -80kHz und 80kHz.*

Hinweis: Im Programm „*amv*“ wird das Nachrichtensignal  $q(t)$  als eine Summe von (bis zu 10) harmonischen Schwingungen dargestellt:

$$q(t) = \sum_{i=1}^I \hat{q}_i \cdot \cos(2\pi \cdot f_i \cdot t - \varphi_i). \quad (48)$$

Die Amplituden  $\hat{q}_i$  der einzelnen Schwingungen sind in "Volt", die Frequenzen  $f_i$  in "kHz" und die Phasen  $\varphi_i$  in "Grad" einzugeben. Die Amplitudenwerte sind auf drei Nachkommastellen begrenzt, die Frequenzen müssen Vielfache von 0.5 kHz sein. Durch diese Festlegung ergibt sich stets ein diskretes Spektrum  $Q(f)$  mit Diracfunktionen bei Vielfachen von 500 Hz und i.a. komplexen Impulsengewichten.

Zur einfacheren Handhabung des Programms sind zwei „*Mustersignale*“ wählbar:

<u>Mustersignal 1:</u>	Amplitude in "Volt"	Frequenz in "kHz"	Phase in "Grad"
	0.25	0.5	-10
	0.53	1.0	-180
	0.31	3.0	-60
	0.14	5.0	20
	0.02	8.0	-80

<u>Mustersignal 2:</u>	Amplitude in "Volt"	Frequenz in "kHz"	Phase in "Grad"
	0.04	1.0	0
	0.13	2.0	0
	0.20	3.0	0
	0.20	4.0	0
	0.15	5.0	0
	0.11	6.0	0
	0.08	7.0	0
	0.05	8.0	0
	0.03	9.0	0
	0.01	10.0	0

Der Maximalwert  $q_{max}$  ist für beide *Mustersignale* jeweils gleich 1 V. Die periodischen Signale des Auswahlmenüs (Dreieck-, Rampen- und Trapezsignal) besitzen jeweils eine Grundfrequenz von 0.5 kHz und sind auf 10 kHz bandbegrenzt.

Nun soll die ideale Amplitudenmodulation (ZSB-AM) ohne Träger betrachtet werden. Wählen Sie hierzu ein cosinusförmiges Nachrichtensignal mit der Amplitude 2 V und der Frequenz  $f_N = 5$  kHz. Die Trägerfrequenz sei  $f_T = 50$  kHz, die Trägerphase  $\varphi_T = 0^\circ$ .

a) Interpretieren Sie das Sendesignal  $s(t)$  und das dazugehörige Spektrum  $S(f)$ .

b) Wie ändert sich das Spektrum  $S(f)$  bei sinusförmigem Nachrichtensignal  $q(t)$ ?

c) Wie ändert sich das Spektrum  $S(f)$ , wenn das Nachrichtensignal  $q(t)$  cosinusförmig und das Trägersignal  $z(t)$  sinusförmig verläuft?

(d) Betrachten Sie nun bei sinusförmigem Trägersignal  $z(t)$  den Zeitverlauf  $s(t)$  und das Spektrum  $S(f)$ , wenn als Nachrichtensignal  $q(t)$  das Mustersignal 2 und anschließend das Trapezsignal eingestellt wird. Wählen Sie die Darstellung im Zeitbereich von 0 bis 2 ms und die Ordinatenwerte der Spektralfunktion auf  $\pm 0.25$ . Interpretieren Sie die jeweiligen Kurvenverläufe.

### 3.3 Synchrondemodulation

Voreinstellung: Taste F3

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Empfangssignal  $r(t)$  zwischen 0 und 1 ms,  
 Zeitsignal 2: Sinkensignal  $v(t)$  zwischen 0 und 1 ms,  
 Spektrum 1:  $R(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
 Spektrum 2:  $V(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz.

Gegeben sei ein ideal amplitudenmoduliertes Signal:  $s(t) = q(t) \cdot z(t)$ . Sowohl  $q(t)$  als auch  $z(t)$  seien harmonische Schwingungen, wobei zunächst für die Signalparameter gelte:

$$\hat{q} = 1 \text{ V}, \quad f_N = 5 \text{ kHz}, \quad \varphi_N = 0^\circ$$

$$\hat{z} = 1, \quad f_T = 50 \text{ kHz}, \quad \varphi_T = 60^\circ$$

Der Kanal wird als ideal vorausgesetzt, d.h. es gelte  $r(t) = s(t)$ . Untersucht werden soll die Wirkungsweise des im Abschnitt 1.3.1 erläuterten Synchrondemodulators.

a) Betrachten und beschreiben Sie die Signale  $r(t)$  und  $v(t)$  sowie deren Spektralfunktionen  $R(f)$  und  $V(f)$  bei optimaler Einstellung der Synchrondemodulator-Parameter. Hierbei ist  $H_E(f)$  ein idealer, rechteckförmiger Tiefpass mit der oberen Grenzfrequenz  $f_o = f_T = 50 \text{ kHz}$  und das empfängerseitige Trägersignal  $z_E(t) = 2 \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T)$ .

b) Wählen Sie nun die obere Grenzfrequenz des Tiefpasses gleich  $f_o = 120 \text{ kHz}$ . Interpretieren Sie das demodulierte Signal  $v(t)$  im Zeit- und im Frequenzbereich.

Für die weiteren Unterpunkte sei das Filter  $H_E(f)$  jeweils optimal ( $f_o = f_T = 50 \text{ kHz}$ ).

c) Beschreiben Sie den Einfluss einer Phasenabweichung  $\Delta\varphi_T$  zwischen dem sende- und dem empfängerseitigen Trägersignal. Wie unterscheiden sich die Signale  $v(t)$  und  $q(t)$  bei einer Phasenabweichung von  $+45^\circ$  bzw.  $-45^\circ$ ?

(d) Wiederholen Sie die in c) beschriebene Untersuchung mit dem „Mustersignal 1“. Interpretieren Sie das Ergebnis.

e) Beschreiben Sie den Einfluss einer Frequenzabweichung  $\Delta f_T$  zwischen sende- und empfangsseitigem Trägersignal. Wählen Sie hierfür  $\Delta f_T = 1$  kHz und  $\Delta f_T = 2$  kHz. Verwenden Sie für diese Untersuchung wieder das cosinusförmige Nachrichtensignal entsprechend Punkt a) und die Phasenabweichung  $\Delta\varphi_T = 0^\circ$ .

(f) Wiederholen Sie den Versuch e) mit dem „Mustersignal 1“.

(g) Zeigen Sie, dass der Synchrondemodulator nur dann richtig arbeitet, wenn die Bedingung  $f_T > f_{N,max}$  erfüllt ist. Wählen Sie dabei das folgende Nachrichtensignal:  
 $q(t) = 0.5 \text{ V} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + 0.5 \text{ V} \cdot \cos(\omega_{N,max} \cdot t)$ , mit  $f_1 = 5$  kHz und  $f_{N,max} = 10$  kHz.  
Die Trägerfrequenz sei  $f_T = 10.5$  kHz bzw.  $f_T = 10$  kHz. Hinweis: Ändern Sie auch jeweils die obere Grenzfrequenz des Filters  $H_E(f)$  auf  $f_o = f_T$ .

### 3.4 Zeigerdiagramm und Ortskurve

Voreinstellung: Taste F4

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 1 ms,  
Spektrum 1:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
Zeigerdiagramm,  
Ortskurve.

Nun sollen die Signale und Spektren der ZSB-Amplitudenmodulation mit Träger anhand des „Zeigerdiagramms“ und der „Ortskurve“ beschrieben werden (vgl. Abschnitt 1.2.3). Wählen Sie hierzu als Parametersatz 1 eine ZSB-AM mit Gleichanteil  $q_0 = 1$  V und je ein cosinusförmiges Nachrichten- und Trägersignal mit folgenden Parameterwerten:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= 0.8 \text{ V}, & f_N &= 5 \text{ kHz}, & \varphi_N &= 0^\circ \\ \hat{z} &= 1, & f_T &= 50 \text{ kHz}, & \varphi_T &= 0^\circ \end{aligned}$$

a) Beschreiben Sie das Spektrum  $S(f)$  des ZSB-AM-Signals.

b) Wie groß ist der Modulationsgrad  $m$ ?

c) Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Anteile des Spektrums in der Ortskurve.

d) Interpretieren Sie für den vorliegenden Fall das Zeigerdiagramm. Wählen Sie in der Option für das Zeigerdiagramm den Schaltknopf „Zeitsignal“ und geben Sie den Zusammenhang zwischen dem reellen Bandpasssignal  $s(t)$  und dem analytischen Signal  $s_+(t)$  an.

(e) Interpretieren Sie die Signalwerte zu den Zeiten  $t = 0$ ,  $t = 20 \mu\text{s}$  sowie  $t = 30 \mu\text{s}$ .

f) Interpretieren Sie das Zeigerdiagramm, wenn der Träger sinusförmig ( $\varphi_T = 90^\circ$ ) verläuft und das Nachrichtensignal die Phase  $\varphi_N = 60^\circ$  besitzt (gleiche Amplitude wie unter c).

(g) Wählen Sie nun bei sonst gleichen Parametern als Quellensignal  $q(t)$  das „Mustersignal 1“, das sich aus insgesamt 5 Frequenzen mit unterschiedlichen Amplituden und Phasenlagen zusammensetzt (siehe Hinweis bei Versuch 3.2). Interpretieren Sie die ausgegebenen Graphiken (Zeitsignal, Spektrum, Zeigerdiagramm und Ortskurve).

### 3.5 Hüllkurvendemodulation

Voreinstellung: Taste F5

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
Zeitsignal 2: Sinkensignal  $v(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
Spektrum 2:  $V(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
Ortskurve.

*Hinweis:* Verwenden Sie unbedingt Spektrum 2 (Fenster 4). Die Klirrfaktoren werden nur in diesem Fenster angezeigt, nicht bei Spektrum 1 (Fenster 3).

Wählen Sie wie in Versuch 3.4 als Parametersatz 1 ein cosinusförmiges Nachrichtensignal und ein cosinusförmiges Trägersignal mit folgenden Parameterwerten:

$$\hat{q} = 0.8 \text{ V}, \quad f_N = 5 \text{ kHz}, \quad \varphi_N = 0^\circ$$
$$\hat{z} = 1, \quad f_T = 50 \text{ kHz}, \quad \varphi_T = 0^\circ$$

Der Gleichanteil des Modulators sei weiterhin  $q_0 = 1 \text{ V}$ , zur Demodulation wird ein **idealer** Hüllkurvendemodulator verwendet. Setzen Sie zunächst die untere Grenzfrequenz des Hüllkurvendemodulators auf Null und die obere Grenzfrequenz auf den Maximalwert (120 kHz). Das bedeutet: es erfolgt keine Filterung am Ausgang.

- a) Betrachten Sie das Sinkensignal  $v(t)$ . Begründen Sie, warum bei dieser Konstellation mit dem (idealen) Hüllkurvendemodulator das Signal verzerrungsfrei rekonstruiert wird. Welcher Unterschied ist zwischen Quellen- und Sinkensignal feststellbar?
- b) Durch welche Maßnahme wird sichergestellt, dass Quellen- und Sinkensignal tatsächlich übereinstimmen?
- c) Überprüfen Sie jetzt mit dem „Mustersignal 1“, dass auch bei diesem die (ideale) Hüllkurvendemodulation das richtige Ergebnis liefert. Begründung.



- d) Wählen Sie nun wieder das cosinusförmige Nachrichtensignal gemäß der Ausgangseinstellung und den Gleichanteil  $q_0 = 0.4 \text{ V}$ . Interpretieren Sie das Demodulationsergebnis für diesen Fall.
- e) Bestimmen Sie aus dem Spektrum  $V(f)$  die Klirrfaktoren  $K_2$ ,  $K_3$  und  $K_4$  sowie den Gesamtklirrfaktor  $K$  (Hinweis: unbedingt Fenster 4 verwenden).
- f) Interpretieren Sie anhand von „Mustersignal 1“ die Auswirkungen der nichtlinearen Verzerrungen bei (idealer) Hüllkurvendemodulation mit  $m > 1$ .
- (g) Wählen Sie nun ein cosinusförmiges Nachrichtensignal mit der Frequenz  $f_N = 1 \text{ kHz}$ . Die Modulatorparameter seien  $f_T = 100 \text{ kHz}$  und  $q_0 = 1 \text{ V}$ . Betrachten Sie die Signale und Spektren, wenn beim Empfänger ein **realer** Hüllkurvendemodulator gemäß Abbildung 19 verwendet wird. Wählen Sie die untere Grenzfrequenz des Bandpasses zu  $f_u = 0.5 \text{ kHz}$  und die obere Grenzfrequenz  $f_o = 120 \text{ kHz}$ . Wie groß ist die optimale Zeitkonstante  $\tau$ ? Interpretieren Sie die ausgegebenen Graphen.
- (h) Welche Veränderungen ergeben sich, wenn die obere Grenzfrequenz auf  $f_o = 10 \text{ kHz}$  herabgesetzt wird?

### 3.6 Einseitenbandmodulation

Voreinstellung: Taste F6 (und Änderungen)

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 0.2 ms,  
Spektrum 1:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
Zeigerdiagramm,  
Ortskurve.

Betrachten Sie nun die Einseitenbandmodulation (ESB-AM) eines cosinusförmigen Signals. Quellen- und Trägersignal sollen wie folgt gewählt werden:

$$\begin{aligned}\hat{q} &= 1 \text{ V}, & f_N &= 5 \text{ kHz}, & \varphi_N &= 0^\circ \\ \hat{z} &= 1, & f_T &= 50 \text{ kHz}, & \varphi_T &= 0^\circ\end{aligned}$$

Stellen Sie im Parametersatz 1 eine OSB-Modulation ein, im zweiten Parametersatz zum Vergleich eine ZSB-AM. Der Gleichanteil sei jeweils  $q_0 = 1 \text{ V}$ .

a) Betrachten Sie das Spektrum  $S(f)$  sowie die Ortskurve (Betrags- und Phasenfunktion). Interpretieren Sie die ausgegebenen Graphen.

b) Interpretieren Sie auch das Zeitsignal und das Zeigerdiagramm.

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Hüllkurve und den Abständen der Nulldurchgänge?

- 
- (d) Vergleichen Sie nun die OSB- mit der USB-Modulation. Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten sind feststellbar?
- e) Betrachten Sie das Differenzsignal  $v(t) - q(t)$  und dessen Spektrum am Ausgang eines idealen Hüllkurvendemodulators. Wählen Sie dazu im Parametersatz 1 eine OSB und im Parametersatz 2 eine ZSB-Modulation. Interpretation.
- f) Zeigen Sie, dass mit Synchrondemodulation auch das OSB-Signal verzerrungsfrei demoduliert werden kann. Begründen Sie dieses Verhalten. Wie unterscheiden sich die demodulierten Signale von Parametersatz 1 und 2? Ändern Sie den Demodulator für Parametersatz 1 derart, dass auch hier  $v(t) = q(t)$  gilt.
- g) Zeigen Sie die verzerrungsfreie Demodulation eines OSB-Signals mittels Synchrondemodulator auch anhand des Mustersignals 1.

### 3.7 Lineare Verzerrungen

Voreinstellung: Taste F11

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
 Zeitsignal 2: Sinkensignal  $v(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
 Spektrum 1:  $R(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
 Ortskurve.

a) Wählen Sie als Parametersatz 1 das Quellensignal  $q_1(t) = 0.8 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t)$  sowie ZSB-Amplitudenmodulation mit Träger ( $f_T = 50 \text{ kHz}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$ ,  $q_0 = 1 \text{ V}$ ). Der Kanal sei zunächst ideal. Benutzen Sie zur Demodulation den idealen Hüllkurvendemodulator. Betrachten und beschreiben Sie den Verlauf der Ortskurve.

b) Wählen Sie nun für den Kanal Dämpfungsverzerrungen (Gaußbandpass) mit der Mittenfrequenz  $f_m = 50 \text{ kHz}$  und der äquivalenten Bandbreite  $\Delta f_K = 20 \text{ kHz}$ . Hierbei lautet die Übertragungsfunktion:

$$H_K(f) = e^{-\pi \left( \frac{f-f_M}{\Delta f} \right)^2}$$

Beschreiben Sie die Veränderungen, die sich im Spektrum und der Ortskurve im Vergleich zu Punkt a) ergeben.

c) Wählen sie nun als Quellensignal:

$$q_2(t) = 0.8 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t) + 0.4 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot t).$$

Wie unterscheiden sich Quellen- und Sinkensignal? Erklärung.

d) Geben sie Ihr ursprüngliches Eingangssignal  $q_1(t) = 0.8 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t)$  wieder ein und verschieben Sie nun die Mittenfrequenz des Gaußbandpasses auf 45 kHz. Beschreiben Sie nun den Verlauf der Ortskurve. Interpretation.

e) Benutzen Sie nun wieder das Eingangssignal  $q_2(t)$  und beschreiben Sie die feststellbaren Veränderungen gegenüber c).

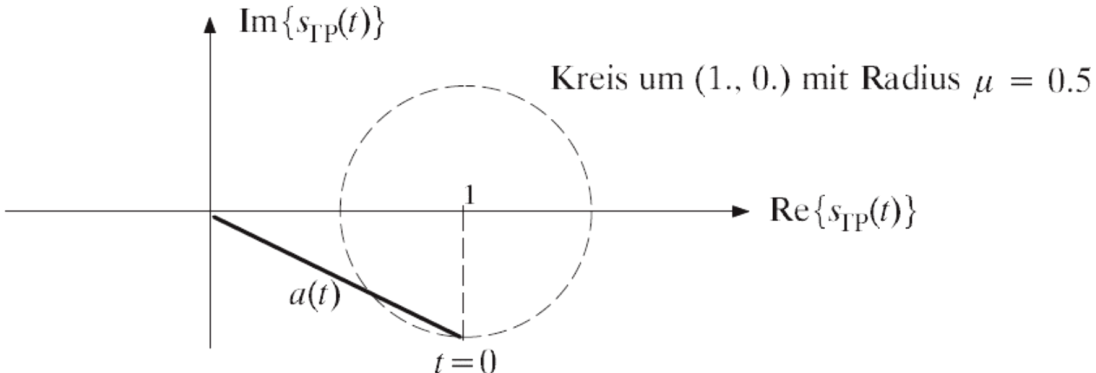
(f) Wählen Sie als Eingangssignal nun ein Dreiecksignal. Woran erkennen Sie hier die Verzerrungen? Sind diese linear oder nichtlinear?

## 4 Musterlösungen der Vorbereitungsfragen

### 4.1 Spektrum der Amplitudenmodulation

- a)  $s(t) = 6V \cdot \cos(\omega_{50} \cdot t) + 2V \cdot \sin(\omega_{60} \cdot t) - 2V \cdot \sin(\omega_{40} \cdot t)$   
 mit  $\omega_{50} = 2\pi \cdot 50\text{kHz}$ ;  $\omega_{60} = 2\pi \cdot 60\text{kHz}$ ;  $\omega_{40} = 2\pi \cdot 40\text{kHz}$ .
- b) ZSB-AM mit Träger:  $s(t) = (q(t) + q_0) \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$ .
- c)  $f_T = 50\text{kHz}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$  (da Spektrallinie bei der Trägerfrequenz reell),  
 $f_N = 10\text{kHz}$ ,  $\varphi_N = 90^\circ$  (d.h. sinusförmiges Nachrichtensignal),  
 $\hat{q} = 4V$ ,  $q_0 = 6V$ .
- d)  $S(f) = (q_0 \cdot \delta(f) + Q(f)) * Z(f)$  mit  
 $Z(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)]$  und  $Q(f) = 2V \cdot j \cdot [-\delta(f - f_N) + \delta(f + f_N)]$
- e)  $m = \frac{q_{\max}}{q_0} = \frac{2}{3}$ . Wegen  $m < 1$  ist Hüllkurvendemodulation anwendbar.

### 4.2 Einseitenband-Amplitudenmodulation

- a) OSB:  $40\text{kHz} < f_u < 50\text{kHz}$ ,  $f_o > 60\text{kHz}$ ,  
 USB:  $50\text{kHz} < f_o < 60\text{kHz}$ ,  $f_u < 40\text{kHz}$ .
- b)  $\mu = \frac{q_{\max}}{2 \cdot q_0} = \frac{1}{3}$ .
- c) Nur Anteile mit  $|f|$  größer/gleich 45 kHz, normiert auf  $q_0 = 6V$ :  
 $3V \rightarrow 1/2$ ,  $1V \rightarrow 1/6 = \mu/2$ .
- d)  $s(t) = \cos(\omega_T \cdot t) + \mu \cdot \sin((\omega_T + \omega_N) \cdot t)$ .
- e)  $S_+(f) = \delta(f - f_T) - j \cdot \mu \cdot \delta(f - (f_T + f_N)) \Rightarrow s_+(t) = e^{j\omega_T t} - j \cdot \mu \cdot e^{j(\omega_T + \omega_N)t}$ ,  
 $S_{TP}(f) = \delta(f) - j \cdot \mu \cdot \delta(f - f_N) \Rightarrow s_{TP}(t) = 1 - j \cdot \mu \cdot e^{j\omega_N t}$ .
- f) 

g) Realteil:  $1 + \mu \cdot \sin(\omega_N \cdot t)$ ,

Imaginärteil:  $-\mu \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$ .

Hüllkurve von  $s(t)$ :

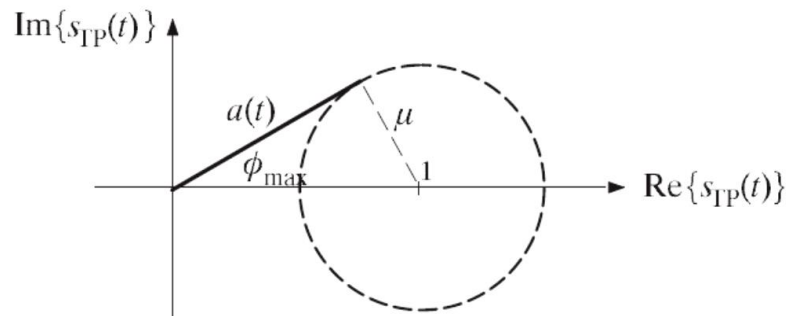
$$a(t) = |s_{\text{TP}}(t)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{1 + \mu^2 + 2\mu \cdot \sin(\omega_N \cdot t)},$$

Verschiebung der Nulldurchgänge aufgrund der OSB-Modulation:

$$\phi(t) = \arcs(s_{\text{TP}}(t)) = \arctan \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctan \frac{-\mu \cdot \cos(\omega_N t)}{1 + \mu \cdot \sin(\omega_N \cdot t)}.$$

h) Die Zeigerlänge  $a(t)$  variiert zwischen 0.5 und 1.5, der Winkel zwischen  $-\phi_{\max}$  und  $+\phi_{\max}$  mit

$$\cos(\phi_{\max}) = \mu = 1/2 \Rightarrow \phi_{\max} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$



### 4.3 Synchrondemodulation

a)  $S(f) = Q(f) * Z(f)$  mit  $Z(f) = \frac{j}{2} \cdot [-\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)]$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{j}{2} \cdot [-Q(f - f_T) + Q(f + f_T)].$$

b) Das Faltungsprodukt  $S(f)$  des rein reellen Spektrums  $Q(f)$  mit dem rein imaginären Spektrum  $Z(f)$  ist rein imaginär. Da  $s(t) \leftrightarrow S(f)$  stets eine reelle Funktion sein muss, besitzt der Imaginärteil bei negativen Frequenzen das entgegengesetzte Vorzeichen als bei positiven Frequenzen.

c)  $V'(f) = R(f) * Z_E(f) = S(f) * Z_E(f) =$   
 $= [\frac{j}{2} \cdot Q(f + f_T) - \frac{j}{2} \cdot Q(f - f_T)] * [j \cdot \delta(f + f_T) - j \cdot \delta(f - f_T)] =$   
 $= -\frac{1}{2} \cdot Q(f + 2f_T) + \frac{1}{2} \cdot Q(f) + \frac{1}{2} \cdot Q(f) - \frac{1}{2} \cdot Q(f - 2f_T)$

$$V'(f) = Q(f) - \frac{1}{2} \cdot Q(f + 2f_T) - \frac{1}{2} \cdot Q(f - 2f_T).$$

d) Nach Entfernen der Anteile um die doppelte Trägerfrequenz (Tiefpass) gilt:

$$V(f) = Q(f) \Rightarrow v(t) = q(t).$$

Das bedeutet: Der Synchrondemodulator arbeitet hier verzerrungsfrei.

### 4.4 Nichtlineare Verzerrungen

a)  $r(t) = r_1(t) + r_2(t) + r_3(t)$  mit  $r_1(t) = c_1 \cdot \hat{s} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ ,

$$r_2(t) = \frac{c_2 \cdot \hat{s}^2}{2} \cdot [1 + \cos(2\omega_0 \cdot t)] , r_3(t) = \frac{c_3 \cdot \hat{s}^3}{4} \cdot [3 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \cos(3\omega_0 \cdot t)] .$$

b)  $r(t) = \hat{r}_0 + \hat{r}_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \hat{r}_2 \cdot \cos(2\omega_0 \cdot t) + \hat{r}_3 \cdot \cos(3\omega_0 \cdot t)$  .

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich mit Punkt a):

$$\hat{r}_0 = \hat{r}_2 = \frac{c_2 \cdot \hat{s}^2}{2} , \hat{r}_1 = c_1 \cdot \hat{s} + \frac{3}{4} \cdot c_3 \cdot \hat{s}^3 , \hat{r}_3 = \frac{1}{4} \cdot c_3 \cdot \hat{s}^3 .$$

Klirrfaktor 2. Ordnung:  $K_2 = \frac{|\hat{r}_2|}{|\hat{r}_1|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot \hat{s}^2}{c_1 \cdot \hat{s} + \frac{3}{4} \cdot c_3 \cdot \hat{s}^3}$ ,

Klirrfaktor 3. Ordnung:  $K_3 = \frac{|\hat{r}_3|}{|\hat{r}_1|} = \frac{\frac{1}{4} \cdot c_3 \cdot \hat{s}^3}{c_1 \cdot \hat{s} + \frac{3}{4} \cdot c_3 \cdot \hat{s}^3}$ ,  $K_4 = K_5 = \dots = 0$

$$\Rightarrow K = \sqrt{K_2^2 + K_3^2}$$

c)  $\hat{r}_1 = c_1 \cdot \hat{s} + \frac{3}{4} \cdot c_3 \cdot \hat{s}^3 = 1.15 \cdot \hat{s}$  . Daraus folgt:

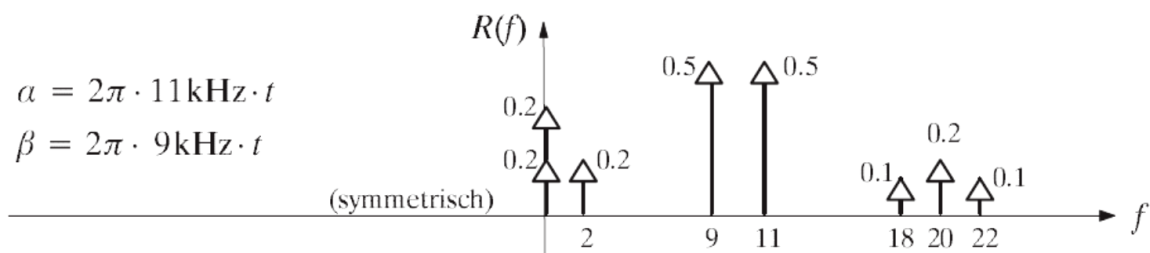
$$K_2 = \frac{|\hat{r}_2|}{|\hat{r}_1|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.4 \cdot \hat{s}}{1.15 \cdot \hat{s}} = 0.1739 , K_3 = \frac{|\hat{r}_3|}{|\hat{r}_1|} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0.2 \cdot \hat{s}}{1.15 \cdot \hat{s}} = 0.0435$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{0.1739^2 + 0.0435^2} = 0.1792$$

d) Mit  $a = 2\pi \cdot (f_T + f_N) \cdot t$  und  $\beta = 2\pi \cdot (f_T - f_N) \cdot t$  :  $s(t) = \cos(a) + \cos(\beta)$

$$\Rightarrow r(t) = \cos(a) + \cos(\beta) + 0.4 \cos^2(a) + 0.8 \cos(a) \cos(\beta) + 0.4 \cos^2(\beta)$$

$$\Rightarrow r(t) = \cos(a) + \cos(\beta) + 0.2 + 0.2 \cos(2a) + 0.4 \cos(a + \beta) + 0.4 \cos(a - \beta) + 0.2 + 0.2 \cos(2\beta)$$



e) Nach Synchrondemodulation fallen nur die Frequenzanteile bei 9 und 11 kHz in den Durchlassbereich des Filters. Diese ergeben wegen  $f_T = 10$  kHz das Cosinussignal mit 1 kHz. Also gibt es hier keine Verzerrungen.



$$f) (\cos(\alpha) + \cos(\beta))^3 = \cos^3(\alpha) + 3 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \cos(\beta) + 3 \cdot \cos(\alpha) \cos^2(\beta) + \cos^3(\beta)$$

$$\begin{aligned} \text{z.B. } 3 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2\alpha)] \cdot \cos(\beta) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \cos(\beta) + \frac{3}{4} \cdot \cos(2\alpha + \beta) + \frac{3}{4} \cdot \cos(2\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$\Downarrow$   
9kHz

$\Downarrow$   
31kHz  
(wird entfernt)

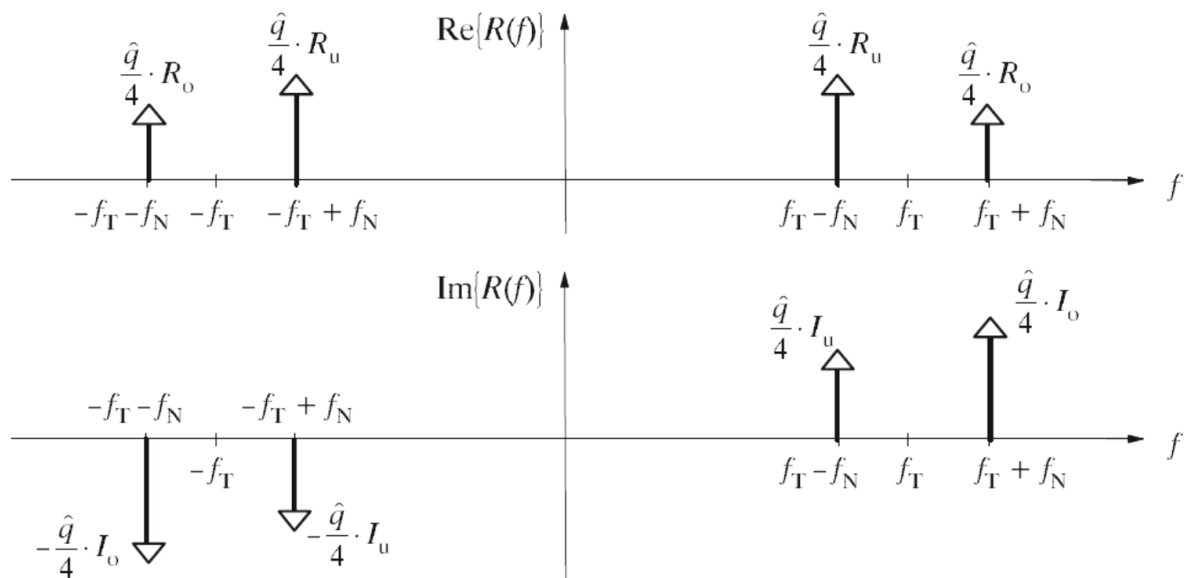
$\Downarrow$   
13kHz

Analog ergeben sich Anteile bei 7 und 11kHz, die aus dem Cosinusterm mit  $2\beta - \alpha$  herrühren (wird entfernt)  $\Rightarrow$  Nach Synchrondemodulation wird der 1kHz-Anteil verfälscht und es entsteht ein zusätzlicher (unerwünschter) Anteil bei 3kHz („Schwebung“).

#### 4.5 Lineare Verzerrungen

$$a) R(f) = S(f) \cdot H_K(f) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_o + j \cdot I_o] \cdot \delta(f - (f_T + f_N)) + \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_u + j \cdot I_u] \cdot \delta(f - (f_T - f_N)) \\ &+ \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_o - j \cdot I_o] \cdot \delta(f + (f_T + f_N)) + \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_u - j \cdot I_u] \cdot \delta(f + (f_T - f_N)) . \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b) V(f) &= [R(f) * [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)]] \cdot H_E(f) \\ &= \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_o + j \cdot I_o] \cdot \delta(f - f_N) + \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_u + j \cdot I_u] \cdot \delta(f + f_N) \\ &+ \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_o - j \cdot I_o] \cdot \delta(f + f_N) + \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_u - j \cdot I_u] \cdot \delta(f - f_N) . \end{aligned}$$

Alle anderen Terme liegen um die doppelte Trägerfrequenz ( $2f_T$ ) und werden durch den Tiefpass  $H_E(f)$  eliminiert. Nach Umsortieren und Zusammenfassen der Terme:

$$\begin{aligned} V(f) &= \hat{q} \cdot \frac{R_o + R_u}{2} \cdot \frac{1}{2} [\delta(f - f_N) + \delta(f + f_N)] - \\ &- \hat{q} \cdot \frac{I_o - I_u}{2} \cdot \frac{j}{2} [-\delta(f - f_N) + \delta(f + f_N)] \\ \Rightarrow v(t) &= \hat{q} \cdot \frac{R_o + R_u}{2} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) - \hat{q} \cdot \frac{I_o - I_u}{2} \cdot \sin(\omega_N \cdot t) . \end{aligned}$$

c) Nach Gl. (1.75) gilt für  $f > 0$ :  $H_{\text{MKD}}(f) = \frac{1}{2} \cdot [H_{\text{K}}(f_{\text{T}} + f) + H_{\text{K}}^*(f_{\text{T}} - f)]$

$$H_{\text{MKD}}(f_{\text{N}}) = \frac{1}{2} \cdot [H_{\text{K}}(f_{\text{T}} + f_{\text{N}}) + H_{\text{K}}^*(f_{\text{T}} - f_{\text{N}})] = \frac{1}{2} [(R_{\text{o}} + R_{\text{u}}) + j \cdot (I_{\text{o}} - I_{\text{u}})]$$

$$H_{\text{MKD}}(-f_{\text{N}}) = H_{\text{MKD}}^*(f_{\text{N}}) = \frac{1}{2} [(R_{\text{o}} + R_{\text{u}}) - j \cdot (I_{\text{o}} - I_{\text{u}})] .$$

$$V(f) = Q(f) \cdot H_{\text{MKD}}(f) = \frac{1}{2} [(R_{\text{o}} + R_{\text{u}}) + j \cdot (I_{\text{o}} - I_{\text{u}})] \cdot \frac{\hat{q}}{2} \cdot \delta(f - f_{\text{N}}) + \frac{1}{2} [(R_{\text{o}} + R_{\text{u}}) - j \cdot (I_{\text{o}} - I_{\text{u}})] \cdot \frac{\hat{q}}{2} \cdot \delta(f + f_{\text{N}}) .$$

Man erhält das gleiche Ergebnis wie unter a) und b), aber schneller.

d)  $I_{\text{o}} = I_{\text{u}} \Rightarrow v(t) = \hat{q} \cdot \frac{R_{\text{o}} + R_{\text{u}}}{2} \cdot \cos(\omega_{\text{N}} \cdot t)$

↙
↘

Dämpfung
keine Phasenverschiebung

e) Für  $f > 0$ :  $H_{\text{MKD}}(f) = \frac{1}{2} \cdot [H_{\text{K}}(f_{\text{T}} + f) + H_{\text{K}}^*(f_{\text{T}} - f)]$

$$H_{\text{MKD}}(f_{\text{N}}) = \frac{1}{2} \cdot [H_{\text{K}}(f_{\text{T}} + f_{\text{N}}) + H_{\text{K}}^*(f_{\text{T}} - f_{\text{N}})] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - j \cdot \frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}}} + \frac{1}{1 + j \cdot (\frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}})^*} \right]$$

$$\Rightarrow H_{\text{MKD}}(f_{\text{N}}) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}})^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan(f_{\text{N}}/f_{\text{T}})}$$

$$H_{\text{MKD}}(-f_{\text{N}}) = H_{\text{MKD}}^*(f_{\text{N}}) = \frac{1}{1 - j \cdot \frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}})^2}} \cdot e^{j \cdot \arctan(f_{\text{N}}/f_{\text{T}})}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{\hat{q}}{\sqrt{1 + (\frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}})^2}} \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{N}} \cdot t - \arctan \frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}}) .$$

Mit  $f_{\text{N}}/f_{\text{T}} = 0.1$ :

Dämpfung um den Faktor 0.995, Verzögerung um den Phasenwinkel von 5.7°.


## 5 Musterlösungen der Versuchsdurchführung

### 5.1 Reelles und komplexes Signal

(a) Nach dem Satz von Euler gilt:

$$s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j\omega_T t} = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t) + j \cdot \hat{s} \cdot \sin(\omega_T \cdot t).$$

(b)  $\hat{s} \cdot \cos(\omega_T t)$    $\frac{\hat{s}}{2} \cdot \delta(f - f_T) + \frac{\hat{s}}{2} \cdot \delta(f + f_T)$

$j \cdot \hat{s} \cdot \sin(\omega_T t)$    $\frac{\hat{s}}{2} \cdot \delta(f - f_T) - \frac{\hat{s}}{2} \cdot \delta(f + f_T)$

$s_+(t)$    $\hat{s} \cdot \delta(f - f_T)$

Das reelle Signal  $s(t)$  und das Spektrum  $S(f)$  ist durch die erste Gleichung gekennzeichnet, das analytische Signal  $s_+(t)$  nebst Spektrum  $S_+(f)$  durch die dritte.  $S_+(f)$  ergibt sich aus  $S(f)$  durch Verdoppeln der positiven und Abschneiden der negativen Frequenzanteile.

c) Zum Zeitpunkt  $t = 0$  liegt der Zeiger der Länge nach in Richtung der positiven reellen Achse. Mit zunehmender Zeit  $t$  dreht er sich entgegen dem Uhrzeigersinn (in mathematisch positive Richtung) mit einer Umdrehung pro Periodendauer  $T_0 = 1/f_T = 20 \mu\text{s}$ .

d) Das reelle Signal ist gleich dem Realteil des analytischen Signals.

e) Die Ortskurve entartet bei unmoduliertem Signal zu einem Punkt auf der reellen Achse.

f) Es gilt:  $s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{-j60^\circ} \cdot e^{j\omega_T t}$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  liegt nun der Zeiger mit  $60^\circ$  nach rechts unten verdreht. Die Drehung erfolgt mit gleicher Geschwindigkeit wie bei c). Das reelle Zeitsignal ist bei  $t = 0$  gleich  $s(t = 0) = \text{Re}\{1\text{V} \cdot e^{-j60^\circ}\} = 0.5\text{V}$ . Mit zunehmender Zeit wird  $s(t)$  erst größer bis zum Maximalwert  $1\text{V}$  (nach  $T_0/6 = 3.33 \mu\text{s}$ ). Anschließend dreht der Zeiger wie unter Punkt c).

g)  $\hat{s}$ : Länge des Drehzeigers,

$\omega_T$ : Kreisgeschwindigkeit des Drehzeigers,

$\varphi_T$ : Ausgangslage des Drehzeigers in der komplexen Ebene zum Zeitpunkt  $t = 0$ , nach unten aufgetragen.

### 5.2 Signale und Spektren bei ZSB-Modulation

a) Das Signal  $s(t)$  ist das Produkt von  $q(t)$  und  $z(t)$ . Das Spektrum weist somit Linien bei  $\pm(f_T + f_N)$  und bei  $\pm(f_T - f_N)$  auf. Da sowohl das Nachrichten- als auch das Trägersignal cosinusförmig verlaufen (also jeweils die Phase  $0^\circ$  besitzen), sind die Impulsgewichte reell. Die Summe aller Gewichte ist gleich der Amplitude des Nachrichtensignals ( $2\text{V}$ ).

b) Die Spektrallinien sind nun imaginär. Es gilt:

$$S(f) = j \cdot 0.5\text{V} \cdot \delta(f + 55 \text{ kHz}) - j \cdot 0.5\text{V} \cdot \delta(f + 45 \text{ kHz}) \\ + j \cdot 0.5\text{V} \cdot \delta(f - 45 \text{ kHz}) - j \cdot 0.5\text{V} \cdot \delta(f - 55 \text{ kHz})$$

Dies ist verständlich, da  $S(f)$  sich aus der Faltung des rein imaginären Spektrums  $Q(f)$  mit dem reellen Spektrum  $Z(f)$  ergibt.

c) Aufgrund der Faltung des reellen Spektrums  $Q(f)$  und des imaginären Spektrums  $Z(f)$  ist

$$S(f) = j \cdot 0.5V \cdot \delta(f + 55 \text{ kHz}) + j \cdot 0.5V \cdot \delta(f + 45 \text{ kHz}) \\ - j \cdot 0.5V \cdot \delta(f - 45 \text{ kHz}) - j \cdot 0.5V \cdot \delta(f - 55 \text{ kHz})$$

(d) Im Zeitbereich ergibt sich stets die Multiplikation des niederfrequenten Nachrichtensignals  $q(t)$  mit dem hochfrequenten Trägersignal  $z(t)$ . Ebenso ist auch bei diesem, aus mehreren Frequenzanteilen zusammengesetzten Quellensignal die Faltung im Frequenzbereich zu erkennen. Aufgrund des sinusförmigen Trägers ist  $S(f)$  imaginär mit positiven Werten bei negativen Frequenzen und negativen Werten bei positiven Frequenzen.

Das Trapezsignal ist eine ungerade Funktion. Somit ist  $Q(f)$  rein imaginär. Das sich ergebende Spektrum  $S(f)$  ist somit aufgrund der Phasendrehung des Trägers reell.

### 5.3 Synchrondemodulation

a) Das Spektrum  $R(f)$  ist aufgrund der Trägerphase von  $60^\circ$  komplex; durch Faltung mit dem konjugiert komplexen  $Z_E(f)$  ergibt sich für  $V(f)$  wieder das richtige, reelle Spektrum. Der Anteil bei der doppelten Trägerfrequenz wird durch den Tiefpass herausgefiltert, so dass wegen des Faktors 2 tatsächlich  $v(t) = q(t)$  gilt.

b) Mit dieser Einstellung wird die doppelte Trägerfrequenz nicht herausgefiltert. Dies erkennt man sowohl im Signal  $v(t)$  als auch im Spektrum  $V(f)$ .

c) In beiden Fällen ergibt sich eine frequenzunabhängige Dämpfung um  $\cos(45^\circ) = 0.707$ .

Dies lässt sich wie folgt erklären:  $v'(t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) \cdot 2\cos(\omega_T \cdot t \pm \Delta\varphi_T)$ . Daraus folgt:

$$v'(t) = q(t) \cdot \cos(\pm \Delta\varphi_T) + q(t) \cdot \cos(2\omega_T \cdot t \pm \Delta\varphi_T).$$

Der zweite Term wird durch das Tiefpassfilter entfernt, so dass als Ergebnis verbleibt:

$$v(t) = q(t) \cdot \cos(\pm \Delta\varphi_T).$$

(d) Da die Dämpfung aufgrund der Phasenabweichung für alle Frequenzen in gleicher Weise gilt, werden die Signale nicht verzerrt, sondern lediglich gedämpft.

e) Für das Signal vor dem Tiefpass gilt nun folgendes:

$$v'(t) = q(t) \cdot z(t) \cdot z_E(t) \\ = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) \cdot 2 \cdot \cos((\omega_T + \Delta\omega_T) \cdot t) \\ = q(t) \cdot \cos(\Delta\omega_T \cdot t) + q(t) \cdot \cos((2\omega_T + \Delta\omega_T) \cdot t)$$

$$\text{D.h.: } v'(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \cdot \cos(\Delta\omega_T \cdot t) + \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \cdot \cos((2\omega_T + \Delta\omega_T) \cdot t).$$

Nach dem Tiefpass verbleibt nur der erste Term:  $v(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \cdot \cos(\Delta\omega_T \cdot t)$

Das bedeutet: Es kommt zu einer Schwebung zwischen dem Nachrichtensignal und einem von der Fehlanpassung herreichenden Cosinusverlauf. Deshalb muss stets darauf geachtet werden, dass die zur Synchrondemodulation verwendete Trägerfrequenz exakt mit der sendeseitigen Trägerfrequenz übereinstimmt.

(f) Auch hier zeigt sich: Stimmen die Frequenzen nicht exakt überein, lassen sich die Signale nicht mehr demodulieren.

- (g) Sind  $f_T$  und  $f_N$  gleich, so kommt es zu einer Addition im Gleichanteil, was bei der Synchrondemodulation nicht mehr rückgängig gemacht werden kann. Ist  $f_T > f_N$ , so erhält man wieder richtig  $v(t) = q(t)$ .

#### 5.4 Zeigerdiagramm und Ortskurve

a) 
$$S(f) = 0.5V \cdot \delta(f \pm 50\text{kHz}) + 0.2V \cdot \delta(f \pm 55\text{kHz}) + 0.2V \cdot \delta(f \pm 45\text{kHz}).$$

Der 1. Term beschreibt den Trägeranteil, der 2. Term das obere Seitenband (OSB), der letzte Term das untere Seitenband (USB).

b) 
$$m = \hat{q} / q_0 = 0.8.$$

- c) Entsprechend Gl. (26) und Gl. (32) gilt für das äquivalente Tiefpasssignal:

$$s_{TP}(t) = q_0 + \frac{\hat{q}}{2} e^{j\omega_N t} + \frac{\hat{q}}{2} e^{-j\omega_N t}.$$

Die Ortskurve beschreibt die Änderung von  $s_{TP}(t)$  in der komplexen Ebene und berücksichtigt nicht die Drehung mit der Träger(kreis)frequenz. Der reelle Zeiger mit der Länge  $q_0$  repräsentiert den Spektralanteil bei  $f_T$  und liegt stets in Richtung der reellen Achse. Der 2. Term repräsentiert die Spektrallinie bei  $f_T + f_N$ . Diese bewirkt eine Drehung mit  $\omega_N$  in positiver Richtung, da ja in der Ortskurve die Drehung mit  $\omega_T$  eliminiert wurde. Der 3. Term von  $s_{TP}(t)$  steht für die Spektrallinie bei  $f_T - f_N$ . Diese dreht in der Ortskurve in mathematisch negativer Richtung (d.h. im Uhrzeigersinn). Die Spitze des resultierenden Zeigers liegt bei verzerrungsfreier ZSB-AM deshalb stets auf der reellen Achse zwischen den Werten 0.2 V bis 1.8 V.

- d) Das Zeigerdiagramm ergibt sich aus der Ortskurve, wenn man diese mit der Träger(kreis)-frequenz dreht; es gibt die zeitliche Änderung des komplexen Signals  $s_+(t)$  an. Dessen Realteil (Projektion auf die reelle Zeitachse) ergibt das reelle Sendesignal  $s(t)$ .

- (e) Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind alle 3 Zeiger in Richtung der reellen Achse, somit ist

$$s_+(t) = q_0 + 2 \cdot \frac{\hat{q}}{2} = q_0 + \hat{q} = 1.8 \text{ V}.$$

Nach  $t = 20\mu\text{s}$  (Periodendauer des Trägersignals) hat sich der Träger einmal gedreht, steht also auch in Richtung der reellen Achse. Die beiden anderen Zeiger haben sich dagegen in unterschiedliche Richtungen nur um jeweils  $36^\circ$  gedreht (da  $f_N = f_T/10$ ). Daraus folgt:

$$s_+(t = 20\mu\text{s}) = q_0 + 2 \cdot \frac{\hat{q}}{2} \cdot \cos(36^\circ) = q_0 + \hat{q} \cdot 0.809 = 1.647 \text{ V}.$$

Nach  $t = 30\mu\text{s}$  haben sich die Zeiger der Seitenbänder jeweils um  $54^\circ$  gedreht. Der Gesamtzeiger liegt nun in Richtung der negativen reellen Achse. Daraus folgt:

$$s_+(t = 30\mu\text{s}) = -q_0 - 2 \cdot \frac{\hat{q}}{2} \cdot \cos(54^\circ) = -q_0 - \hat{q} \cdot 0.588 = -1.47 \text{ V}.$$

- f) Der Zeiger des Trägers zeigt zum Startzeitpunkt  $t = 0$  nach unten, die beiden Seitenbänder liegen dazu relativ um  $\pm 60^\circ$  gedreht:  $s(t = 0) = 0$ . Die Ortskurve berücksichtigt nicht die Rotation mit der Trägerfrequenz und die Trägerphase. Sie ist somit die gleiche wie bei c). Aufgrund der Phase  $\varphi_N$  des Nachrichtensignals werden die Endpunkte der Ortskurve zu anderen Zeiten erreicht.

- (g) Das Nachrichtensignal  $q(t)$  ist wieder in der Hüllkurve erkennbar; auch im Spektrum  $S(f)$  erkennt man das kontinuierliche Spektrum  $Q(f)$ . Die im Zeigerdiagramm rotierenden Zeiger sind nach aufsteigenden Frequenzen (OSB) bzw. absteigenden Frequenzen (USB) angeordnet und berücksichtigen die unterschiedlichen Amplituden und Phasen. Die Ortskurve ist wieder eine horizontale Gerade, jedoch mit komplizierterer Bewegung als vorher.

## 5.5 Hüllkurvendemodulation

- a) Hüllkurvendemodulation ist anwendbar, da der Modulationsgrad  $m = 0.8$ , also kleiner als 1 ist. Wie aus der Ortskurve ersichtlich ist, ist das Sinkensignal in diesem Fall gleich dem Betrag  $|r_{TP}(t)|$  des äquivalenten Tiefpasssignals. Das Sinkensignal beinhaltet weiterhin noch den Gleichanteil  $q_0$ .
- b) Durch einen Bandpass anstelle der Tiefpassfilterung, untere Grenzfrequenz z.B. 0.5 kHz.
- c) Auch beim Mustersignal ist der maximale Betrag gleich 1V. Mit  $q_0 = 1V$  ergibt sich der Modulationsgrad  $m = 1$  (Grenzfall, für den der HKD gerade noch richtig arbeitet).
- d) Mit dieser Konstellation ist der Modulationsgrad  $m = 2$ . Daher kommt es zu nichtlinearen Verzerrungen; aus einem reinen Cosinussignal wird ein Signal mit Oberwellen. Der Grund hierfür ist: Die Ortskurve ist zwar weiterhin eine horizontale Gerade, aber diese reicht in den negativen Bereich hinein. Dadurch kommt es zu Phasensprüngen.
- e) Für die einzelnen Klirrfaktoren ergibt sich aus den Spektrallinien von  $V(f)$ :

$$K_2 = \frac{|\hat{v}_2|}{|\hat{v}_1|} = \frac{0.11}{0.244} = 0.45, \quad K_3 = \frac{|\hat{v}_3|}{|\hat{v}_1|} = \frac{0.055}{0.244} = 0.225, \quad K_4 = \frac{|\hat{v}_4|}{|\hat{v}_1|} = \frac{0.011}{0.244} = 0.0455$$

Für den Gesamtklirrfaktor erhält man somit:

$$K = \sqrt{K_2^2 + K_3^2 + K_4^2} = \sqrt{0.45^2 + 0.225^2 + 0.045^2} \approx 0.5.$$

- f) Der Gleichanteil ist zu klein, so dass der Verlauf von  $q(t)$  in der Hüllkurve von  $s(t)$  nicht exakt zu erkennen ist. Bei Verwendung eines Hüllkurvendemodulators kommt es auch hier wieder zu nichtlinearen Verzerrungen.
- (g) Die optimale Zeitkonstante kann man näherungsweise mit (39) berechnen:  $\tau = 0.1$  ms. Es entstehen nichtlineare Verzerrungen, die zu einem Klirrfaktor von 17% führen. Bei einem kleineren Verhältnis (z.B.  $f_T/f_N = 10$ ) wären die Verzerrungen noch dramatischer.
- (h) Die nichtlinearen Verzerrungen werden kleiner; der Klirrfaktor beträgt nur mehr 1%.

## 5.6 Einseitenbandmodulation

- a) Bei OSB-Modulation fehlt das untere Seitenband. In der komplexen Ebene dreht sich außer dem Träger (mit Amplitude 1V) nur noch ein Zeiger (mit Amplitude 0.5V). Daraus ergibt sich als Ortskurve ein Kreis um den Wert (1, 0) mit Radius 0.5; der Modulationsgrad bei ESB beträgt  $\mu = 0.5$  im Gegensatz zum Modulationsgrad  $m = 1$  bei ZSB.

Der Betrag des äquivalenten Tiefpasssignals  $r_{TP}(t)$  gibt bei ESB das Nachrichtensignal  $q(t)$  nicht richtig wieder (HKD bei ESB nicht anwendbar). Wie in 3.2(h) gezeigt werden sollte, schwankt bei den gegebenen Parametern die Phasenfunktion  $f(t)$  zwischen  $+30^\circ$  und  $-30^\circ$ .

- b) Aufgrund des Phasenverlaufs  $\Phi(t) \neq 0$  verändern sich die Nulldurchgänge gegenüber dem ZSB-Signal. Zunächst kommen die Nulldurchgänge früher (positives  $f$ ), zwischen  $T_0/2$  und  $T_0$  (negatives  $f$ ) treten die Nulldurchgänge gegenüber dem Trägersignal später auf. Mit dem Ergebnis aus a) folgt, dass die maximale Abweichung  $T_0/12$  beträgt.
- (c) Bei einem OSB-modulierten Signal sind die Abstände zwischen zwei Nulldurchgängen größer, wenn die Hüllkurve klein ist.

- (d) Ein USB-moduliertes Signal unterscheidet sich vom OSB- Signal durch einen spiegelbildlichen Phasenverlauf  $f(t)$ ; die Abstände zwischen benachbarten Nulldurchgängen sind dann größer, wenn die Hüllkurve relativ groß ist. Ansonsten gibt es keinen Unterschied.
- e) Unter der Voraussetzung, dass der Gleichanteil entfernt wird, ist Hüllkurvendemodulation des ZSB-Signals gerade noch verzerrungsfrei möglich ( $m = 1$ ). Dagegen treten bei OSB nichtlineare Verzerrungen auf, obwohl der OSB-Modulationsgrad lediglich  $\mu = 0.5$  ist. Entsprechend Gl. (47) erhält man für den Klirrfaktor  $K = \mu/4 = 12.5\%$ .
- f) Durch Faltung des Sendespektrums  $S(f)$  mit dem Spektrum  $Z_E(f)$  des empfangsseitigen Trägersignals werden die Spektrallinien wieder genau richtig zusammengesetzt. Das Sinkensignal ist bei ESB nur halb so groß wie bei ZSB. Durch Verstärkung des Sinkensignals  $v(t)$  um den Faktor 2 ist in beiden Fällen  $v(t) = q(t)$ .
- g) Das Ergebnis von f) wird bestätigt.

## 5.7 Lineare Verzerrungen

- a) Die Ortskurve ist eine Gerade und schwankt im Bereich von 0.2 V bis 1.8 V.
- b) Aufgrund des symmetrischen Gaußtieffpasses werden die Spektrallinien sowohl des oberen als auch des unteren Seitenbandes um den Faktor 0.82 verringert. Die Ortskurve ist nach wie vor eine Gerade, jetzt aber zwischen 0.34 V und 1.66 V. Das Sinkensignal  $v(t)$  ist deshalb ebenfalls um den Faktor 0.82 gegenüber dem Quellensignal  $q(t)$  gedämpft. Es ergeben sich keine Verzerrungen, da das Eingangssignal nur eine Frequenz beinhaltet.
- c) Das Sinkensignal lautet nun:  $v(t) = 0.66 \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t) + 0.18 \cdot \cos(2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot t)$ . Es kommt zu linearen Verzerrungen (linear deshalb, weil im Ausgangssignal die gleichen Frequenzen vorkommen wie im Eingangssignal, aber unterschiedlich gedämpft sind). Dies erkennt man deutlich bei einem Vergleich zwischen Quellen- und Sinkensignal.
- d) Bei dieser Parameterwahl wird das obere Seitenband (Faktor 0.45) gedämpft, während das untere Seitenband unverändert bleibt. Der Träger wird ebenfalls gedämpft. Die Ortskurve ist dementsprechend eine Ellipse. Daraus wird bereits deutlich, dass das Empfangssignal  $r(t)$  keine äquidistanten Nulldurchgänge mehr aufweisen wird und außerdem nach der Hüllkurvendemodulation nichtlineare Verzerrungen auftreten werden. Der Klirrfaktor beträgt ca. 3%.
- e) Hier werden beide Seitenbänder gedämpft, das obere aber stärker als das untere. Die Ortskurve ist auch hier eine Ellipse und es ergeben sich im Gegensatz zu Punkt c) nun nichtlineare Verzerrungen. Dies erkennt man z.B. am Spektralanteil bei 15 kHz (dritte Oberwelle von 5 kHz).
- (f) Die Verzerrungen erkennt man an den Kanten (hohe Frequenzen), die stärker gedämpft werden als die niedrigen.





# Praktikum Nachrichtentechnik (LB)

## Versuch: Winkelmodulation (WM)

### Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen.....	5
1.1	Winkelmodulation.....	5
1.1.1	Winkelfunktion bei Phasenmodulation.....	5
1.1.2	Realisierung eines Phasenmodulators (Ringmodulator).....	6
1.1.3	Phasenmoduliertes Signal bei cosinusförmigem Nachrichtensignal.....	6
1.1.4	Winkelfunktion bei Frequenzmodulation .....	9
1.1.5	Frequenzmoduliertes Signal bei cosinusförmigem Nachrichtensignal .....	10
1.1.6	Spektren bei Winkelmodulation.....	11
1.2	Demodulation winkelmodulierter Signale .....	12
1.2.1	Ideale Phasendemodulation.....	13
1.2.2	Näherungsweise Phasendemodulation mit Ringmodulator .....	13
1.2.3	FM-Demodulation .....	14
1.3	Stereoempfang beim UKW-Hörrundfunk .....	15
1.4	Verzerrungen durch Bandbegrenzung eines winkelmodulierten Signals .....	16
1.5	Einfluss von Rauschstörungen .....	17
1.6	Mehrwegeausbreitung.....	20
2	Vorbereitungsfragen .....	22
2.1	Frequenzmodulation.....	22
2.2	Bandbreite von FM-Signalen.....	24
2.3	Einfluss von Rauschstörungen .....	25
2.4	Mehrwegeausbreitung.....	28
3	Versuchsdurchführung.....	29
3.1	Phasenmodulation .....	30
3.2	Zusammenhang zwischen PM und FM .....	32
3.3	PM bei einer Summe harmonischer Schwingungen .....	33
3.4	Bandbegrenzung bei Phasenmodulation .....	35

---

3.5 Einfluss von Phasen- und Frequenzabweichungen.....	38
3.6 Einfluss von Rauschstörungen bei FM .....	41
3.7 Zweiwegeempfang.....	42
4 Musterlösungen der Vorbereitungsfragen .....	43
5 Musterlösungen der Versuchsdurchführung .....	46

**Vorbemerkung:**

Die beiden Versuche *Amplitudenmodulation (AM)* und *Winkelmodulation (WM)* des Praktikums *Nachrichtentechnik (LB)* sollen die in Vorlesungen und Übungen erläuterte Theorie der analogen Amplituden-, Frequenz- und Phasenmodulation anschaulich darstellen, sowie deren wesentliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede verdeutlichen. Behandelt werden neben den systemtheoretischen Beschreibungen der in der Praxis eingesetzten Modulatoren und Demodulatoren insbesondere die Auswirkungen von linearen und nichtlinearen Verzerrungen sowie die Beeinträchtigung durch Rauschen. Weiterhin wird auf die Möglichkeit der Basisbanddarstellung von Bandpasssignalen näher eingegangen.

Die vorliegende Anleitung gliedert sich ebenso wie die Anleitung zum AM-Versuch in die drei Kapitel *Theoretische Grundlagen*, *Vorbereitungsfragen* und *Versuchsdurchführung*. Anhand dieses Heftes und des zugrundeliegenden Lehrprogramms „AMV“ sollte ein Teilnehmer mit Grundkenntnissen der Nachrichtentechnik in der Lage sein, sich die wesentlichen Merkmale der Winkelmodulation in etwa 6 Stunden (jeweils ca. 3 Stunden für Vorbereitung sowie Versuchsdurchführung) zu erarbeiten.

Die Musterlösungen der Vorbereitungsfragen und der Versuchsdurchführung sind am Ende des Heftes (ab Seite 39) beigelegt. Ich möchte an dieser Stelle - ebenso ausdrücklich wie überflüssig - erwähnen, dass Sie sicher einen besseren Lernerfolg erzielen, wenn Sie diese Musterlösungen nur zur Kontrolle Ihrer Ergebnisse benutzen. Auf Seite 4 finden Sie noch eine Zusammenstellung einschlägiger Literaturstellen, die für eine erfolgreiche Versuchsdurchführung durchaus nützlich sein können, jedoch nicht vorausgesetzt werden. Hierfür reicht diese Anleitung aus.

Das interaktive WINDOWS-Demonstrations- und Lehrprogramm „AMV“ wurde von Herrn Dipl.-Ing. Andreas Widmann im Rahmen seiner von mir 1995 betreuten Diplomarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Technischen Universität München mit großer Sorgfalt konzipiert und implementiert. Das Windows-Programm finden Sie auf meiner Homepage unter [www.lnt.ei.tum.de](http://www.lnt.ei.tum.de) unter Mitarbeiter → Söder → Links (deutsche Version!). Die Installation des ausführbaren Programms erfolgt wie unter WINDOWS üblich. Ebenso gelten für die Programm Benutzung die unter WINDOWS üblichen Konventionen.

Ich danke meinen Kollegen Prof. Dr.-Ing. Norbert Hanik und Dr.-Ing. Klaus Eichin für viele wertvolle Diskussionen und Anregungen. Ebenso bedanke ich mich herzlich bei Herrn Klaus Madl, der 2012 im Rahmen seiner Bachelorarbeit unter der Betreuung von Dr.-Ing. Christoph Hausl ein auf GNU Radio basierendes Demonstrationsprogramm erstellt hat, das in diesem Versuch „WM“ ebenfalls zum Einsatz kommt. Außerdem hat er mit großer Sorgfalt die Anleitungen an den Wissensstand der Studenten im Lehramt an Beruflichen Schulen (LB) angepasst.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg und etwas Spaß beim Durcharbeiten dieses Versuches.

München, im April 2013

Günter Söder

**Literaturhinweise:**

- /1/ Hanik, N.: Vorlesungsmanuskript *Nachrichtentechnik 1 (LB)*
- /2/ Hanik, N.: Vorlesungsmanuskript *Nachrichtentechnik 2 (LB)*
- /3/ Mäusl, R.: *Analoge Modulationsverfahren*. Heidelberg: Hüthig-Verlag, 1988
- /4/ Söder, G.: *Modellierung, Simulation und Optimierung von Nachrichtensystemen*. Berlin: Springer-Verlag, 1993
- /5/ Söder, G. et al.: *Lerntutorial LNTwww (www.LNTwww.de)*, Buch Modulationsverfahren, Kapitel 3

**Hinweise zum Lerntutorial LNTwww:**

Die Anleitung ist zur Versuchsvorbereitung ausreichend. Mehr Informationen zum Thema finden Sie im Kapitel 3 des LNTwww-Buches *Modulationsverfahren*. Dort finden Sie auch einige passende Lernvideos (LV) und interaktive Multimedia-Elemente (IM):

- Winkelmodulation (LV, 2-teilig, Dauer 6:00 min bzw. 9:00 min),
- Rauschen bei AM und WM (LV, 2-teilig, Dauer 8:30 min bzw. 7:00 min),
- Lineare und nichtlineare Verzerrungen (LV, 2-teilig, Dauer 3:50 min bzw. 3:40 min),
- Harmonische Schwingungen (LV, 2-teilig, Dauer 4:30 min bzw. 6:15 min),
- Einfluss einer Bandbegrenzung bei Sprache und Musik (IM),
- Zeigerdiagramm-Darstellung des analytischen Signals (IM),
- Ortskurve-Darstellung des äquivalenten TP-Signals (IM),
- Lineare Verzerrungen bei periodischen Signalen (IM),
- Besselfunktionen erster Art und  $n$ -ter Ordnung (IM).

Alle diese Multimedia-Module eignen sich speziell für die Vorbereitung und Nachbereitung. Während des Praktikums ist zu wenig Zeit, um sich mit diesen Lernhilfen auseinander zu setzen.

**Hinweise zur Programmbedienung:**

Zur Versuchsdurchführung benötigen Sie das Programm „amv“ des Lernsoftwarepakets „LNTwin“. Dieses können Sie von der Homepage des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik herunterladen.

# 1 Theoretische Grundlagen

**Inhalt:** Dieser Versuch soll die Eigenschaften der analogen Modulationsverfahren Frequenz- und Phasenmodulation und die zugehörigen Demodulatoren anhand von Signalverläufen, Spektren, Zeigerdiagrammen und Ortskurven verdeutlichen. Außerdem werden die Auswirkungen von (linearen und nichtlinearen) Verzerrungen auf das demodulierte Signal beschrieben.

## 1.1 Winkelmodulation

Jedes trägermodulierte Sendesignal kann in folgender Form angegeben werden:

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(\psi(t)). \quad (1)$$

Bei einer Amplitudenmodulation steckt die Information des Nachrichtensignals  $q(t)$  in der zeitabhängigen Amplitude  $a(t)$ , während die Winkelfunktion  $\psi(t) = \omega_T \cdot t + \phi_{T_T} \cdot t + \phi_T$  allein durch Frequenz und Phase des Trägersignals  $z(t)$  vorgegeben ist.

Dagegen gilt sowohl bei Phasenmodulation (PM) als auch bei Frequenzmodulation (FM) für den Verlauf der Hüllkurve:  $a(t) = \xi$  (Hinweis: Im Programm „amv“ ist stets vereinfachend  $\hat{s} = \hat{z} = 1V$   $\hat{s} = \hat{z} = 1V$  gesetzt.)

Aufgrund der konstanten Amplitude (Hüllkurve) ist hier die Ortskurve ein Kreisbogen mit Radius  $\hat{s}$ . Die vollständige Information über das Nachrichtensignal  $q(t)$  steckt jeweils in der Winkelfunktion  $\psi(t)$ , deren Abhängigkeit vom Nachrichtensignals  $q(t)$   $q(t)$  in den Abschnitten 1.1.1 (PM) und 1.1.4 (FM) beschrieben wird.

Da zwischen PM und FM viele Gemeinsamkeiten bestehen, insbesondere dann, wenn das Nachrichtensignal  $q(t)$  eine harmonische Schwingung ist, beschreiben wir die beiden Verfahren gemeinsam durch die Winkelmodulation (WM) entsprechend der Gleichung

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\psi(t)). \quad (2)$$

Diese Gleichung gilt im Gegensatz zu Gl. (4) in der Versuchsanleitung zur Amplitudenmodulation auch für die Frequenzmodulation exakt.

### 1.1.1 Winkelfunktion bei Phasenmodulation

Bei Phasenmodulation ist neben der Signalamplitude auch die Frequenz zeitunabhängig (nämlich gleich der Trägerfrequenz), so dass für die Winkelfunktion gilt:

$$\psi(t) = \omega_T \cdot t + \phi(t) = \omega_T \cdot t + \phi_T + K_{PM} \cdot q(t). \quad (3)$$

Die Abhängigkeit der Winkelfunktion vom Nachrichtensignal  $q(t)$  ist linear und wird durch die Proportionalitätskonstante  $K_{PM}$   $K_{PM}$  quantitativ beeinflusst. Hat  $q(t)$   $q(t)$  die Einheit „V“, so weist  $K_{PM}$  die Einheit „V<sup>-1</sup>“ auf. Der Zahlenwert von  $K_{PM}$  ergibt sich ebenso wie die Anfangsphase  $\phi_T$   $\phi_T$  aus der Realisierungsform des Phasenmodulators (Abschnitt 1.1.2).

Die Ableitung der Winkelfunktion  $\psi(t)$  nach der Zeit bezeichnet man allgemein als die *Augenblickskreisfrequenz*

$$\omega_A(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}. \tag{4}$$

Für diese Größe gilt bei Phasenmodulation:

$$\omega_A(t) = \omega_T + \frac{dq(t)}{dt}. \tag{5}$$

Anzumerken ist, dass die Augenblicksfrequenz  $f_A(t) = \frac{\omega_A(t)}{2\pi}$  keine (physikalisch messbare) Frequenz im herkömmlichen Sinne ist, sondern eine fiktive, zeitabhängige Größe, die sich aus der Winkelfunktion  $\psi(t)$  mathematisch ableiten lässt.

### 1.1.2 Realisierung eines Phasenmodulators (Ringmodulator)

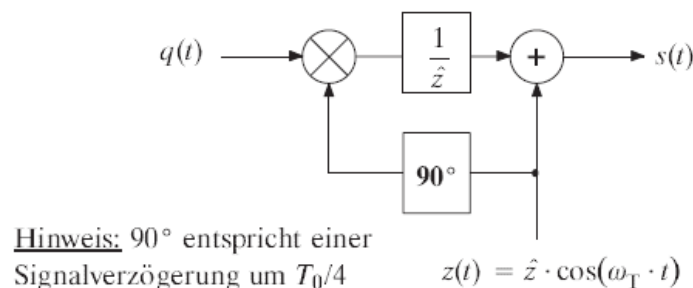


Abbildung 1: Näherungsweise Realisierung der PM mit Ringmodulator (für kleine  $\eta$  ).

Vorausgesetzt wird hier die Trägerphase  $\vartheta_T = 0^\circ$ . Von einem idealen Phasenmodulator spricht man dann, wenn für das modulierte Signal entsprechend (2) und (3) gilt:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t + K_{PM} \cdot q(t)). \tag{6}$$

Der in Abbildung 1 dargestellte Modulator liefert nur näherungsweise ein solches Signal:

$$s(t) = z(t) + \frac{1}{z} \cdot z \left( t - \frac{T_0}{4} \right) \cdot q(t) = \underbrace{\hat{z} \cdot \cos(\omega_T \cdot t)}_{\text{Träger}} + \underbrace{\frac{q(t) \cdot \sin(\omega_T \cdot t)}{z}}_{\substack{\text{ZSB-AM ohne Träger} \\ \text{mit 90°-Phasendrehung}}}. \tag{7}$$

Ist der Maximalwert des Nachrichtensignals  $q(t)$  sehr viel kleiner als die Trägeramplitude  $\hat{z}$ , so ist die Hüllkurve  $a(t)$  in erster Näherung konstant und die Phase  $\phi(t)$  näherungsweise proportional zum Nachrichtensignal. Ist die Bedingung  $q_{\max} \ll \hat{z}$  dagegen nicht erfüllt, so kommt es zu nicht-linearen Verzerrungen und einer zusätzlichen (hier unerwünschten) Amplitudenmodulation.

### 1.1.3 Phasenmoduliertes Signal bei cosinusförmigem Nachrichtensignal

Als Sonderfall betrachten wir wieder ein cosinusförmiges Nachrichtensignal

$$q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t). \tag{8}$$

und einen cosinusförmigen Träger ( $\varphi_T = 0^\circ, \phi_T = 0^\circ$ ). Somit erhalten wir aus Gl. (4) für die Winkelfunktion bei Phasenmodulation:

$$\psi(t) = \omega_T \cdot t + K_{PM} \cdot \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t). \quad (9)$$

Ähnlich dem Modulationsgrad  $m$  bei Amplitudenmodulation (vgl. Abschnitt 1.2.2 in der AM-Versuchsanleitung) definiert man bei Winkelmodulation den Modulationsindex  $\eta$ . Je größer  $\eta$  ist, umso intensiver ist die Modulation. Bei Phasenmodulation gilt dabei folgende Definition:

$$\eta_{PM} = K_{PM} \cdot q_{max}. \quad (10)$$

Während die Konstante  $K_{PM}$  allein durch die Realisierung des Modulators bestimmt wird, hängt der Modulationsindex  $\eta_{PM}$  auch noch vom Maximalwert des Nachrichtensignals ab. Der Index „PM“ in Gl. (10) soll deutlich machen, dass der Modulationsindex bei Frequenzmodulation anders zu berechnen sein wird.

Im hier betrachteten Sonderfall eines cosinusförmigen Nachrichtensignals ist  $q_{max}$  identisch mit der Amplitude des Quellsignals  $q(t)$ . Somit erhält man für das phasenmodulierte Signal:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\psi(t)) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \cos(\omega_N \cdot t)). \quad (11)$$

Um später den Zusammenhang zwischen Frequenzmodulation und Phasenmodulation besser verdeutlichen zu können, ist hier verallgemeinert  $\eta_{PM} = \eta, \eta_{FM} = \eta$  gesetzt.

Betrachten wir nun wie bei der Amplitudenmodulation das Zeigerdiagramm und die Ortskurve. Durch Erweiterung des reellen Signals gemäß Gl. (11) um einen entsprechenden Imaginärteil erhält man das komplexe, analytische Signal (*Zeigerdiagramm*):

$$s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j(\omega_T t + \eta \cdot \cos(\omega_N t))}. \quad (12)$$

Wie in Abschnitt 1.2.3 in der AM-Versuchsanleitung beschrieben, kommt man durch Abtrennen des mit  $\omega_T$  gleichmäßig rotierenden Drehzeigers zum äquivalenten Tiefpasssignal

$$s_{TP}(t) = \hat{s} \cdot e^{j\eta \cdot \cos(\omega_N t)}. \quad (13)$$

Die graphische Darstellung dieses fiktiven Signals in der komplexen Ebene bezeichnet man als die Ortskurve. Abbildung 2 zeigt diese mit der Abkürzung  $\vartheta(t) = \eta \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$ .

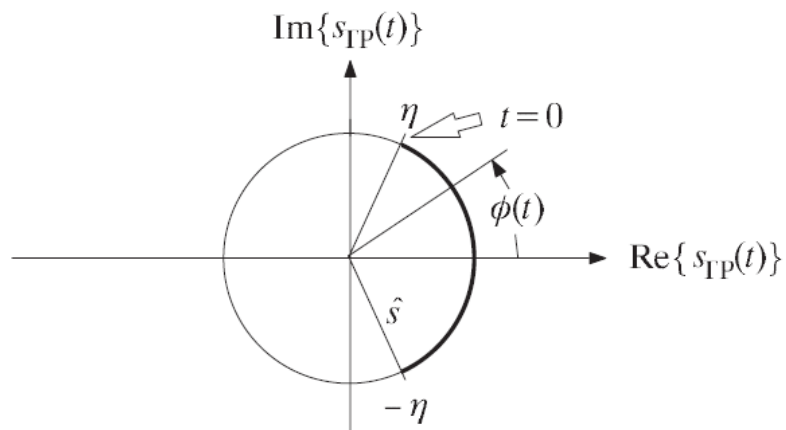


Abbildung 2: Ortskurve (Phasenmodulation, cosinusförmiges Nachrichtensignal,  $\eta = 1$  ).



Die Ortskurve der Phasenmodulation ist also ein Kreisbogen mit dem Radius  $\hat{s}$ . Da die cos-Funktion nur Werte zwischen  $\pm 1$  liefert, sind Phasenwinkel  $\phi(t)$  des äquivalenten Tiefpasssignals zwischen  $-\eta$  und  $+\eta$   $\eta$  möglich. Aufgrund dieser Eigenschaft bezeichnet man den Modulationsindex  $\eta$  manchmal auch als den *Phasenhub*.

In Abbildung 2 sind die für  $\eta = 1 = 1$  möglichen Phasenwinkel (zwischen  $\pm 57.3^\circ$   $57.3^\circ$ ) hervorgehoben. Die zeitliche Änderung auf dieser Ortskurve erfolgt entsprechend dem cosinusförmigen Nachrichtensignal  $q(t)$ . Da hier die Nachrichtenphase  $\phi_T = 0^\circ$  zugrunde liegt, ist  $\phi(t = 0) = 57.3^\circ$  ( $t = 0^\circ$ ) =  $57.3^\circ$ . Das bedeutet, dass das phasenmodulierte Signal  $s(t)$  zu diesem Zeitpunkt um den Bruchteil  $\frac{1}{2\pi}$  einer Trägerperiodendauer  $T_0 = \frac{1}{f_T}$  vorlaufend ist.

Mit abnehmendem Nachrichtensignal  $q(t)$  wird die Phasenabweichung zwischen dem modulierten Signal  $s(t)$  und dem Trägersignal  $z(t)$  kleiner. Zum Zeitpunkt  $t = T_0/4$   $t = \frac{T_0}{4}$  sind schließlich  $s(t)$  und  $z(t)$  gleichlaufend, zum Zeitpunkt  $t = \frac{T_0}{2}$   $t = \frac{T_0}{2}$  ist  $\phi(t) = -\eta\phi(t) = -\eta$ . Das heißt: Die Nulldurchgänge des modulierten Signals  $s(t)$  treten nun um die Zeitdifferenz  $\frac{T_0}{2\pi}$  später auf als die Nulldurchgänge des Trägersignals  $z(t)$ .

#### 1.1.4 Winkelfunktion bei Frequenzmodulation

Bei FM ist die Phasenfunktion  $\phi(t) = \phi_T$  zeitunabhängig, während die Augenblicks(kreis)frequenz entsprechend dem Nachrichtensignal um die Träger(kreis)frequenz schwankt:

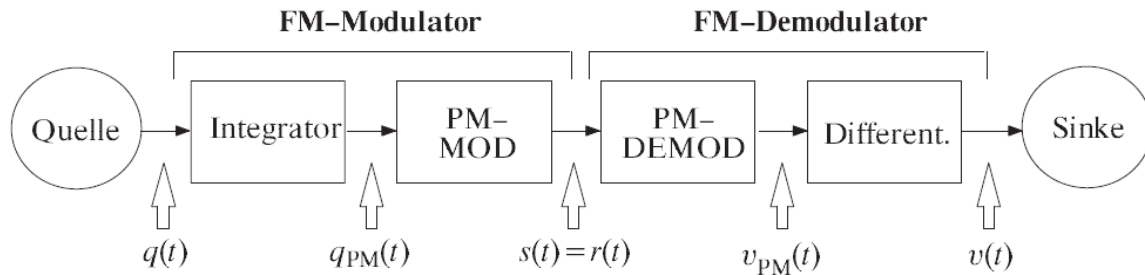
$$\omega_A(t) = \omega_T + K_{FM} \cdot q(t), \quad f_A(t) = f_T + \frac{K_{FM}}{2\pi} \cdot q(t). \quad (14)$$

Die Proportionalitätskonstante  $K_{FM}$  unterscheidet sich von der Konstanten  $K_{PM}$  bei Phasenmodulation allein schon durch die Einheit. Ist  $q(t)$  ein Spannungsverlauf, so hat  $K_{FM}$  die Einheit „ $V^{-1} \cdot s^{-1}$ “ (im Gegensatz dazu hat  $K_{PM}$  die Einheit „ $V^{-1}$ “).

Aus den Gln. (4) und (14) folgt für die Winkelfunktion bei FM allgemein:

$$\psi(t) = \int \omega_A(t) dt = \omega_T \cdot t + \phi_T + K_{FM} \int q(t) dt. \quad (15)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich direkt ablesen, dass ein Frequenzmodulator mit Hilfe eines Integrators und eines Phasenmodulators realisiert werden kann (vgl. Abbildung 3). Der (reale) Phasenmodulator kann dabei z.B. entsprechend Abbildung 1 aufgebaut sein.



FM-Modulator: besteht aus Integrator und PM-Modulator,  
 FM-Demodulator: besteht aus PM-Demodulator und Differenzierer.

Abbildung 3: Zur Realisierungsmöglichkeit eines Frequenzmodulators bzw. - demodulators.

### 1.1.5 Frequenzmoduliertes Signal bei cosinusförmigem Nachrichtensignal

Unter der Voraussetzung eines cosinusförmigen Trägersignals (d.h.:  $\phi_T = 0^\circ$   $\tau = 0^\circ$ ) und eines cosinusförmigen Nachrichtensignals gilt mit (14) für die Augenblickskreisfrequenz:

$$\omega_A(t) = \omega_T + K_{FM} \cdot \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t). \tag{16}$$

Durch Integration entsprechend (15) erhält man die Winkelfunktion bei FM:

$$\psi(t) = \omega_T \cdot t + \phi_T + \frac{K_{FM} \cdot \hat{q}}{\omega_N} \sin(\omega_N \cdot t). \tag{17}$$

Ein Vergleich mit Abschnitt 1.1.3 macht deutlich, dass die Frequenzmodulation eines Cosinussignals das gleiche Sendesignal  $s(t)$  ergibt wie die Phasenmodulation eines sinusförmigen Quellensignals. Voraussetzung hierfür ist allerdings, dass zwischen den Modulatorkonstanten folgender Zusammenhang besteht:

$$K_{FM} = K_{PM} \cdot \omega_N. \tag{18}$$

Definiert man den Modulationsindex bei Frequenzmodulation als

$$\eta_{FM} = \frac{K_{FM} \cdot \hat{q}}{\omega_N}, \tag{19}$$

so lässt sich (mit  $\eta = \eta_{FM}$ ) das FM-modulierte Cosinussignal wie folgt darstellen:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)). \tag{20}$$

Die maximale Abweichung der Augenblicksfrequenz von der Frequenz des unmodulierten Trägers wird als Frequenzhub  $\Delta f_{max}$  bezeichnet. Der Frequenzhub kann mit folgendem Zusammenhang berechnet werden:

$$\Delta f_{max} = \eta \cdot f_N. \tag{21}$$

Die Frequenz  $f_N$  entspricht hierbei der maximal auftretenden Frequenz im unmodulierten Nutzsignal und somit auch der Bandbreite des Nutzsignals.

Anzumerken bleibt, dass sich die Zeitsignale bei Phasen- und Frequenzmodulation durchaus auch qualitativ unterscheiden, wenn das Quellensignal keine harmonische Schwingung ist, sondern sich z.B. aus

einer Summe harmonischer Schwingungen zusammensetzt. Hierauf wird in der Versuchsdurchführung 3.3 noch genauer eingegangen.

### 1.1.6 Spektren bei Winkelmodulation

Die Berechnung des Spektrums  $S(f)$  eines winkelmodulierten Signals  $s(t)$  ist kompliziert, wenn für das Nachrichtensignal  $q(t)$  nicht sehr einfache Funktionen angenommen werden. Die nachfolgende Beschreibung bezieht sich auf das Signal gemäß Gl. (20). Dieses Signal könnte z.B. aus der Phasenmodulation einer Sinusschwingung oder der Frequenzmodulation einer Cosinusschwingung entstanden sein.

Die Herleitung der Spektralfunktion ist z.B. in [4] ausführlich beschrieben. Hier soll nur der Rechenweg stichpunktartig angegeben und das Ergebnis interpretiert werden.

k) Das zu Gl. (20) zugehörige äquivalente Tiefpasssignal lautet:

$$s_{TP}(t) = \hat{s} \cdot e^{j\eta \cdot \sin(\omega_N t)}. \quad (22)$$

l) Durch Anwenden einer Potenzreihenentwicklung und mehrerer trigonometrischer Beziehungen, geeigneten Aufspaltungen sowie geschicktem Zusammenfassen kann dieser Term wie folgt umgeformt werden:

$$s_{TP}(t) = \hat{s} \cdot e^{j\eta \cdot \sin(\omega_N t)} = \hat{s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j n \cdot \omega_N t}. \quad (23)$$

Hierbei bezeichnet  $J_n(\cdot)$  die Besselfunktion erster Art und  $n$ -ter Ordnung:

$$J_n(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\eta \cdot \sin(x) - nx)} dx. \quad (24)$$

Diese Gleichung gibt die Definition wieder. Zur Berechnung kann die nachfolgende Summenformel verwendet werden:

$$J_n(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\eta}{2}\right)^{n+2k}}{k! \cdot (n+k)!}. \quad (25)$$

Der Kurvenverlauf nach (23) bzw. (24) ist z.B. im Versuch 3.3 gezeichnet und auch im Fenster „Besselfunktion“ des Programms „amv“ für  $n = 0$  bis  $n = 4$  darstellbar.

m) Für das analytische Signal erhält man mit (12) und (22):

$$s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j\omega_T t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j n \cdot \omega_N t} = \hat{s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j(\omega_T + n \cdot \omega_N) t}. \quad (26)$$

n) Für das reelle Signal gilt somit (Ersetzen der komplexen e-Funktion durch die cos-Funktion):

$$s(t) = \operatorname{Re}\{s_+(t)\} = \hat{s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \cos((\omega_T + n \cdot \omega_N) \cdot t). \quad (27)$$

o) Nach Fouriertransformation folgt schließlich:

$$S(f) = \frac{\hat{s}}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \delta(f \pm (f_T + n \cdot f_N)). \quad (28)$$

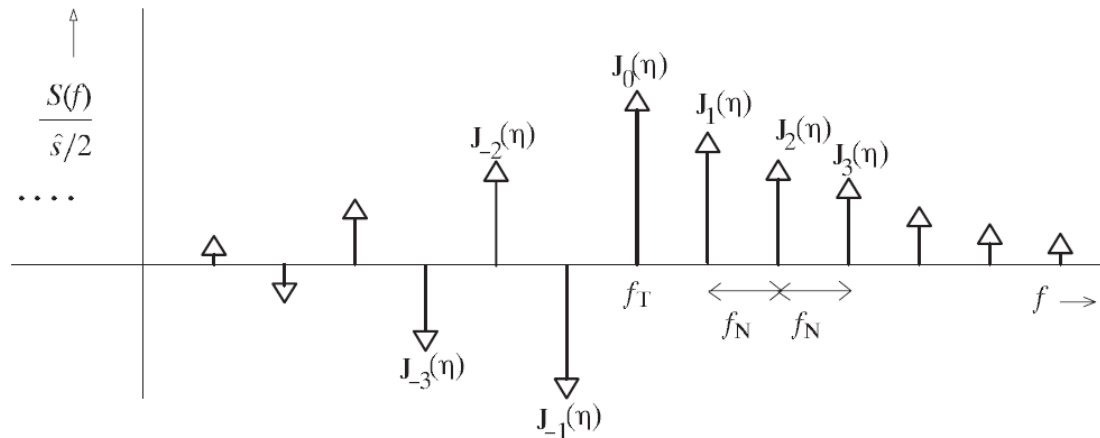


Abbildung 4: (Normiertes) Spektrum eines phasenmodulierten Sinussignals (bzw. eines frequenzmodulierten Cosinus-signals) mit dem Modulationsindex  $\eta$ .

In Abbildung 4 ist  $S(f)$ , geeignet normiert  $\frac{\hat{s}}{2}$ , für  $f > 0$  dargestellt. Aus diesem Bild sind die folgenden Spektraleigenschaften eines winkelmodulierten Signals  $s(t)$  zu ersehen (nur dann exakt gültig, falls das Nachrichtensignal  $q(t)$  eine harmonische Schwingung ist):

- Das Spektrum besteht aus diskreten Linien bei  $f_T, f_T \pm f_N, f_T \pm 2f_N$  usw. (gleiches gilt für die negativen Frequenzen).
- Das Spektrum ist dementsprechend (theoretisch) unendlich weit ausgedehnt.
- Die Höhen der Spektrallinien sind durch den Modulationsindex über die Besselfunktionen festgelegt.
- Die Spektrallinien für gerades  $n$  liegen symmetrisch um  $f_T$ , bei ungeradem  $n$  ist ein Vorzeichenwechsel zwischen  $+n$  und  $-n$  zu berücksichtigen.
- Die Winkelmodulation (PM, FM) einer harmonischen Schwingung mit anderer Phase des Träger- und/oder des Nachrichtensignals führt zu einem Spektrum mit gleichem Betrag. Es unterscheidet sich nur durch eine andere Phase.
- Besteht das Nachrichtensignal  $q(t)$  aus mehreren Einzelschwingungen, so ist die Berechnung des Spektrums  $S(f)$  schwierig.

Es soll an dieser Stelle nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass das hier berechnete, zeitunabhängige Spektrum  $S(f)$  auf keinen Fall mit der zeitabhängigen Augenblicksfrequenz  $f_A(t)$  verwechselt werden darf. Näheres hierzu in Kap. 2.1.

## 1.2 Demodulation winkelmodulierter Signale

In diesem Abschnitt werden je ein idealer und ein realer Demodulator für phasen- und frequenzmodulierte Signale erläutert.

### 1.2.1 Ideale Phasendemodulation

Aufgabe eines Phasendemodulators ist es, aus der Phase  $\phi_r(t)$  des Empfangssignals  $r(t)$  das Sinkensignal  $v(t)$  zu generieren. Dieses sollte im Idealfall gleich dem gesendeten Nachrichtensignal sein (vgl. Abbildung 1 in der AM-Versuchsanleitung):  $v(t) = q(t)$ .

Wie das Sendesignal kann auch das komplexe, analytische Empfangssignal in folgende Form gebracht werden:

$$r_+(t) = r_{TP}(t) \cdot e^{j\omega_T t} \quad \text{mit} \quad r_{TP}(t) = a_r(t) \cdot e^{j\phi_r(t)}. \quad (29)$$

Bei idealem Kanal gilt stets  $r_+(t) = s_+(t)$ ,  $r_-(t) = s_-(t)$  und  $r_{TP}(t) = s_{TP}(t)$ . Ist dem Demodulator die Träger-(kreis)frequenz sowie die Trägerphase exakt bekannt, so kann er die Phase  $\phi_r(t)$  des äquivalenten Tiefpasssignals  $r_{TP}(t)$  detektieren. Handelt es sich bei  $r(t) = s(t)$  um ein ideal phasenmoduliertes Signal, so ist nach Gl. (4) die Phase proportional zum Nachrichtensignal  $q(t)$ . Berücksichtigt man die Proportionalitätskonstante  $K_{PM}$ , so ergibt sich direkt die Gleichung eines idealen Phasendemodulators:

$$v(t) = \frac{1}{K_{PM}} \cdot \phi_r(t) \quad \text{mit} \quad \phi_r(t) = \arctan \frac{\text{Im}\{r_{TP}(t)\}}{\text{Re}\{r_{TP}(t)\}}. \quad (30)$$

Die Phasenfunktion wird demnach aus dem Real- und Imaginärteil des äquivalenten Tiefpasssignals  $r_{TP}(t)$  ermittelt. Sind Real- und Imaginärteil negativ, so muss zu dem Wert von Gl. (30) noch der Winkel  $180^\circ$  addiert werden. Das demodulierte Signal  $v(t)$  stimmt dann exakt mit dem Nachrichtensignal  $q(t)$  überein, falls

- die Phasenmodulation ideal erfolgte,
- ein idealer Übertragungskanal vorliegt,
- der Modulationsindex  $\eta$  kleiner als  $\pi$  ist.

Sind die beiden erstgenannten Bedingungen nicht erfüllt, so wird es zu (nichtlinearen) Verzerrungen kommen. Ist der Modulationsindex zu groß, gibt es Mehrdeutigkeiten bei der Demodulation, und das Sinkensignal  $v(t)$  wird zu den Zeitpunkten, zu denen die Phasenfunktion  $\phi_r(t)$  die Werte  $\pm\pi$  überschreitet, Unstetigkeitsstellen aufweisen. Bei einer aufwendigeren Demodulatorschaltung (z.B. mit PLL) tritt dieses Problem nicht auf.

### 1.2.2 Näherungsweise Phasendemodulation mit Ringmodulator

Für die folgende Schaltungsbeschreibung wird ohne Verletzung der Allgemeingültigkeit eine sendeseitige Trägeramplitude von  $\hat{s} = 1$  und eine Trägerphase von  $90^\circ$  vorausgesetzt. Bei idealer Phasenmodulation und idealem Kanal gilt somit (vgl. Abbildung 5):

$$r(t) = s(t) = \sin(\omega_T \cdot t + K_{PM} \cdot q(t)). \quad (31)$$

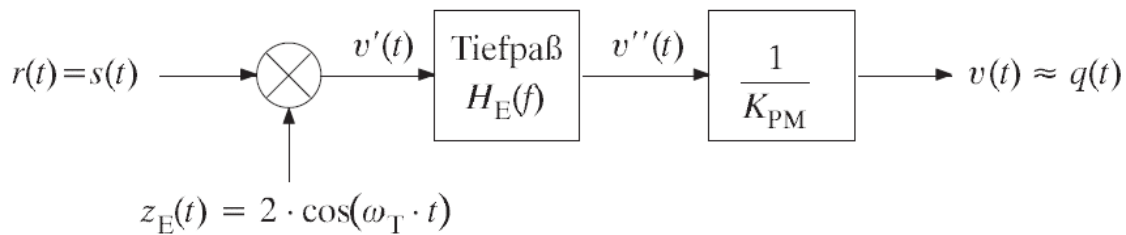


Abbildung 5: Eine Realisierungsform des Phasendemodulators für kleine  $\eta$ .

Multipliziert man das Signal  $r(t)$  mit dem gegenüber dem Sender um  $-90^\circ$   $90^\circ$  zeitversetzten Träger-signal  $z_E(t)$ ,  $z_E(t)$  so erhält man das Ergebnis

$$v'(t) = r(t) \cdot z_E(t) = 2 \cdot \sin(\omega_T \cdot t + K_{PM} \cdot q(t)) \cdot \cos(\omega_T \cdot t), \quad (32)$$

und mit der trigonometrischen Umformung  $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$  =  $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ :

$$v'(t) = \sin(K_{PM} \cdot q(t)) + \sin(2\omega_T \cdot t + K_{PM} \cdot q(t)). \quad (33)$$

Der zweite Term liegt im Bereich um die doppelte Trägerfrequenz und wird durch das Tiefpassfilter entfernt. Für das Signal nach dem Tiefpass gilt somit:

$$v''(t) = \sin(K_{PM} \cdot q(t)). \quad (34)$$

Berücksichtigt man die für kleine Winkel gültige Näherung  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ , so erkennt man, dass das Sin-kensignal  $v(t)$  in erster Näherung proportional zum Nachrichtensignal  $q(t)$  ist, solange der Modulationsindex (Phasenhub)  $\eta$  klein ist. Bei größeren Werten von  $\eta$  kommt es dagegen zu nichtlinearen Verzerrungen (Klirrfaktor 3. Ordnung).

### 1.2.3 FM-Demodulation

In Abschnitt 1.1.4 wurde gezeigt, dass eine (ideale) Frequenzmodulation z.B. durch einen (idealen) Phasenmodulator realisiert werden kann, wenn das Nachrichtensignal  $q(t)$  vor der PM einer Zeitintegration unterworfen wird. Deshalb ist es auch verständlich, dass sich der (ideale) Frequenzdemodulator aus der Zusammenschaltung eines idealen Phasendemodulators und eines Differentiationsgliedes ergibt (vgl. Abbildung 3).

Abschließend soll hier eine Schaltung zur Frequenzdemodulation angegeben werden, die nach dem Prinzip einer PLL ("Phased Locked Loop") arbeitet und dabei einen VCO ("Voltage Controlled Oscillator") verwendet. Abbildung 6 zeigt das entsprechende Blockschaltbild. Der Phasendetektor ermittelt die Abstände der Nulldurchgänge zwischen dem Empfangssignal  $r(t)$  und dem vom VCO bereitgestellten Vergleichssignal. Nach dem Tiefpassfilter und Verstärker erhält man das Sinkensignal  $v(t)$ , welches gleichzeitig den VCO steuert. Eine eingehende Beschreibung dieser Anordnung findet sich z.B. in [2].

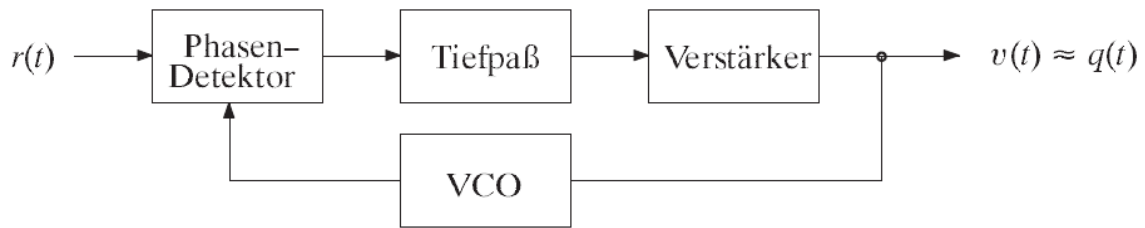


Abbildung 6: Prinzip des PLL-Frequenzdemodulators.

### 1.3 Stereoempfang beim UKW-Hörrundfunk

Im UKW-Rundfunk wird vor der FM-Modulation das sogenannte Stereo-Multiplexsignal (auch Stereo-MPX-Signal) generiert. Ein Stereo-Audiosignal setzt sich aus zwei unterschiedlichen Signalen zusammen, einem rechten und einem linken (im Folgenden mit L bzw. R abgekürzt). Addiert man diese, erhält man ein Monosignal. Mit dem Stereo-MPX-Signal wird ermöglicht, dass sowohl Mono- als auch Stereo-Empfänger das demodulierte FM-Signal wiedergeben können.

Dazu werden beim Sender zuerst ein Summensignal  $(L + R)$  und ein Differenzsignal  $(L - R)$  gebildet. Das Summensignal wird mit einem Tiefpassfilter auf  $15 \text{ kHz}$  bandbegrenzt und im Basisband belassen. Da das menschliche Gehör Frequenzen größer  $15 \text{ kHz}$  kaum wahrnimmt, reicht dieses Spektrum vollkommen aus. Das Differenzsignal hingegen wird mittels ZSB-AM ohne Träger (siehe Kapitel 2.1 des AM-Versuchsanleitung) auf die Frequenz  $38 \text{ kHz}$  hochgemischt und erstreckt sich somit über einen Bereich zwischen  $23 \text{ kHz}$  und  $53 \text{ kHz}$ . Zusätzlich zu diesen beiden Signalen wird noch der sogenannte Piloton bei  $19 \text{ kHz}$  addiert, welcher beim Empfänger zur Demodulation des Differenzsignals benötigt wird. Multipliziert man den Piloton im Zeitbereich mit sich selbst, entspricht das im Frequenzbereich einer Faltung. Somit kann aus dem  $19 \text{ kHz}$  Piloton eine, für die Rückgewinnung des  $(L - R)$ -Signals benötigte Spektrallinie bei  $38 \text{ kHz}$  gewonnen werden.

Ein Mono-Empfänger kann nun nach der FM-Demodulation das Signal einfach mit einer Grenzfrequenz von  $15 \text{ kHz}$  tiefpassfiltern und wiedergeben. Der Stereo-Empfänger mischt das  $(L - R)$ -Signal wieder ins Basisband und kann dann das linke Signal durch Addition und das rechte Signal durch eine Subtraktion zurückgewinnen:

$$\begin{aligned} (L + R) + (L - R) &= 2L \text{ bzw.} \\ (L + R) - (L - R) &= 2R \end{aligned} \quad (35)$$

Das Spektrum des Stereo-MPX-Signals sieht damit wie auf Abbildung 7 gezeigt aus

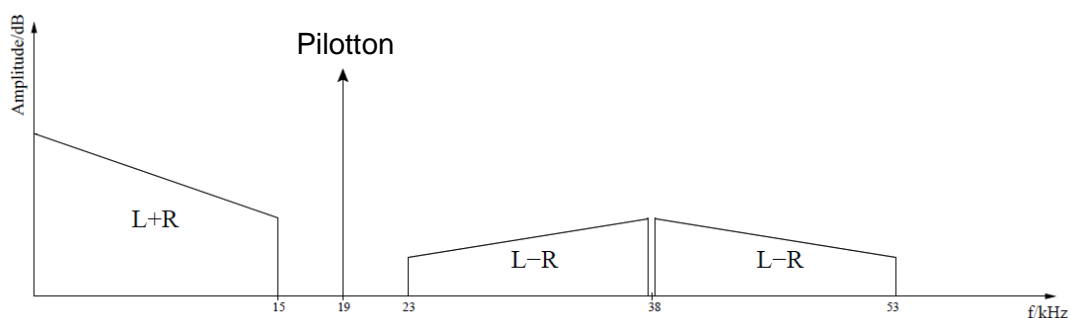


Abbildung 7: Spektrum des Stereo-MPX-Signals

## 1.4 Verzerrungen durch Bandbegrenzung eines winkelmodulierten Signals

Die genaueren allgemeingültigen Beschreibungen zu linearen und nichtlinearen Verzerrungen sind der AM-Versuchsanleitung zu entnehmen.

Das Spektrum  $S(f)$  bei Winkelmodulation (PM/FM) ist - wie in Abschnitt 1.1.6 dargelegt - unendlich weit ausgedehnt. Aufgrund der Frequenzökonomie kann aber in der Realität dem Signal nur eine endliche Bandbreite  $B_{HF}$  zur Verfügung gestellt werden. Durch eine solche, in Abbildung 8 veranschaulichte Bandbegrenzung entstehen ebenfalls nichtlineare Verzerrungen, wie in der Versuchsdurchführung 3.4 noch gezeigt werden wird.

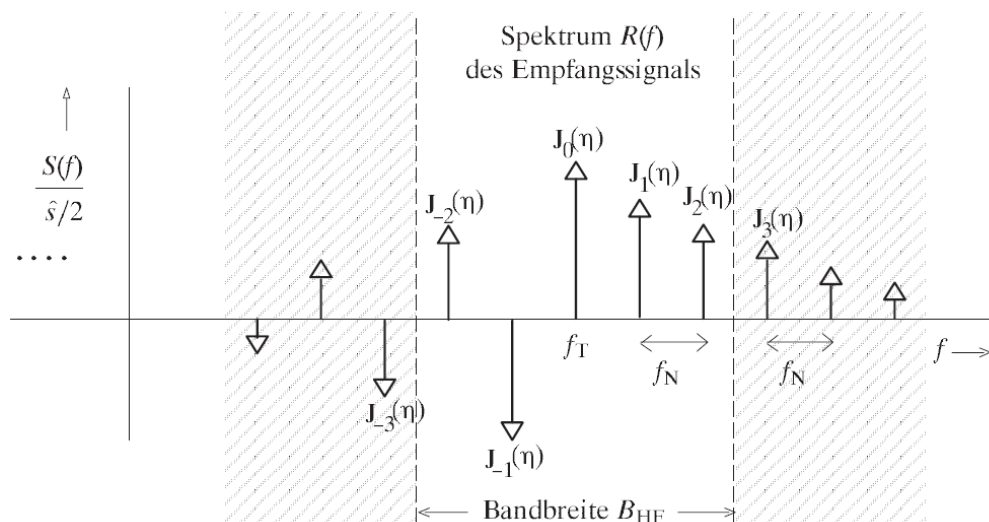


Abbildung 8: Verdeutlichung der Bandbegrenzung eines winkelmodulierten Signals.

Dies lässt wie folgt erklären: Bei idealer Phasen- oder Frequenzmodulation ist die Ortskurve ein Kreisbogen (siehe Abschnitt 1.1.3). Dieser Kreisbogen ergibt sich allerdings nur dann, wenn alle (i.a. unendlich vielen) Bessellinien in der Ortskurve mit den richtigen Zeigerlängen und richtigen Phasenlagen vektoriell addiert werden und mit den entsprechenden Kreisfrequenzen rotieren.

Dagegen wird die kreisförmige Ortskurve verändert, wenn die Bessellinien verfälscht werden (z.B. durch lineare Verzerrungen auf dem Kanal) oder ganz fehlen (z.B. durch Bandbegrenzung). Beispielsweise ergibt sich eine parabelförmige Ortskurve, wenn nur die Spektrallinien mit den Gewichten  $J_{-2}(\eta)$ ,  $J_{-1}(\eta)$ ,  $J_0(\eta)$ ,  $J_1(\eta)$  und  $J_2(\eta)$  wirksam sind.

Da der (ideale) Winkeldemodulator die Phase  $\phi_r(t)$  des Empfangssignals detektiert und daraus das Sinkensignal  $v(t)$  erzeugt (siehe Abschnitt 1.2), wird dieses verfälscht, und zwar nichtlinear. Das bedeutet: Aufgrund linearer Verzerrungen auf dem Kanal kommt es hier zu nichtlinearen Verzerrungen im demodulierten Signal (Oberwellen).

Diese nichtlinearen Verzerrungen sind stets von 3. Ordnung, d.h. bei einem übertragenen Cosinus-signal der Frequenz  $f_N$  tritt auch ein Anteil mit der Frequenz  $3 \cdot f_N$  auf, nicht jedoch mit der Frequenz  $2 \cdot f_N$ . Je kleiner die zur Verfügung stehende Bandbreite  $B_{HF}$  ist, desto größer wird der die nichtlinearen Verzerrungen beschreibende Klirrfaktor.



Als Faustformel für die erforderliche HF-Bandbreite des Übertragungskanals gilt für einen geforderten Klirrfaktor  $K < 10\%$  :

$$B_{HF} \geq 2 \cdot f_{N,max} \cdot (\eta + 1). \quad (36)$$

Soll der Klirrfaktor  $K$  dagegen kleiner als  $1\%$  sein, so muss die Bandbreite weiter vergrößert werden. Als einfache Faustformel gilt dann:

$$B_{HF} \geq 2 \cdot f_{N,max} \cdot (\eta + 2). \quad (37)$$

Dies zeigt auch die Versuchsdurchführung 3.4.

## 1.5 Einfluss von Rauschstörungen

Die Beschreibung der analogen Modulationsverfahren in den Abschnitten 1.1 bis 1.6 wurde teilweise durch die Darstellungsmöglichkeiten des Programms „amv“ bestimmt. Dabei wurden insbesondere die Signale, Spektren, Zeigerdiagramme und Ortskurven bei Amplitudenmodulation (sowohl ZSB als auch ESB) und bei der Winkelmodulation (PM bzw. FM) eingehend betrachtet. Neben den verschiedenen Modulatoren und einigen Demulatoren wurde auch das Verhalten der verschiedenen Verfahren bei einem nicht idealen Übertragungskanal (lineare Verzerrungen) beschrieben.

Nicht behandelt wurde dagegen bisher das Systemverhalten bei Vorhandensein von Rauschstörungen. Für das Folgende gehen wir davon aus, dass am Kanalausgang zusätzlich zum Nutzsignal auch ein Rauschsignal  $n(t)$  auftritt. Ist die Übertragungsfunktion  $H_K(f)$  des Kanals ideal, so gilt nun für das Empfangssignal (vgl. Abbildung 1 in der AM-Versuchsanleitung):

$$r(t) = s(t) + n(t). \quad (38)$$

Das Rauschsignal  $n(t)$  ist von seiner Natur her stets ein stochastisches Signal. Dieses Signal sei additiv, weiß (d.h. es enthält alle Frequenzen gleichermaßen) und gaußverteilt. Ist der Grund für  $n(t)$  das thermische Rauschen, so gilt im Bereich  $|f| < B_{th} \approx 6000$   $|f| < B_{th} \approx 6000$  GHz für die physikalische, einseitige Rauschleistungsdichte:

$$N_0 = F \cdot k_B \cdot \Theta, \quad (39)$$

wobei  $F$  die Rauschzahl,  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$   $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Ws/Hz die Boltzmann-Konstante und  $\Theta[K]$  die absolute Temperatur bezeichnet. Die mathematische, zweiseitige Rauschleistungsdichte ist

dann  $\varphi_n(f) = \frac{N_0}{2} \phi_n(f) = \frac{N_0}{2}$  (vgl. Abbildung 9).

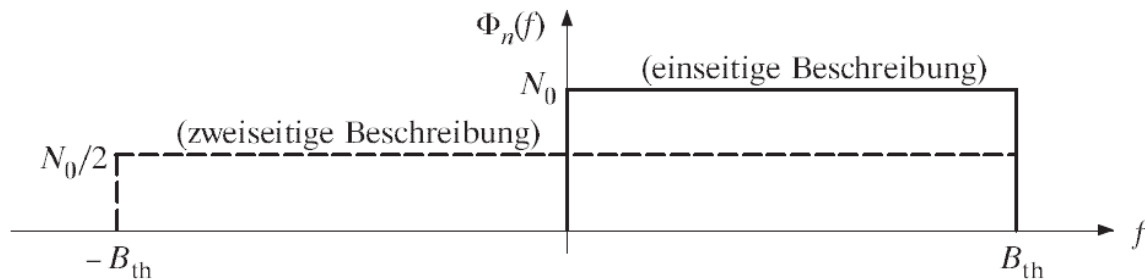


Abbildung 9: Physikalische (einseitige) und mathematische (zweiseitige) Rauschleistungsdichte.

Das Rauschsignal  $n(t)$  am Empfängereingang beeinträchtigt die Demodulation, so dass das demodulierte Signal  $v(t)$  sich ebenfalls aus einem Nutzanteil und einem Rauschanteil zusammensetzt:

$$v(t) = v_{Nutz}(t) + v_{Rausch}(t). \tag{40}$$

Der Nutzanteil würde sich für  $n(t) = 0$  ergeben. Dieser wurde im Abschnitt 1.2 sowie in der AM-Versuchsanleitung behandelt. Der Rauschanteil ist demnach der Anteil von  $v(t)$  der ausschließlich auf  $n(t)$  zurückzuführen ist. Als Maß für die Qualität eines Übertragungssystems benutzt man meist den Signalrauschabstand. Ist  $v(t)$  eine Spannung und  $R$  ein Widerstand, so gilt:

$$Q_v = 10 \cdot \lg(q_v) = 10 \cdot \lg \frac{P_{Nutz}}{P_{Rausch}}$$

mit  $P_{Nutz} = \frac{1}{R} \cdot \overline{v_{Nutz}^2(t)}$  (Leistung des Nutzanteils) (41)

$P_{Rausch} = \frac{1}{R} \cdot \overline{v_{Rausch}^2(t)}$  (Leistung des Rauschanteils).

In Abbildung 10 werden die einzelnen Modulationsverfahren anhand des erreichbaren Signalrauschabstandes  $Q_v$  verglichen. Die Abszisse ist hier ebenfalls logarithmisch dargestellt.

Als Grundlage dieses Vergleichs wird vorausgesetzt:

- ein cosinusförmiges Nachrichtensignal der Frequenz  $f_{N,max}$ ,
- eine konstante Sendeleistung  $P_S$ ,
- eine konstante Rauschleistungsdichte  $N_0$ ,
- ein eventuell dämpfender, aber für alle Frequenzen gleicher Kanal mit  $H_k(f) = \alpha$ .

Bei idealer Zweiseitenband-Amplitudenmodulation ohne Träger gilt:

$$Q_v = \frac{P_E}{N_0 \cdot f_{N,max}} = \frac{\alpha^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_{N,max}}. \tag{42}$$

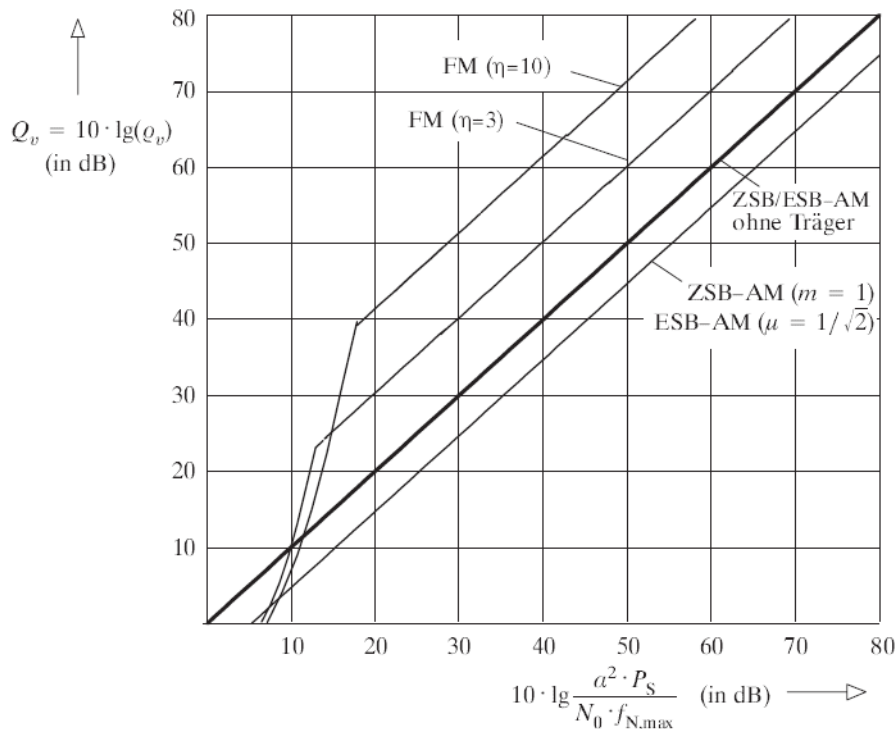


Abbildung 10: Vergleich der Modulationsverfahren hinsichtlich des Signalrauschabstandes.

Die Übertragungsqualität ist umso besser, je größer die Empfangsleistung  $P_E = \alpha^2 \cdot P_S$   $P_E = \alpha^2 \cdot P_S$  ist. Je größer dagegen die Rauschleistungsdichte  $N_0$  ist und je mehr Bandbreite  $f_{N,max}$  zur Verfügung gestellt werden muss, desto größer ist die Rauschleistung  $P_{Rausch}$  des demodulierten Signals und dementsprechend klein ist auch das S/N-Verhältnis. In der doppelt-logarithmischen Darstellung von Abbildung 10 ist dieser Kurvenverlauf für die ZSB-AM ohne Träger eine Gerade mit 45° Steigung durch den Ursprung.

Die Kurve für ZSB-AM mit Träger liegt abhängig vom Modulationsgrad  $m$  für alle Abszissenwerte um den konstanten dB-Wert  $10 \cdot \lg(1 + 2/m^2)$   $10 \cdot \lg(1 + \frac{2}{m^2})$  unterhalb der Kurve für die ideale AM ohne Träger ( $m \rightarrow \infty$ ). Der Grund hierfür ist, dass umso weniger Leistung zur eigentlichen Modulation aufgewendet wird, je kleiner der Modulationsgrad ist. Bei  $m = 1$  (Grenzwert, für den Hüllkurvendemodulation gerade noch angewandt werden kann) wird bereits 2/3 der zur Verfügung stehenden Leistung für die Übertragung des Trägers benötigt. Der Verlust an S/N-Abstand beträgt hier bereits  $10 \cdot \lg(3) = 4.77$  dB.  $10 \cdot \lg(3) = 4.77$  Bei  $m = 0.5$  liegt die Kurve sogar ca. 9.5 dB unterhalb der Vergleichskurve.

Für ein ESB-AM-System mit dem Modulationsgrad  $\mu$  ergibt sich die gleiche Einbuße an Signalrauschabstand wie bei einem ZSB-AM-System mit Modulationsgrad  $m$ , wenn  $\mu = m/\sqrt{2}$   $\mu = \frac{m}{\sqrt{2}}$  gewählt wird (hierbei Definitionen (21) bzw. (29) in der AM-Anleitung beachten).

Ohne Ableitung wird noch das S/N-Verhältnis für Winkelmodulation (Modulationsindex  $\eta$ ) angegeben. Hinsichtlich Störungen unterscheiden sich PM und FM durchaus:

$$Q_{v,PM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^2 \cdot a^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_{N,max}}, \quad Q_{v,FM} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta^2 \cdot a^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_{N,max}}. \quad (43)$$

Bei FM ergibt sich erst für  $\eta > 0,82$  eine Verbesserung gegenüber idealer AM. Mit  $\eta = 3 = 3$  beträgt die Verbesserung bereits 11.3 dB, mit  $\eta = 10$  ca. 21.8 dB. Die PM-Kurve liegt stets um  $10 \cdot \lg(3) = 4,77$  dB unterhalb der vergleichbaren FM-Kurve (gleiches  $\eta = 3$ ).

Die Qualitätsverbesserung bei FM-Übertragung gegenüber idealer AM lässt sich in Abhängigkeit des Modulationsindex wie folgt berechnen:

$$\Delta Q_{FM} = 10 \cdot \lg\left(\frac{3}{2} \cdot \eta^2\right) \text{ dB.} \quad (44)$$

Den Vorteil einer besseren Übertragungsqualität gegenüber AM, z.B. deutlich hörbar beim Vergleich von UKW- und Mittelwellen-Rundfunk, erkaufte man sich durch einen höheren technischen Aufwand, eine deutlich größere Bandbreite und einen systematischen Klirrfaktor (nichtlineare Verzerrungen) bei Bandbegrenzung des Übertragungskanals.

Die Gl. (42) und (43) sind nur gültig, wenn die Störungen hinreichend klein sind. Bei großen Störungen (z.B. bei einem Abszissenwert kleiner 10 dB) ist die Winkelmodulation schlechter als Amplitudenmodulation. Man spricht vom sogenannten „FM-Knick“ (siehe Abbildung 10).

## 1.6 Mehrwegeausbreitung

Die Mehrwegeausbreitung beschreibt das mehrfache Eintreffen eines gesendeten Signals an der Empfangsantenne über verschiedene Ausbreitungswege und somit zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Dies kann zum einen durch reflektierte Wellen (Echos) oder zum anderen durch mehrere Sendantennen entstehen (siehe Abbildung 11).

Um Mehrwegeempfang zu vermeiden, wird der analoge UKW-Rundfunk als sogenanntes Mehrwellennetz betrieben. Dies bedeutet, dass benachbarte Sendestandorte verschiedene Frequenzen benutzen, um das gleiche Programm auszustrahlen (Bayern 1 wird beispielsweise in München auf 91.3 MHz, in Augsburg hingegen auf 90.9 MHz ausgestrahlt). Mehrwegeausbreitung durch reflektierte Wellen kann allerdings auch durch ein Mehrwellennetz nicht vermieden werden.

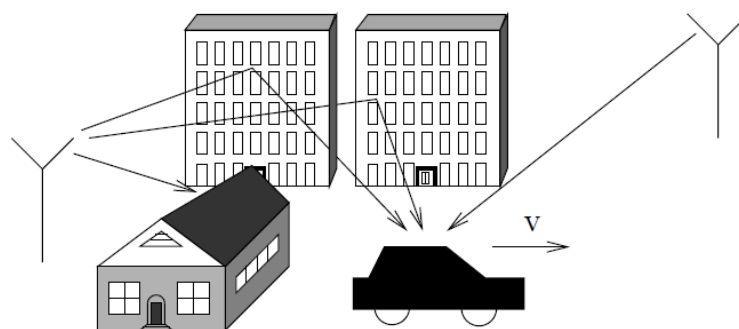


Abbildung 11: Mehrwegeausbreitung

Unter der Berücksichtigung von Phasen- und Frequenzverschiebung (vgl. Gl. (40) in der AM-Versuchsanleitung) und Mehrwegeausbreitung ergibt sich dann das Empfangssignal zu

$$r(t) = \sum_{k=1}^K e^{-\alpha_k(t)} \cdot e^{-j\beta_k(t)} \cdot s(t - \tau_k), \quad (45)$$

wobei  $r(t)$  und  $s(t)$  die äquivalenten Tiefpasssignale darstellen (vgl. Kapitel 1.3.2 im der AM-Versuch). Dabei bezeichnet:

$\alpha_k(t)$ : den zeitabhängigen Dämpfungsverlauf auf dem  $k$ -ten Pfad,

$\beta_k(t)$ : den zeitabhängigen Phasenverlauf auf dem  $k$ -ten Pfad,

$\tau_k$ : die Laufzeit auf dem  $k$ -ten Pfad.

Durch eine Aufspaltung des eindimensionalen Index  $k$  in den Doppelindex  $(m, n)$ , wobei der erste Index einen Hauptpfad, der zweite einen Nebenpfad kennzeichnet, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$r(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} e^{-\alpha_{m,n}(t)} \cdot e^{-j\beta_{m,n}(t)} \cdot s(t - \tau_{m,n}). \quad (46)$$

Somit erhält man mit

$$z_m(t) = \sum_{n=1}^{N_m} e^{-\alpha_{n,m}(t)} \cdot e^{-j\beta_{n,m}(t)}, \quad (47)$$

für das empfangene Signal  $r(t)$  folgenden Ausdruck:

$$r(t) = \sum_{m=1}^M z_m(t) \cdot s(t - \tau_m). \quad (48)$$

Der Mehrwegekanal kann somit als lineares Filter  $r(t) = h(t) * s(t)$  mit der Kanalimpulsantwort

$$h(t) = \sum_{m=1}^M z_m(t) \cdot \delta(t - \tau_m), \quad (49)$$

aufgefasst werden, wobei  $*$  eine Faltung bezeichnet. Die zugehörige Übertragungsfunktion ergibt sich unter der Annahme, dass die multiplikativen Größen konstante komplexe Größen sind, zu:

$$H(f) = \sum_{m=1}^M z_m \cdot e^{-j2\pi\tau_m f}. \quad (50)$$

Da die Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit ( $c_0 = 3 \cdot 10^8$  m/s) erfolgt, können aus den Laufzeiten  $\tau_m$  die einzelnen Laufstrecken  $l_m$  über den Zusammenhang

$$l_m = c_0 \cdot \tau_m \quad (51)$$

ermittelt werden.

Der maximale Laufzeitunterschied  $T_d = \max_{m,n}(\tau_m - \tau_n)$  wird als Laufzeitdispersion bezeichnet. Der Kehrwert der Laufzeitdispersion wird Kohärenzbandbreite  $B_K = 1/T_d$  genannt. Diese Bandbreite beschreibt den Frequenzbereich, in dem sich das Übertragungsverhalten des Kanals signifikant ändert.

## 2 Vorbereitungsfragen

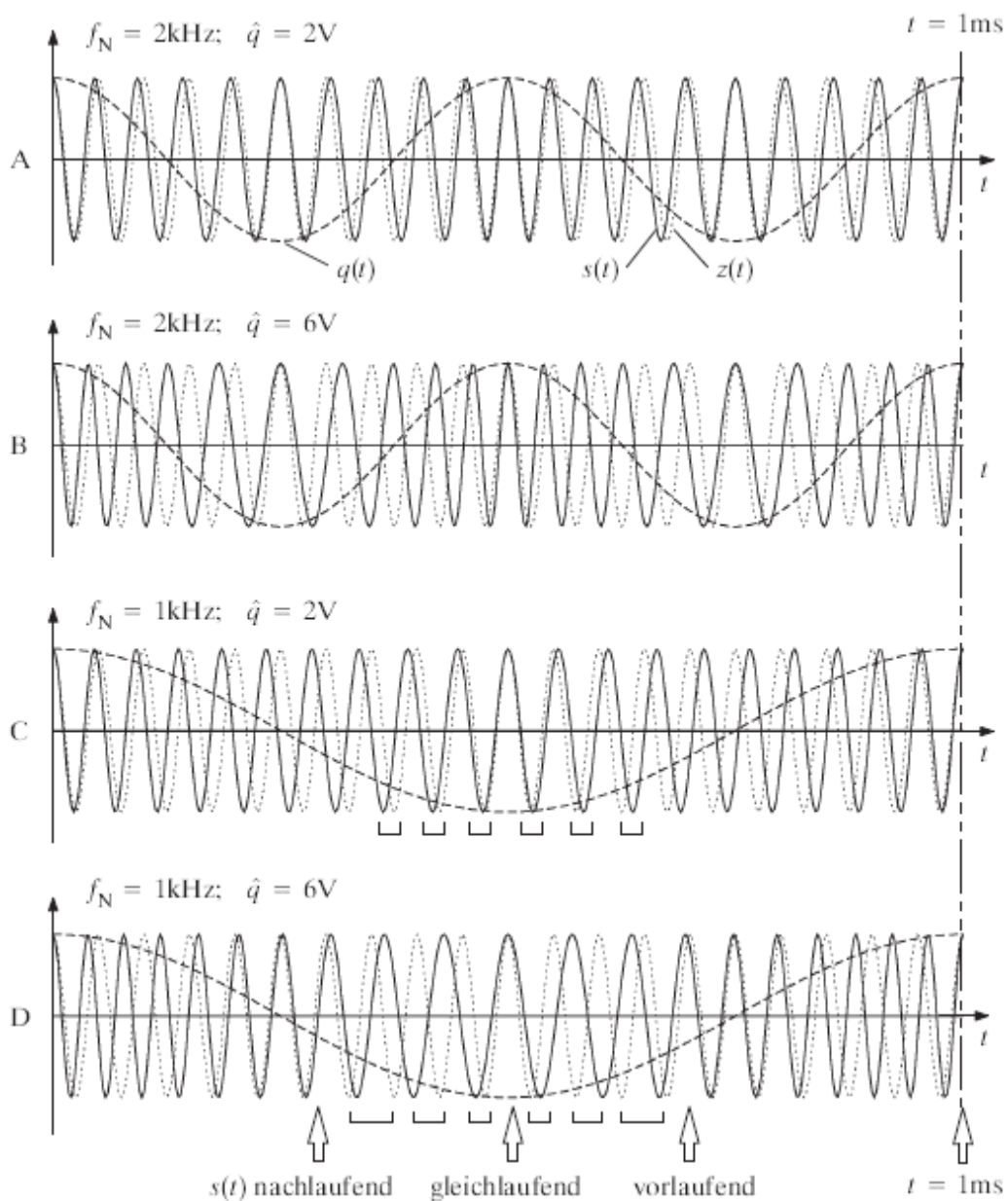
### 2.1 Frequenzmodulation

Das cosinusförmige Nachrichtensignal  $q(t) = q \cdot \cos(2\pi f_N \cdot t)$  mit der Amplitude  $\hat{q} = 6 \text{ V}$  und der Frequenz  $f_N = 2 \text{ kHz}$  wird mit dem Trägersignal  $z(t)$  der Frequenz  $f_T = 20 \text{ kHz}$  ideal frequenzmoduliert, wobei für die Modulatorkonstante gilt:  $K_{FM} = 6283 \text{ V}^{-1}\text{s}^{-1}$ . Die Skizze auf der nächsten Seite zeigt für diese Parameterwerte die Signale  $q(t)$ ,  $z(t)$  und  $s(t)$ .

a) Berechnen Sie den Modulationsindex  $\beta$  .

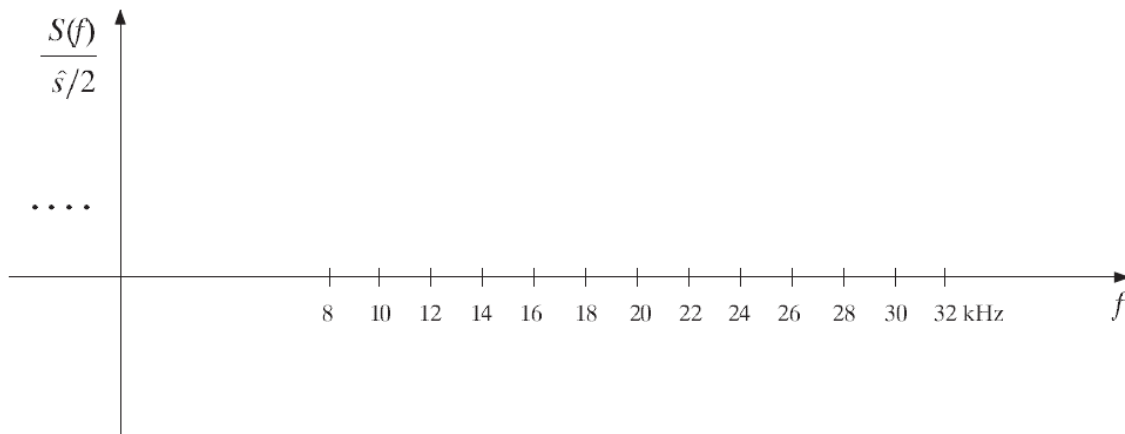
b) Geben Sie das reelle und das analytische FM-Signal an. Welche Ortskurve liegt vor?

c) Wie groß ist der Frequenzhub  $\Delta f_{\max}$   $\Delta f_{\max}$  ? Welche Augenblicksfrequenzen sind möglich?



d) Skizzieren Sie das normierte Spektrum  $S(f)$  des FM-Signals. Verwenden Sie dabei die aus einer Formelsammlung entnommene Tabelle für die Besselfunktionen.

$\eta$	$J_0(\eta)$	$J_1(\eta)$	$J_2(\eta)$	$J_3(\eta)$	$J_4(\eta)$	$J_5(\eta)$	$J_6(\eta)$
1	0.765	0.440	0.115	0.020	0.002	$\approx 0$	$\approx 0$
3	-0.260	0.339	0.486	0.309	0.132	0.043	0.011
5	-0.178	-0.328	0.047	0.365	0.391	0.261	0.131



e) Wie ändern sich Modulationsindex, Augenblicksfrequenz und Spektrum des FM-Signals, wenn die Amplitude auf 2V vermindert wird (Signal siehe Skizze A)?

f) Analysieren Sie die Konfigurationen entsprechend den Skizzen C und D.

## 2.2 Bandbreite von FM-Signalen

Beim FM-Hörrundfunk (UKW) wird üblicherweise mit einem Frequenzhub von  $\Delta f_{\max} = 75 \text{ kHz}$   $\Delta f_{\max} = 75 \text{ kHz}$  moduliert. Das unmodulierte Stereo-MPX-Signal hat bei einer Stereoübertragung eine Bandbreite von  $B_{NF, \text{Stereo}} = 53 \text{ kHz}$   $B_{NF, \text{Stereo}} = 53 \text{ kHz}$ . Bei Monoübertragung wird nur das  $(L + R)$ -Signal übertragen und somit beträgt die Bandbreite der unmodulierten Schwingung in diesem Fall  $B_{NF, \text{Mono}} = 15 \text{ kHz}$   $B_{NF, \text{Mono}} = 15 \text{ kHz}$  (vgl. hierzu Abbildung 7).

a) Soll es keine Verzerrungen geben, muss theoretisch eine unendlich große HF-Bandbreite zur Verfügung gestellt werden. Welche Bandbreite  $B_{HF}$  muss mindestens bereitgestellt werden, um einen



Klirrfaktor  $K$  kleiner als 10% zu erreichen? Geben Sie die benötigte Bandbreite sowohl für Mono- als auch für Stereoübertragung an.

b) Wie groß ist die Qualitätsverbesserung  $\Delta Q_{FM}$  des Signalrauschabstandes in dB gegenüber idealer AM bei der Stereoübertragung?

c) Berechnen Sie  $B_{HF,min}$  und  $\Delta Q_{FM}$  für eine Stereoübertragung bei einem Frequenzhub von  $\Delta f_{max} = 100 \text{ kHz}$ . Welche Erkenntnis ziehen Sie aus dem Vergleich der Qualitätsverbesserung in Teilaufgabe b) mit der hier berechneten Qualitätsverbesserung?

### 2.3 Einfluss von Rauschstörungen

Ein cosinusförmiges Signal mit der Frequenz  $f_N$  wird über einen verzerrungsfreien, aber dämpfenden Kanal mit dem konstanten Frequenzgang  $H_K(f) = \alpha$  übertragen und dabei von weißem gaußverteilten Rauschen (einseitige Rauschleistungsdichte  $N_0$ ) gestört. Die Sendeleistung sei  $P_S$ .

Für die gesamte Aufgabe gelten folgende Zahlenwerte:

$$f_N = 10 \text{ kHz}, \quad 20 \cdot \lg(\alpha) = 140 \text{ dB}, \quad N_0 = 10^{-18} \text{ W/Hz}$$

- a) Welcher Signalrauschabstand  $Q_{v,v}$  ergibt sich, wenn als Modulationsverfahren eine ZSB-Amplitudenmodulation ohne Träger eingesetzt wird und die Sendeleistung  $P_S = 10 \text{ kW}$   $P_S = 10 \text{ kW}$  beträgt?
- b) Wie verschlechtert sich der Signalrauschabstand  $Q_{v,v}$ , wenn bei gleicher Sendeleistung  $P_S$  eine ZSB-AM mit dem Modulationsgrad  $m = 0.5$  eingesetzt wird? Warum würde man dieses Verfahren überhaupt verwenden?
- c) Wie müsste man die Sendeleistung  $P_S$  erhöhen, um mit dem Modulationsgrad  $m = 0.5$  den gleichen Signalrauschabstand  $Q_{v,v}$  wie mit ZSB-AM ohne Träger zu erzielen?
- d) Wie groß ist der Signalrauschabstandsgewinn gegenüber der ZSB-AM ohne Träger (Punkt 2.6a in der AM-Versuchsanleitung), wenn bei sonst gleichen Systemparametern eine FM mit dem Frequenzhub  $\Delta f_{max} = 100 \text{ kHz}$   $50 \text{ kHz}$   $\Delta f_{max} = 50 \text{ kHz}$  angewandt wird? Berechnen Sie zunächst den Modulationsindex  $\eta$  .

- e) Wie unterscheidet sich eine Phasenmodulation mit gleichem Modulationsindex  $\beta$  gegenüber der FM von Punkt d) hinsichtlich des Signalrauschabstandes? Wie müsste man  $\beta$  verändern, damit sich wieder der gleiche Signalrauschabstand ergibt?

## 2.4 Mehrwegeausbreitung

Ein gesendetes Signal kommt beim Empfänger zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten an. Es wird einmal auf direktem Wege (Laufstrecke:  $l_1 = 3 \text{ km}$  und ebenso etwas verzögert durch eine Reflektion an einem Berg ( $l_2 = 3.3 \text{ km}$ ) empfangen. Zu beiden Zeitpunkten hat das Signal denselben konstanten Vorfaktor von  $z_1 = z_2 = 10^{-5}$ .

a) Wie groß sind die Laufzeiten  $\tau_{1,1}$  und  $\tau_2$ .

b) Welche Übertragungsfunktion  $H(f)$  ergibt sich? Berechnen sie auch das Betragsquadrat  $|H(f)|^2$  der Übertragungsfunktion.

c) Wie beeinflusst diese Übertragungsfunktion das Modulationssignal? Welchen Abstand haben die destruktiven Interferenzen auf der Frequenzachse (Kohärenzbandbreite  $B_K$ )?

d) Haben diese Interferenzen bei AM lineare oder nichtlineare Verzerrungen im demodulierten Signal zur Folge? Wie sieht es bei der WM aus?

### 3 Versuchsdurchführung

Die Durchführung der folgenden Versuche erfolgt unter Windows mithilfe des Programmes „amv“. Mit dieser Software können die Eigenschaften der analogen Amplituden-, Phasen- und Frequenzmodulation sowie deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede verdeutlicht werden. Dabei können die Signale  $q(t)$ ,  $s(t)$ ,  $r(t)$ ,  $v(t)$  und  $v(t) - q(t)$  im Zeitbereich (siehe Abbildung 1) sowie  $Q(f)$ ,  $S(f)$ ,  $R(f)$ ,  $V(f)$  und  $V(f) - Q(f)$  im Frequenzbereich betrachtet und analysiert werden. Außerdem können verschiedene Ortskurven (für das analytische Signal sowie für das äquivalente Tiefpasssignal) beobachtet werden.

Um die Optionen für ein bestimmtes Fenster festzulegen, kann man ein Kontextmenü öffnen, indem man mit der rechten Maustaste auf das jeweilige Fenster klickt. Hier können z.B. die Skalierung der Darstellung oder bei Ortskurven die Geschwindigkeit verändert werden.

Die Einstellungen für das Quellensignal, den Modulator, den Kanal und den Demodulator können im Menü „Parameter“ verändert werden. Es stehen dabei zwei Parametersätze zur Verfügung, die mithilfe des Menüpunktes „aktiv“ aktiviert oder deaktiviert werden können. Es können auch beide Parametersätze gleichzeitig aktiviert werden. Dann werden die Signale in unterschiedlichen Farben dargestellt.

*Hinweis:*

Bei allen nachfolgenden Versuchen sollten Sie die mit einfacher Klammer, z.B. "a)", gekennzeichneten Teilaufgaben auf jeden Fall bearbeiten. Dagegen sind die mit einer Doppelklammer, z.B. "(b)", versehenen Unterpunkte optional.

### 3.1 Phasenmodulation

Voreinstellung: Taste F7

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.2 ms,  
 Zeitsignal 2: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 0.2 ms,  
 Spektrum 1:  $Q(f)$  zwischen -20 kHz und 20 kHz,  
 Spektrum 2:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
 Zeigerdiagramm,  
 Ortskurve.

Für einige grundlegende Untersuchungen hinsichtlich der Phasenmodulation (PM) wird wie bei der Untersuchung der AM von folgenden Voreinstellungen ausgegangen:

$$\hat{q} = 0.8 \text{ V}, \quad f_N = 5 \text{ kHz}, \quad \varphi_N = 0^\circ$$

$$\hat{z} = 1, \quad f_T = 50 \text{ kHz}, \quad \varphi_T = 0^\circ$$

a) Wie groß ist der Modulationsindex  $\eta$ , wenn die Modulatorkonstante  $K_{PM} = \frac{1}{V}$  ist?

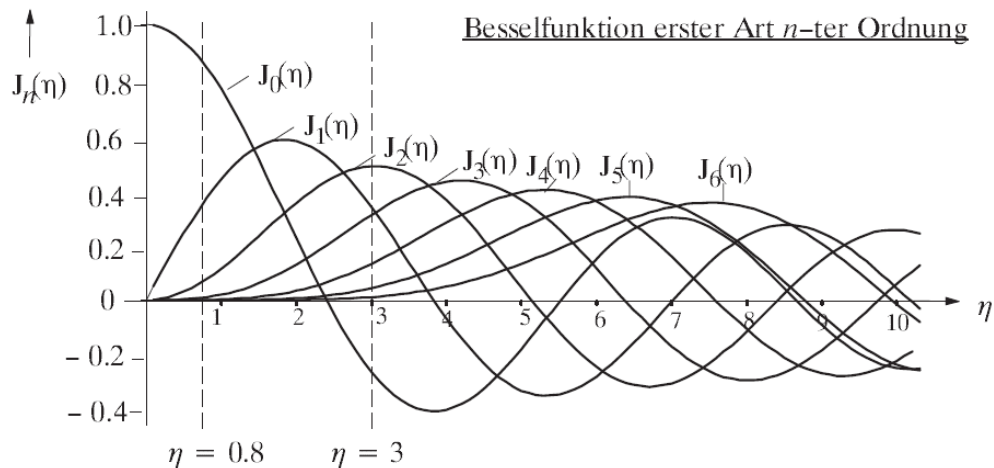
b) Betrachten und interpretieren Sie das phasenmodulierte Sendesignal  $s(t)$  im Vergleich zum Trägersignal  $z(t)$ . Dieses können Sie z.B. im Parametersatz 2 einstellen, wenn Sie hierfür bis auf  $\hat{q} = 0$  die gleichen Einstellungen wie für den Parametersatz 1 wählen.

c) Betrachten und interpretieren Sie die Spektralfunktion  $S(f)$ . Auf der nächsten Seite finden Sie eine Skizze mit den Besselfunktionen.

d) Verdeutlichen Sie sich den Signalverlauf  $s(t)$  auch anhand des Zeigerdiagramms und der Ortskurve.

e) Zeigen Sie, dass mit einem idealen Phasendemodulator das Signal wieder vollständig rekonstruiert werden kann.

- (f) Wie ändern sich die in den Punkten b) bis d) dargestellten Kurven, wenn das Nachrichtensignal eine Phase von  $\varphi_N = 45^\circ$   $\varphi_N = 45^\circ$  besitzt?
- g) Wie ändern sich die Kurvenverläufe, wenn nun anstelle des idealen ein "realer" Phasenmodulator gemäß Abbildung 1 mit gleichem Modulationsindex  $\eta$  eingesetzt wird?
- h) Betrachten Sie nun wieder den idealen Phasenmodulator. Wiederholen Sie mit der zu Beginn genannten Einstellung die Versuche c) und d) mit der Modulatorkonstanten  $K_{PM} = 3 \text{ V}^{-1}$   $K_{PM} = 3 \text{ V}^{-1}$ . Interpretieren Sie die Ergebnisse.
- (i) Wiederholen Sie die Versuche c) und d) mit der Modulatorkonstanten  $K_{PM} = 5 \text{ V}^{-1}$   $K_{PM} = 5 \text{ V}^{-1}$ . Interpretieren Sie die Ergebnisse.



### 3.2 Zusammenhang zwischen PM und FM

Voreinstellung: Taste F8 (Phase des Nachrichtensignals verändern)

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Quellsignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
 Zeitsignal 2: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
 Zeigerdiagramm,  
 Ortskurve.

Wählen Sie als Parametersatz 1 das Quellsignal  $q(t) = 0.8 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t - 60^\circ)$  und Frequenzmodulation ( $f_T = 50 \text{ kHz}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$ ,  $f_T = 50 \text{ kHz}$ , Modulatorkonstante  $K_{FM} = 90 \text{ kHz/V}$ ,  $K_{FM} = 90 \text{ kHz/V}$ ).

a) Interpretieren Sie die Ortskurve.

b) Interpretieren Sie das Spektrum  $S(f)$  des FM-Signals.

c) Zeigen Sie, dass das FM-Signal mit einem idealen Frequenzdemodulator wieder vollständig rekonstruiert werden kann.

(d) Wählen Sie nun zur Demodulation den idealen Phasendemodulator. Welches Sinkensignal  $v(t)$  ergibt sich nun. Begründen Sie Ihre Antwort.



(e) Welches Quellsignal  $q(t)$  muss man bei Phasenmodulation mit  $K_{PM} = 3 \text{ V}^{-1}$   $K_{PM} = 3 \text{ V}^{-1}$  wählen, damit sich genau das gleiche Sendesignal ergibt?

(f) Welches Quellsignal  $q(t)$  muss man bei Phasenmodulation mit  $K_{PM} = 5 \text{ V}^{-1}$  wählen, damit sich genau das gleiche Sendesignal ergibt?

### 3.3 PM bei einer Summe harmonischer Schwingungen

Voreinstellung: Taste F9

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Quellsignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,

Zeitsignal 2: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,

Spektrum 1:  $Q(f)$  zwischen -20 kHz und 20 kHz,

Spektrum 2:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz.

a) Wählen Sie als Parametersatz 1 das Quellsignal  $q_1(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t)$   $q_1(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 5\text{kHz} \cdot t)$  sowie Phasenmodulation ( $f_T = 50 \text{ kHz}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$ ). Die Modulator-konstante sei  $K_{PM} = \frac{1}{\text{V}}$   $K_{PM} = \frac{1}{\text{V}}$ . Betrachten und beschreiben Sie das Sendesignal und dessen Spektrum (analytisches Signal).

b) Wählen Sie nun für den Parametersatz 2 die gleichen Einstellungen wie für Satz 1, mit Ausnahme des Quellsignals; dieses sei nun  $q_2(t) = 0.5 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot t - 90^\circ)$   $q_2(t) = 0.5\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot t - 90^\circ)$ , also sinusförmig. Betrachten Sie auch hier Zeitsignal und Spektrum (analytisches Signal). Interpretation.

- c) Wählen Sie nun als Quellensignal die Addition der beiden Signale  $q_1(t)$  und  $q_2(t)$ . Betrachten Sie das Zeitsignal  $s(t)$  und Spektrum  $S(f)$  (analytisches Signal) des FM-Gesamtsignals. Welche Veränderungen gegenüber den ursprünglichen Signalen können Sie erkennen?
- d) Zeigen Sie, dass auch dieses Signal richtig demoduliert werden kann.
- (e) Geben Sie für diesen Fall das äquivalente Tiefpasssignal  $S_{TP}(t)$  an.
- (f) Geben Sie - ausgehend vom Ergebnis der letzten Teilfrage - eine prinzipielle Möglichkeit zur Berechnung der Spektralfunktion  $S(f)$  an.

### 3.4 Bandbegrenzung bei Phasenmodulation

Voreinstellung: Taste F10

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
 Zeitsignal 2: Sinkensignal  $v(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
 Spektrum 1:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
 Spektrum 2:  $R(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz.

Wählen Sie das Quellensignal  $q(t) = 1V \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t)$   $q_2(t) = 0.5V \cdot \cos(2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot t - 90^\circ)$ ,  
 $q(t) = 1V \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t)$  sowie Phasenmodulation  $f_T = 50 \text{ kHz}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$ . Die Modulatorkonstante

sei  $K_{PM} = \frac{3}{V} K_{PM} = \frac{3}{V}$ .

a) Wählen Sie zunächst als Kanalmodell den idealen Kanal. Betrachten und beschreiben Sie die oben angegebenen Signale und Spektren.

b) Wählen Sie nun einen Bandpass mit der Mittenfrequenz  $f_M = 50 \text{ kHz}$  und der Bandbreite  $\Delta f_K = 35 \text{ kHz}$   $\Delta f_K = 35 \text{ kHz}$ . Wie verändert sich dadurch das Sinkensignal  $v(t)$ ?

c) Wählen Sie nun für die Kanalbandbreite  $\Delta f_K = 25 \text{ kHz}$   $\Delta f_K = 25 \text{ kHz}$ . Wie haben sich das Empfangssignal  $r(t)$  und das Sinkensignal  $v(t)$  gegenüber b) verändert? Begründung.

d) Betrachten Sie für diese Einstellung auch die Ortskurve und das Zeigerdiagramm und interpretieren Sie diese.

(e) Wie groß muss die Bandbreite  $\Delta f_K$  mindestens sein, damit der Klirrfaktor  $K < 1\%$  ist. Überprüfen Sie dieses Ergebnis mit dem Programm.

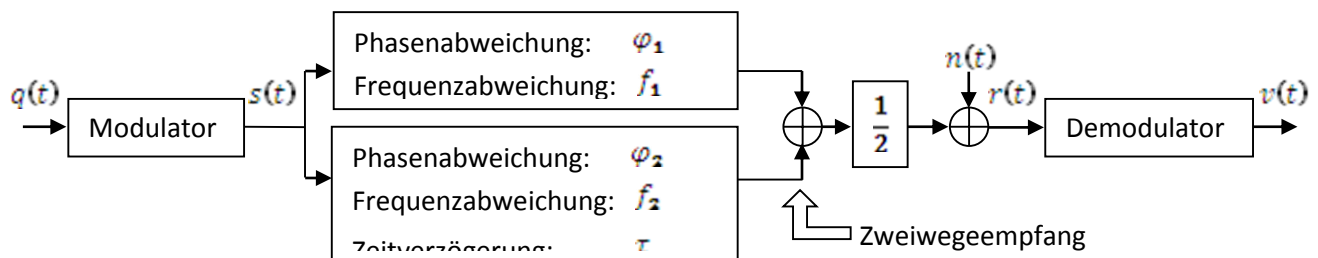
Zur Durchführung der weiteren Versuche sollte nun der Praktikumsrechner in einer Linux-Umgebung (openSUSE) gestartet werden. Mit dem Linux-Betriebssystem wird nun im weiteren Verlauf mit der Software „GNU Radio“ gearbeitet. Für die folgenden Versuche ist es empfehlenswert, Kopfhörer an den Rechner anzuschließen, damit man die Qualität der unterschiedlichen Audiosignale besser beurteilen kann.

Obwohl sich der Inhalt dieses Praktikumsversuches in erster Linie auf die Winkelmodulation (WM) bezieht, werden sich ein paar Teilaufgaben mit der Amplitudenmodulation (vgl. AM-Versuchsanleitung) beschäftigen, um die beiden analogen Modulationsverfahren (AM und WM) besser vergleichen zu können.

Zur Durchführung werden die Programme „**AM-Receiver.grc**“ sowie „**FM-Receiver.grc**“ benötigt. Im Programm „**AM-Receiver.grc**“ wird ein bereits durch das Programm „**AM-Transmitter.grc**“ ZSB-amplitudenmoduliertes Signal (ohne Träger) wieder demoduliert, im Programm „**FM-Receiver.grc**“ ein durch das Programm „**FM-Transmitter.grc**“ frequenzmoduliertes Signal.

Das äquivalente Tiefpasssignal des modulierten Sendesignal  $s(t)$  kann in „**AM-Receiver.grc**“ bzw. „**FM-Receiver.grc**“ auf dem Kanal folgendermaßen beeinflusst werden:

$$r(t) = \frac{1}{2} [e^{j(\varphi_1 + 2\pi \cdot f_1 \cdot t)} \cdot s(t) + e^{j(\varphi_2 + 2\pi \cdot f_2 \cdot t)} \cdot s(t - \tau)] + n(t). \quad (52)$$



Folgende Parameter können während des Programmlaufs beliebig verändert werden:

- Phasenverschiebung  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  mit den Schieberegler „**phase\_shift1**“ bzw. „**phase\_shift2 (delayed Signal)**“
- Frequenzverschiebung  $f_1$  bzw.  $f_2$  mit den Schieberegler „**frequ\_shift1**“ bzw. „**frequ\_shift2 (delayed Signal)**“
- Laufzeitverzögerung  $\tau$  in Samples (1 Sample entspricht  $2.5 \mu\text{s}$ ) mit dem Schieberegler „**time\_delay**“
- Amplitude des Rauschsignals  $n(t)$  mit „**noise\_amp**“

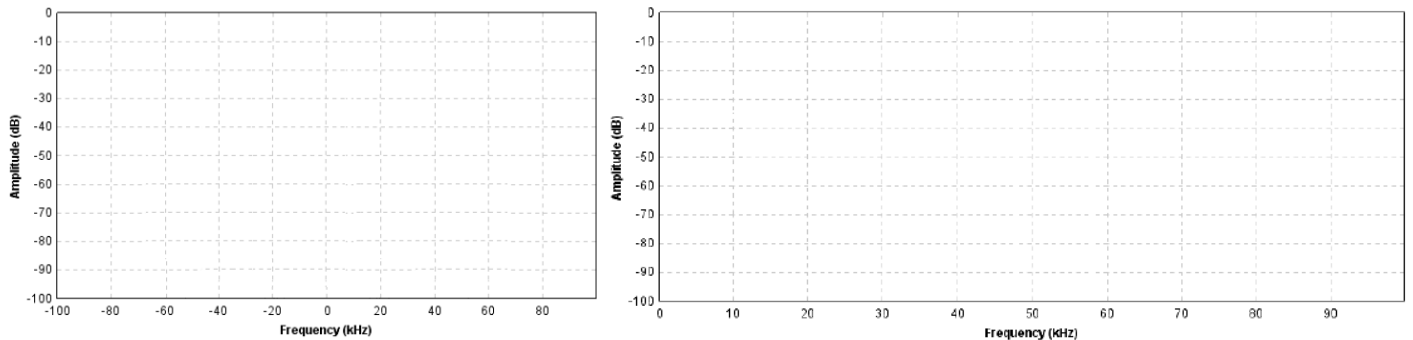
Wird für ein  $\tau$  von 0 Samples bei  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bzw.  $f_1$  und  $f_2$  derselbe von Null abweichende Wert eingestellt, entspricht dies einer konstanten Phasen- bzw. Frequenzverschiebung des gesamten Sendesignals (kein Zweiwegeempfang).

Die Simulation kann gestartet werden, indem man den Button „execute the flowgraph“ (Rakete) betätigt. Ist das Audiofile fertig abgespielt, wird die Simulation automatisch beendet und muss neu gestartet werden, indem man das offene Simulationsfenster schließt und erneut auf den Button „execute the flowgraph“ klickt. Die Simulation kann jederzeit mit der Schaltfläche „kill the flowgraph“ beendet werden.

### 3.5 Einfluss von Phasen- und Frequenzabweichungen

**AM (Programm: „AM-Receiver.grc“):**

- a) Skizzieren Sie das Betragsspektrum des äquivalenten Tiefpasssignals der empfangenen Modulationsschwingung  $r(t)$  (AM-Signal) sowie des Stereo-MPX-Signals am Demodulatorausgang. Wo befindet sich das Summensignal, wo das Differenzsignal und wo der Pilotton? Um die Spektren in Echtzeit beobachten zu können muss die Simulation mit der Schaltfläche „execute the flowgraph“ gestartet werden.



- b) Nun soll der Einfluss einer Phasenabweichung auf das demodulierte Signal bei AM überprüft werden. Starten Sie dazu die Simulation und stellen Sie für  $\varphi_1$  (phase\_shift1) und  $\varphi_2$  (phase\_shift2 (delayed signal)) jeweils die unten angegebenen Werte ein (auf vier Nachkommastellen genau). Betrachten Sie dabei das Spektrum des Stereo-MPX-Signals und lesen Sie den Betrag der Amplitude des Pilottons ab. Wie hoch ist die „Spitze“ des Pilottons in dB? Beschreiben Sie in Kurzform, was Sie jeweils hören.

*Hinweis:* Zum besseren Ablesen ist es sinnvoll, den Parameter „Set dB/div“ auf 5dB/div einzustellen.

$\varphi_1$	0	$\frac{\pi}{4} = 0.7854$	$\frac{\pi}{2} = 1.5708$	$\pi = 3.1416$	$\pi$
$\varphi_2$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	0
Amplitude des Pilottons in dB					
Hörbare Auswirkung auf das Audio-signal					

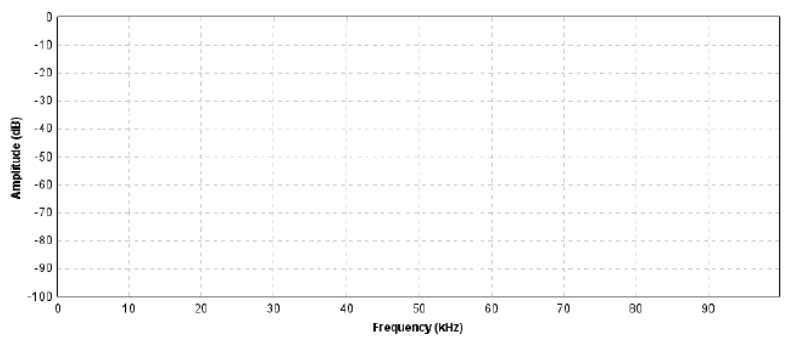
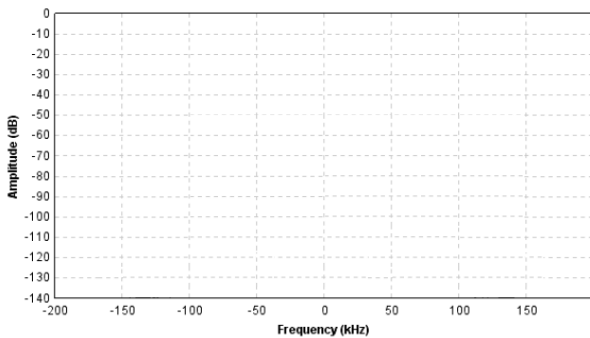
- c) Stellen Sie nun eine Frequenzabweichung ein, indem Sie bei  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  für  $f_1$  (frequ\_shift1) und  $f_2$  (frequ\_shift2 (delayed Signal)) denselben von 0 abweichenden Wert (z.B. 50 Hz) einstellen. Wie verändert sich dadurch die Qualität des Signals am Demodulatorausgang (lineare oder nichtlineare Verzerrungen)?

d) Was passiert, wenn die Frequenz  $f_1$  um einen sehr kleinen Wert (z.B. 1 Hz) von  $f_2 = 0 \text{ Hz}$  abweicht (Dopplerspreizung)? Ergeben sich dadurch lineare oder nichtlineare Verzerrungen? Interpretation.

**FM (Programm: „FM-Receiver.grc“):**

Hinweis: Die Erkenntnisse der folgenden Teilaufgaben sind jeweils mit den Ergebnissen bei AM zu vergleichen.

e) Skizzieren Sie das Betragsspektrum des äquivalenten Tiefpasssignals der empfangenen Modulationsschwingung (FM-Signal) sowie des Stereo-MPX-Signals am Demodulatorausgang. Um die Spektren in Echtzeit beobachten zu können, muss wieder vorher die Simulation gestartet werden.



f) Nun soll der Einfluss einer Phasenabweichung auf das demodulierte Signal bei FM überprüft werden. Starten Sie dazu die Simulation und stellen Sie für  $\varphi_1$  (**phase\_shift1**) und  $\varphi_2$  (**phase\_shift2 (delayed signal)**) jeweils die unten angegebenen Werte ein (auf vier Nachkommastellen genau). Betrachten Sie dabei das Spektrum des Stereo-MPX-Signals und lesen Sie den Betrag der Amplitude des Pilottons ab. Wie hoch ist die "Spitze" des Pilottons in dB? Beschreiben Sie, was Sie jeweils hören.

Wie verändert sich das Spektrum des FM-Signals, für einen Zweiwegeempfang mit zwei voneinander abweichenden Phasenwinkeln (letzte Spalte der Tabelle)?

$\varphi_1$	0	$\frac{\pi}{4} = 0.7854$	$\frac{\pi}{2} = 1.5708$	$\pi = 3.1416$	$\pi$
$\varphi_2$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	0
Amplitude des Pilottons in dB					
Hörbare Auswirkung auf das Audio-signal					

(g) Bewegen Sie den Schieberegler für  $\varphi_1$  mit der Maus ständig hin und her (Simulation von Phasenrauschen). Ergeben sich im demodulierten Signal dadurch lineare oder nichtlineare Verzerrungen? Interpretation.

h) Stellen Sie nun eine Frequenzabweichung ein, indem Sie bei  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0 = \varphi_1 = 0$  für  $f_1$  und  $f_2$  **denselben** von 0 abweichenden Wert (z.B. **1 kHz**) einstellen. Ist dadurch eine Qualitätsverschlechterung des Signals am Demodulatorausgang hörbar?

Wie verändert sich der Gleichanteil des Stereo-MPX-Signals (Signal am Demodulatorausgang) wenn Sie eine Frequenzabweichung von **20 kHz** einstellen?

i) Was passiert, wenn die Frequenz  $f_1$  um einen kleinen Wert (z.B. 50 Hz) von  $f_2 = 0$  Hz abweicht (Dopplerspreizung)? Ergeben sich dadurch lineare oder nichtlineare Verzerrungen? Interpretation.

**Vergleich von AM und FM:**

j) In der unten angefügten Tabelle sind nun die Folgen, die sich bei den jeweiligen Störungen für ZSB-AM sowie FM im Ausgangssignal ergeben, einzutragen.

Zusammenfassung:

	Phasenabweichung	Frequenzabweichung	Dopplerspreizung
ZSB-AM			
FM			



### 3.6 Einfluss von Rauschstörungen bei FM

Bei den folgenden Versuchen soll der Einfluss von Rauschen auf das Modulationssignal untersucht werden. Um eine Aussage über die Qualität des Modulationssignals sowie des Ausgangssignals machen zu können, werden das Ausgangs-SNR (SNR\_NF), sowie das Kanal-SNR (SNR\_HF) während der Simulation gemessen und angezeigt. Die Abkürzung SNR steht dabei für Signal-to-Noise Ratio und gibt das Signal- zu Störleistungsverhältnis an. Dieses wird, wie der Name schon sagt, aus der Signalleistung  $P_{\text{Nutz}}$  und der Rauschleistung  $P_{\text{Rausch}}$  berechnet (vgl. hierzu Gl. (41)).

- a) Mit dem Regler für die Rauschsignalamplitude (**noise\_amp**) kann das Kanal-SNR eingestellt werden. Wie groß sind jeweils ungefähr das Ausgangs-SNR (SNR\_NF) sowie die Qualitätsverbesserung  $\Delta Q_{FM}$  für die unten angegebenen Signal- zu Störleistungsverhältnisse? Interpretation.

SNR_HF	SNR_NF	$\Delta Q_{FM}$
30 dB		
20 dB		
10 dB		

- b) Stellen Sie ein Kanal-SNR von ca. **5 dB** ein. Welche Veränderung in der Signalqualität ist hörbar, wenn Sie nun von Stereo- auf Mono-Empfang umschalten (d. h. nur das **(L + R)**-Signal wird zum Ausgang durchgelassen). Interpretation.

- c) Bei FM ergibt sich ab einem gewissen Schwellwert ein rapider Einbruch des Ausgangs-SNR (siehe Abbildung 10). In dieser Simulationssoftware wird zur Demodulation ein sogenannter Delay-line basierter Demodulator verwendet, auf dessen genaue Funktionsweise nicht näher eingegangen werden soll. Wo befindet sich der Schwellwert im Simulationsprogramm ungefähr?

Ist das Schwellwertverhalten des hier verwendeten Demodulators besser oder schlechter als das eines konventionellen Demodulators (vgl. Abbildung 10)? Begründung.

### 3.7 Zweiwegeempfang

- a) Starten Sie die Simulation im Programm „*FM-Receiver.grc*“ und untersuchen Sie den Einfluss einer Laufzeitverzögerung  $\tau$ , indem Sie unterschiedliche Werte bei „**time\_delay**“ einstellen. Ab welcher Verzögerungszeit (1 Sample =  $2.5 \mu\text{s}$ ) ergeben sich hörbare Störungen im Ausgangssignal?
- b) Bei welchen Frequenzen ergeben sich destruktive Interferenzen im Spektrum des FM-Signals, wenn eine Laufzeitverzögerung von  $20 \mu\text{s}$  (entspricht 8 Samples) eingestellt wird?
- c) Welcher Effekt ist im FM-Signal erkennbar, wenn man zusätzlich zu einer Laufzeitverzögerung von  $20 \mu\text{s}$  noch eine Phasenabweichung einstellt, indem man  $\varphi_1$  variiert?
- (d) An welcher Position auf der Frequenzachse des FM-Signals macht sich eine destruktive Interferenz besonders negativ bemerkbar? Interpretation.

## 4 Musterlösungen der Vorbereitungsfragen

### 4.1 Frequenzmodulation

$$a) \eta_{FM} = \frac{K_{FM} \cdot \hat{q}}{\omega_N} = \frac{6283 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \cdot 6 \text{ V}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}} = 3$$

$$b) s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)), \quad s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t))}$$

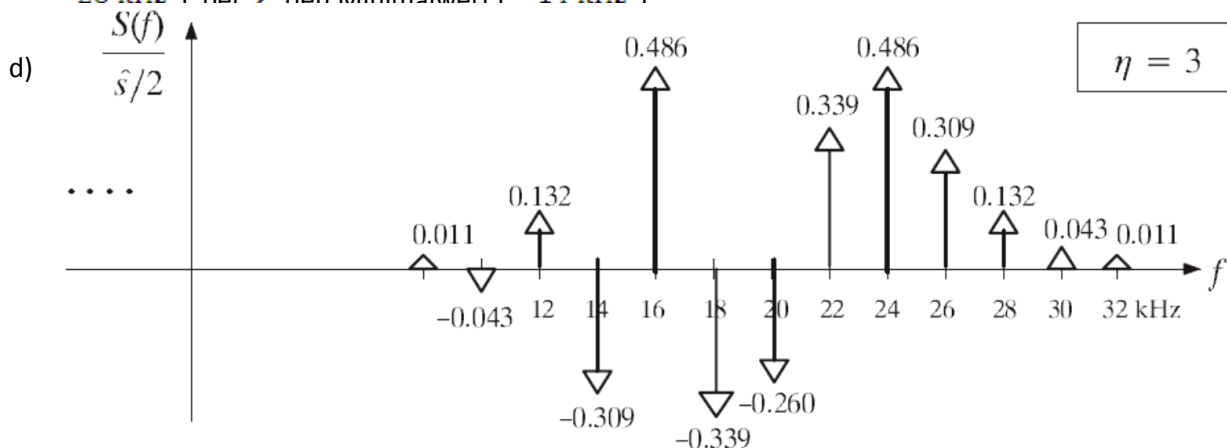
Ortskurve ist ein Kreisbogen zwischen  $171.9^\circ$  (3 rad) und  $-171.9^\circ$  (-3 rad).

$$c) \Delta\omega_{max} = K_{FM} \cdot \hat{q} = \eta_{FM} \cdot \omega_N = 37000 \text{ s}^{-1} \quad (\Delta f_{max} = \frac{\Delta\omega_{max}}{2\pi} = \eta_{FM} \cdot f_N = 6 \text{ kHz})$$

$\Rightarrow$  Augenblicksfrequenz:  $14 \text{ kHz} \leq f_A(t) \leq 26 \text{ kHz}$ .  $14 \text{ kHz} \leq f_A(t) \leq 26 \text{ kHz}$

Nach Gl. (14) ist der zeitliche Verlauf der Augenblicksfrequenz cosinusförmig. Zur Zeit  $t = 0$  und allen Vielfachen der Periodendauer  $T_0$  besitzt die Augenblicksfrequenz den maximalen Wert (

$= 26 \text{ kHz}$ ), bei  $\frac{T_0}{2}$  den Minimalwert ( $= 14 \text{ kHz}$ )



e) Es gilt nun  $\eta = 1$ : Die Ortskurve ist hier ein Kreisbogen mit  $\pm 1 \text{ rad}$  (entsprechend  $\pm 57.3^\circ$ ); das Spektrum ist weniger weit ausgebreitet als bei  $\eta = 3$ . Die Augenblicksfrequenz kann Werte zwischen  $18$  und  $22 \text{ kHz}$  annehmen.

f) Aufgrund der niederfrequenten Eingangsschwingung gilt nun  $\eta = 2$  (Kurve C) bzw.  $\eta = 6$  (Kurve D). Der Frequenzhub  $\Delta f_{max} = \eta \cdot f_N$  bleibt gleich. Die Augenblicksfrequenz schwankt jedoch langsamer als bei den Signalen gemäß den Kurven A bzw. B.

### 4.2 Bandbreite von FM-Signalen

$$a) B_{HF} \geq 2 \cdot f_{N,max} \cdot (\eta + 1), \quad \Delta f_{max} = \eta \cdot f_{N,max} \quad (\eta = \frac{\Delta f_{max}}{f_{N,max}})$$

$$(B_{HF} \geq 2 \cdot f_{N,max} \cdot (\frac{\Delta f_{max}}{f_{N,max}} + 1)) = 2 \cdot (\Delta f_{max} + f_{N,max})$$

$$\text{Monoübertragung: } B_{HF} \geq 2 \cdot (\Delta f_{max} + B_{NF,Mono}) = 2 \cdot (75 \text{ kHz} + 15 \text{ kHz}) = 180 \text{ kHz}$$

$$\text{Stereoübertragung: } B_{HF} \geq 2 \cdot (\Delta f_{max} + B_{NF,Stereo}) = 2 \cdot (75 \text{ kHz} + 53 \text{ kHz}) = 256 \text{ kHz}$$

*Hinweis:* In der Praxis findet beim UKW-Rundfunk meist das Stereo-System Anwendung. Das heißt, das komplette Stereo-MPX-Signal wird übertragen. Bei Monoempfang wird dann im Empfänger einfach das demodulierte Signal (zurückgewonnenes Stereo-Multiplex-Signal) tiefpassgefiltert.

b)  $\Delta Q_{FM} = 10 \cdot \lg\left(\frac{3}{2} \cdot \eta^2\right) \text{ dB}, \quad \eta = \frac{\Delta f_{max}}{f_{N,max}}$   
 $(\Delta Q_{FM} = 10 \cdot \lg\left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\Delta f_{max}}{f_{N,max}}\right)^2\right) \text{ dB} = 10 \cdot \lg\left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{75 \text{ kHz}}{53 \text{ kHz}}\right)^2\right) \text{ dB} = 4.78 \text{ dB}$

c)  $B_{HF,min} = 2 \cdot (\Delta f_{max} + f_{N,max}) = 2 \cdot (100 \text{ kHz} + 53 \text{ kHz}) = 306 \text{ kHz}$   
 $\Delta Q_{FM} = 10 \cdot \lg\left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\Delta f_{max}}{f_{N,max}}\right)^2\right) \text{ dB} = 10 \cdot \lg\left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{100 \text{ kHz}}{53 \text{ kHz}}\right)^2\right) \text{ dB} = 7.28 \text{ dB}$

Bei FM kann die Qualität der Übertragung in Bezug auf die Rauschempfindlichkeit verbessert werden, indem man mehr Bandbreite spendiert. Es muss also immer ein Kompromiss gefunden werden zwischen Übertragungsqualität und Bandbreiteneffizienz.

### 4.3 Einfluss von Rauschstörungen

a)  $Q_v = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_E}{N_0 \cdot f_N}\right)$  mit  $P_E = \alpha^2 \cdot P_S$  und  $\alpha = 10^{-7}$  (entsprechend 140 dB)  
 $(Q_v = 10 \cdot \lg\left(\frac{10^{-14} \cdot 10^4 \text{ W}}{10^{-18} \text{ W/Hz} \cdot 10^4 \text{ Hz}}\right) = 10 \cdot \lg(10^4) = 40 \text{ dB}$

b) SNR wird um Faktor  $1 + \frac{2}{m^2} = 9$   $1 + \frac{2}{m^2} = 9$  geringer:  $Q_v = (40 - 10 \cdot \lg(9)) \text{ dB} = 30.5 \text{ dB}$   
 $Q_v = (40 - 10 \cdot \lg(9)) \text{ dB} = 30.5 \text{ dB}$

ZSB-AM mit Träger verschlechtert die Übertragungsqualität gegenüber ZSB-AM ohne Träger, wenn man von konstanter Sendeleistung ausgeht. Der einzige Grund für deren Einsatz ist die dadurch geschaffene Möglichkeit, beim Empfänger einen Hüllkurvenempfänger einsetzen zu können.

c) Man müsste die Sendeleistung um **9.5 dB**, also um den Faktor 9 erhöhen:  $P_S = 90 \text{ kW}$ .  
 **$P_S = 90 \text{ kW}$**

d) Modulationsindex:  $\eta = \frac{\Delta f_{max}}{f_{N,max}} = \frac{50 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 5$   
 $Q_v = \frac{3}{2} \eta^2 \cdot \frac{\alpha^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_{N,max}}$  ( $\Delta Q = Q_{FM} - Q_{AM,m \rightarrow \infty} = 10 \cdot \lg\left(\frac{3}{2} \cdot \eta^2\right)$ )  
 $(\Delta Q = 10 \cdot \lg(37.5) = 15.7 \text{ dB} \quad (Q_v = (40 + 15.74) \text{ dB} = 55.74 \text{ dB}$

e) Bei PM ist das S/N-Verhältnis um den Faktor 3 (d.h. 4.77 dB) kleiner als bei FM. Daraus folgt:  
 $Q_v = 50.97 \text{ dB}$   $Q_v = 50.97 \text{ dB}$ . Um gleiches S/N-Verhältnis zu erhalten, muss man  $\eta$  um den Faktor  $\sqrt{3}$  erhöhen:  $\eta \approx 8.66$   $\eta \approx 8.66$ .

#### 4.4 Mehrwegeausbreitung

$$a) \tau_m = \frac{l_m}{c_0}$$

$$\left( \tau_1 = \frac{l_1}{c_0} = \frac{3 \text{ km}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 10 \mu\text{s} \right.$$

$$\left. \left( \tau_2 = \frac{l_2}{c_0} = \frac{3.3 \text{ km}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 11 \mu\text{s} \right. \right.$$

b)

$$H(f) = \sum_{m=1}^M z_m \cdot e^{-j2\pi\tau_m f} = 10^{-5} (e^{-j\cdot 2\pi f \cdot 10 \mu\text{s}} + e^{-j\cdot 2\pi f \cdot 11 \mu\text{s}}) = 10^{-5} \cdot e^{-j\cdot 2\pi f \cdot 10.5 \mu\text{s}} \cdot (e^{j\cdot 2\pi f \cdot 0.5 \mu\text{s}} + e^{-j\cdot 2\pi f \cdot 0.5 \mu\text{s}})$$

$$\text{Betragsquadrat: } |H(f)|^2 = 4 \cdot 10^{-10} \cdot \cos^2(2\pi f \cdot 0.5 \mu\text{s})$$

c) Im Modulationssignal ergeben sich konstruktive und destruktive Interferenzen.

$$\text{Laufzeitdispersion: } T_d = \tau_2 - \tau_1 = 11 \mu\text{s} - 10 \mu\text{s} = 1 \mu\text{s}$$

$$\text{Kohärenzbandbreite: } B_K = \frac{1}{T_d} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 1 \text{ MHz}$$

⇒ Die destruktiven Interferenzen haben auf der Frequenzachse einen Abstand von **1 MHz**.

d) Bei AM führen lineare Verzerrungen auf dem Kanal auch zu linearen Verzerrungen am Demodulatorausgang. Konstruktive bzw. destruktive Interferenzen sind nichts weiter als Dämpfungen bzw. Verstärkungen bestimmter Frequenzanteile des Modulationssignals (lineare Verzerrungen). Somit wird das Ausgangssignal bei AM ebenfalls linear verzerrt.

Bei FM führen die linearen Verzerrungen der Modulationsschwingung auf dem Kanal zu nichtlinearen Verzerrungen am Ausgang des Demodulators.

## 5 Musterlösungen der Versuchsdurchführung

### 5.1 Phasenmodulation

a)  $\eta = K_{PM} \cdot \hat{q} = \frac{1}{V} \cdot 0.8 \text{ V} = 0.8$

b) Man erkennt die Phasenabweichungen des modulierten Signals  $s(t)$  gegenüber  $z(t)$ . Ist  $q(t)$  positiv, so kommen die Nulldurchgänge von  $s(t)$  früher als die von  $z(t)$ . Dagegen ist bei  $q(t) < 0$  die Phase  $\phi(t)$  ebenfalls negativ und  $s(t)$  ist gegenüber  $z(t)$  nachlaufend.

c) Das Spektrum  $S(f)$  setzt sich aus (komplexen) Bessellinien zusammen. Diese liegen um Vielfache von  $f_N = 5 \text{ kHz}$  von der Trägerfrequenz  $f_T = 50 \text{ kHz}$  entfernt. Der Betrag der Bessellinien ergibt sich aus den Besselfunktionen  $J_n(\eta = 0.8)$ , multipliziert mit  $\frac{\hat{s}}{2}$ :

$$J_0(0.8) = 0.846; J_1(0.8) = 0.368; J_2(0.8) = 0.076; J_3(0.8) = 0.010$$

Alle anderen Linien sind kleiner als 0.001. Entgegen der Konstellation in Abschnitt 1.1.6 sind die Bessellinien komplex (da hier das Nachrichtensignal ein Cosinussignal ist).

d) Bei idealer PM mit dem Modulationsindex  $\eta = 0.8$  ist die Ortskurve ein Kreisbogen, der einen Winkel von  $\pm 0.8 \text{ rad}$  (entspricht ca.  $\pm 45^\circ$ ) einnimmt. Bei der Ortskurvenberechnung ergibt sich dieser Kreisbogen tatsächlich, wenn die verschiedenen Bessellinien (ein Träger, 3 OSB-Zeiger und 3 USB-Zeiger) entsprechend ihren Kreisfrequenzen rotieren. Die Betragsfunktion  $a(t)$  ist konstant gleich 1 und die Phasenfunktion  $\phi(t)$  proportional zu  $q(t)$ .

Im Zeigerdiagramm dreht sich der in der Ortskurve dargestellte Zeigerverbund zusätzlich mit der Träger(kreis)frequenz. Der Realteil hiervon ist das reelle Sendesignal  $s(t)$ . Die maximale Abweichung der Nulldurchgänge im Sendesignal  $s(t)$  gegenüber der Sollage von  $z(t)$  beträgt  $\pm \frac{0.8}{2\pi} = \pm 12.7\%$   $\pm \frac{0.8}{2\pi} = \pm 12.7\%$  der Periodendauer des Trägersignals.

e) Das Differenzsignal  $v(t) - q(t)$  ist hier identisch Null.

f) Der Phasenverlauf  $\phi(t)$  der Ortskurve verändert sich entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$ ; damit kommt es auch zu einer Verschiebung der Nulldurchgänge.

g) Die Hüllkurve  $a(t)$  ist nun nur mehr näherungsweise konstant, der Phasenverlauf  $\phi(t)$  nicht mehr exakt gleich dem Nachrichtensignal. Auch bei idealer Phasendemodulation verbleibt ein gewisser Fehler (nichtlineare Verzerrungen).

h) Bei  $K_{PM} = 3$  ist der Phasenhub dreimal so groß. Es ergibt sich ein breiteres Spektrum. Die Spektrallinie bei der Trägerfrequenz ist sehr klein, da  $J_0(2.4)$  ungefähr Null ist. Der ideale Phasen-demodulator kann auch dieses Signal rekonstruieren.

- (i) Der Phasenhub ist nun so groß, dass die Nulldurchgänge von den Solllagen um mehr als eine Trägersymboldauer abweichen. Da so die Phase größer als  $\pm\pi$  sein kann, ist auch der ideale Phasendemodulator überfordert. Mit PLL kann dagegen weiterhin verzerrungsfrei demoduliert werden.

## 5.2 Zusammenhang zwischen PM und FM

a) Mit den angegebenen Werten berechnet sich der Modulationsindex zu

$$\eta = \frac{K_{FM} \cdot \hat{q}}{\omega_N} = \frac{90 \text{ kHz/V} \cdot 0.8 \text{ V}}{2\pi \cdot 5 \text{ kHz}} \approx 2.3$$

Dies erkennt man an der Ortskurve, die einen Kreisbogen mit den Phasenwinkeln zwischen  $131.8^\circ$  und  $-131.8^\circ$  beschreibt. Der Betrag der Ortskurve ist konstant, die Phasenfunktion verläuft exakt entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$ .

b) Die Frequenzmodulation dieses Signals führt zu einem komplexen Besselspektrum, wobei die einzelnen Besselinien entsprechend  $J_n(2.3)$  gewichtet sind. Der Anteil bei  $f_T = 50 \text{ kHz}$  ist aufgrund des gewählten Modulationsindex ( $\eta = 2.3$ ) relativ klein, da  $J_0(2.3) \approx 0$ ,  $J_1(2.3) \approx 0$  ist.

c) Verzerrungsfreie Demodulation:  $q(t) = v(t)$ .

(d) Der ideale FM-Demodulator ist gleich dem idealen PM-Demodulator und anschließendem Differentiationsglied. Verwendet man anstelle des FM-Demodulators einen PM-Demodulator, so ist das Sinkensignal  $r(t)$  proportional dem integrierten Quellensignal:

$$\begin{aligned} v(t) &= K \cdot 0.8 \cdot \int \cos(2\pi \cdot f_N \cdot t - 60^\circ) dt \\ &= K \cdot \frac{0.8}{2\pi \cdot f_N} \sin(2\pi \cdot f_N \cdot t - 60^\circ) = K \cdot \frac{0.8}{2\pi \cdot f_N} \cos(2\pi \cdot f_N \cdot t - 150^\circ). \end{aligned}$$

Die Konstante  $K$  berücksichtigt, dass  $K_{PM}$  und  $K_{FM}$  unterschiedliche Einheiten aufweisen. Mit

$$K = \frac{31.41}{\text{kHz}} \quad K = \frac{31.41}{\text{kHz}} \text{ ist die Amplitude des Ausgangssignals wieder } 0.8 \text{ V}.$$

(e) Der ideale Frequenzmodulator setzt sich aus einem Integrator und einem idealen Phasenmodulator zusammen. Wählt man als Eingangssignal der PM das integrierte Signal des FM-Modulators, so ergibt sich das gleiche Sendesignal:  $q(t) = 0.8 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot f_N \cdot t - 150^\circ)$   
 $q(t) = 0.8 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot f_N \cdot t - 150^\circ)$ .

Dies erkennt man auch an der Ortskurve. Wegen  $\frac{90 \text{ kHz/V}}{2\pi \cdot 5 \text{ kHz}} \approx \frac{3}{V}$

$\frac{90 \text{ kHz/V}}{2\pi \cdot 5 \text{ kHz}} \approx \frac{3}{V}$  passen bei der Nachrichtenfrequenz  $5 \text{ kHz}$  die Modulatorkonstanten  $K_{FM} = 90$

$\text{kHz/V}$   $K_{FM} = 90 \text{ kHz/V}$  und  $K_{PM} = \frac{3}{V} K_{PM} = \frac{3}{V}$  näherungsweise zusammen.

(f) Um gleiches Sendesignal  $s(t)$  mit der Phasenmodulatorkonstante  $K_{PM} = \frac{5}{V}$  zu erreichen, muss man die Amplitude des Nachrichtensignals um den Faktor 0.6 vermindern:

$$q(t) = 0.48 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot f_N \cdot t - 150^\circ).$$



### 5.3 PM bei einer Summe harmonischer Schwingungen

- a) Das Spektrum  $S(f)$  besitzt komplexe diskrete Linien um die Trägerfrequenz  $f_T$  und in Abständen von  $5 \text{ kHz}$  davon entfernt. Die Impulsgewichte ergeben sich aus den Besselfunktionen mit dem Modulationsindex  $\eta = 1$ . Bei negativen Frequenzen sind die Linien hierzu konjugiert komplex.

Frequenz in kHz:	35	40	45	50	55	60	65
Gewicht beim analytischen Signals:	-j·0.020	-0.115	j·0.440	0.765	j·0.440	-0.115	-j·0.020

- b) Wegen  $\eta = 0.5$  ergibt sich ein Spektrum mit weniger Spektrallinien (im Abstand  $10 \text{ kHz}$ ). Dieses Spektrum ist rein reell, da es sich um die PM einer Sinusfunktion handelt.

Frequenz in kHz:	20	30	40	50	60	70	80
Gewicht beim analytischen Signals:	-0.003	0.031	-0.242	0.938	0.242	0.031	0.003

- c) Da nun die Grundfrequenz wie unter Punkt a) wieder  $5 \text{ kHz}$  ist, beträgt der Abstand der einzelnen Spektrallinien wieder  $5 \text{ kHz}$ . Da sich nun  $q(t)$  aus der Summe zweier harmonischer Schwingungen zusammensetzt, unterscheiden sich die Spektrallinien oberhalb und unterhalb der Trägerfrequenz nicht nur durch die Phase, sondern auch durch den Betrag:

Frequenz in kHz:	25	30	35	40	45	50
Gewicht beim analytischen Signal:	j·0.017	0.054	-j·0.111	-0.296	j·0.301	0.718
Frequenz in kHz:	55	60	65	70	75	
Gewicht beim analytischen Signal:	j·0.524	0.073	j·0.102	-0.002	j·0.010	

- d) Mit Hilfe des idealen FM-Demodulators lässt sich das Quellensignal wieder herstellen. Das Differenzspektrum  $V(f) - Q(f)$  sowie das Differenzsignal  $v(t) - q(t)$  sind jeweils Null.

- (e) Die Winkelfunktion beinhaltet jetzt außer der Trägerfrequenz noch 2 Anteile. Deshalb gilt auch für das äquivalente Tiefpasssignal mit der Amplitude 1:

$$s_{TP}(t) = e^{j(\eta_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + \eta_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t))}$$

- (f) Dieses äquivalente Tiefpasssignal kann wie folgt umgeformt werden:

$$s_{TP}(t) = e^{j\eta_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)} \cdot e^{j\eta_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)}$$

Im Zeitbereich ergibt sich also die Multiplikation der beiden Signalanteile. Daraus folgt: Das Spektrum kann durch die Faltung der beiden Spektralanteile von a) und b) berechnet werden. Damit ergeben sich genau die Frequenzen und Amplituden nach Punkt c).

#### 5.4 Bandbegrenzung bei Phasenmodulation

- a) Bei gegebenem Modulationsindex ( $\eta = 3$ ) reicht  $S(f)$  etwa von **20 kHz** bis **80 kHz**. Es ist ein Bessel-spektrum im Abstand **5 kHz**. Da der Kanal ideal ist, gilt  $R(f) = S(f)$  und  $v(t) = q(t)$ , d.h. es treten keine linearen Verzerrungen auf; die Ortskurve ist ein Kreisbogen.
- b) Es bleiben im Spektrum  $R(f)$  nur die diskreten Anteile zwischen **35** und **65 kHz**. Das Signal  $r(t)$  beinhaltet neben der gewünschten Cosinusschwingung mit der Frequenz **5 kHz** auch Oberwellen (Harmonische). Diese erkennt man auch im Spektrum  $V(f)$ .

Frequenz	Gewicht
$\pm 5$ kHz	0.485
$\pm 15$ kHz	0.023
$\pm 25$ kHz	0.017

Der Klirrfaktor beträgt  $K \approx 6\%$ .

- c) Es bleiben im Spektrum  $R(f)$  nur die diskreten Spektralanteile zwischen **40 kHz** und **60 kHz**.

Frequenz	Gewicht
$\pm 5$ kHz	0.445
$\pm 15$ kHz	0.028
$\pm 25$ kHz	- 0.046

Der Klirrfaktor erhöht sich auf  $K \approx 12\%$ . Wie bei Punkt b) sind auch hier die nichtlinearen Verzerrungen von ungerader Ordnung:  $K_2 = K_4 = \dots = 0$ .  $K_2 = K_4 = \dots = 0$

- d) Bei der gewählten Einstellung besteht das Empfangsspektrum  $R(f)$  nicht mehr aus unendlich vielen Bessellinien, sondern nur noch aus den Linien:

$$\begin{aligned} J_0(\eta = 3) &= -0.130, \\ J_1(3) &= j \cdot 0.17 = J_{-1}(3), \\ J_2(3) &= -0.243 = J_{-2}(3) \end{aligned}$$

Deshalb drehen im Zeigerdiagramm nicht mehr unendlich viele Zeiger, sondern nur mehr **5**. Die Ortskurve ist jetzt kein Kreisbogen mehr, sondern ein Parabelabschnitt.

- (e) Die Bandbreite  $B_K$  muss nach Gl. (38) etwa **50 kHz** sein. Für die Spektrallinien des Sinkensignals gilt dann:

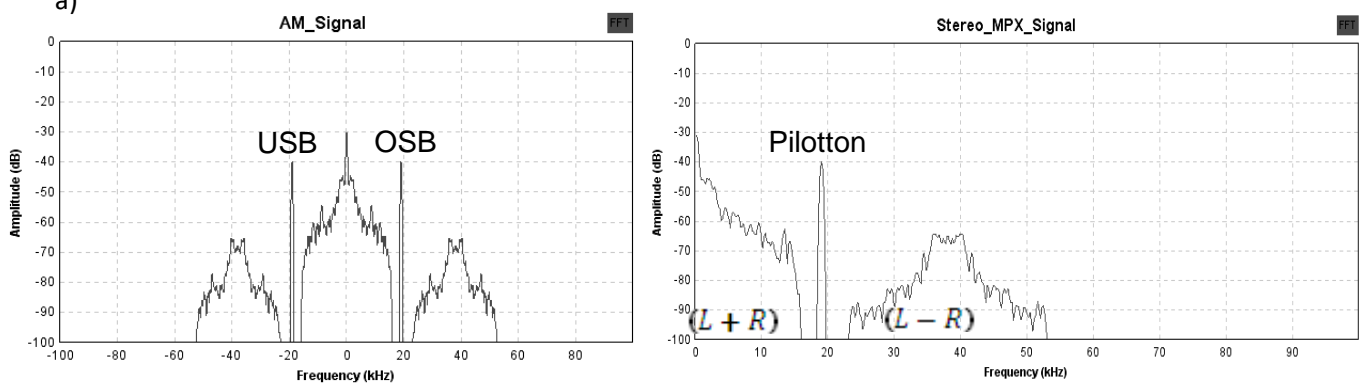
Frequenz	Gewicht
----------	---------

$\pm 5 \text{ kHz}$	0.5
$\pm 15 \text{ kHz}$	0.001
$\pm 25 \text{ kHz}$	- 0.002
$\pm 35 \text{ kHz}$	- 0.001

Damit ergibt sich der Klirrfaktor zu  $K \approx 0.5\%$ .

### 5.5 Einfluss von Phasen- und Frequenzabweichungen

a)

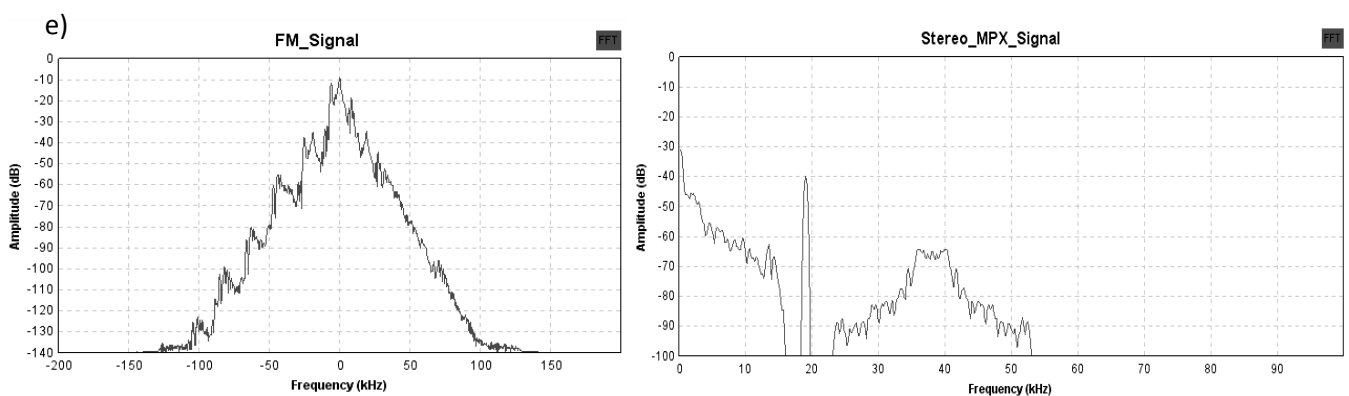
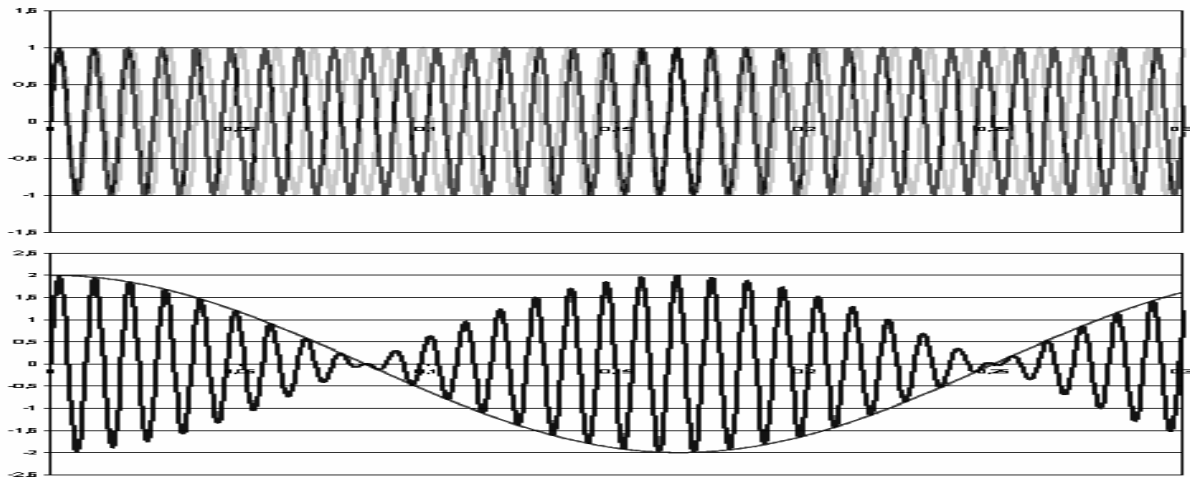


b)

$\varphi_1$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\pi$
$\varphi_2$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	0
Amplitude des Pilottons in dB	- 16 dB	- 19 dB	- 120 dB	- 16 dB	- 120 dB
Hörbare Auswirkung auf das Audiosignal	normale Lautstärke	etwas leiser	nicht mehr zu hören	normale Lautstärke	nicht mehr zu hören

c) Die Hörqualität verschlechtert sich enorm. Die nichtlinearen Verzerrungen auf dem Kanal (Frequenzverschiebung) führen zu nichtlinearen Verzerrungen am Demodulatorausgang.

d) Man hört, dass das Signal ständig leiser und wieder lauter wird. Diese Tatsache lässt sich durch die Schwebung (siehe Abbildung) erklären.



f)

$\varphi_1$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\pi$
$\varphi_2$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	0
Amplitude des Pilottons in dB	-16 dB	-16 dB	-16 dB	-16 dB	-16 dB
Hörbare Auswirkung auf das Audiosignal	normale Lautstärke	normale Lautstärke	normale Lautstärke	normale Lautstärke	Rauschen kommt durch

Für  $\varphi_1 = \pi$  und  $\varphi_2 = 0$  kann man im Spektrum beobachten, dass der Betrag der Amplitude des FM-Signals insgesamt kleiner wird. Dies ist dadurch zu erklären, weil sich in Gl. (52) einmal der Vorfaktor  $e^{j \cdot 0} = 1$  und einmal der Vorfaktor  $e^{j \cdot \pi} = -1$  ergibt. Da sich die Amplitude des Rauschsignals nicht ändert, kommt nun Rauschen durch.

(g) Man kann ein störendes Knacken im Audiosignal vernehmen (nichtlineare Verzerrungen). Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Information über das Quellsignal  $q(t)$  in der Phasenänderung der Modulationsschwingung steckt. Durch das ständige Verändern der Phase kann das Quellsignal nicht mehr störungsfrei zurückgewonnen werden.

h) Verschiebt man das Spektrum des Modulationssignals auf der Frequenzachse, kann man im demodulierten Signal einen erhöhten Gleichanteil registrieren, der aber nicht hörbar ist.

Erst wenn die Frequenzverschiebung so groß wird, dass sich die Bandbegrenzung bemerkbar macht, ist auch ein Qualitätsverlust im Ausgangssignal zu vernehmen.

i) Da die Phasenveränderung eines bestimmten Frequenzanteiles bei der Überlagerung mit dem frequenzverschobenen Spektrum stark beeinflusst und gestört wird, ergeben sich am Demodulatorausgang für  $r(t)$  starke nichtlineare Verzerrungen.

j)

	Phasenabweichung	Frequenzabweichung	Dopplerspreizung
ZSB-AM	<i>Dämpfung</i>	<i>nichtlineare Verzerrungen</i>	<i>Schwebung</i>
FM	<i>keine Beeinflussung</i>	<i>erhöhter Gleichanteil</i>	<i>nichtlineare Verzerrungen</i>

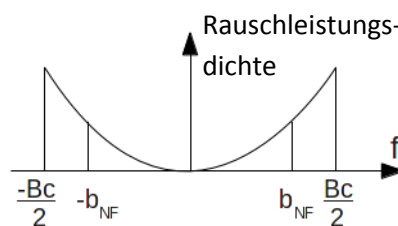
### 5.6 Einfluss von Rauschstörungen bei FM

a)

SNR_HF	SNR_NF	$\Delta Q_{FM}$
30 dB	ca. 35 dB	ca. 5 dB
20 dB	ca. 25 dB	ca. 5 dB
10 dB	ca. 15 dB	ca. 5 dB

Man kann beim Vergleich des Signal- zu Störleistungsverhältnisses am Demodulatorausgang mit dem am Übertragungskanal feststellen, dass ein Gewinn erzielt wird. Dieser ist umso größer, je größer die zur Verfügung gestellte Bandbreite und somit der Frequenzhub  $\Delta f_{max}$  ist.

b) In Bezug auf das additive Rauschen ist die Hörqualität bei Monoempfang deutlich besser als bei Stereoempfang. Dies liegt daran, dass bei FM das Rauschleistungsdichtespektrum am Ausgang des Demodulators quadratisch mit der Frequenz ansteigt (siehe Abbildung). Das bedeutet, dass die höheren Frequenzen viel stärker durch Rauschen beeinflusst werden als die niedrigen. Da bei Monoempfang nur die Frequenzen zwischen 0 und 15 kHz relevant sind, ist auch der Störeinfluss durch Rauschen in diesem Fall viel geringer.



- c) Der FM-Knick befindet sich bei ca.  $3 \text{ dB}$ . Das Schwellwertverhalten eines Delay-line basierten Demodulators ist besser als das eines konventionellen Demodulators, weil sich die Schwelle weiter links als in Abb. 10 befindet.

### 5.7 Zweiwegeempfang

- a) Ab einer Laufzeitverzögerung von  $15 \mu\text{s}$  ( $\triangleq 6$  Samples) ist eine negative Beeinflussung des Ausgangssignals  $r(t)$  hörbar.
- b) Es ergeben sich destruktive Interferenzen bei  $\pm 25 \text{ kHz}$ ,  $\pm 75 \text{ kHz}$ , ...  $\pm 25 \text{ kHz}$ ,  $\pm 75 \text{ kHz}$ , ... . Die Kohärenzbandbreite beträgt:  $B_K = \frac{1}{T_d} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 50 \text{ kHz}$ .  $B_K = \frac{1}{T_d} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 50 \text{ kHz}$
- c) Durch eine zusätzliche Phasenverschiebung eines der beiden überlagerten Signale des Modulationssignals  $r(t)$  verschiebt sich die Position der destruktiven Interferenzen auf der Frequenzachse. Der Abstand zwischen den Einbrüchen (Kohärenzbandbreite) aber bleibt unverändert. Sind die Interferenzen nicht mehr symmetrisch zur Trägerfrequenz, ergeben sich massivere Störungen, weil sich dadurch ein Einbruch relativ nahe an der Trägerfrequenz befinden kann.
- d) Besonders negativ bemerkbar macht sich eine destruktive Interferenz, wenn Sie sich in der Mitte des Modulationssignals  $r(t)$  befindet (Trägerfrequenz, beim äquivalenten Tiefpasssignal entspricht dies  $0 \text{ Hz}$ ). Dies liegt daran, dass die Bessellinien bei den niedrigeren Frequenzen am höchsten sind und somit den größten Einfluss auf die resultierende Ortskurve des Modulationssignals haben.







## Praktikum Nachrichtentechnik (LB)

# Versuch: Digitalsignalübertragung ("DSÜ")

### Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen: .....	1
1. Beurteilungskriterien von Digitalsystemen .....	3
2. Weißes Gaußsches Rauschen.....	4
3. Fehlerwahrscheinlichkeit bei Gaußschem Rauschen .....	7
4. Optimaler Binärempfänger .....	10
5. Suboptimaler Digitalempfänger .....	13
6. Digitale Amplitudenmodulationen (ASK) .....	18
7. Digitale Phasenmodulationen (PSK).....	22
8. Quadraturamplitudenmodulation (QAM).....	26
9. Versuchsdurchführung.....	28
10. Musterlösungen der Vorbereitungsaufgaben.....	38
11. Musterlösung der Versuchsdurchführung .....	41

Konzeption und Ausarbeitung: Günter Söder (2000). Die Autoren der im Praktikum verwendenden Lehrprogramme sind Hans-Peter Christoph, Rainer Gebhart, Erik Hogl, Martin Igmandy, Manfred Kugler, Christian Riedl und Günter Söder

Digitalisierung: Johannes Krönung (2013)

**Vorbemerkungen:**

Dieser Versuch behandelt die Digitalsignalübertragung. Zunächst werden die Bitfehlerwahrscheinlichkeit und die Bitfehlerquote als die wichtigsten Beurteilungskriterien von Digitalsystemen definiert. Anschließend wird die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei einem durch Gaußsches Rauschen gestörten binären oder mehrstufigen Digitalsignal berechnet und der optimale sowie ein suboptimaler Binärempfänger beschrieben. Abschließend werden die ASK (*Amplitude Shift Keying*), die PSK (*Phase Shift Keying*) und die QAM (*Quadratur-AM*) als Beispiele digitaler Trägerfrequenzsysteme behandelt.

Zur Vorbereitung sollten Sie die theoretischen Grundlagen der folgenden acht Kapitel durcharbeiten und die mit "V" gekennzeichneten Vorbereitungsfragen beantworten.

**Literaturhinweise:**

[1] Hanik N.: "Nachrichtentechnik 1 (LB)".

[2] Hanik N.: "Nachrichtentechnik 2 (LB)".

[3] Söder, G.: "Modellierung, Simulation und Optimierung von Nachrichtensystemen". Berlin: Springer-Verlag, 1993.

**Hinweise zur Programmbedienung:**

Der Versuch basiert auf dem Lehrsoftware-Programmpaket *LNTsim*. Die Dateneingabe erfolgt weitgehend menü- und mausgesteuert, wobei standardmäßig die linke Maustaste zu betätigen ist. Durch Drücken der rechten Maustaste wird dagegen meist ein Eingabefenster geöffnet, das die Parameterwerteingabe per Tastatur erlaubt.

Für die Versuchsdurchführung werden keinerlei programmiertechnische, sondern lediglich einige mathematische sowie nachrichtentechnische Grundkenntnisse vorausgesetzt. Ansonsten genügt diese Anleitung. Für den Versuch benötigen Sie die Menüpunkte

- Fehlerwahrscheinlichkeit (abgekürzt *fwk*),
- Digitale Basisbandübertragung (abgekürzt *bas*),
- Digitale Modulationsverfahren (abgekürzt *dmv*) und
- Phase Shift Keying (abgekürzt *psk*).

**Hinweise zum Lerntutorial LNTwww:**

Die Anleitung ist zur Versuchsvorbereitung ausreichend. Mehr Informationen zum Thema finden Sie in den Kapiteln 1 und 3 des LNTwww-Buches *Digitalsignalübertragung* und im Kapitel 4 des Buches *Modulationsverfahren*. Dort finden Sie auch einige passende Lernvideos (LV) und interaktive Multi-media-Elemente (IM):

- Der AWGN-Kanal (LV, 3-teilig, Dauer 6:00, 5:15 und 6:15),
- Eigenschaften des Übertragungskanal (LV, Dauer 5:50),
- Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen (IM),
- Symbolfehlerwahrscheinlichkeit von Digitalsignalen (IM),
- Zur Verdeutlichung des Matched-Filters (IM),
- Prinzip der QAM (IM),
- Augendiagramm und Augenöffnung (IM),

## 1. Beurteilungskriterien von Digitalsystemen

Die Abbildung 1 zeigt ein sehr einfaches und deshalb allgemeingültiges Modell eines digitalen Übertragungssystems. Die digitale Quelle und die digitale Senke werden durch die beiden Zufallsfolgen  $\langle q_v \rangle$  und  $\langle v_v \rangle$  beschrieben; im Allgemeinen sind diese  $M$ -stufig. Das gesamte digitale Übertragungssystem (*Digitaler Übertragungskanal*) wird als "Black Box" betrachtet und allein durch die Fehlerfolge  $\langle e_v \rangle$  charakterisiert. Bei fehlerfreier Übertragung ( $v_v = q_v$ ) gilt  $e_v = 0$ , andernfalls ( $v_v \neq q_v$ ) wird  $e_v = 1$  gesetzt.

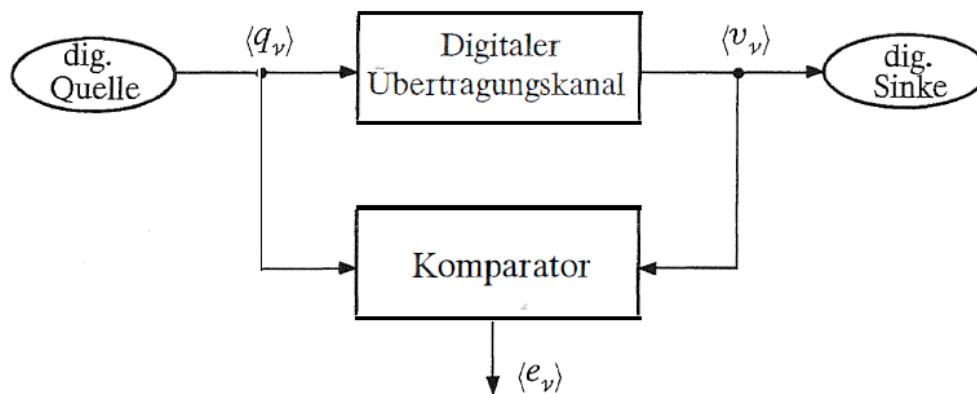


Abbildung 1: Einfachstes Modell eines digitalen Übertragungssystems

Das wichtigste Beurteilungskriterium eines jeden digitalen Übertragungssystems ist die (mittlere) *Symbolfehlerwahrscheinlichkeit* (die überstreichende Linie kennzeichnet hierbei eine *Zeitmittelung*):

$$p_S = \overline{p(v_v \neq q_v)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{v=1}^N p(v_v \neq q_v). \quad (1)$$

Der Begriff „Symbolfehlerwahrscheinlichkeit“ wird unabhängig von der Stufenzahl  $M$  des Digitalsystems verwendet. Für den Sonderfall  $M = 2$  sind die Symbolfolgen  $\langle q_v \rangle$  und  $\langle v_v \rangle$  binär ("0" oder "1"), und man nennt die Wahrscheinlichkeit gemäß (1) dann auch *Bitfehlerwahrscheinlichkeit*  $p_B$ . Diese A-priori-Größe eignet sich z.B. für die Konzipierung und Optimierung noch zu planender Systeme. Dagegen muss zur messtechnischen Erfassung der Qualität eines realisierten Digitalsystems oder bei einer Systemsimulation stets auf die *Bitfehlerquote*  $h_B$  (engl.: *Bit Error Rate*, BER) übergegangen werden. Diese ist als *relative Häufigkeit* definiert und kann durch den Vergleich von Quellen- und Sinkensymbolfolge ermittelt werden, indem man die Anzahl  $n_B^{(N)}$  der aufgetretenen ( $v_v \neq q_v$ ) durch die Anzahl  $N$  der insgesamt übertragenen Bit dividiert:

$$h_B^{(N)} = \frac{n_B^{(N)}}{N}. \quad (2)$$

Der Hochindex soll deutlich machen, dass die per Messung oder Simulation ermittelte Bitfehlerquote signifikant von  $N$  abhängt. Im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  stimmen jedoch nach den elementaren Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung  $h_B$  und  $p_B$  überein.

Bei einem realisierten oder simulierten System kann die Bitfehlerquote  $h_B$  als Schätzwert für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  herangezogen werden, deren Genauigkeit von der Anzahl  $N$  der übertragenen (simulierten) Bits abhängt.

**V1:** Bei einem gestörten Übertragungssystem treten folgende binäre Symbolfolgen auf:

$$\langle q_v \rangle = \text{OOLOL OLLLO LOOOO LOLLL}$$

$$\langle v_v \rangle = \text{OOLOL LLLLO LOOOL OOLLL}$$

- a) Wie lautet die Fehlerfolge?

$$\langle e_v \rangle =$$

- b) Welcher Wert ergibt sich für die Bitfehlerquote?

$$h_B =$$

## 2. Weißes Gaußsches Rauschen

Bei allen Übertragungssystemen treten - mehr oder minder starke - stochastische Störungen auf, z.B. aufgrund von Rauschvorgängen in den verwendeten Bauteilen. Für diesen Versuch wird vorausgesetzt, dass das Rauschsignal  $n(t)$  eine Gaußsche *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion* (WDF) besitzt:

$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_n} e^{-n^2/(2\sigma_n^2)}. \quad (3)$$

Ein Beispiel einer solchen Gaußsehen Störung ist das Thermische Rauschen. Bild 2 zeigt einen Ausschnitt des Rauschsignals  $n(t)$  und die dazugehörige WDF. Der WDF-Wert an der Stelle  $n = A$  ist definitionsgemäß gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Momentanwert der Zufallsgröße  $n$  in einem (unendlich kleinen) Intervall der Breite  $\Delta n$  um  $A$  liegt, dividiert durch  $\Delta n$ :

$$f_n(n = A) = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{p\{A - \Delta n/2 \leq n \leq A + \Delta n/2\}}{\Delta n}. \quad (4)$$

Aus dem in Abbildung 2 angegebenen beispielhaften Zeitverlauf und der dazugehörigen WDF ist zu erkennen, dass hier die häufigsten Rauschsignalanteile bei  $n \approx 0$  liegen. Große Rauschamplituden sind dagegen um Größenordnungen unwahrscheinlicher.

Der einzig freie Parameter der Gaußsehen WDF gemäß (3) ist die Streuung bzw. der Effektivwert an, der z.B. an den Wendepunkten der Gaußkurve abgelesen werden kann (siehe Abbildung 2). Die Wahrscheinlichkeit, dass das Rauschsignal  $n(t)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_0$  den Wert  $A$  überschreitet, berechnet sich mit der WDF wie folgt:

$$p(n(t_0) > A) = \int_A^{\infty} f_n(n) dn = Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right). \quad (5)$$

Die linke Gleichung gilt dabei allgemein, die rechte nur bei Gaußscher WDF gemäß (3).

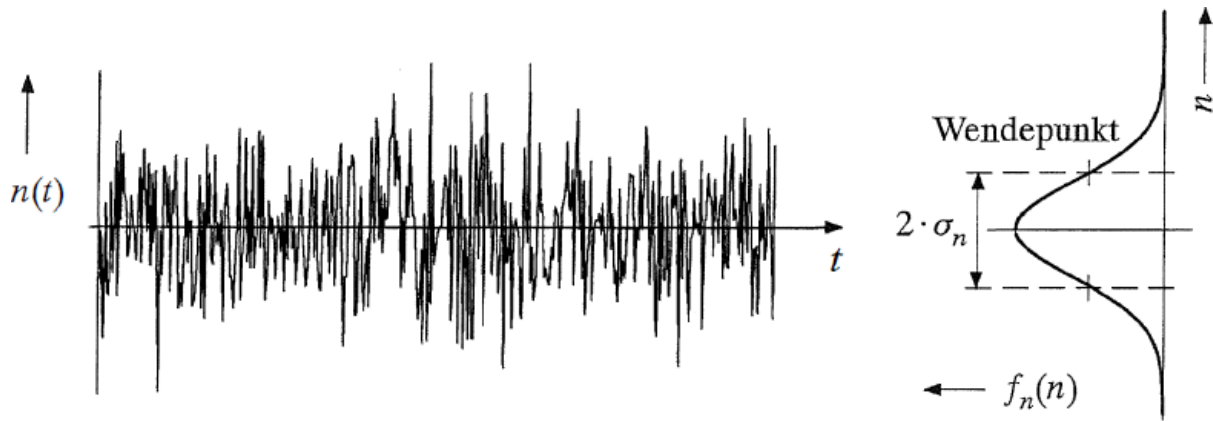


Abbildung 2: Beispiele eines Gaußschen Raussignals  $n(t)$  und zugehörige WDF  $f_n(n)$

Die Funktion  $Q(x)$  bezeichnet man als das *komplementäre Gaußsche Fehlerintegral*:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du. \tag{6}$$

Das Fehlerintegral  $Q(x)$  ist hier als bestimmtes Integral definiert; es kann analytisch nicht gelöst werden. In Abbildung 3 ist  $Q(x)$  doppelt-logarithmisch dargestellt (Abszisse in dB). Im Anhang finden Sie eine Tabelle dieser Funktion.

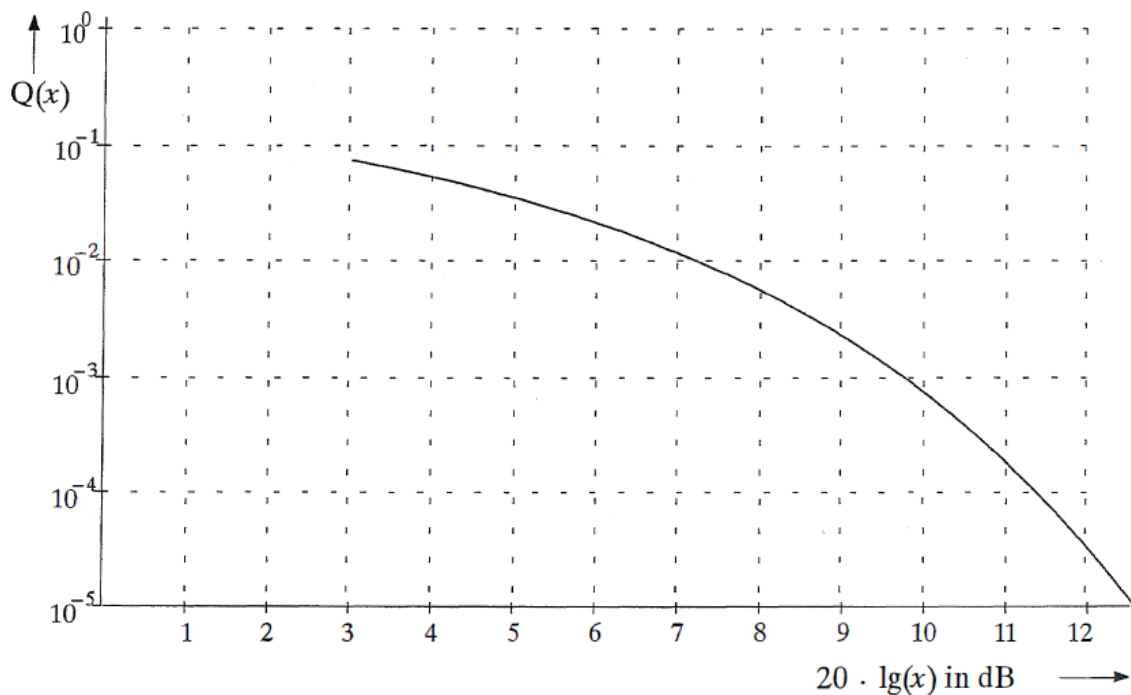


Abbildung 3: Die Funktion  $Q(x)$  in doppelt-logarithmischer Darstellung

Für die Unterschreitungswahrscheinlichkeit erhält man aufgrund der WDF-Symmetrie den gleichen Wert, da stets  $Q(-x) = 1 - Q(x)$  gilt:

$$p(n(t_0) < -A) = \int_{-\infty}^{-A} f_n(n) dn = Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right). \quad (7)$$

Eine weitere wichtige Beschreibungsgröße eines (Gaußschen) Rauschprozesses ist das *Leistungsdichtespektrum* (LDS)  $\Phi_n(f)$ , das Aussagen über die statistischen Bindungen innerhalb des Signals  $n(t)$  liefert. Das Integral über  $\Phi_n(f)$ , ergibt die Rauschleistung  $N$ .

Kommen alle Spektralanteile im Rauschsignal  $n(t)$  gleichermaßen vor (d. h. es gilt  $\Phi_n(f) = \text{const.}$ ), so spricht man von *weißem Rauschen*. Ein solcher Rauschprozess besitzt allerdings eine unendlich große Leistung, d. h. es gilt:  $N \rightarrow \infty$ . Eine endliche Leistung ergibt sich erst durch eine Bandbegrenzung, z. B. auf die Bandbreite  $B$  (siehe Abbildung 4).

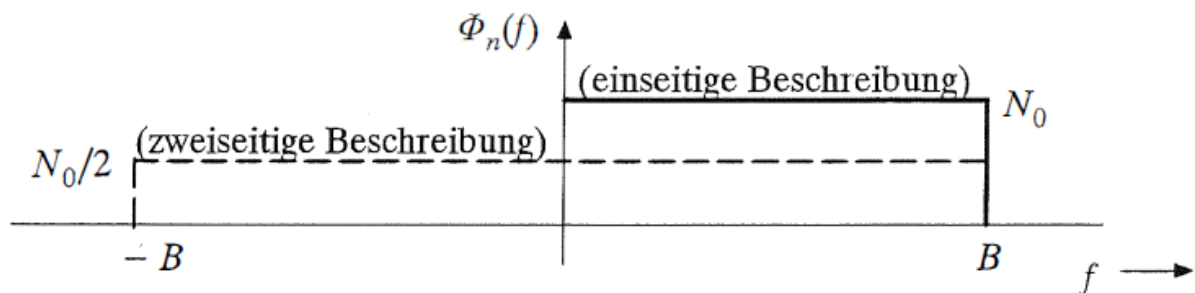


Abbildung 4: Leistungsdichtespektrum  $\Phi_n(f)$ , bei bandbegrenztem weißem Rauschen

Wie in der Nachrichtentechnik allgemein üblich, benutzen wir hier die zweiseitige (mathematische) Beschreibung:  $\Phi_n(f) = N_0/2$  für  $|f| \leq B$ . Somit ist die Rauschleistung

$$N = \frac{N_0}{2} \cdot 2B = N_0 \cdot B. \quad (8)$$

Auch bei einseitiger (physikalischer) Darstellung, d. h.  $\Phi_n(f) = N_0$  im Bereich  $0 \leq f \leq B$ , ergibt sich für die Rauschleistung der gleiche Wert  $N_0 \cdot B$ .

Bei thermischem Rauschen – manchmal auch Widerstandsrauschen genannt – ist die Rauschleistungsdichte  $N_0$  mit der Boltzmann-Konstante  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Ws/K, der absoluten Temperatur  $\theta$  (in K) und der Rauschzahl  $F \geq 1$  wie folgt gegeben:

$$N_0 = F \cdot k_B \cdot \theta. \quad (9)$$

Diese Größe hat die Einheit „W/Hz“ und die Rauschleistung entsprechend die Einheit „W“. Daraus ergibt sich der Rauscheffektivwert mit dem Widerstand  $R$  zu  $\sigma_n = \sqrt{N \cdot R}$ . Um bei nachfolgenden Berechnungen unabhängig vom Widerstandswert zu werden ( $\sigma_n = \sqrt{N}$ ), ist es in der Nachrichtentechnik allgemein üblich,  $N_0$  und  $N$  auf den Widerstandswert  $1 \Omega$  zu beziehen. Anstelle von (9) ist dann die Gleichung

$$N_0 = F \cdot R \cdot k_B \cdot \theta \quad (10)$$

zu verwenden.  $N_0$  und  $N$  besitzen dann die Einheiten „V<sup>2</sup>/Hz“ bzw. „V<sup>2</sup>“.

**V2:** Ein Empfänger mit Eingangswiderstand  $75\Omega$  wird durch thermisches Rauschen mit der Rauschtemperatur  $17^\circ\text{C}$  beeinträchtigt. Die Rauschzahl des Empfängers sei  $F = 5$ .

- Berechnen Sie die Rauschleistungsdichte in „W/Hz“ und in „V<sup>2</sup>/Hz“.
- Wie groß ist in diesem Fall die Rauschleistung  $N$  und der Rauscheffektivwert an, wenn die einseitige (physikalische) Rauschbandbreite  $B = 6\text{ MHz}$  beträgt?

### 3. Fehlerwahrscheinlichkeit bei Gaußischem Rauschen

Nun wird der Einfluss von Störungen auf die Qualität (Fehlerwahrscheinlichkeit) der Digitalsignalübertragung untersucht. Dazu betrachten wir das Detektionssignal  $d(t)$  im Modell von Abbildung 5, das sich additiv aus einem digitalen,  $M$ -stufigen Nutzanteil  $d_S(t)$  und einem Rauschanteil  $d_N(t)$  zusammensetzt. Über die Entstehung des Signals  $d(t)$  sollen erst im Kapitel 4 genauere Aussagen gemacht werden.

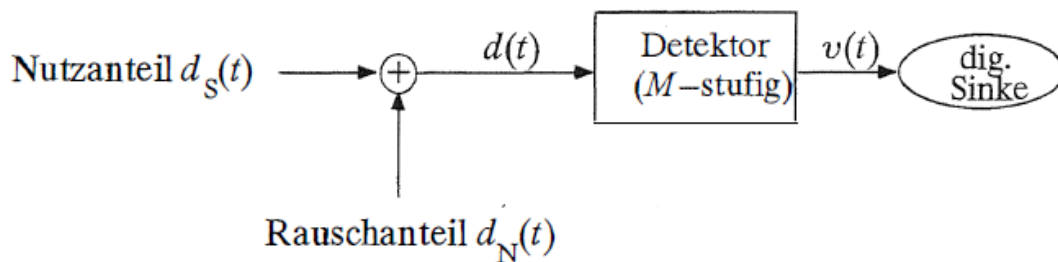


Abbildung 5: Detektion eines durch Gaußisches Rauschen gestörten Digitalsignals

Wir setzen für das Folgende voraus, dass der stochastische Signalanteil  $d_N(t)$  mittelwertfrei, signalunabhängig und gaußverteilt mit Streuung  $\sigma_d$  sei. Analog zu (3) gelte:

$$f_{dN}(d_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} e^{-d_N^2/(2\sigma_d^2)}. \quad (11)$$

Abbildung 6 zeigt ein beispielhaftes Ausschnitt des Signals  $d(t)$  für die Stufenzahl  $M = 2$ . Dieses Signal wird einer ( $M$ -stufigen) Schwellenwertentscheidung unterzogen, so dass das Sinkensignal  $v(t)$  die gleiche Stufenzahl  $M$  wie das Nutzsignal  $d_S(t)$  am Eingang aufweist.

Der stochastische Signalanteil  $d_N(t)$  bewirkt fehlerhafte Entscheidungen, so dass die (mittlere) Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$  endlich ist. Sind die gesendeten Symbole statistisch voneinander unabhängig, so gilt mit der Stufenzahl  $M$  und den Auftretswahrscheinlichkeiten  $p_i$  der einzelnen Symbole:

$$p_S = \sum_{i=1}^M p_i \cdot p_{Si}. \quad (12)$$

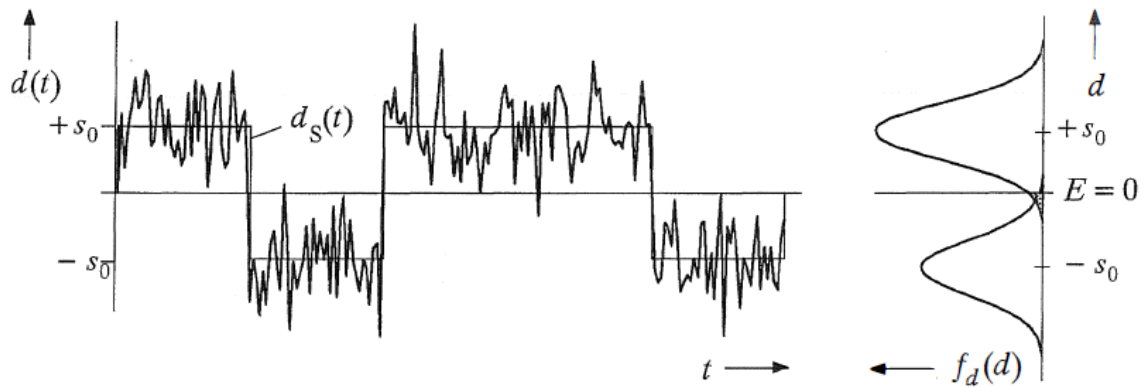


Abbildung 6: Detektionssignal  $d(t) = d_S(t) + d_N(t)$  eines durch Gaußsches Rauschen (mit  $\sigma_d = \frac{s_0}{2}$ ) gestörten Binärsignals und zugehörige WDF  $f_d(d)$

Diese Symbolfehlerwahrscheinlichkeit wird hier als Scharmittelwert berechnet.  $p_{Si}$  bezeichnet die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das  $i$ -te Symbol des Symbolvorrats aufgrund des Rauschens und der anschließenden Entscheidung in ein anderes Symbol verfälscht wird.

Wir betrachten nun den Sonderfall  $M = 2$  (binäre bipolare Übertragung) gemäß Abbildung 6. Die möglichen Amplitudenstufen des rechteckförmigen Nutzsignals seien  $\pm s_0$ . Weiter wird für dieses Beispiel vorausgesetzt, dass der Amplitudenwert  $-s_0$  (Wahrscheinlichkeit  $p_1$ ) unwahrscheinlicher ist als der Amplitudenwert  $+s_0$  (Wahrscheinlichkeit  $p_2$ ).

Sind Nutz- und Störanteil statistisch voneinander unabhängig, was bei sehr vielen Anwendungen zutrifft, so ergibt sich für die WDF des gesamten Detektionssignals  $d(t)$ :

$$f_d(d) = \frac{P_1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} \cdot \exp\left(-\frac{(d + s_0)^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\right) + \frac{P_2}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} \cdot \exp\left(-\frac{(d - s_0)^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\right). \quad (13)$$

Die Herleitung dieser Beziehung findet sich beispielsweise in [3]. In Abbildung 6 ist rechts das Ergebnis verdeutlicht. Die WDF  $f_d(d)$  besteht demnach aus der Summe zweier um  $-s_0$  (erster Term) bzw.  $+s_0$  (zweiter Term) verschobener Gaußfunktionen, die mit der Auftretswahrscheinlichkeit  $p_1$  bzw.  $p_2$  der beiden möglichen Nutzamplitudenwerte gewichtet sind.

Wird das Signal  $d(t)$  einem Schwellenwertentscheider mit der Entscheiderschwelle  $E = 0$  zugeführt, so erhält man für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$P_B = P_1 \cdot P_{S1} + P_2 \cdot P_{S2} = P_1 \cdot p(d_N(T_D) > +s_0) + P_2 \cdot p(d_N(T_D) < -s_0). \quad (14)$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass beim Binärsystem die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$  identisch mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  ist.

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $p_{S1}$ , dass der Rauschanteil  $d_N(t)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ , z.B. zum Detektionszeitpunkt  $T_d$ , den Werts  $s_0$  überschreitet, kann mit (5) und dem komplementären Gaußsehen Fehlerintegral  $Q(x)$  gemäß (6) berechnet werden:

$$p_{S1} = p(d_N(T_D) > s_0) = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right). \quad (15)$$



- Für die Unterschreitungswahrscheinlichkeit erhält man mit (7) aufgrund der Symmetrie der WDF den gleichen Wert:

$$p_{S2} = P(d_N(T_D) < -s_0) = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right). \quad (16)$$

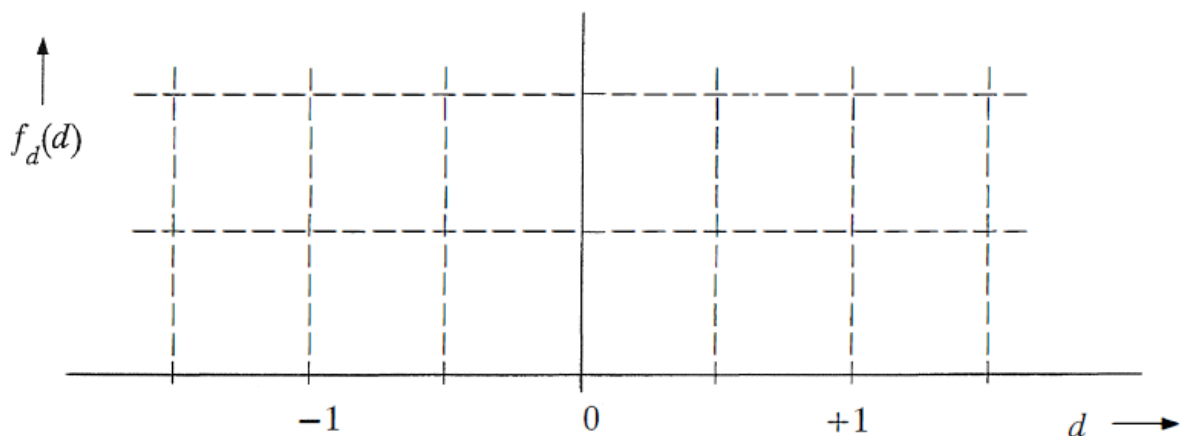
Setzt man diese Ergebnisse in (14) ein und berücksichtigt man außerdem die stets gültige Beziehung  $p_1 + p_2 = 1$ , so ergibt sich für die (mittlere) Bitfehlerwahrscheinlichkeit eines durch Gaußsches Rauschen gestörten bipolaren Binärsignals

$$p_B = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right), \quad (17)$$

und zwar unabhängig von den Auftretswahrscheinlichkeiten  $p_1$  bzw.  $p_2$ . Dieser Verlauf ist in der Abbildung 3 doppelt-logarithmisch dargestellt.

**V3:** Ein ternäres Digitalsignal (d.h.:  $M = 3$ ) mit den (normierten) Amplitudenstufen  $-1$ ,  $0$  und  $+1$  und den Auftretswahrscheinlichkeiten  $p(-1) = p(+1) = 0.25$  und  $p(0) = 0.5$  wird durch einen Gaußschen Rauschanteil mit dem (normierten) Effektivwert  $\sigma_d = 0.2$  additiv überlagert. Die beiden (normierten) Entscherschwelien liegen symmetrisch bei  $E_1 = -0.5$  und  $E_2 = +0.5$ .

a) Skizzieren Sie die WDF  $f_d(d)$  des Summensignals  $d(t)$  in das nachfolgende Diagramm. Beschriften Sie die Ordinate und zeichnen Sie die Schwellenwerte  $E_1$  und  $E_2$  ein. Schraffieren Sie den für  $p_s$  charakteristischen Flächenanteil.



b) Berechnen Sie die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_s$  dieses Ternärsignals.

c) Welche der drei Amplitudenstufen wird mit der größten Wahrscheinlichkeit gestört? Kann durch eine andere Wahl der Schwellenwerte  $E_1$  und  $E_2$  die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$  verringert werden? (Begründung)

## 4. Optimaler Binärempfänger

Wir betrachten das in Abbildung 7 skizzierte digitale Übertragungssystem. Das Sendesignal  $s(t)$  sei binär ( $M = 2$ ), bipolar ( $\pm s_0$ ) und rechteckförmig, der Kanal dämpfungs- und verzerrungsfrei ( $H_K(f) = 1$ ). Das weiße Gaußsche Rauschsignal  $n(t)$  mit der (zweiseitigen) Leistungsdichte  $\Phi_n(f) = N_0/2$  stellt somit die einzige Beeinträchtigung des Digitalsignals dar. Einen solchen Kanal nennt man einen AWGN-Kanal (*Additive White Gaussian Noise*).

Ohne geeignete Maßnahme am Empfänger ergäbe sich wegen der unendlich großen Rauschleistung die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B = 1/2$ . Um die Rauschleistung vor dem Entscheider zu begrenzen, ist am Empfängereingang ein Filter erforderlich. Das Eingangssignal dieses Filters sei  $r(t)$ , das Ausgangssignal wird mit  $d(t)$  bezeichnet. Dieses setzt sich additiv aus dem Nutzanteil  $d_S(t)$  und dem Rauschanteil  $d_N(t)$  zusammen:

$$d(t) = d_S(t) + d_N(t). \quad (18)$$

Der erste Anteil rührt von  $s(t)$  her, der zweite ist auf  $n(t)$  zurückzuführen. Da  $n(t)$  als gaußverteilt vorausgesetzt wurde, ist  $d_N(t)$  dann ebenfalls gaußverteilt mit einer WDF gemäß (11). Die Streuung dieser Gaußsehen WDF ist  $\sigma_d$ . Für die Rauschleistung gilt:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 df. \quad (19)$$

Das beste Ergebnis hinsichtlich des erreichbaren Signal-zu-Rauschverhältnisses liefert das an den rechteckförmigen Sendeimpuls  $g_s(t)$  der Amplitude  $s_0$  und der Bitdauer  $T$  angepasste Matched-Filter mit dem Frequenzgang.

$$H_E(f) = H_{MF}(f) = \text{si}(\pi \cdot f \cdot T). \quad (20)$$

Damit gilt für die dazugehörige (akausale) Impulsantwort  $h_{MF}(t) \leftrightarrow H_{MF}(f)$ :

$$h_{MF}(t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (21)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass der Schwellenwertentscheider zum Detektionszeitpunkt  $T_D = 0$  entscheidet. Die Gleichung (21) bedeutet: Die optimale Impulsantwort des Filters ist formgleich mit dem rechteckförmigen Sendegrundimpuls; sie kann zum Beispiel mit Hilfe eines Integrators (über eine Symboldauer  $T$ ) realisiert werden.

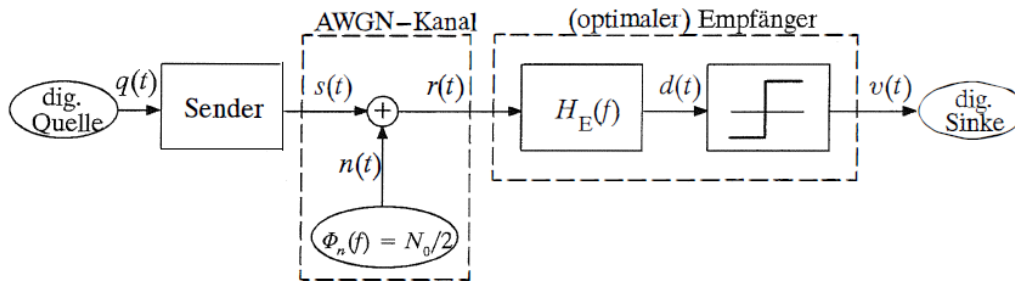


Abbildung 7: Betrachtetes Übertragungssystem mit rechteckförmigen Sendepulsen AWGN-Kanal, Empfangsfilter und Schwellenwertentscheider

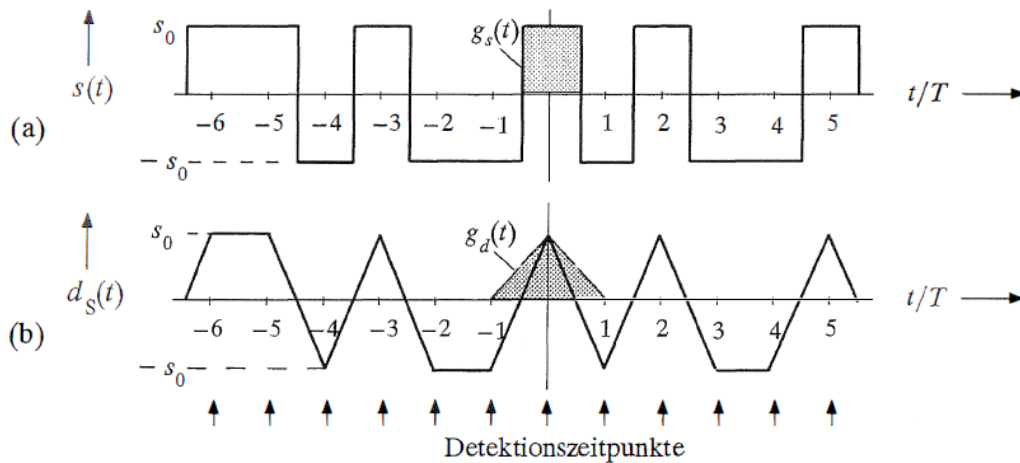


Abbildung 8: Ausschnitte aus dem Sendesignal (s) und den Detektionsnutzsignal (b) beim optimalen Binärsystem Störungen sind hier berücksichtigt:  $n(t) = 0$

Wird ein einzelner Rechteckimpuls  $g_s(t)$  mit Symboldauer  $T$  und Amplitude  $s_0$  gesendet und kann das Rauschen vernachlässigt werden, so ist das am Schwellenwertentscheider anliegende Signal ein Dreieckimpuls  $g_d(t)$  mit gleicher Amplitude  $s_0$ , aber mit der absoluten Dauer  $2 \cdot T$  anstelle von  $T$ :

$$g_d(t) = g_s(t) * h_{MF}(t) = \begin{cases} s_0 \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) & \text{für } |t| \leq T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (22)$$

In Abbildung 8 sind die Grundimpulse  $g_s(t)$  und  $g_d(t)$  grau dargestellt.

Die durchgezogene Kurve in Abbildung 8(b) zeigt einen Ausschnitt des Detektionsnutzsignals  $d_s(t)$  für das oben dargestellte rechteckförmige Sendesignal  $s(t)$ . Dieses setzt sich aus Geradenstücken zusammen. Mit den Amplitudenkoeffizienten  $a_v \in \{-1, +1\}$  gilt:

$$s(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v \cdot g_s(t - v \cdot T), \quad (23)$$

$$d_s(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v \cdot g_d(t - v \cdot T). \quad (24)$$

Zu allen Detektionszeitpunkten gilt:  $d_S(vT) = \pm s_0$ . Nach Abschnitt 3 gilt somit auch hier für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right). \quad (25)$$

Die Detektionsstörleistung ergibt sich mit (19) unter Berücksichtigung von (20) wie folgt:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{\text{MF}}(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi fT) df = \frac{N_0}{2T}. \quad (26)$$

Setzt man dieses Ergebnis in (25) ein, so erhält man:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot s_0^2 \cdot T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right). \quad (27)$$

Hierbei bezeichnet  $E_B = s_0^2 \cdot T$  die Energie des NRZ-Rechtecksendeimpulses („Energie pro Bit“). Diese für die gesamte digitale Übertragungstechnik wichtige Gleichung gilt für ein bipolares binäres Basisbandsystem mit AWGN-Kanal, Matched-Filter und optimaler Entscheidungsschwelle. Der Einfluss einer Schwellendrift wird im Versuch **D6** behandelt. Die linke Gleichung in (26) ist nur bei rechteckförmigen Sendepulsen anwendbar. Dagegen gilt die rechte Gleichung auch für eine andere Impulsform, wenn ein entsprechend anderes Matched-Filter ebenfalls berücksichtigt wird.

**V4:** Es wird die Übertragung eines Binärsignals mit gleichwahrscheinlichen Amplitudenwerten  $\pm s_0$  über den AWGN-Kanal, gekennzeichnet durch die Rauschleistungsdichte  $N_0$ , betrachtet. Es gelte  $N_0 = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{V}^2/\text{Hz}$ ; die Bitrate betrage 2 Mbit/s.

- a) Wie groß ist die Symboldauer  $T$ ? Welcher „Energie pro Bit“ ergibt sich mit  $s_0 = 2\text{V}$ ?
  
- b) Wie groß ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$ , wenn der in diesem Abschnitt beschriebene optimale Empfänger vorausgesetzt wird?
  
- c) Wie ändert sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit, wenn man die Sendeamplitude halbiert?

d) Welche Werte ergeben sich für die Abtastwert  $d_S(vT)$  des Detektionsnutzsignals? Wie groß ist der Rauscheffektivwert  $\sigma_d$ ?

e) Geben Sie  $p_B$  auch in der Form von Gl. (25) an.

## 5. Suboptimaler Digitalempfänger

In Kapitel 4 wurde der bestmögliche Empfänger – bestehend aus Matched-Filter und Schwellenwertentscheider – für den bestmöglichen Kanal (AWGN) beschrieben. Damit ergibt sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten  $p_B$  gemäß (27). Bei einem verzerrenden Kanal oder einem anders gearteten Empfänger kann  $p_B$  auch deutlich größer sein.

Im Versuch wird häufiger anstelle des Matched-Filters ein Gauß-Tiefpass mit

$$H_E(f) = e^{-\pi \left(\frac{f}{2f_E}\right)^2} \quad (28)$$

verwendet. Mit der Grenzfrequenz  $f_E$  erhält man so für die Detektionsstörleistung:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 df = \frac{N_0}{\sqrt{2}} \cdot f_E \quad (29)$$

Je kleiner die Grenzfrequenz  $f_E$  gewählt wird, umso kleiner ist auch die Detektionsstörleistung  $\sigma_d^2$ . Bei Verwendung dieses suboptimalen, gaußförmigen Empfangsfilters  $H_E(f)$  kommt es aber zu sogenannten *Impulsinterferenzen* (englisch: *Intersymbol Interference*). Das bedeutet, dass die Detektion eines Symbols auch von den Nachbarsymbolen beeinflusst wird.

Die Abbildung 9 zeigt einen Ausschnitt aus dem Detektionssignal  $d(t)$  für ein zufälliges Sendesignal  $s(t)$ . Zusätzlich eingezeichnet ist das Detektionsnutzsignal  $d_S(t)$ . Es ist zu erkennen, dass auch schon ohne Berücksichtigung des Rauschanteils  $d_N(t)$  die Abstände zu der Schwelle  $E = 0$  bei den verschiedenen Detektionszeitpunkten unterschiedlich groß sind.

Zur Untersuchung dieses Systems eignet sich das sogenannte Augendiagramm (englisch: *Eye Pattern*). Dieses ist die Summe aller übereinander gezeichneten Ausschnitte eines (eventuell verzerrten und gestörten) Digitalsignals, deren Dauer ein ganzzahliges Vielfaches der Symboldauer  $T$  beträgt. Dieses Diagramm hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einem menschlichen Auge, was zu seiner Namensgebung geführt hat. Es kann zum Beispiel auf einem Oszilloskop dargestellt werden, das mit dem Taktsignal getriggert wird.

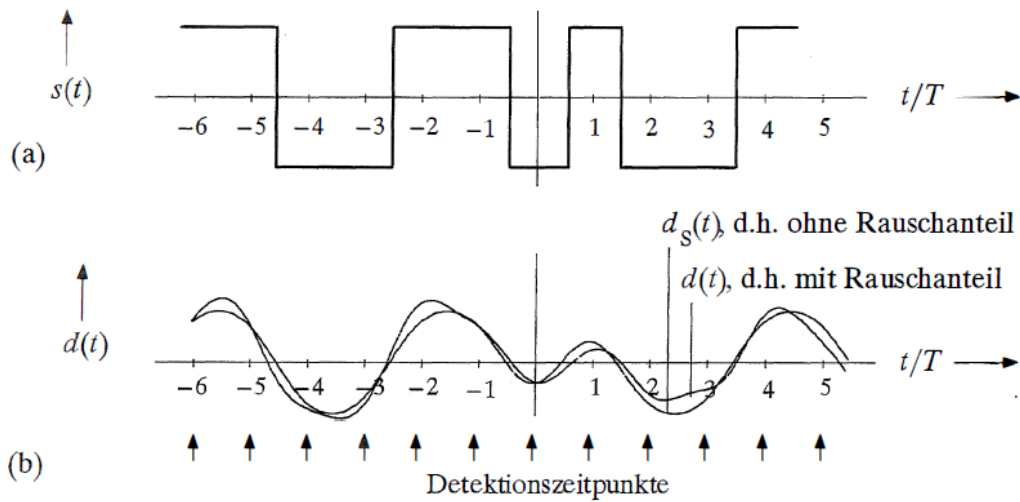


Abbildung 9: Ausschnitte aus dem Sendesignal (a) und dem Detektionsnutzsignal (b) bei gaußförmigem Empfangsfilter mit der Grenzfrequenz  $f_E \cdot T = 0,4$

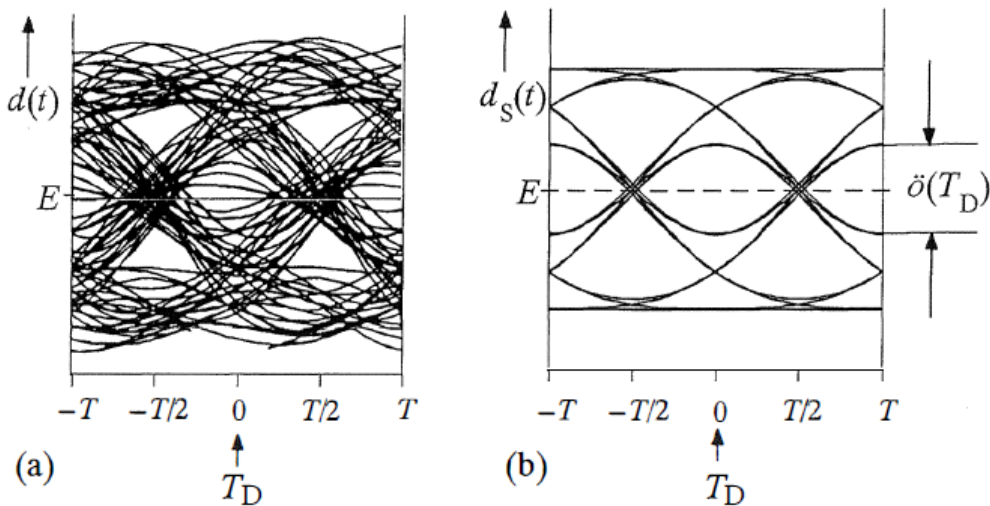


Abbildung 10: Augendiagramm mit (a) und ohne (b) Berücksichtigung des Rauschens

In Abbildung 10 (a) und (b) sind zwei Augendiagramme für das Signal von Abbildung 9 dargestellt (Gauß-Empfangsfilter, Grenzfrequenz  $f_E \cdot T = 0,4$ ). Das Augendiagramm mit Störungen basiert auf dem Signal  $d(t)$ , während für Bild (b) nur der Nutzanteil  $d_S(t)$  berücksichtigt ist, nicht aber der additive Rauschterm  $d_N(t)$ . Dieses Nutzsignal kann natürlich nicht am Oszilloskop dargestellt, sondern nur mittels einer Rechnersimulation erzeugt werden.

Zur Bestimmung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  ist das Augendiagramm ohne Störungen besser geeignet. Wie aus Abbildung 10(b) ersichtlich ist, sind darin nur endlich viele Augenlinien zu unterscheiden. Diese Eigenschaft kann bei der Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit ausgenutzt werden: Dazu bestimmt man für jede Augenlinie den Abstand  $|d_S(T_D)|$  zur Entscheider-schwelle  $E = 0$  zum Detektionszeitpunkt  $T_D$ , daraus zusammen mit der Streuung  $\sigma_d$  des Störanteils  $d_N(t)$  und der im Anhang tabellierten komplementären Gaußsehen Fehlerfunktion  $Q(x)$  die zugehörige Überschreitungswahrscheinlichkeit  $Q(d_S(T_D) / \sigma_d)$  und mittelt schließlich über alle Augenlinien.

In der Praxis kann die Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  sehr aufwändig sein. Man verwendet deshalb oft als Näherung die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit („worst case“), für deren

Berechnung nur die jeweils ungünstigsten Symbolfolgen berücksichtigt werden. Mit der in Bild (b) eingezeichneten vertikalen Augenöffnung  $\ddot{o}(T_D)$  zum Detektionszeitpunkt gilt unter der Voraussetzung von gaußverteilten Störungen:

$$p_U = Q\left(\frac{\ddot{o}(T_D)/2}{\sigma_d}\right). \quad (30)$$

Diese Näherung  $p_U$  geht davon aus, dass alle Folgen mit der gleichen, nämlich der maximale Fehlerwahrscheinlichkeit verfälscht werden, so dass  $p_U$  eine obere Schranke für die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  darstellt:  $p_U \geq p_B$ .

Bei redundanzfreien Systemen wird das Augendiagramm (ohne Störungen) nur durch den Detektionsgrundimpuls  $g_d(t) = g_s(t) \cdot h_E(t)$  bestimmt. Je breiter  $g_d(t)$  ist, desto mehr Linien sind im Augendiagramm zu unterscheiden und desto mehr Nachbarimpulse beeinflussen die Symboldetektion. Diese Beeinflussung durch die anklingenden Flanken der nachfolgenden Impulse ("Vorläufer") und/oder die abklingenden Flanken der vorangegangenen Impulse ("Nachläufer") bezeichnet man als Impulsinterferenzen.

Im Folgenden betrachten wir das Augendiagramm zum Detektionszeitpunkt  $T_D$  und setzen voraus, dass der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$  genau  $v$  Vorläufer und  $n$  Nachläufer aufweist. Darunter versteht man, dass von den Abtastwerten zu den äquidistanten Detektionszeitpunkten nur die  $g_d(T_D - v \cdot T), \dots, g_d(T_D - T), g_d(T_D), g_d(T_D + T), \dots, g_d(T_D + n \cdot T)$  zu berücksichtigen sind, während alle anderen Abtastwerte vernachlässigt werden können. Bei den in Abbildung 10 dargestellten Augendiagrammen gilt beispielsweise  $n = v = 1$ .

Die vertikale Augenöffnung gibt den Abstand der beiden inneren Augenlinien an und kann bei redundanzfreien bipolaren Binärsystemen mit obiger Voraussetzung wie folgt berechnet werden:

$$\ddot{o}(T_D) = 2 \cdot \left[ g_d(T_D) - \sum_{\nu=1}^n |g_d(T_D + \nu \cdot T)| - \sum_{\nu=1}^v |g_d(T_D - \nu \cdot T)| \right]. \quad (31)$$

Die Betragsbildung ist notwendig, da für die Berechnung der Augenöffnung stets vom ungünstigsten Fall ausgegangen werden muss. Das bedeutet: Ist der erste Nachläufer positiv, so wird die Detektion des Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu$  durch  $a_{\nu-1} \neq a_\nu$  beeinträchtigt. Dagegen wirkt sich bei gleichem Grundimpuls ein Koeffizient  $a_{\nu-1} = a_\nu$  positiv aus. Das heißt, dass hier die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung des Koeffizienten  $a_\nu$  durch die Impulsinterferenzen sogar kleiner wird. Entsprechendes gilt für die Vorläufer.

Alle anderen Symbole, die nicht zu inneren Augenlinien gehören, haben eine (unter Umständen sehr viel) kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als  $p_U$ , so dass die tatsächliche, mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  bei Vorhandensein von Impulsinterferenzen stets kleiner als  $p_U$  ist. Dagegen sind bei impulsinterferenzfreien Systemen, die auch Nyquist-Systeme genannt werden, die beiden Summenterme in (31) identisch Null und es gilt  $p_U = p_B$ . Häufig wird anstelle der ungünstigsten Fehlerwahrscheinlichkeit  $p_U$  das ungünstigste Signalstörleistungsverhältnis

$$\rho_U = \left(\frac{\ddot{o}(T_D)/2}{\sigma_d}\right)^2 \quad (32)$$

als Optimierungskriterium herangezogen. Zwischen beiden Größen besteht ein fester Zusammenhang über die Gaußsche Fehlerfunktion:

$$p_U = Q(\sqrt{\rho_U}). \tag{33}$$

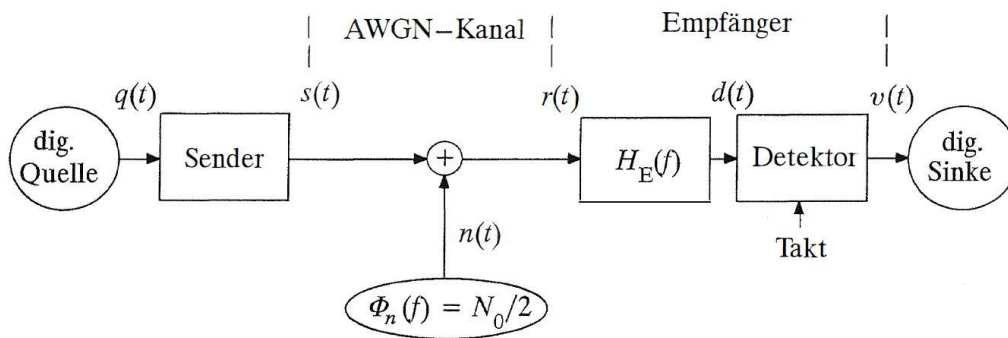
Beispielsweise gehört zu  $p_U = 10^{-3}$  der Signalrauschabstand  $10 \cdot \lg(\rho_U) \approx 9.75$  dB.  $\rho_U$  ist eine untere Schranke für das mittlere Signalstörleistungsverhältnis am Entscheider:

$$\rho_d = [Q^{-1}(p_B)]^2. \tag{34}$$

Diese Größe ist zwar bei einem System mit Impulsinterferenzen - im Gegensatz zu einem Nyquistsystem - nicht messbar und physikalisch interpretierbar, für einen Systemvergleich aber trotzdem sehr hilfreich (siehe Versuche **D3** bis **D7**).

Lineare Verzerrungen des Kanals können durch den Frequenzgang  $H_K(f) \leftrightarrow h_K(t)$  beschrieben werden und es gilt für das Empfangssignal (Abbildung 7):  $r(t) = s(t) * h_K(t) + n(t)$ . Die (ungünstigste) Bitfehlerwahrscheinlichkeit kann aber auch in diesem Fall mit den Gleichungen (30) ... (33) berechnet werden, allerdings ist für den Detektionsgrundimpuls nun einzusetzen:  $g_d(t) = g_s(t) * h_K(t) * h_E(t)$ .

**V5:** Betrachtet wird wie in Vorbereitungsfrage V4 das folgende Blockschaltbild:



Das Sendesignal  $s(t)$  sei binär, bipolar und rechteckförmig mit der Amplitude  $s_0 = 2$  V und der Bitdauer  $T = 500$  ns (dh. Bitrate ist  $R = 2$  Mbit/s), die Rauschleistungsdichte des AWGN-Kanals betrage  $N_0 = 2.5 \cdot 10^{-7}$  V<sup>2</sup>/Hz (bezogen auf 1 Ω). Für den Detektor wird stets der Schwellenwert  $E = 0$  vorausgesetzt. Die Impulsantwort des (akausalen) Empfangsfilters sei

$$h_E(t) = \begin{cases} 1/T_E & \text{für } |t| \leq T_E/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

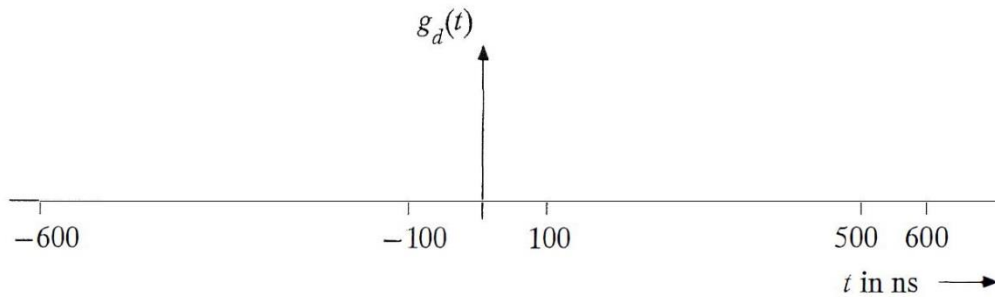
- a) Wie groß ist der Effektivwert des Rauschanteils  $d_N(t)$  des Detektionssignals abhängig vom Parameter  $T_E$ ? Berücksichtigen Sie hierbei wieder die Beziehung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi \cdot x) \, dx = 1.$$

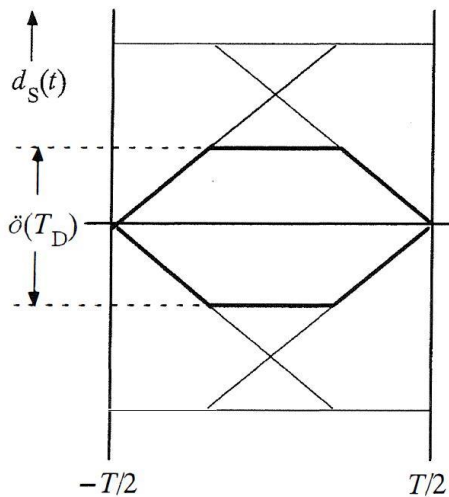
- b) Geben Sie den optimalen Wert  $T_E$  an. Welche Form hat in diesem Fall der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$  und wie groß sind  $\sigma_d$  und die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$ ?



- c) Für die Punkte c) bis e) sei  $T_E = 700$  ns. Wie groß ist nun der Rauscheffektivwert  $\sigma_d$ ? Interpretieren Sie dieses Ergebnis.
- d) Berechnen und skizzieren Sie den Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$ . Welche Impulswerte ergeben sich für  $t = 0$  sowie zu den Zeitpunkten  $\pm T$ ?



- e) Nachfolgend sehen Sie das unverrauschte Augendiagramm für den Impuls gemäß d). Fett umrandet sind die inneren Augenlinien. Interpretieren Sie dieses Bild. Wie groß ist die vertikale Augenöffnung ( $T_D = 0$ ) und die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_U$ ?



- f) Nun gelte  $T_E = 300$  ns. Wie breit ist in diesem Fall der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$  und wie groß ist  $g_d(0)$ ? Gibt es auch hier Impulsinterferenzen? Berechnen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  und vergleichen Sie diese mit dem optimalen System. Interpretation.

## 6. Digitale Amplitudenmodulationen (ASK)

Eine Möglichkeit der Digitalsignalübertragung über einen Bandpasskanal bietet die digitale Amplitudenmodulation, oft auch *Amplitude Shift Keying* (ASK) genannt. Diese stellt das digitale Analogon zur Zweiseitenhand-Amplitudenmodulation dar.

Abbildung 11 zeigt das entsprechende Blockschaltbild des ASK-Systems. Dieses kann wie das Basisbandsystem (Abbildung 7) in Sender, Kanal und Empfänger eingeteilt werden. Sender und Empfänger beinhalten hier jedoch zusätzlich eine Modulations- und eine Demodulationseinrichtung.

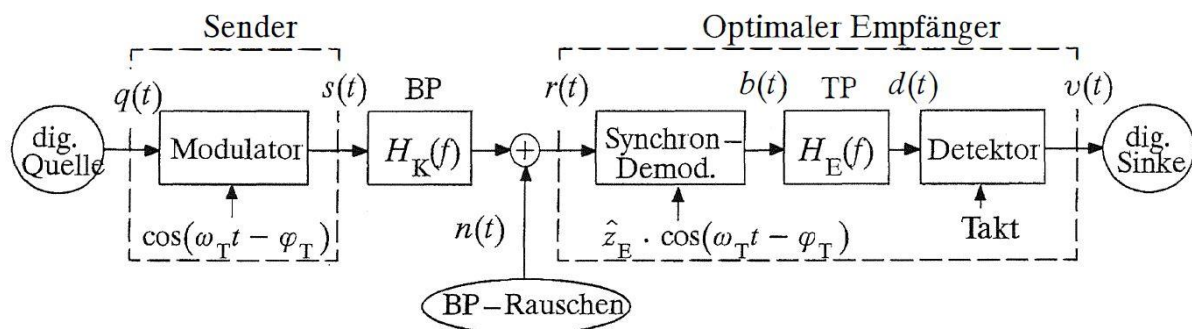


Abbildung 11: Blockschaltbild des ASK-Übertragungssystems

Das Quellensignal  $q(t)$  sei redundanzfrei, binär und unipolar (siehe Abbildung 12(a)). Im nachfolgenden Modulator wird dieses Signal mit der harmonischen Schwingung  $z(t)$  der Amplitude  $\hat{z} = 1$ , der Frequenz  $f_T$  und der Phase  $\varphi_T$  multipliziert, woraus sich das in Abbildung 12(b) dargestellte Sendesignal  $s(t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T)$  ergibt. Nach der vom Versuch "AM" bekannten Terminologie entspricht dies einer ZSB-AM ohne Träger.

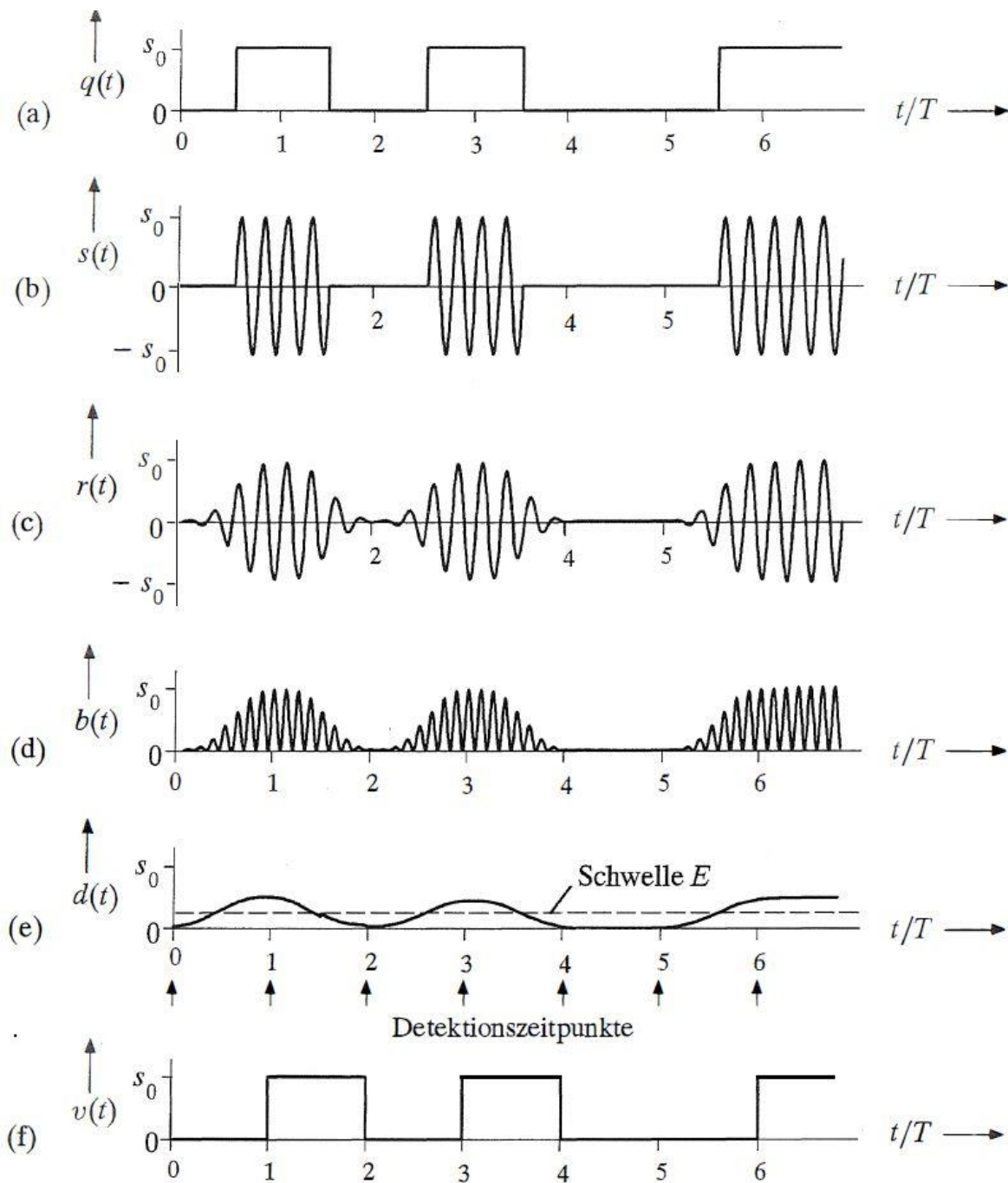
Lässt man als Trägerfrequenzen  $f_T$  nur ganzzahlige Vielfache der Bitfrequenz  $1/T$  zu, so kann man das Sendesignal  $s(t)$  wieder als Summe gewichteter und verschobener Grundimpulsen darstellen:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t - \nu \cdot T) \quad \text{mit} \quad g_s(t) = g_q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T). \quad (35)$$

Hierbei bezeichnet  $g_q(t) \leftrightarrow G_q(f)$  den rechteckförmigen NRZ-Grundimpuls. Die Amplitudenkoeffizienten sind nun im Gegensatz zu Kapitel 4 unipolar:  $a_\nu \in \{0, 1\}$ .

Das Empfangssignal  $r(t)$  kann man wie bei der Basisbandübertragung berechnen, doch muss bei trägermodulierter Übertragung der Kanalfrequenzgang  $H_K(j)$  stets als ein Bandpass angesetzt werden. Aus Abbildung 12(c) - gültig für einen Gaußsehen Bandpasskanal - ist zu erkennen, dass durch den nichtidealen Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  im Wesentlichen die Flanken der Hüllkurve des Empfangssignals beeinträchtigt werden, während die lange "0"- sowie die lange "1"-Folge von den Impulsinterferenzen weniger stark beeinflusst werden. Nicht berücksichtigt ist in Abbildung 12(c) der additive Rauschterm  $n(t) = 0$ .

Beim Empfänger muss die sendeseitige Modulation durch einen Demodulator rückgängig gemacht werden. Wie bei der analogen ZSB-AM gibt es auch hier zwei prinzipiell unterschiedliche Realisierungsarten, nämlich die kohärente *Synchrondemodulation* und die inkohärente *Hüllkurvendemodulation*, wobei hier nur die erstere behandelt wird.



**Abbildung 12: Signalverläufe eines ungestörten ASK-Systems bei Gaußischem Bandpasskanal, Synchrondemodulation, Synchrondemodulation ( $f_T = \frac{4}{T}$ ,  $\varphi_T = 90^\circ$ ,  $\hat{z}_E = 1$ ), Gauß – Tiefpass**

Bei Synchrondemodulation wird dem Eingangssignal  $r(t)$  das empfangsseitige Trägersignal  $z_E(t) = \hat{z}_E \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_E)$  multiplikativ überlagert, das die gleiche Frequenz  $f_T$  wie das sendeseitige Trägersignal  $z(t)$  besitzen muss. Außerdem sollten die Phasenlagen der beiden Signale möglichst gut übereinstimmen. Eine Phasenabweichung um  $\Delta\varphi_T = \varphi_E - \varphi_T$  führt wie bei der analogen Amplitudendemodulation zu einer Degradation des Signal-Störleistungsverhältnisses um den Faktor  $\cos^2(\Delta\varphi_T)$ .

In Abbildung 12(d) ist das Ausgangssignal des Synchrondemodulators (mit  $\hat{z}_E = 1$ ,  $\Delta\varphi_T = 0$ ) dargestellt. Es zeigt, dass dem Nutzsignal auch Anteile mit der doppelten Trägerfrequenz ( $2f_T$ ) überlagert sind.

Diese Intermodulationsprodukte werden durch den folgenden Tiefpass eliminiert. Im gezeichneten Beispiel ist  $H_E(f)$  ebenfalls gaußförmig angenommen. Außerdem hat dieses Filter wie beim Basisbandsystem die zusätzliche Aufgabe, die Störleistung vor dem Detektor zu begrenzen. Es soll jedoch nochmals erwähnt werden, dass alle Signalverläufe in Abbildung 12 für den störungsfreien Fall gelten, d.h. für  $n(t) = 0$ .

Das in Abbildung 12(e) dargestellte Detektionssignal  $d(t)$  ist ein Basisbandsignal, so dass zur Symboldetektion wieder ein Schwellenwertentscheider eingesetzt werden kann. Wegen  $\hat{z}_E = 1$  beträgt der Maximalwert von  $d_S(t)$  hier nur mehr  $s_0/2$ . Aufgrund der unipolaren ASK-Signale ist außerdem die Entscheidungsschwelle  $E = 0$  nicht geeignet. Der optimale Schwellenwert liegt hier vielmehr bei einem Viertel der Sendeamplitude  $s_0$ .

Betrachten wir nun das optimale ASK - System für den AWGN-Kanal, d.h.  $n(t)$  sei gaußverteilter weißes Rauschen und es gelte  $H_K(f) = 1$ . Weiterhin sei  $\varphi_E = \varphi_T = 0^\circ$ . In diesem Fall kann für den Nutzanteil des Signals  $b(t)$  geschrieben werden:

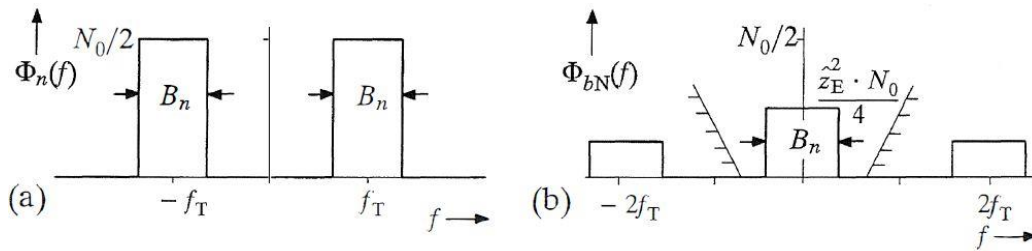
$$b_S(t) = \frac{\hat{z}_E}{2} \cdot q(t) + (\text{Anteile um } \pm 2f_T). \quad (36)$$

Die Amplitude dieses Signals hängt natürlich auch von der Amplitude  $\hat{z}_E$  des empfangsseitigen Trägersignals ab. Da in der Literatur teilweise  $\hat{z}_E = 1$  (so im Programm „dmv“) und teilweise  $\hat{z}_E = 2$  (z.B. im Programm „amv“) verwendet wird, wird in diesem Abschnitt allgemein  $\hat{z}_E$  benutzt.

Der Anteil bei der doppelten Trägerfrequenz muss nicht weiter betrachtet werden, da dieser durch das nachfolgende Tiefpassfilter eliminiert wird (Voraussetzung:  $f_T \cdot T \gg 1$ ). Somit ist das (relevante) Nutzsignal  $b_S(t)$  nach dem Synchrondemodulator bis auf den Faktor  $\hat{z}_E/2$  identisch mit dem Quellensignal  $q(t)$  und dementsprechend rechteckförmig (der Index  $S$  steht wiederum für "Signal"). Das Matched-Filter hat deshalb die gleiche Form wie beim Basisbandsystem entsprechend den Gln. (20) und (21), und das Detektionsnutzsignal  $d_S(t)$  vor dem Schwellenwertentscheider ist somit wie in Kapitel 4 wieder dreieckförmig. Für den Maximalwert des Detektionsgrundimpulses gilt dabei:  $g_d(0) = \hat{z}_E \cdot s_0/2$ .

Bisher wurden Störungen nicht betrachtet. Zur Beurteilung der Übertragungsqualität des ASK- Systems wird nun ein additiv überlagertes weißes Rauschsignal  $n(t)$  mit in die Überlegungen einbezogen. Unter weißem Rauschen versteht man bei modulierter Übertragung, dass das Leistungs-dichtespektrum (LDS)  $\Phi_n(f)$  zumindest in einem gewissen Frequenzband der Breite  $B_n$  um die Trägerfrequenz ( $\pm f_T$ ) konstant gleich  $N_0/2$  ist. Abbildung 13 (a) zeigt das zweiseitige LDS  $\Phi_n(f)$ . Die Rauschleistung von  $n(t)$  ist dann  $\sigma_n^2 = N_0 \cdot B_n$ .

Der Rauschanteil  $b_N(t) = n(t) \cdot \hat{z}_E \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$  des demodulierten Signals weist das in Abbildung 13(b) dargestellte LDS auf. Während das Rauschsignal  $n(t)$  spektral gesehen symmetrisch und die Trägerfrequenz liegt, besitzt der Rauschanteil  $b_N(t)$  nach der Demodulation einen großen Tiefpass-anteil, dessen Größe von der Amplitude des empfangsseitigen Trägersignals signifikant (quadratisch) abhängt.



**Abbildung 13: Rauschleistungsdichtespektren bei ASK - modulierter Übertragung am Eingang des Empfängers (a) und nach dem Synchrondemodulator (b).**

Der mathematische Hintergrund für diese Beziehung ist der Folgende: Das LDS des Cosinussignals besteht aus zwei Diracfunktionen bei den Frequenzen  $\pm f_T$ , jeweils mit dem Impulsgewicht  $\hat{z}_E^2/4$ . Aus der Multiplikation im Zeitbereich wird die Faltung der beiden Leistungsdichtespektren. Daraus folgt:

$$\Phi_{bN}(f) = \frac{\hat{z}_E^2}{4} \cdot [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)] \cdot \Phi_n(f) .$$

Da  $\Phi_n(f)$  zwei Anteile um die Mittenfrequenzen  $\pm f_T$  hat, resultiert durch die Faltungsoperationen jeweils ein Spektralanteil um die Frequenz  $f = 0$  (die addiert werden) sowie jeweils ein weiterer Anteil um  $2f_T$  bzw.  $-2f_T$ .

Die Anteile bei der doppelten Trägerfrequenz können außer Betracht gelassen werden, da auch diese durch den folgenden Tiefpass  $H_E(f)$  entfernt werden. Deshalb unterscheidet sich  $\Phi_{bN}(f)$  vom Rauschleistungsdichtespektrum  $\Phi_n(f)$  bei Basisbandübertragung lediglich um den Faktor  $\hat{z}_E^2/2$ . Genau um diesen Faktor ist auch die Störleistung am Entscheider gegenüber Gl. (26) verändert (falls die Rauschbandbreite  $B_n \gg 1/T$  ist), und es gilt:

$$\sigma_d^2 = \frac{\hat{z}_E^2 \cdot N_0}{4} \cdot \int_{-B_n/2}^{B_n/2} \text{si}^2(\pi f T) df \approx \frac{\hat{z}_E^2 \cdot N_0}{4T} . \tag{37}$$

Berücksichtigt man weiterhin die unipolare Signalisierung bei ASK (vgl. Abbildung 12(a) und (e)) im Gegensatz zu den Voraussetzungen von Kapitel 4, so erhält man für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des optimalen binären ASK-Systems unter der Voraussetzung des AWGN-Kanals:

$$P_B = Q\left(\frac{g_d(0)/2}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{4 \cdot N_0}}\right) . \tag{38}$$

Dieses Ergebnis ist natürlich unabhängig von der Amplitude  $\hat{z}_E$  des Trägersignals. Gegenüber dem Basisbandsystem ist die „Energie pro Bit“ bei konstantem  $s_0$  um den Faktor 4 kleiner:  $E_B = s_0^2 \cdot T/4$  (Begründung: In der Hälfte der Zeit ist das Sendesignal identisch Null; durch die Multiplikation mit dem Cosinus wird die mittlere Leistung nochmal halbiert). Damit erhält man schließlich:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right) . \tag{39}$$

In der Vorbereitungsfrage V6 soll diese Gleichung numerisch ausgewertet werden. Bereit an dieser Stelle kann jedoch gesagt werden, dass die ASK eine deutlich höhere Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $P_B$  als ein Basisbandsystem (oder auch ein PSK- System) aufweist, wenn man das Verhältnis  $E_B/N_0$  - also die pro übertragenem Bit bereitgestellte Energie bezogen auf die Rauschleistungsdichte - für den Systemvergleich als konstant annimmt.

## 7. Digitale Phasenmodulationen (PSK)

Bei der ASK wird die Amplitude des Trägersignals  $z(t) = \hat{z} \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T)$  entsprechend dem Digitalsignal  $q(t)$  moduliert. Weitere Modulationsmöglichkeiten bestehen darin, die Frequenz bzw. die Phase gemäß  $q(t)$  zu variieren. Man spricht dann von FSK (*Frequency Shift Keying*) bzw. von PSK (*Phase Shift Keying*). Die letztere Modulationsart, die nachfolgend kurz besprochen wird, bezeichnet man im deutschsprachigen Raum teilweise auch als *Phasenumtastung*.

Eine anschauliche Verdeutlichung der Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen analoger und digitaler Phasenmodulation erlaubt z.B. die Ortskurve, in Zusammenhang mit den Digitalsystemen auch Phasendiagramm genannt (vgl. Abbildung 14). Dieses beschreibt das äquivalente Tiefpasssignal  $s_{TP}(t)$  in der komplexen Ebene. Bei der analogen PM ist die Ortskurve ein Kreisbogen, dessen Öffnungswinkel vom Modulationsindex abhängt. Bei den digitalen Modulationsverfahren besteht die Ortskurve dagegen nur aus einer endlichen Anzahl von Punkten, zwischen denen beliebig schnell hin und her gesprungen wird. Deshalb ist hier der Name "Phasendiagramm" besser geeignet.

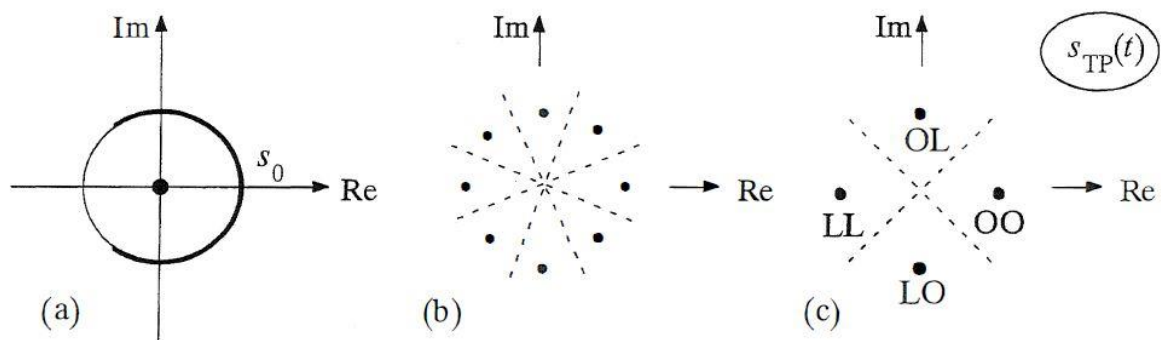


Abbildung 14: Phasendiagramm bei analoger PM (a), 8-PSK (b) und 4-PSK (c).

Abbildung 14(b) und (c) zeigen die Phasendiagramme für 8-PSK und 4-PSK mit den entsprechenden Entscheidungsregionen. Durch das Rauschen werden nämlich die diskreten Phasenpunkte zu Punktwolken. Aufgabe des Empfängers ist es nun, die Phasenpunkte des empfangenen (Tiefpass-) Signals  $r_{TP}(t)$  wieder Symbolen zuzuordnen.

Bei 8-PSK bzw. 4-PSK werden mit jedem Symbol 3 bzw. 2 Bit des digitalen Quellensignals übertragen. Entsprechend muss man gemäß Kapitel 1 zwischen der Symbol- und der Bitfehlerwahrscheinlichkeit unterscheiden. Hier beschränken wir uns auf die *binäre Phasenmodulation* (BPSK bzw. 2-PSK) mit dem Phasendiagramm gemäß Abbildung 15 (a).

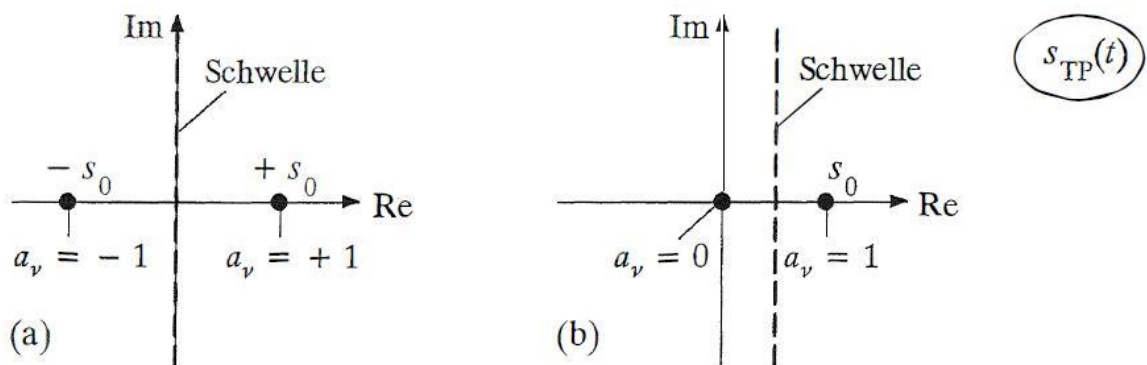


Abbildung 15: Phasendiagramm bei BPSK (a) und ASK (b).



Bei BPSK existieren nur zwei mögliche Punkte im Phasenraum, z.B. rein reell bei  $s_0$  (Phase:  $0^\circ$ ) und bei  $-s_0$  (Phase:  $180^\circ$ ). Die Entscheidungsschwelle ist hier die imaginäre Achse. Ein Vergleich mit dem Phasendiagramm bei ASK - dargestellt in Abbildung 15 (b) - zeigt, dass zwischen ASK und BPSK große Analogien bestehen: In beiden Fällen kann das modulierte Signal wie bei ZSB-AM als Produkt geschrieben werden,

$$s(t) = q(t) \cdot z(t), \tag{40}$$

doch ist im Fall der BPSK im Gegensatz zur ASK - aber in gleicher Weise wie bei der Basisbandübertragung - das digitale Quellensignal bipolar anzusetzen:  $a_v \in \{-1, +1\}$ .

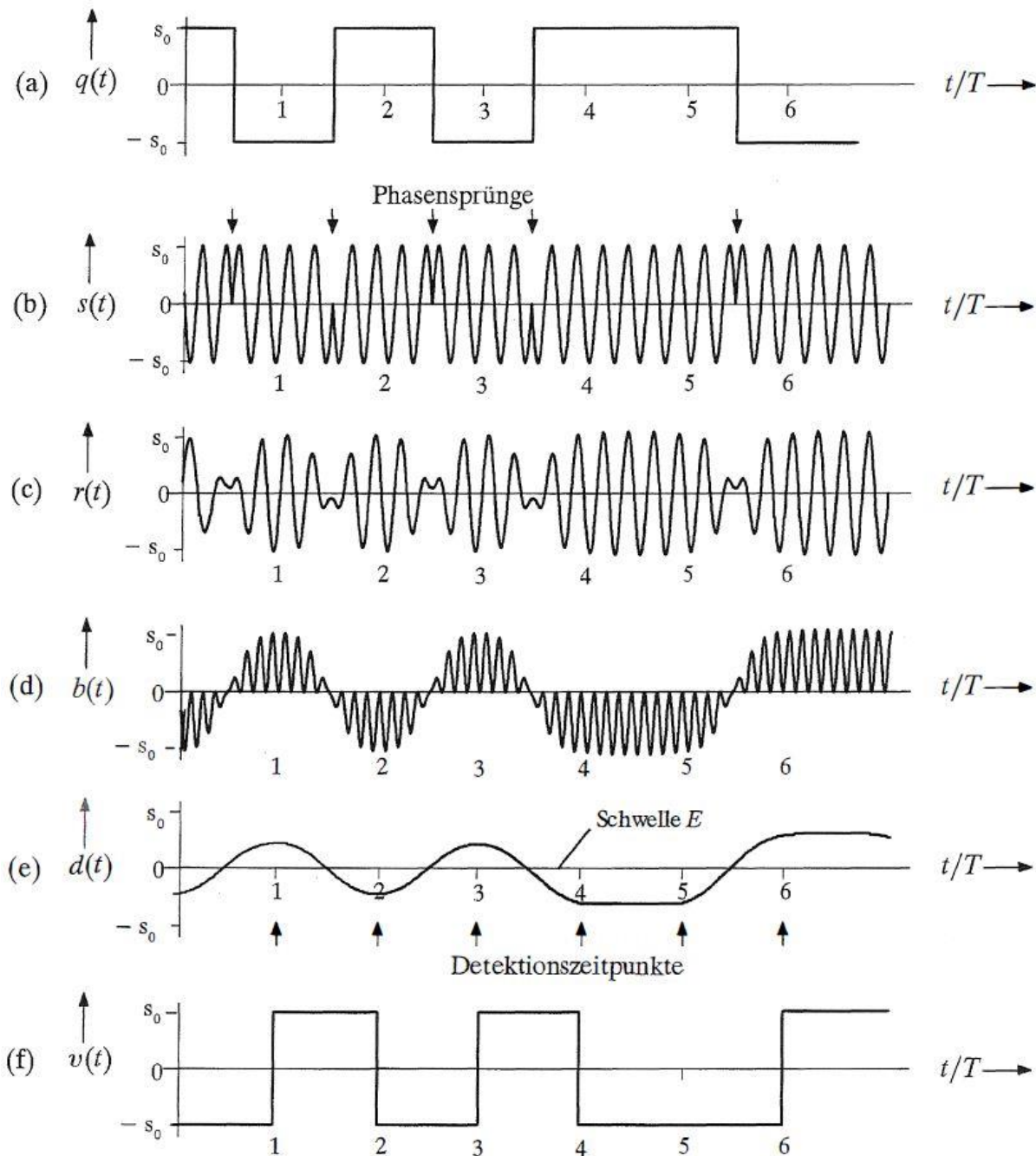


Abbildung 16: Signalverläufe eines ungestörten BPSK- Systems bei Gaußsehn Bandpasskanal, Synchrondemodulation ( $f_T = \frac{4}{T}$ ,  $\varphi_T = 90^\circ$ ,  $\hat{z}_E = 1$ ), Gauß - Tiefpass.

Die Abbildung 16 zeigt typische BPSK- Signalverläufe, wobei gleiche Voraussetzungen wie beim ASK-System von Abbildung 12 zugrunde gelegt sind. Die Hüllkurve des Sendesignals  $s(t)$  ist konstant (vgl. Abbildung 16(b)). Deshalb ist bei PSK eine Hüllkurvendemodulation nicht möglich, das heißt: PSK-modulierte Signale müssen stets kohärent demoduliert werden. Die BPSK ist im Gegensatz zum ASK unempfindlich gegenüber nichtlinearen Verzerrungen auf dem Kanal und Amplitudenschwankungen können durch eine Amplitudenbegrenzung des Empfangssignals  $r(t)$  leicht eliminiert werden. Jede Bandbegrenzung (lineare Verzerrung) führt aber zu Einbrüchen der Hüllkurve an den Stellen, an denen die Phase um  $\pm 180^\circ$  wechselt (vgl. Bild 16(b) und (c); für  $H_K(f)$ ) ist hier wiederum ein Gauß-bandpass eingesetzt).

Ein Vergleich der Detektions(nutz)signale von ASK (Abbildung 12) und BPSK (Abbildung 16) macht deutlich, dass – bei ansonsten gleichen Voraussetzungen – beide formgleich sind, wobei das Signal  $d(t)$  bei BPSK doppelt so groß ist wie bei ASK und zudem bipolar. Die optimale Entscheidungsschwelle beträgt somit  $E = 0$  und anstelle von (38) gilt nun:

$$P_B = Q\left(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s^2 \cdot T}{N_0}}\right). \quad (41)$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass bezüglich des Rauschanteils kein Unterschied zur ASK besteht, d.h. Gl. (37) und Abbildung 13 gilt auch für die BPSK. Die Energie pro Bit berechnet sich hier zu  $E_B = s_0^2 \cdot T/2$  (doppelter Wert gegenüber der ASK). Damit erhält man

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) \quad (42)$$

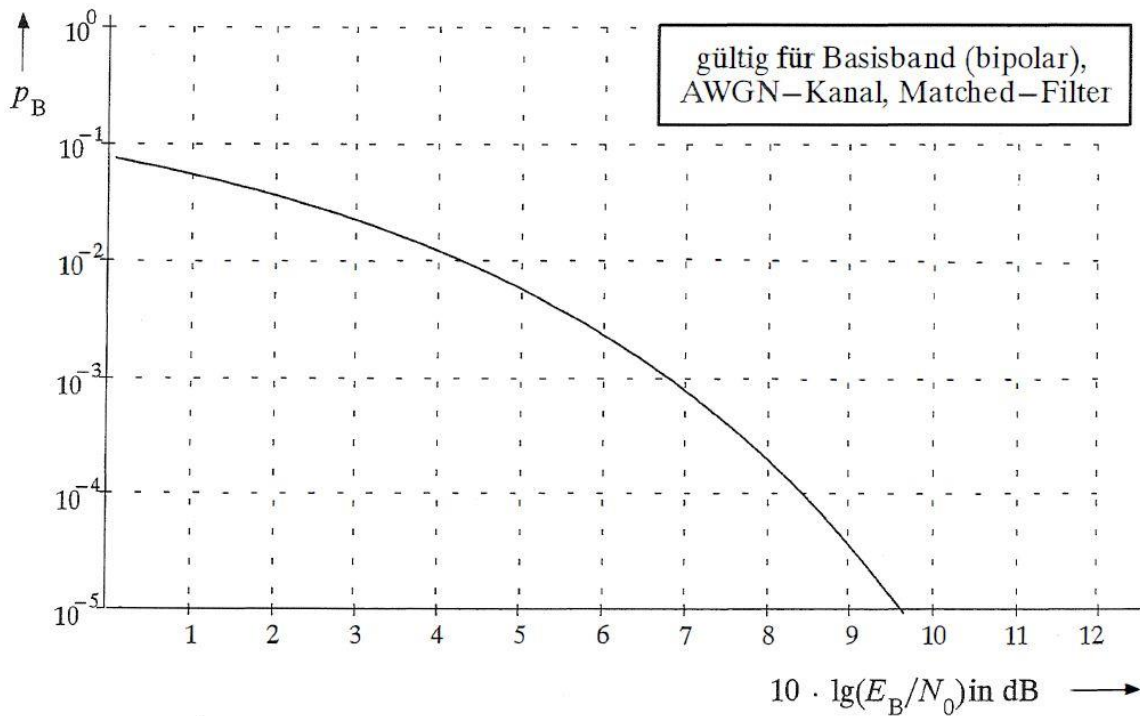
und somit das gleiche Ergebnis wie bei der Basisbandübertragung.

An dieser Stelle soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass die Gln. (38) und (39) bzw. (41) und (42) jeweils nur bei verzerrungsfreiem Kanal und optimalem Empfänger gelten, während bei den Abbildungen 12 und 16 auch Impulsinterferenzen berücksichtigt sind.

**V6:** ASK und BPSK sollen nun anhand der Fehlerwahrscheinlichkeit verglichen werden, wobei dem Vergleich der AWGN-Kanal zugrunde liegt. Nachfolgende Skizze zeigt die bei BPSK erreichbare Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  in Abhängigkeit des Quotienten  $E_B/N_0$ . Beide Koordinatenachsen sind logarithmisch skaliert.

- Überprüfen Sie diesen Kurvenverlauf anhand von zwei Messpunkten für  $E_B/N_0 = 2$  sowie  $E_B/N_0 = 8$ . Berücksichtigen Sie hierbei Ihre Ergebnisse von **V4** in geeigneter Weise.
- Wie groß muss der Quotient  $E_B/N_0$  mindestens sein, wenn die Bitfehlerwahrscheinlichkeit den Wert  $p_B = 10^{-3}$  nicht übersteigen soll?





- c) Berechnen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  des ASK-Systems in Abhängigkeit des Quotienten  $E_B/N_0$ . Skizzieren Sie den Kurvenverlauf in obiges Diagramm (die eingezeichnete Kurve gilt für das BPSK-System).
- d) Welcher Wert ergibt sich für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  mit  $E_B/N_0 = 12$  dB? Hinweis: " $E_B/N_0 = 12$ " ist eine einfachere, aber mathematisch nicht ganz saubere Abkürzung für " $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 12$  dB". Berücksichtigen Sie eventuell zur Lösung dieser Aufgabe die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und c).
- e) Welches  $E_B/N_0$ -Verhältnis muss ein ASK-System besitzen, damit die Bitfehlerwahrscheinlichkeit den Wert  $p_B = 10^{-3}$  nicht überschreitet? Hinweis: Berücksichtigen Sie das Ergebnis der Teilaufgaben b) und d) in geeigneter Weise.
- f) Es gelte  $s_0 = 2V$  und  $N_0 = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ V}^2/\text{Hz}$ . Wie hoch kann die Bitrate des ASK-Systems gerade noch sein, damit die Bedingung  $p_B = 10^{-3}$  zu erfüllen ist?

### 8. Quadraturamplitudenmodulation (QAM)

Zur Verringerung des Bandbreitenbedarfs werden bevorzugt mehrstufige Verfahren angewandt, z.B. die 8-PSK und die 4-PSK mit den Phasendiagrammen nach Abbildung 14(b), (c). Letztere ist auch unter dem Namen QPSK-Systeme (*Quaternary Phase Shift Keying*) bekannt. Abbildung 17(a) und (b) zeigen hierfür zwei verschiedene Signalraumkonstellationen, die sich nur durch die Trägerphase unterscheiden. Beide führen zur gleichen Bitfehlerwahrscheinlichkeit, doch sind die Bereichsgrenzen des Entscheiders anders zu wählen.

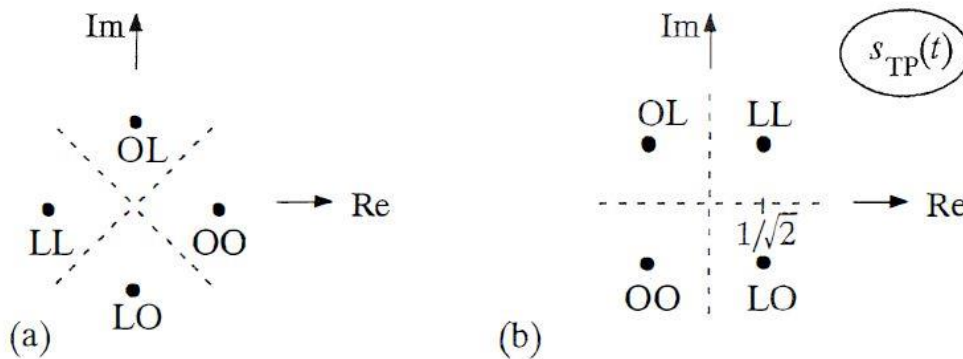


Abbildung 17: Phasendiagramm bei QPSK (a) und 4QAM (b).

Für die Konstellation (b) sind die Entscheidungsregionen die vier Quadranten. Dieses digitale PM-System kann auch als *Quadraturamplitudenmodulation* realisiert werden. Abbildung 18 zeigt das Blockschaltbild von 4-QAM-Sender (a) und 4-QAM-Empfänger (b). Mittels eines Seriell/Parallel-Wandlers werden jeweils zwei aufeinanderfolgende Binärsymbole des Quellensignals  $q(t)$  in je ein Bit auf den zwei parallelen Strängen  $q_I(t)$  und  $q_Q(t)$  umcodiert („Dibit“), wobei die Indizes „I“ und „Q“ für *Inphase* – und *Quadraturkomponente* stehen.

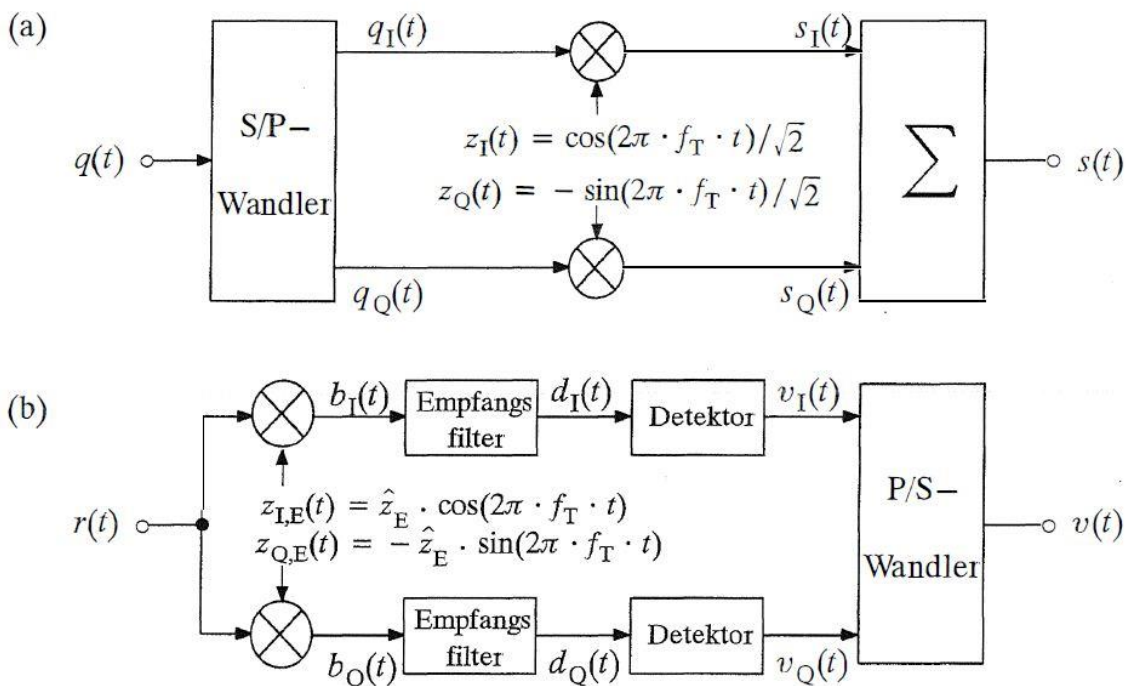


Abbildung 18: Sender (a) und Empfänger (b) bei 4QAM; die beiden Orthogonalfunktionen "cos" und "-sin" führen genau zu der Phasenzuordnung gemäß Abbildung 17(b).

Die Bitdauer der Teilsignale  $q_I(t)$  und  $q_Q(t)$  wird dadurch gegenüber der des Quellsignals  $q(t)$  verdoppelt. Damit wird gleichzeitig die Bandbreite der einzelnen Spektren halbiert. Diese Teilsignale  $q_I(t)$  und  $q_Q(t)$  werden mit den beiden zueinander orthogonalen Trägersignalen  $z_I(t)$  und  $z_Q(t)$  BPSK- moduliert ( z.B. sei  $z_I(t)$  die Cosinus- und  $z_Q(t)$  die Minus-Sinusfunktion) und anschließend gemeinsam über den Kanal übertragen.

Aus den Phasenlagen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  bzw.  $90^\circ$  und  $270^\circ$  der beiden Komponentensignale  $s_I(t)$  und  $s_Q(t)$  ergeben sich die resultierenden Phasenlagen  $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$  des vierstufigen QAM-Sendesignals  $s(t)$  gemäß Abbildung 17 (b), wobei das erste Symbol sich jeweils auf das Signal  $q_I(t)$  und das zweite auf das Signal  $q_Q(t)$  bezieht. Die Amplituden der beiden orthogonalen Trägersignale wurden hier im Gegensatz zur BPSK gleich  $\hat{z} = 1/\sqrt{2}$  gewählt, so dass die Hüllkurve des Summensignals  $s(t)$  wiederum  $s_0$  beträgt.

Unter der willkürlichen Annahme, dass die beiden Spektren  $Q_I(f)$  und  $Q_Q(f)$  reell sind, wird in der spektralen Darstellung zu dem rein reellen Spektrum  $S_I(f)$  das rein imaginäre Spektrum  $S_Q(f)$  hinzuaddiert. Die Bandbreiteneffizienz dieses (und anderer) QAM-Verfahren wird somit durch gleichzeitiges Übertragen zweier voneinander trennbarer Spektren der jeweils halben Bandbreite erreicht.

Abbildung 18(b) zeigt das Blockschaltbild des 4-QAM-Empfängers. Das am Empfänger ankommende Signal  $r(t)$  wird getrennt mit zwei um  $90^\circ$  verschobenen Trägersignalen synchrondemoduliert, anschließend gefiltert und detektiert. Aus den Teilsignalen  $v_I(t)$  und  $v_Q(t)$ , jedes mit der Symboldauer  $T$ , wird schließlich durch einen Parallel/Seriell-Wandler das Sinkensignal  $v(t)$  mit der Symboldauer  $T/2$  (also doppelte Rate) gewonnen.

Durch Demodulation und Filterung geht die jeweils orthogonale Signalkomponente verloren. Dies ist der Grund dafür, dass sich die beiden orthogonalen Signalanteile nicht gegenseitig stören, zumindest dann nicht, wenn die Trägersignale tatsächlich zueinander orthogonal sind und zwischen Sender und Empfänger keine Phasendifferenz besteht. Wie auch am Phasendiagramm von Abbildung 17(b) zu erkennen ist, darf daher in jedem Zweig die Amplitude des Störsignalanteils nur mehr das  $1/\sqrt{2}$ -fache der konstanten Sendesignalamplitude betragen. Im Vergleich zur BPSK verringert sich somit (bei gleichbleibender Sendeleistung) das Signalstörleistungsverhältnis um den Faktor 2. Da aber auch nur die Hälfte der Bandbreite benötigt wird, kann durch eine Halbierung der Filtergrenzfrequenz die Störleistung in gleichem Maße verringert werden. Bei Synchrondemodulation und jeweiliger Parameteroptimierung führen somit die BPSK und die 4-QAM (und damit natürlich auch die QPSK) zur gleichen Bitfehlerwahrscheinlichkeit.

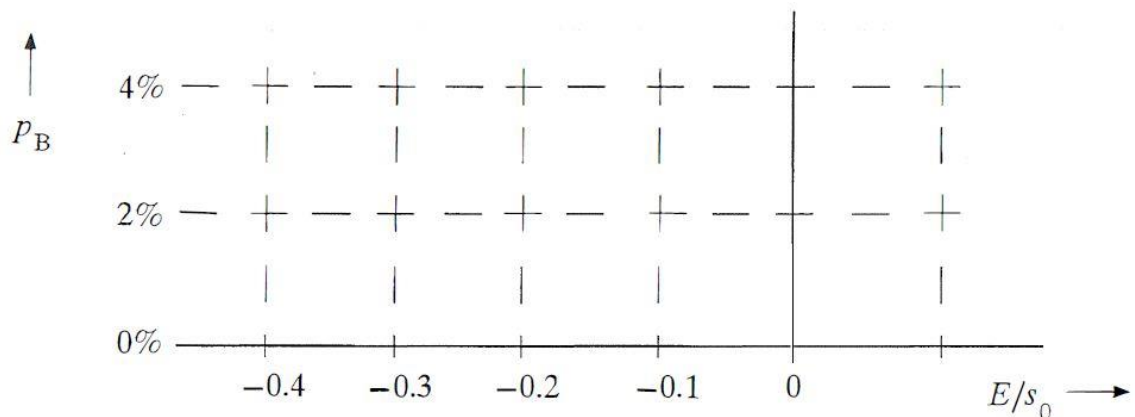
Beim Übergang von der BPSK zur 4-QAM bzw. QPSK konnte die benötigte Bandbreite bei gleichbleibender Übertragungsqualität um die Hälfte reduziert werden. Der Bandbreitenbedarf lässt sich durch den Einsatz von höherstufiger PSK oder QAM noch weiter verringern. Allerdings muss bei einer weiteren Erhöhung der Stufenzahl stets auch ein merkbarer Verlust an Signalstörabstand und somit eine höhere Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Kauf genommen werden. Da aber Bandbreite inzwischen ein kostbares und auch sehr teures Gut ist – man denke nur an die Versteigerung der UMTS-Frequenzen – geht der Trend momentan zu noch höherer Stufenzahl, z.B. zum 256 QAM-System.

### 9. Versuchsdurchführung

Die Aufgaben D1 und D2 sollen mit dem Programm „fwk“ durchgeführt werden. Berücksichtigen Sie, dass in diesem Programm alle Größen auf  $s_0$  normiert sind.

**D1:** Es gelten wieder die Voraussetzungen der Vorbereitungsfrage V4(d): Die Abtastwerte  $d_s(vT)$  des Detektionsnutzsignals seien  $\pm 1V$ , der Rauscheffektivwert  $\sigma_d = 0.5V$ .

- a) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis von V4(e): Wie groß ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  mit dem Schwellenwert  $E = 0$ ? Die Symbolwahrscheinlichkeiten  $p_1 = p(s = -s_0)$  und  $p_2 = p(s = +s_0)$  seien zunächst gleich?
  
- b) Kann bei gleichen Auftretswahrscheinlichkeiten  $p_1 = p_2 = 0.5$  durch einen anderen Schwellenwert  $E$  eine kleinere Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  erreicht werden?
  
- c) Im Folgenden gelte  $p_1 = p(s = -s_0) = 0.31$  und  $p_2 = p(s = +s_0) = 0.69$ . Außerdem soll nun der Schwellenwert  $E$  ein frei wählbarer Parameter sein. Geben Sie für diesen Fall den allgemeinen Ausdruck für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B = p_S$  entsprechend (12) in Abhängigkeit aller Parameter ( $p_1, p_2, \sigma_d, E$ ) an.
  
- d) Untersuchen Sie nun die Abhängigkeit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  von der Entscheidungsschwelle  $E$ , indem Sie die Ergebnisse für  $E/s_0 = -0.4, -0.3, -0.2, -0.1$  und  $0$  in das nachfolgende Diagramm eintragen. Eingabeparameter:  $M = 2, p(-1) = 0.31, \sigma = 0.5$ .



- e) Welchen Wert hat die optimale Entscheidungsschwelle? Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass für den optimalen Schwellenwert folgende Beziehung gilt:

$$E_{\text{opt}} = \frac{\sigma_d^2}{2 \cdot s_0} \cdot \ln \frac{p(s = -s_0)}{p(s = +s_0)}. \quad (43)$$

**D2:** Sind die Amplitudenwerte eines M-stufigen Signals gleichwahrscheinlich und liegen sie äquidistant zwischen den Werten  $-s_0$  und  $+s_0$ , so erhält man für die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_S = \frac{2 \cdot (M - 1)}{M} \cdot Q\left(\frac{s_0 / (M - 1)}{\sigma_d}\right). \quad (44)$$

Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Gleichung ist, dass die Schwellenwerte genau in der Mitte zwischen zwei benachbarten Amplitudenwerten liegen.

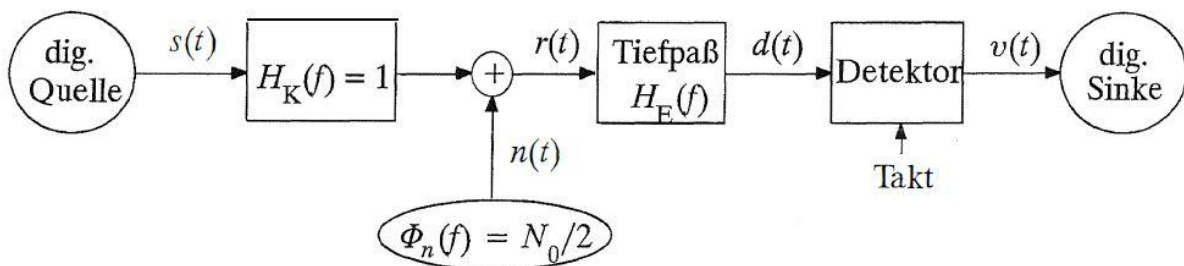
- a) Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung am Beispiel der Stufenzahl  $M = 2$ .
- b) Wie groß darf die (normierte) Streuung  $\sigma_d$  des Rauschanteils maximal sein, damit die Bitfehlerwahrscheinlichkeit den Wert  $10^{-2}$  nicht überschreitet? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Programm.
- c) Begründen Sie die obige Gleichung (44) am Beispiel der Stufenzahl  $M = 4$ .
- d) Wie groß darf nun die (normierte) Streuung des Rauschanteils maximal sein, damit die Bitfehlerwahrscheinlichkeit den Wert  $10^{-2}$  nicht überschreitet? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis wieder mit dem Programm. Interpretation im Vergleich zu Punkt b).

Die Aufgaben D3 bis D5 sollen mit dem Programm „psk“ durchgeführt werden.

**D3:** Zunächst soll die Basisbandübertragung gemäß unterer Skizze betrachtet werden. Mit dem "Standardsystem BB (bipolar)" sind dabei eingestellt:

- ein bipolares rechteckförmiges Sendesignal  $s(t)$ , normiert auf die Amplitude  $s_0 = 1$ ,
- AWGN-Kanal ( $H_K(f) = 1, \Phi_n(f) = N_0/2$ ), gekennzeichnet durch  $\frac{E_B}{N_0} = 9 \text{ dB}$ ,
- $H_E(f) = H_{MF}(f)$ , d.h. das Empfangsfilter ist an die Gegebenheiten optimal angepasst,
- Schwellenwertentscheider: Schwelle  $E$  und Detektionszeitpunkt  $T_D$  jeweils optimal.

Es gilt also folgendes Blockschaltbild.



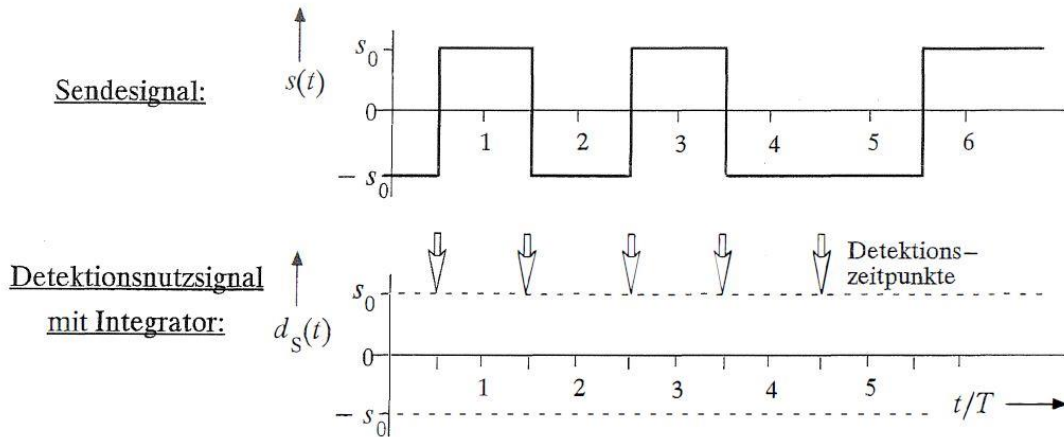
a) Betrachten Sie die Signale  $s(t), n(t), r(t), d(t)$  und  $v(t)$  und beschreiben Sie diese verbal.

b) Betrachten und beschreiben Sie das Augendiagramm ohne Rauschen (Menüpunkt A). Wie groß ist die vom Programm „psk“ ausgegebene Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  für  $E_B/N_0 = 9 \text{ dB}$ ? Tragen Sie auch die anderen Ausgabewerte in die folgende Tabelle ein. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

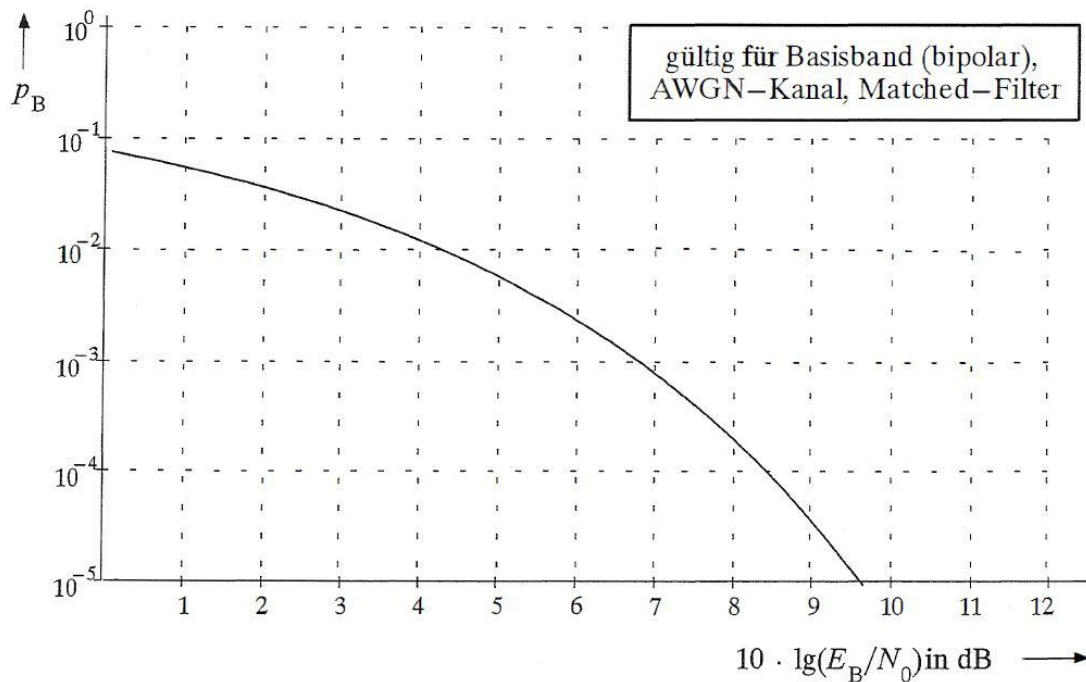
$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\hat{\sigma}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
9 dB (Punkt b)				
3 dB (Punkt d)				

- c) Bei rechteckförmigen Sendeimpulsen und dem AWGN-Kanal kann das Matched-Filter auch als Integrator („Integrate & Dump“) realisiert werden. Zeigen Sie mit dem Programm „psk“, dass man damit die gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit erhält. Wie unterscheidet sich das Detektionsnutzsignal  $d_S(t)$  gegenüber der Einstellung nach Punkt b)? Skizzieren Sie  $d_S(t)$  in nachfolgendes Diagramm.

*Hinweis:* Im Programm ist der Integrator im Gegensatz zum Matched-Filter kausal realisiert; deshalb muss der Detektionszeitpunkt von  $T_D = 0$  auf  $T_D = T/2$  geändert werden.



- d) Wiederholen Sie die Aufgabe b) für  $E_B/N_0 = 3$  dB. Verändern Sie hierzu die Einstellungen wieder auf „Matched-Filter“ und „ $T_D = 0$ “. Ergänzen Sie die Tabelle zu Punkt b) und tragen Sie die Ergebnisse von Punkt b) und d) in das nachfolgende Diagramm ein. Interpretieren Sie die unterschiedlichen Ergebnisse.

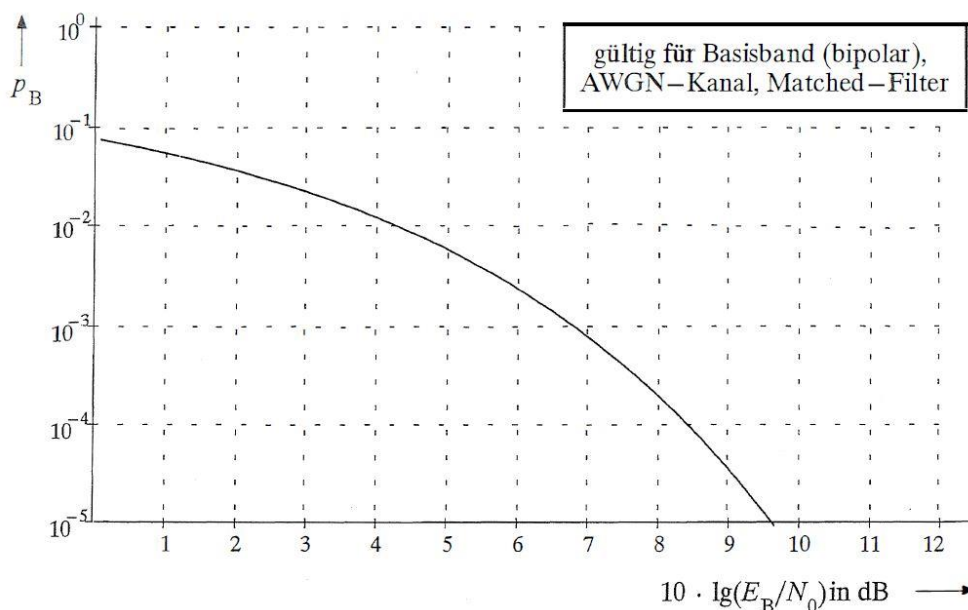


**D4:** Im Folgenden soll als Empfangsfilter ein Gauß–Tiefpass mit dem Frequenzgang  $H_E(f)$  gemäß (28) verwendet werden. Die normierte Grenzfrequenz sei  $f_E \cdot T = 0.8$ . Alle anderen Systemparameter seien optimal, z.B. gelte  $T_D = 0$ . Mit diesem suboptimalen Empfangsfilter  $H_E(f)$  kommt es zu Impulsinterferenzen. Das bedeutet, dass die Detektion eines Symbols von den Nachbarsymbolen beeinflusst wird.

- a) Betrachten und beschreiben Sie das Detektionsnutzsignal  $d_S(t)$  im Vergleich zum optimalen Empfänger.
  
- b) Ermitteln Sie mit dem Programm „psk“ für  $E_B/N_0 = 9$  dB und 3 dB die mittlere und die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) des suboptimalen Systems mit Gauß–Tiefpass ( $f_E \cdot T = 0.8$ ).

$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\delta(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\rho_U)$
9 dB						
3 dB						

- c) Tragen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeitswerte (sowohl  $p_B$  als auch  $p_U$ ) in das nachfolgende Diagramm ein und interpretieren Sie die Ergebnisse.





**D5:** Arbeiten Sie ab sofort mit dem „Standardsystem BPSK“. Damit ist das folgende Übertragungssystem voreingestellt:

- binäre Phasenumtastung (BPSK) mit der (normierten) Trägerfrequenz  $f_T \cdot T = 4$ ,
- AWGN- Kanal mit Mittenfrequenz  $f_M \cdot T = 4$ , Bandbreite  $B_n \cdot T = 6$ ,  $E_B/N_0 = 9$  dB,
- phasenrichtige Synchrondemodulation mit  $f_T' \cdot T = 4$ ,
- Gauß–Tiefpass  $H_E(f)$  mit (normierter) Grenzfrequenz  $f_E \cdot T = 0.8$ ,
- optimale Schwelle  $E_{opt} = 0$ , optimaler Detektionszeitpunkt  $T_{D,opt} = 0$ .

a) Betrachten Sie die Signale  $q(t)$ ,  $s(t)$ ,  $n(t)$ ,  $r(t)$ ,  $b(t)$ ,  $d(t)$  und  $v(t)$  an den verschiedenen Punkten des Blockschaltbildes und beschreiben Sie diese.

b) Ermitteln Sie für  $E_B/N_0 = 9$  dB die Fehlerwahrscheinlichkeiten ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) des suboptimalen BPSK-Systems mit Gauß–Tiefpass ( $f_E \cdot T = 0.8$ ). Alle anderen Parameter seien entsprechend obiger Zusammenstellung optimal. Bewerten Sie das Simulationsergebnis im Vergleich zum entsprechenden Basisbandsystem (siehe Versuch D4).

Verfahren	$\bar{\sigma}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\rho_U)$
Basisband (vgl. D4)						
BPSK						

c) Betrachten und beschreiben Sie das Phasendiagramm. Berücksichtigen Sie dabei, dass im Programm das Trägersignal sinusförmig ist.

d) Betrachten Sie nun das Phasendiagramm für den Fall, dass zwischen dem sende- und dem empfangsseitigen Trägersignal eine Phasendifferenz von  $\Delta\varphi_T = 30^\circ$  besteht. Wie ändert sich das Phasendiagramm gegenüber Punkt c)?

e) Welchen Einfluss hat diese Phasendifferenz ( $\Delta\varphi_T = 30^\circ$ ) zwischen dem sende – und empfangsseitigen Trägersignal auf die Fehlerwahrscheinlichkeit?

Phasen- abweichung	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
$\Delta\varphi_T = 0^\circ$ (Aufgabe b)				
$\Delta\varphi_T = 30^\circ$ (Aufgabe e)				

**D6 (optional):** Nun soll mit dem Programm „dmv“ das ASK-System (vgl. Kapitel 6) untersucht werden. Arbeiten Sie hierbei mit dem „Standardsystem ASK“. Damit ist das folgende System voreingestellt:

- Amplitude Shift Keying (ASK) mit der (normierten) Trägerfrequenz  $f_T \cdot T = 4$ ,
  - AWGN-Kanal mit Mittenfrequenz  $f_M \cdot T = 4$ , Bandbreite  $B_n \cdot T = 6$ ,  $E_B/N_0 = 9$  dB,
  - phasenrichtige Synchrondemodulation mit  $f_T' \cdot T = 4$ ,
  - Gauß-Tiefpass  $H_E(f)$  mit (normierter) Grenzfrequenz  $f_E \cdot T = 0.8$ ,
  - optimale Schwelle  $E_{opt} = 0$ , optimaler Detektionszeitpunkt  $T_{D,opt} = 0$ .
- a) Betrachten Sie die Signale  $q(t), s(t), r(t), b(t), d(t)$  und  $v(t)$  und beschreiben Sie diese im Vergleich zur BPSK. Welcher Wert ergibt sich für die optimale Schwelle?

b) Zeigen Sie per Simulation (Menüpunkt „F“), dass das ASK-System mit  $E_B/N_0 = 12$  dB innerhalb der Simulationsgenauigkeit genau die gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit aufweist wie das BPSK- System mit  $E_B/N_0 = 9$  dB (vgl. D1(b), (e)). Welche Unterschiede gibt es?

$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
12 dB				
6 dB				

c) Welchen Wert sollte die Entscheiderschwelle besitzen? Berücksichtigen Sie bei Ihrer Antwort die unipolare Signalisierung. Überprüfen Sie den Einfluss der Schwelle auf die (mittlere) Bitfehlerwahrscheinlichkeit, indem Sie  $E/s_0 = 0.3$  setzen.

d) Es gelte nun wieder  $E_B/N_0 = 12$  dB und der Schwellenwert sei optimal. Ermitteln Sie den Einfluss der Grenzfrequenz des gaußförmigen Empfangsfilters. Wählen Sie hierzu  $f_E \cdot T = 1.6$  und  $f_E \cdot T = 0.4$ . Tragen Sie die Simulationsergebnisse in die erste und die dritte Zeile der nachfolgenden Tabelle ein. Übertragen Sie auch das Ergebnis für  $f_E \cdot T = 0.8$  (siehe Punkt b) in die zweite Zeile dieser Tabelle.

$f_E \cdot T$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\rho_U)$
1.6						
0.8						
0.4						

e) Interpretieren Sie die Ergebnisse für  $f_E \cdot T = 1.6$  im Vergleich zu  $f_E \cdot T = 0.8$ .

f) Interpretieren Sie die Ergebnisse für  $f_E \cdot T = 0.4$ .

**D7:** Wenn Sie noch Lust haben, starten Sie nun wieder das Programm „psk“ und wählen das „Standardsystem 4-QAM (QPSK)“ mit den Parametern entsprechend der Voreinstellung („T“ gibt die Symboldauer der Signale nach dem S/P –Wandler an):

- 4QAM-Systemgemäß Abbildung 18 mit der (normierten) Trägerfrequenz  $f_T \cdot T = 4$ ,
  - AWGN-Kanal mit Mittenfrequenz  $f_M \cdot T = 4$ , Bandbreite  $B_n \cdot T = 6$ ,  $E_B/N_0 = 9$  dB,
  - phasenrichtige Synchrondemodulation mit  $f_{T'} \cdot T = 4$ , kein Bandpass
  - Gauß-Tiefpass  $H_E(f)$  mit (normierter) Grenzfrequenz  $f_E \cdot T = 0.8$ ,
  - optimale Schwelle  $E_{opt} = 0$ , optimaler Detektionszeitpunkt  $T_{D,opt} = 0$ .
- a) Betrachten Sie alle Signale an den verschiedenen Punkten des Blockschaltbildes und beschreiben Sie die wesentlichen Unterschiede zur BPSK. Wählen Sie für diesen Unterpunkt ein vernachlässigbar kleines Rauschsignal (z.B.  $E_B/N_0 = 80$  dB).

- b) Ermitteln Sie für  $E_B/N_0 = 9$  dB die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des 4-QAM-Systems und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen bei BPSK (Versuch D5b). Die Parameter seien optimal, insbesondere gelte  $\Delta\varphi_T = 0^\circ$  (d.h. ideale Phasensynchronisation).

$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\hat{\sigma}(T_D)$	$\sigma_d$	$P_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
12 dB				
6 dB				

- c) Betrachten Sie auch das Phasendiagramm bei 4-QAM und vergleichen Sie dieses mit dem Phasendiagramm bei BPSK. Interpretieren Sie das 4-QAM-Phasendiagramm hinsichtlich der 4-QAM-Entscheidungsregel. Führen Sie diesen Versuch außer mit  $E_B/N_0 = 9$  dB auch für  $E_B/N_0 = 3$  dB (sehr starke Störungen) sowie  $E_B/N_0 = 80$  dB (quasi-rauschfrei) durch. Woran erkennt man den Einfluss von Impulsinterferenzen?
- d) Wählen Sie nun  $\Delta\varphi_T = 30^\circ$  und betrachten Sie wieder das 4-QAM-Phasendiagramm. Interpretieren Sie dieses im Vergleich zum entsprechenden BPSK-Phasendiagramm.
- e) Ermitteln Sie für die den Fall ( $E_B/N_0 = 9$  dB, Phasendifferenz  $\Delta\varphi_T = 30^\circ$  zwischen sende- und empfangsseitigem Trägersignal) die Fehlerwahrscheinlichkeit.

$\Delta\varphi_T = 30^\circ$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$P_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
BPSK (Aufgabe D5e)				
QPSK/4QAM (Aufgabe D7e)				

## 10. Musterlösungen der Vorbereitungsaufgaben

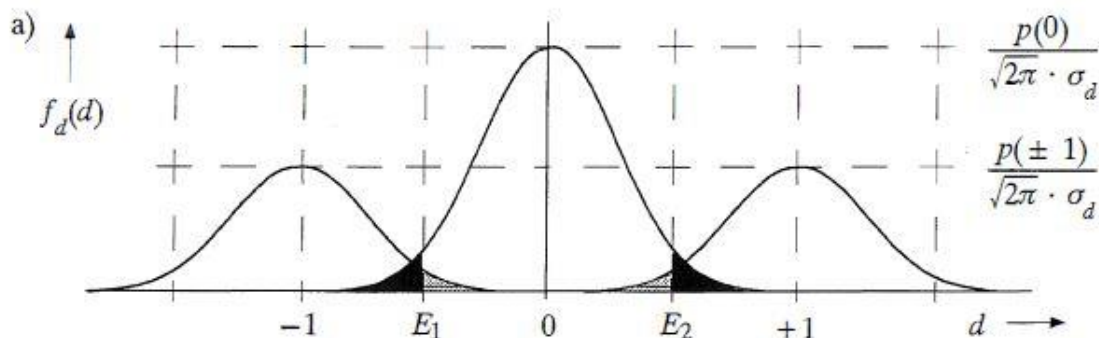
V1:

- a)  $\langle e_v \rangle = 00000\ 10000\ 00001\ 10000.$   
 b)  $n_B = 3; N = 20; h_B = 15\%.$

V2:

- a)  $N_0 = F k_B \theta = 5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}} \cdot 290 \text{ K} \approx 2 \cdot 10^{-20} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$  bzw.  $1,5 \cdot 10^{-18} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}}$ .  
 b)  $N = N_0 \cdot B = 1,5 \cdot 10^{-18} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \cdot 6 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 9 \cdot 10^{-12} \text{ V}^2; \sigma_n = \sqrt{N} = 3 \mu\text{V}.$

V3:



- b)  $p_s = p(-1) \cdot p(n(T_D) > 0.5\text{V}) + p(+1) \cdot p(n(T_D) < -0.5\text{V}) + p(0) p(|n(T_D)| > 0.5\text{V})$   
 $p_s = (p(-1) + p(+1) + 2 \cdot p(0)) \cdot Q\left(\frac{0.5\text{V}}{\sigma_d}\right) = 1,5 \cdot Q(2,5) \approx 0,93\%.$   
 c) Das Symbol "0" liefert den größten Anteil, da es häufiger auftritt als die beiden anderen Symbole und zudem nach beiden Richtungen hin verfälscht werden kann. Die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn die Entscheidungsschwellen jeweils genau bei den Schnittpunkten der beiden jeweiligen WDF-Kurven liegen. Mit optimalen Schwellenwerten (bei  $\pm 0,52$ ) erhält man 0,87%.

V4:

- a)  $T = 0,5 \mu\text{s}; E_B = s_0^2 \cdot T = (2\text{V})^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s}.$   
 b)  $\frac{E_B}{N_0} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s}}{2,5 \cdot 10^{-7} \text{ V}^2/\text{Hz}} = 8 (\approx 9 \text{ dB}); p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right) = Q(4) = 3,17 \cdot 10^{-5}.$   
 c) Sendeamplitude nur die Hälfte:  $p_B = Q(2) = 2,27 \cdot 10^{-2}.$   
 d)  $d_s(vT) = \pm s_0 = \pm 1\text{V}; \sigma_d^2 = \frac{N_0}{2T} = 0,25\text{V}^2 \Leftrightarrow \sigma_d = 0,5\text{V}.$   
 e)  $p_B = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q(2) \Leftrightarrow$  Natürlich gleiches Ergebnis wie unter Punkt c)



V5:

a) 
$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi f T_E) df = \frac{N_0}{2 T_E}$$

b)  $T_E = T = 0.5 \mu\text{s}$ . Damit gelten die gleichen Bedingungen wie in V4(a) und (b):

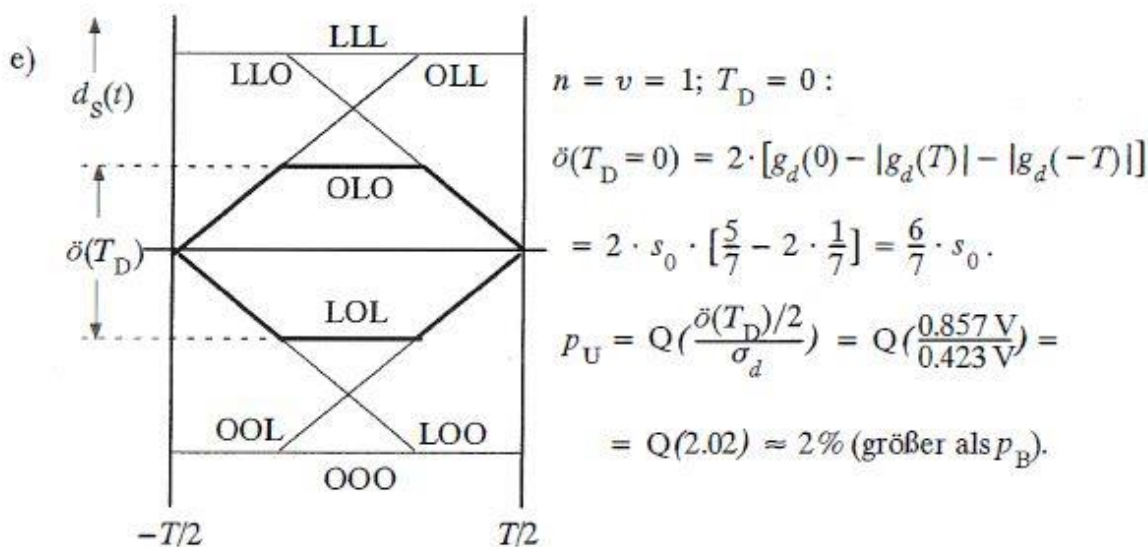
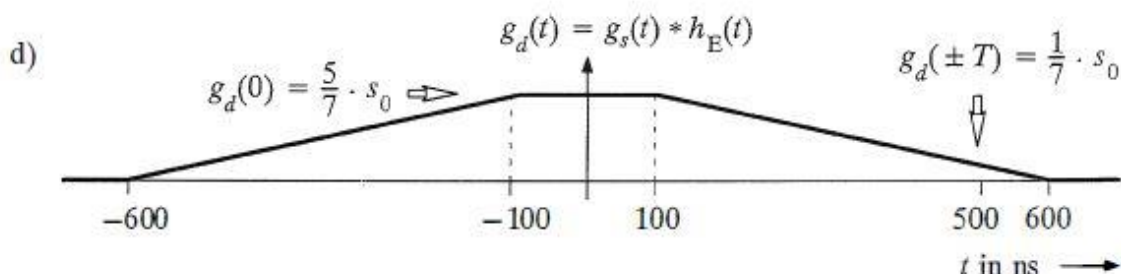
- Der Detektionsgrundimpuls ist dreieckförmig.
- Der Rauscheffektivwert beträgt  $\sigma_d = 0.5 \text{ V}$ .
- Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit beträgt  $3.17 \cdot 10^{-5}$ .

c) 
$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2 T_E} = \frac{2.5 \cdot 10^{-7} \text{ V}^2/\text{Hz}}{1.4 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 0.179 \text{ V}^2 \Leftrightarrow \sigma_d = 0.423 \text{ V}.$$

Die Impulsantwort ist breiter als beim optimalen Filter

⇨ Die Übertragungsfunktion ist schmaler als beim optimalen Filter

⇨ Der Rauscheffektivwert ist kleiner als beim optimalen Filter



f) Die absolute Impulsdauer ist nun 800 ns und es gilt  $g_d(\pm 500 \text{ ns}) = 0$ . Deshalb gibt es keine Impulsinterferenzen; die halbe Augenöffnung ist gleich  $g_d(0) = s_0$ . Daraus folgt:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2 T_E} = \frac{2.5 \cdot 10^{-7} \text{ V}^2/\text{Hz}}{0.6 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 0.417 \text{ V}^2,$$

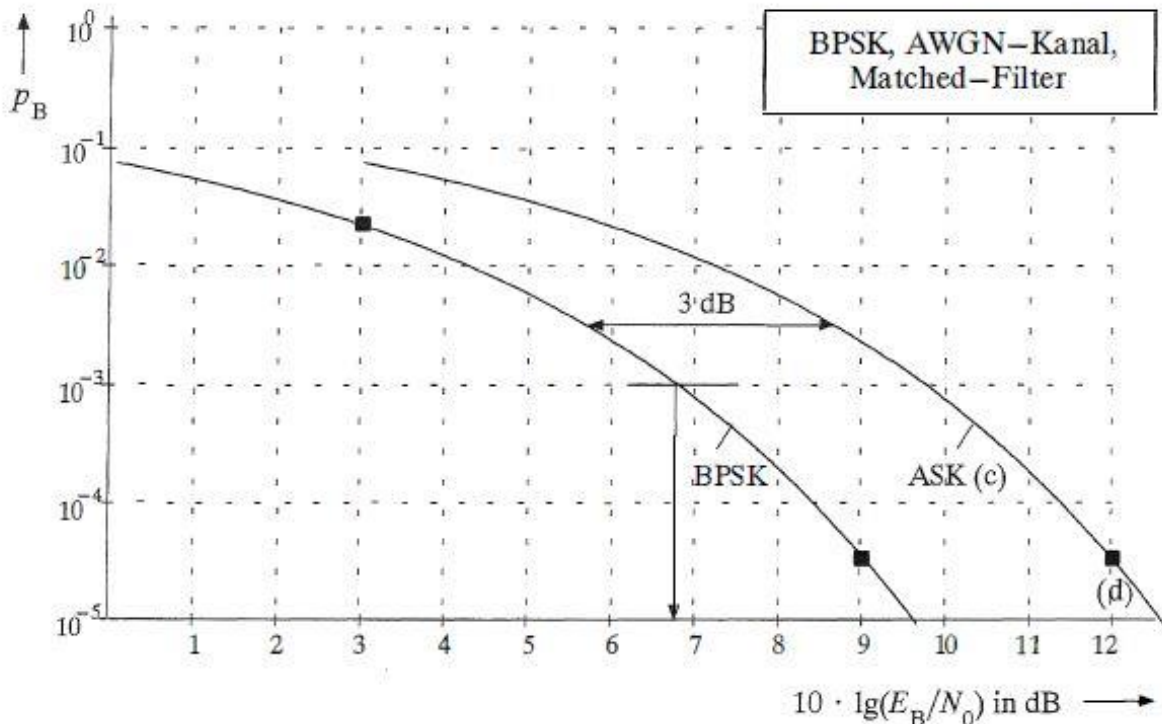
$$p_U = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\frac{2 \text{ V}}{0.654 \text{ V}}\right) = Q(3.06) \approx 10^{-3} (= p_B, \text{ keine Impulsinterferenz}).$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist größer als in b), da das Filter zu breitbandig ist.

**V6:**

a) aus V4(b):  $\frac{E_B}{N_0} = 8 \Rightarrow 10 \cdot \log \frac{E_B}{N_0} = 9.03 \text{ dB} : p_B = Q(4) = 3.17 \cdot 10^{-5};$

aus V4(c):  $\frac{E_B}{N_0} = 2 \Rightarrow 10 \cdot \log \frac{E_B}{N_0} = 3.01 \text{ dB} : p_B = Q(2) = 2.27 \cdot 10^{-2};$



b) Aus Fehlerwahrscheinlichkeitskurve folgt:  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 6.75 \text{ dB}$  ( $E_B/N_0 \approx 4.75$ ).

c) Hier gilt:  $p_B = Q(\sqrt{E_B/N_0})$ .

Aufgrund der logarithmischen Darstellung ist die Kurve für das ASK-System um 3.01 dB  $\approx 3$  dB nach rechts verschoben.

d) Das ASK-System mit  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 12 \text{ dB}$  besitzt die gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit wie das BPSK-System mit  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 8.99 \text{ dB}$  ( $\approx 9 \text{ dB}$ ). Diese wurde in Punkt a) berechnet:  $p_B \approx 3.17 \cdot 10^{-5}$ .

e) Bei BPSK ist der geforderte Wert nach Punkt b):  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 6.75 \text{ dB}$ . Bei ASK muß dieser Wert um ca. 3 dB erhöht werden. Also muß gelten:

$$10 \cdot \lg(E_B/N_0) \approx 9.75 \text{ dB.}$$

f)  $10 \cdot \log \frac{E_B}{N_0} = 9.75 \text{ dB} \Rightarrow \frac{E_B}{N_0} = 9.44 \Rightarrow E_B = 2.36 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$

$$E_B = \frac{1}{4} \cdot s_0^2 \cdot T \Rightarrow T = \frac{4 \cdot E_B}{s_0^2} = 2.36 \mu\text{s} \Rightarrow R = \frac{1}{T} \approx 423 \text{ kbit/s.}$$



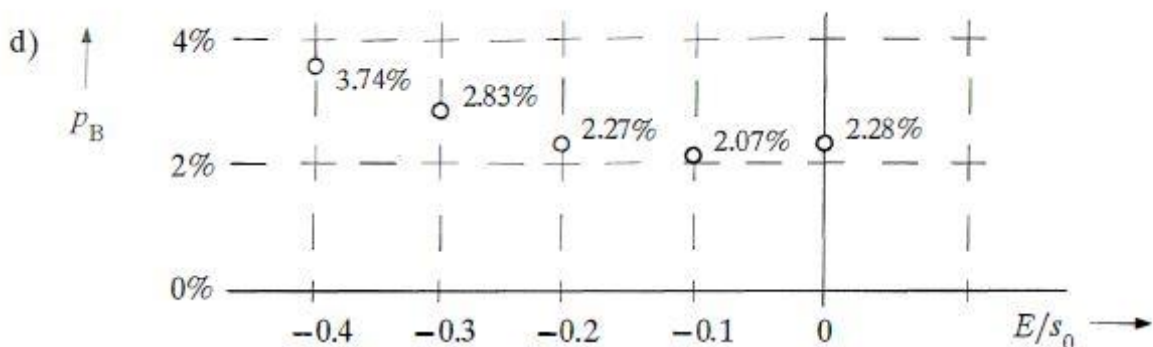
## 11. Musterlösung der Versuchsdurchführung

D1:

- a) Das Programm bestätigt:  $p_B = Q(2) = 2.27 \cdot 10^{-2}$ .  
 b) Jede Veränderung der Entscheidungsschwelle führt zu einer Vergrößerung von  $p_B$ .

$$c) \quad p_B = \sum_{i=1}^M P_i \cdot P_{Si} = p_1 \cdot p(n(T_D) > E + s_0) + p_2 \cdot p(n(T_D) < E - s_0)$$

$$= p_1 \cdot Q\left(\frac{E + s_0}{\sigma_d}\right) + p_2 \cdot \left(1 - Q\left(\frac{E - s_0}{\sigma_d}\right)\right) = p_1 \cdot Q\left(\frac{s_0 + E}{\sigma_d}\right) + p_2 \cdot Q\left(\frac{s_0 - E}{\sigma_d}\right).$$



- e) Der optimale Schwellenwert ergibt sich sowohl bei der Berechnung entsprechend (43) als auch bei der Simulation zu  $E_{opt} = -0.1 \cdot s_0$ . Allgemein gilt: Sind die Symbole nicht gleichwahrscheinlich, so liegt der optimale Schwellenwert näher am Amplitudenwert mit der niedrigeren Auftrittswahrscheinlichkeit.

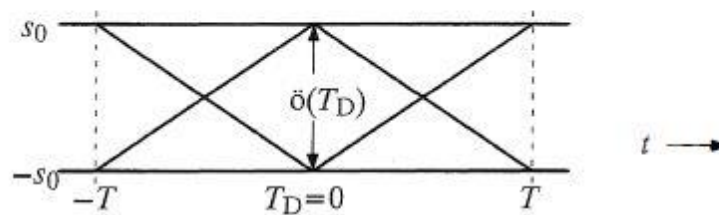
D2:

- a) Mit  $M = 2$  erhält man auch hiermit:  $p_S = p_B = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right)$ .  
 b)  $\frac{s_0}{\sigma_d} \geq Q^{-1}(0.01) \approx 2.3 \Leftrightarrow \frac{\sigma_d}{s_0} \approx 0.43$ .  
 c) Die  $M = 4$  möglichen Amplitudenwerte liegen bei  $\pm s_0$  und  $\pm s_0/3$  und die  $M - 1 = 3$  Entscheidungsschwellen in der Mitte zwischen zwei möglichen Amplitudenwerten (also bei 0 und  $\pm 2/3 \cdot s_0$ ). Die Wahrscheinlichkeit, daß eine der beiden äußeren Stufen verfälscht wird, beträgt  $p_a = Q((s_0/3)/\sigma_d)$ . Die beiden inneren Stufen können dagegen nach beiden Richtungen verfälscht werden (Verfälschungswahrscheinlichkeit:  $2 \cdot p_a$ ). Durch Mittelung unter Berücksichtigung der Auftrittswahrscheinlichkeiten (jeweils 0.25) folgt  $p_S = 1.5 \cdot p_a$ . Dieser Wert ergibt sich auch mit Gl. (44).  
 d)  $p_S = 1.5 \cdot Q\left(\frac{s_0}{3 \cdot \sigma_d}\right) \leq 10^{-2} \Leftrightarrow Q\left(\frac{s_0}{3 \cdot \sigma_d}\right) \leq \frac{0.01}{1.5} \approx 0.00667$   
 $\Leftrightarrow \frac{s_0}{3 \cdot \sigma_d} \approx 2.5 \Leftrightarrow \frac{\sigma_d}{s_0} = 0.133$ .

Der Rauscheffektivwert  $\sigma_d$  muß beim Quaternärsystem deutlich geringer als beim Binärsystem sein, damit sich eine vergleichbare Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt.

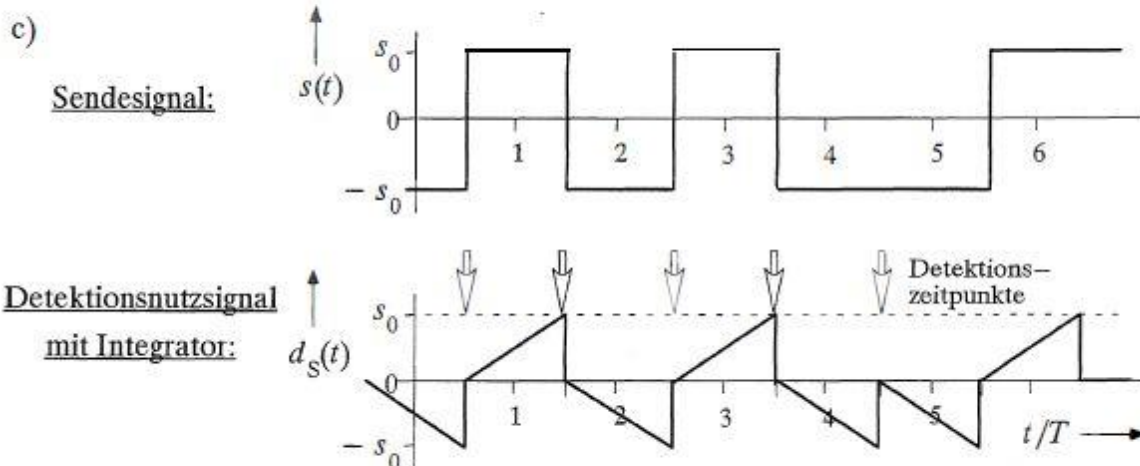
**D3:**

- a) Ohne Störungen ergibt sich aus dem rechteckförmigen Sendesignal  $s(t)$  aufgrund der Faltung mit der (rechteckförmigen) Impulsantwort  $h_{MF}(t)$  des akausalen Matched-Filters ein dreieckförmiges Detektionssignal  $d_S(t)$ . Der optimale Detektionszeitpunkt ist somit  $T_{D,opt} = 0$ . Durch die Störungen  $n(t)$  ist dem Nutzsinal  $d_S(t)$  nun noch ein Störanteil  $d_N(t)$  überlagert, dessen Streuung  $\sigma_d$  jedoch wegen des (Matched-)Filters deutlich kleiner ist als die Streuung  $\sigma_n$  von  $n(t)$ . Bei fehlerfreier Übertragung ist das Sinkensignal  $v(t)$  bis auf eine Zeitverschiebung identisch mit dem Sendesignal  $s(t)$ .
- b) Der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$  ist dreieckförmig. Das Matched-Filter ist hier als akausal angesetzt; deshalb tritt das Impulsmaximum  $s_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf. Ohne Berücksichtigung von Störungen ergibt sich somit das hierfür typische Auge:



Die auf  $s_0$  normierte Augenöffnung ist somit 2. Der Effektivwert der Störungen ergibt sich nach dem Programm zu  $\sigma_d \approx 0.250$ . Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist damit näherungsweise gleich  $p_B = Q(4) \approx 0.317 \cdot 10^{-4}$ . Das Sinken-SNR nach Definition (34) hat näherungsweise den Wert  $2 \cdot E_B/N_0$ .

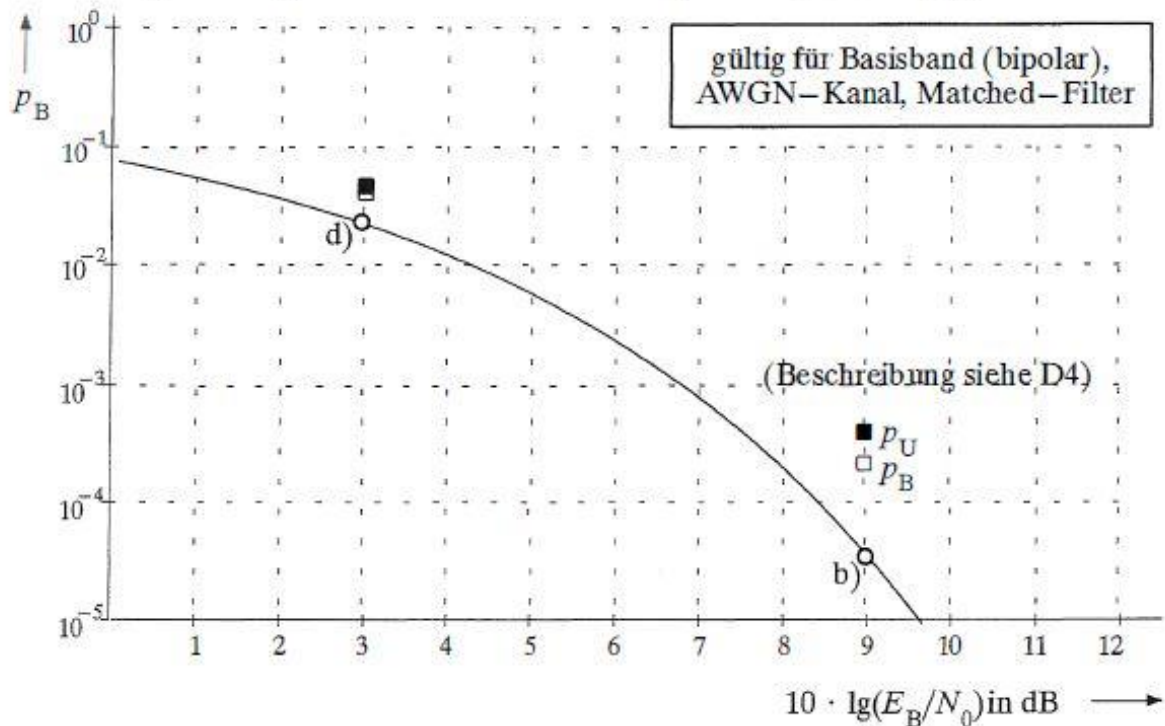
$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\delta(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
9 dB (Punkt b)	2.000	0.126	$0.305 \cdot 10^{-4}$	12.06 dB
3 dB (Punkt e)	2.000	0.498	$0.223 \cdot 10^{-1}$	6.06 dB



Zu den Detektionszeitpunkten ändert sich gegenüber dem Matched-Filter nichts; die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist gegenüber Punkt b) deshalb auch unverändert.



- d) Bezüglich des Nutzsignals ändert sich gegenüber b) nichts. Dagegen ist die Rauschleistungsdichte  $N_0$  am Empfängereingang und damit auch die Rauschleistung am Entscheider nun viermal so groß und der Störeffektivwert  $\sigma_d$  verdoppelt sich. Weiter gilt:  $\rho_d \approx 2 \cdot E_B/N_0$ . Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist gegenüber Punkt b) um fast 3 Zehnerpotenzen größer. Die simulierten Werte passen exakt zu vorgegebener Kurve.



**D4:**

- a) Aufgrund des gaußförmigen Empfangsfilters ist das Detektionsnutzsignal nicht mehr dreieckförmig, sondern hat einen viel weicheren Verlauf. Die Impulsinterferenzen erkennt man daran, daß auch zu den Detektionszeitpunkten die Abstände des Nutzsignals von der Entscheiderschwelle  $E = 0$  unterschiedlich sind. Allerdings ist der Einfluß der Impulsinterferenzen bei dieser Einstellung relativ gering.

b)

$10 \lg(E_B/N_0)$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\rho_U)$
9 dB	1.822	0.267	$0.19 \cdot 10^{-3}$	11.02 dB	$0.32 \cdot 10^{-3}$	10.66 dB
3 dB	1.822	0.533	$0.37 \cdot 10^{-1}$	5.06 dB	$0.44 \cdot 10^{-1}$	4.66 dB

- c) Siehe Skizze bei D3. Die Fehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  des suboptimalen Systems (weiße Rechtecke) liegt stets oberhalb des optimalen Systems (weiße Kreise). Der vertikale Abstand zwischen den weißen Rechtecken und den weißen Kreisen ist um so größer, je kleiner die Fehlerwahrscheinlichkeiten sind, d.h. je größer  $E_B/N_0$  ist. Die schwarzen Rechtecke kennzeichnen die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_U$ , die eine obere Schranke für  $p_B$  angibt. Bei kleinem  $E_B/N_0$  gilt:  $p_B \approx p_U$ .

**D5:**

- a) Das BPSK–Sendesignal  $s(t)$  hat einen Verlauf vergleichbar Bild 16(b). Das Empfangssignal  $r(t)$  erhält man durch die additive Überlagerung des Rauschsignals  $n(t)$ . Dieses stochastische Signal unterscheidet sich vom Rauschsignal  $n(t)$  beim Versuch D3 grundsätzlich, da nun kein TP–Rauschen, sondern BP–Rauschen wirksam ist. Die Mittenfrequenz  $f_M$  des Rauschens ist dabei gleich der Trägerfrequenz  $f_T$ . Nach Zusetzen des empfangsseitigen Trägersignals ergibt sich das Signal  $b(t)$  mit einem Anteil um die doppelte Trägerfrequenz ( $2 \cdot f_T$ ). Das Detektions(nutz)signal nach dem Empfangsfilter ist aufgrund der im Programm verwendeten Amplitude  $\hat{z}_E = 1$  des empfangsseitigen Trägersignals nur halb so groß wie bei der Basisbandübertragung, hat aber ansonsten genau die gleiche Form wie in D4.

b)

$f_E \cdot T$	$\delta(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\rho_U)$
Basisband (vgl. D4)	1.822	0.267	$0.19 \cdot 10^{-3}$	11.02 dB	$0.32 \cdot 10^{-3}$	10.66 dB
BPSK	0.908	0.134	$0.19 \cdot 10^{-3}$	11.00 dB	$0.33 \cdot 10^{-3}$	10,64 dB

Innerhalb der Simulationsgenauigkeit sind die Fehlerwahrscheinlichkeiten der beiden Modulationsverfahren gleich. Da im Programm  $\hat{z}_E = 1$  verwendet wird, unterscheiden sich Augenöffnung und Rauscheffektivwert jeweils um den Faktor 2. Mit  $\hat{z}_E = 2$  wären auch diese Größen gleich.

- c) Bei BPSK gibt es zwei Punktwolken. Da im Programm die Trägerphase  $90^\circ$  beträgt, ist hier die Entscheidungsgrenze die reelle Achse. An den Farben erkennt man die Fehlentscheidungen.
- d) Die beiden Punktwolken sind nun um  $30^\circ$  gedreht. Damit ist der Abstand der einzelnen Punkte von der Entscheidungsschwelle um  $\cos(\Delta\varphi_T)$  kleiner.
- e) Ein Phasenfehler  $\Delta\varphi_T$  bewirkt eine frequenzunabhängige Dämpfung um  $\cos(\Delta\varphi_T)$ . Deshalb ist die Augenöffnung (wie alle Nutzsingnale) um den Faktor  $\cos(\Delta\varphi_T) \approx 0.866$  kleiner. Der Rauscheffektivwert bleibt gleich. Damit verringert sich der Sinkenstörabstand um ca. 1.2 dB.

Phasenabweichung	$\delta(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
$\Delta\varphi_T = 0^\circ$ (Aufgabe b)	0.908	0.134	$0.19 \cdot 10^{-3}$	11.00 dB
$\Delta\varphi_T = 30^\circ$ (Aufgabe e)	0.787	0.134	$0.10 \cdot 10^{-2}$	9.77 dB



**D6:**

- a) Alle Signale sind nun unipolar. Deswegen ist die optimale Entscheiderschwelle auch nicht  $E = 0$ , sondern liegt bei  $E = s_0/4$ . Im Gegensatz zur BPSK hat hier das Sendesignal  $s(t)$  keine konstante Hüllkurve.
- b) Entsprechend der Theorie unterscheiden sich ASK und BPSK um ca. 3 dB. Das ASK-System mit  $E_B/N_0 = 12$  dB hat somit genau die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie das BPSK-System mit  $E_B/N_0 = 9$  dB. Aufgrund der unipolaren Signalisierung unterscheiden sich jedoch Augenöffnung und Rauscheffektivwert jeweils um den Faktor 2.

	$\alpha(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
BPSK ( $E_B/N_0 = 9$ dB)	0.908	0.134	$0.19 \cdot 10^{-3}$	11.00 dB
ASK ( $E_B/N_0 = 12$ dB)	0.457	0.067	$0.17 \cdot 10^{-3}$	11.07 dB

c)

$f_E \cdot T$	$\alpha(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
1.6	0.500	0.094	$0.39 \cdot 10^{-2}$	8.50 dB
0.8	0.457	0.067	$0.17 \cdot 10^{-3}$	11.07 dB
0.4	0.185	0.047	$0.60 \cdot 10^{-2}$	7.99 dB

- d) Aufgrund der unipolaren Signale und  $\hat{z}_E = 1$  liegt die optimale Entscheiderschwelle bei  $E_{opt}/s_0 = 0.25$ . Mit  $E/s_0 = 0.6$  erhöht sich  $p_B$  etwa um eine Größenordnung.
- e) Aufgrund der größeren Grenzfrequenz ist das Einschwingverhalten des Nutzsignals günstiger. Die Augenöffnung ist gleich 0.5. Dies ist bei unipolarer Signalisierung und  $\hat{z}_E = 1$  der maximal mögliche Wert. D.h. bei dieser Grenzfrequenz gibt es quasi keine Impulsinterferenzen und es gilt auch  $p_B \approx p_U$ . Gleichzeitig bedingt die größere Grenzfrequenz aber auch eine schlechtere Rauschunterdrückung ( $\sigma_d$  ist nun um ca. 40% größer). Das Ergebnis dieser gegenläufigen Einflüsse ist ein Anstieg der Fehlerwahrscheinlichkeit um mehr als eine Zehnerpotenz gegenüber dem Optimum ( $f_E \cdot T = 0.8$ ).
- f) Nun ist die Rauschunterdrückung besser; d.h.  $\sigma_d$  ist nun um ca. 30% kleiner als beim Vergleichssystem ( $f_E \cdot T = 0.8$ ). Gleichzeitig schwingt aber aufgrund der zu kleinen Grenzfrequenz das Nutzsinal nur unzureichend ein. Die (normierte) Augenöffnung ist nur mehr 0.185; dies ist der Grund für die relativ hohe Fehlerwahrscheinlichkeit. Aufgrund der großen Impulsinterferenzen ist nun  $p_U$  nur eine grobe Näherung für  $p_B$  (etwa um den Faktor 4 größer).



**D7:**

a) Die Symboldauer  $T$  der Teilsignale  $q_I(t)$  und  $q_Q(t)$  im Inphase – bzw. Quadraturzweig ist doppelt so groß wie die Symboldauer  $T_B$  des Quellensignals  $q(t)$ ;  $T_B$  wird hier mit "Bitdauer" bezeichnet. Das jeweils erste Bit von  $q(t)$  innerhalb von  $T$  wird dem Signal  $q_I(t)$ , das zweite Bit dem Signal  $q_Q(t)$  zugeordnet. Das Signal  $s_I(t)$  ergibt sich aus der Multiplikation eines cos-förmigen Trägers  $z_I(t)$  mit  $q_I(t)$ , das Signal  $s_Q(t)$  aus der Multiplikation eines "minus-sinus"-förmigen Trägers  $z_Q(t)$  mit  $q_Q(t)$ . Die Amplituden beider Orthogonalsignale sind jeweils  $1/\sqrt{2}$ , so daß der Maximalwert des Sendesignals  $s(t)$  wieder  $s_0$  ist. Da  $z_I(t)$  und  $z_Q(t)$  zueinander orthogonal sind, können die beiden Zweige unabhängig voneinander synchrondemoduliert werden. Alle folgenden Nutzsignale unterscheiden sich von denen bei BPSK nur um den Faktor  $1/\sqrt{2}$ .

b) Alle Nutz- und Störsignale sind genau um den Faktor  $1/\sqrt{2}$  kleiner als bei BPSK, dagegen unterscheiden sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten von BPSK und QPSK nicht.

$\Delta\varphi_T = 0^\circ$	$\delta(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
BPSK (Aufgabe D5b)	0.908	0.134	$0.194 \cdot 10^{-3}$	11.00 dB
QPSK/4QAM (Aufgabe D7b)	0.642	0.094	$0.194 \cdot 10^{-3}$	11.00 dB

c) Das Phasendiagramm bestätigt diese Ergebnisse. Bei BPSK gibt es zwei Punktwolken, bei QPSK vier. Gleichzeitig erkennt man die unterschiedliche Entscheidung bei der BPSK (positiver bzw. negativer Imaginärteil) und der QPSK (entsprechend den vier Quadranten). Der Einfluß der Impulsinterferenzen ist bei " $E_B/N_0 = 80$  dB" zusehen: Ohne Rauschen liegen nicht alle Werte auf einen von 4 Punkten. Bei kleinerer Grenzfrequenz wäre dieser Sachverhalt noch deutlicher zu erkennen.

d) Nun sind die Quadranten gegenüber ihren Solllagen verdreht. Wie bei BPSK wird das Nutzsignal um den Faktor  $\cos(\Delta\varphi_T) \approx 0.866$  kleiner. Bei 4QAM wirkt sich der gleiche Phasenfehler jedoch stärker aus, da nicht nur jede Komponente um diesen Faktor kleiner wird, sondern zudem die Augenöffnung auch durch die größer werdende Projektion der Orthogonalkomponente verkleinert wird.

e) Das Ergebnis von Punkt d) wird bestätigt: Bei 4QAM bewirkt die Phasendifferenz eine Vergrößerung der Fehlerwahrscheinlichkeit um mehr als 2 Größenordnungen.

$\Delta\varphi_T = 30^\circ$	$\delta(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\rho_d)$
BPSK (Aufgabe D5e)	0.787	0.134	$0.104 \cdot 10^{-2}$	9.77 dB
QPSK/4QAM (Aufgabe D7e)	0.203	0.094	$0.486 \cdot 10^{-1}$	4.40 dB



## Anhang: Tabellen der Fehlerfunktionen

$x$	$20 \cdot \lg(x)$	$\Phi(x)$	$Q(x)$	$0,5 \cdot \operatorname{erfc}(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi x}} e^{-x^2}$
0.0	$-\infty$ dB	0.500000	0.500000E+00	0.500000E+00	$\infty$
0.2	-13.979 dB	0.579260	0.420740E+00	0.388649E+00	0.135517E+01
0.4	-7.959 dB	0.655422	0.344578E+00	0.285804E+00	0.600963E+00
0.6	-4.437 dB	0.725747	0.274253E+00	0.198072E+00	0.328018E+00
0.	-1.938 dB	0.788145	0.211855E+00	0.128950E+00	0.185933E+00
1.0	0.000 dB	0.841345	0.158655E+00	0.786496E-01	0.103777E+00
1.2	1.584 dB	0.884930	0.115070E+00	0.448430E-01	0.556967E-01
1.4	2.923 dB	0.919243	0.807567E-01	0.238577E-01	0.283824E-01
1.6	4.082 dB	0.945201	0.547993E-01	0.118259E-01	0.136295E-01
1.8	5.105 dB	0.964070	0.359303E-01	0.545475E-02	0.613774E-02
2.0	6.021 dB	0.977250	0.227504E-01	0.233887E-02	0.258337E-02
2.2	6.848 dB	0.986097	0.139035E-01	0.931423E-03	0.101388E-02
2.4	7.604 dB	0.991802	0.819755E-02	0.344257E-03	0.370380E-03
2.6	8.299 dB	0.995339	0.466119E-02	0.118017E-03	0.125774E-03
2.8	8.943 dB	0.997445	0.255513E-02	0.375066E-04	0.396614E-04
3.0	9.542 dB	0.998650	0.134990E-02	0.110453E-04	0.116044E-04
3.2	10.103 dB	0.999313	0.687138E-03	0.301288E-05	0.314825E-05
3.4	10.630 dB	0.999663	0.336929E-03	0.760996E-06	0.791538E-06
3.6	11.126 dB	0.999841	0.159109E-03	0.177931E-06	0.184347E-06
3.8	11.596 dB	0.999928	0.723480E-04	0.385020E-07	0.397557E-07
4.0	12.041 dB	0.999968	0.316713E-04	0.770863E-08	0.793640E-08
4.2	12.465 dB	0.999987	0.133457E-04	0.142774E-08	0.146619E-08
4.4	12.869 dB	0.999995	0.541254E-05	0.244585E-09	0.250611E-09
4.6	13.255 dB	0.999998	0.211246E-05	0.387480E-10	0.396247E-10
4.8	13.625 dB	0.999999	0.793328E-06	0.567606E-11	0.579440E-11
5.0	13.979 dB	1.000000	0.286652E-06	0.768730E-12	0.783543E-12
5.2	14.320 dB	1.000000	0.996443E-07	0.962455E-13	0.979642E-13
5.4	14.648 dB	1.000000	0.333204E-07	0.111384E-13	0.113233E-13
5.6	14.964 dB	1.000000	0.107176E-07	0.119142E-14	0.120985E-14
5.8	15.269 dB	1.000000	0.331574E-08	0.117780E-15	0.119481E-15
6.0	15.563 dB	1.000000	0.986589E-09	0.107599E-16	0.109054E-16
6.2	15.848 dB	1.000000	0.282316E-09	0.908340E-18	0.919860E-18
6.4	16.124 dB	1.000000	0.776883E-10	0.708539E-19	0.716989E-19
6.6	16.391 dB	1.000000	0.205579E-10	0.510666E-20	0.516397E-20
6.8	16.650 dB	1.000000	0.523095E-11	0.340042E-21	0.343644E-21
7.0	16.902 dB	1.000000	0.127981E-11	0.209191E-22	0.211284E-22
7.2	17.147 dB	1.000000	0.301063E-12	0.118891E-23	0.120015E-23
7.4	17.385 dB	1.000000	0.680922E-13	0.624192E-25	0.629792E-25
7.6	17.616 dB	1.000000	0.148065E-13	0.302727E-26	0.305304E-26
7.8	17.842 dB	1.000000	0.309536E-14	0.135621E-27	0.136717E-27
8.0	18.062 dB	1.000000	0.622097E-15	0.561215E-29	0.565533E-29
8.2	18.276 dB	1.000000	0.120194E-15	0.214511E-30	0.216084E-30
8.4	18.486 dB	1.000000	0.223240E-16	0.757313E-32	0.762593E-32
8.6	18.690 dB	1.000000	0.398579E-17	0.246937E-33	0.248584E-33
8.8	18.890 dB	1.000000	0.684079E-18	0.743680E-35	0.748421E-35
9.0	19.085 dB	1.000000	0.112859E-18	0.206852E-36	0.208113E-36
9.2	19.276 dB	1.000000	0.178976E-19	0.531368E-38	0.534471E-38
9.4	19.463 dB	1.000000	0.272817E-20	0.126064E-39	0.126766E-39
9.6	19.645 dB	1.000000	0.399722E-21	0.276196E-41	0.277737E-41
9.8	19.825 dB	1.000000	0.562928E-22	0.560519E-43	0.560519E-43



Die vorherige Tabelle gilt für äquidistante  $x$ -Werte, die folgende für äquidistante dB-Werte.

$x$	$20 \cdot \lg(x)$	$\phi(x)$	$Q(x)$	$0,5 \cdot \operatorname{erfc}(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}x} e^{-x^2}$
1.000	0.00 dB	0.841345	0.158655E+00	0.786496E-01	0.103777E+00
1.029	0.25 dB	0.848307	0.151693E+00	0.727642E-01	0.950314E-01
1.059	0.50 dB	0.855258	0.144742E+00	0.670652E-01	0.867179E-01
1.090	0.75 dB	0.862184	0.137816E+00	0.615667E-01	0.788379E-01
1.122	1.00 dB	0.869073	0.130927E+00	0.562820E-01	0.713922E-01
1.155	1.25 dB	0.875910	0.124090E+00	0.512231E-01	0.643805E-01
1.189	1.50 dB	0.882682	0.117318E+00	0.464013E-01	0.578013E-01
1.223	1.75 dB	0.889374	0.110626E+00	0.418262E-01	0.516521E-01
1.259	2.00 dB	0.895971	0.104029E+00	0.375061E-01	0.459288E-01
1.296	2.25 dB	0.902458	0.975417E-01	0.334476E-01	0.406256E-01
1.334	2.50 dB	0.908820	0.911804E-01	0.296553E-01	0.357354E-01
1.372	2.75 dB	0.915040	0.849600E-01	0.261321E-01	0.312490E-01
1.413	3.00 dB	0.921104	0.788959E-01	0.228786E-01	0.271559E-01
1.454	3.25 dB	0.926997	0.730031E-01	0.198936E-01	0.234433E-01
1.496	3.50 dB	0.932704	0.672961E-01	0.171734E-01	0.200970E-01
1.540	3.75 dB	0.938211	0.617891E-01	0.147111E-01	0.171010E-01
1.585	4.00 dB	0.943505	0.564953E-01	0.125009E-01	0.144377E-01
1.631	4.25 dB	0.948573	0.514269E-01	0.105323E-01	0.120881E-01
1.679	4.50 dB	0.953405	0.465951E-01	0.879383E-02	0.100320E-01
1.728	4.75 dB	0.957990	0.420097E-01	0.727250E-02	0.824821E-02
1.778	5.00 dB	0.962321	0.376790E-01	0.595387E-02	0.671483E-02
1.830	5.25 dB	0.966390	0.336096E-01	0.482252E-02	0.540952E-02
1.884	5.50 dB	0.970194	0.298063E-01	0.386224E-02	0.430983E-02
1.939	5.75 dB	0.973728	0.262719E-01	0.305640E-02	0.339355E-02
1.995	6.00 dB	0.976993	0.230074E-01	0.238829E-02	0.263899E-02
2.054	6.25 dB	0.979989	0.200113E-01	0.184142E-02	0.202531E-02
2.113	6.50 dB	0.982720	0.172803E-01	0.139980E-02	0.153275E-02
2.175	6.75 dB	0.985192	0.148075E-01	0.104828E-02	0.114294E-02
2.239	7.00 dB	0.987413	0.125871E-01	0.772675E-03	0.839009E-03
2.304	7.25 dB	0.989391	0.106087E-01	0.560054E-03	0.605749E-03
2.371	7.50 dB	0.991139	0.886107E-02	0.398796E-03	0.429712E-03
2.441	7.75 dB	0.992669	0.733107E-02	0.278682E-03	0.299204E-03
2.512	8.00 dB	0.993996	0.600439E-02	0.190908E-03	0.204260E-03
2.585	8.25 dB	0.995134	0.486564E-02	0.128054E-03	0.136557E-03
2.661	8.50 dB	0.996101	0.389863E-02	0.839995E-04	0.892946E-04
2.738	8.75 dB	0.996913	0.308676E-02	0.538158E-04	0.570355E-04
2.818	9.00 dB	0.997587	0.241331E-02	0.336273E-04	0.355362E-04
2.901	9.25 dB	0.998138	0.186176E-02	0.204635E-04	0.215656E-04
2.985	9.50 dB	0.998584	0.141612E-02	0.121089E-04	0.127275E-04
3.073	9.75 dB	0.998939	0.106116E-02	0.695578E-05	0.729274E-05
3.162	10.00 dB	0.999217	0.782701E-03	0.387211E-05	0.404995E-05
3.255	10.25 dB	0.999432	0.567725E-03	0.208500E-05	0.217578E-05
3.350	10.50 dB	0.999595	0.404562E-03	0.108385E-05	0.112858E-05
3.447	10.75 dB	0.999717	0.282936E-03	0.542794E-06	0.564021E-06