

## Überblick zu Kapitel 4

Im Kapitel 3 wurden meist stillschweigend tiefpassartige Signale vorausgesetzt, das heißt solche Signale, deren Spektralfunktionen im Bereich um die Frequenz  $f = 0$  liegen. Insbesondere bei der optischen Übertragung und bei Funkübertragungssystemen – aber nicht nur hier – liegen die Sendesignale jedoch in einem engen Bereich um eine Trägerfrequenz  $f_T$ . Solche Signale bezeichnet man als **Bandpass-Signale**.

Alle im Kapitel 3 dargelegten Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation und -rücktransformation gelten für bandpassartige Signale in gleicher Weise. Daneben gibt es aber auch einige Besonderheiten der Bandpass-Signale, deren Beachtung zu einer einfacheren Beschreibung führen.

Dieses Kapitel beinhaltet im Einzelnen:

- die Aufzählung von *Unterschieden* und *Gemeinsamkeiten* von TP- und BP-Signalen,
- die *Synthese* von Bandpass-Signalen aus dem äquivalenten Tiefpass-Signal,
- das *analytische Signal* und die zugehörige Spektralfunktion,
- das *äquivalente Tiefpass-Signal* im Zeit- und Frequenzbereich, und schließlich
- die Darstellung von analytischem Signal und äquivalentem TP-Signal in der *komplexen Ebene*.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 27 Bildschirmseiten mit Gleichungen, Bildern und Beispielen verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch 47 Grafiken, 8 Aufgaben und 6 Zusatzaufgaben mit insgesamt 53 Teilaufgaben sowie ein Lernvideo (LV) und zwei Interaktionsmodule (IM), nämlich:

- **Eigenschaften von TP- und BP-Signalen** (LV zu Kap. 4.1, Dateigröße 1.76 MB, Dauer 5:16)
- **Zeigerdiagramm – Darstellung des analytischen Signals** (IM zu Kap. 4.2 – Größe 196 kB)
- **Ortskurve – Darstellung des äquivalenten TP-Signals** (IM zu Kap. 4.3 – Größe 205 kB)

**Literatur:** [Hag02] – [Hay83] – [KI89] – [Lük04] – [Mar94] – [Schü91a] – [Schü91b] – [Söd01]

Weitere Informationen zu diesem Thema sowie Aufgaben und Simulationen finden Sie im ersten Versuch (Analoge Modulationsverfahren) des Praktikums „Simulation digitaler Übertragungssysteme“ von Prof. Söder. Diese Lehrveranstaltung basiert auf einem Windows-Programm des Softwarepakets *LNTwin*.

**Hinweise zum Herunterladen der Texte und Programme von *LNTwin***

## Bedeutung der Bandpass-Signale für die Nachrichtentechnik

In den Kapiteln 2 und 3 dieses Buches wurden bisher fast nur **tiefpassartige Signale** betrachtet, deren Spektralfunktionen in einem engen Bereich um die Frequenz  $f = 0$  liegen. Beispiele hierfür sind analoge Sprach-, Musik- und Bildsignale, die man alle – trotz ihrer unterschiedlichen Bandbreiten – als Tiefpass-Signale bezeichnen kann.

Will man ein solches Tiefpass-Signal zu einer räumlich entfernten Sinke übertragen, so muss das Signal unter Umständen in eine andere Frequenzlage umgesetzt werden. Dafür kann es mehrere Gründe geben:

- Der Übertragungskanal ist häufig für die direkte Übertragung des Originalsignals ungeeignet, da dieses für ihn ungünstige Frequenzen beinhaltet. Erst durch eine Frequenzverschiebung mittels einer so genannten **Modulation** wird eine Übertragung ermöglicht.
- Man kann einen einzigen Übertragungskanal auch zur gleichzeitigen Übertragung mehrerer Signale nutzen, wenn diese sendeseitig mit verschiedenen Trägerfrequenzen moduliert werden. Man nennt dieses Verfahren **Frequenzmultiplex** (englisch: *Frequency Division Multiple Access*, FDMA).
- Die Übertragungsqualität kann auf Kosten einer größeren Bandbreite gegenüber dem einfachsten Verfahren (Amplitudenmodulation) verbessert und so ein größeres **Signal-zu-Rauschverhältnis** erzielt werden. Beispiele hierfür sind FM (Frequenzmodulation), Pulsmodulation (PCM) und Spread-Spectrum-Systeme.
- Die Sendesignale der meisten Übertragungsverfahren sind somit **Bandpass-Signale**.

**Hinweis:** Den Autoren ist durchaus bewusst, dass es nach der neuen Rechtschreibung „Tiefpasssignal“ und „Bandpasssignal“ heißen müsste. Um diese unschönen Konstrukte zu vermeiden, verwenden wir im Folgenden meist die Schreibweisen „TP-Signal“ und „BP-Signal“.

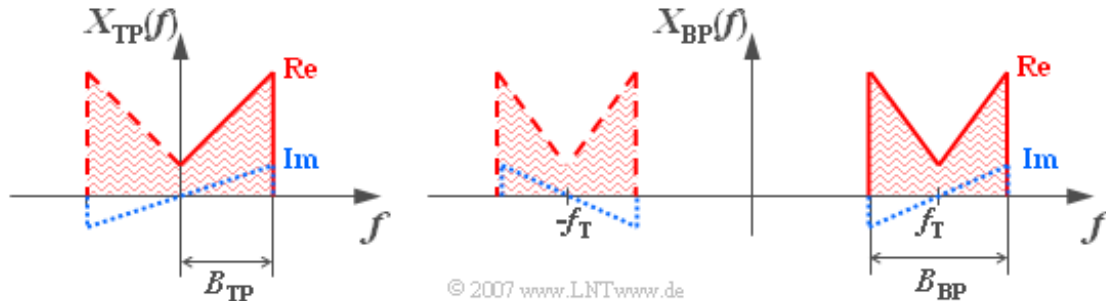
**Beispiele:** Sprache/Musik und TV-Bildsignale sind TP-Signale mit einer Bandbreite von 20 kHz (bei sehr guter Qualität) bzw. 5 MHz. Da Funkübertragung erst ab ca. 100 kHz möglich ist, erfolgt bei der Ton- und Bildübertragung vorher jeweils eine Umsetzung auf Trägerfrequenzen zwischen

- 0.525 ... 1.61 MHz (Rundfunk auf Mittelwelle, Amplitudenmodulation, Kanalabstand 9 kHz),
- 87.5 ... 108 MHz (Rundfunk auf UKW, Frequenzmodulation, Kanalabstand 300 kHz),
- 41 ... 68 / 174 ... 230 MHz (Fernsehen, VHF-Band, Kanalabstand 7 MHz),
- 470 ... 850 MHz (Fernsehen, UHF-Band, Kanalabstand 8 MHz).

Beim *GSM-Mobilfunk* liegt die Trägerfrequenz bei 900 MHz (D-Band) bzw. 1800 MHz (E-Band). Bei *optischer Übertragung* erfolgt eine Umsetzung der elektrischen Signale in Licht, das heißt auf Frequenzen zwischen ca. 200 und 350 THz (entsprechend 1.55 ... 0.85  $\mu\text{m}$  Wellenlänge).

## Eigenschaften von Bandpass-Signalen (1)

Nun werden einige Eigenschaften von BP-Signalen ohne Anspruch auf Vollständigkeit zusammengestellt und den TP-Signalen vergleichend gegenübergestellt. Dabei gehen wir von den Spektralfunktionen  $X_{TP}(f)$  und  $X_{BP}(f)$  gemäß der nachfolgenden Skizze aus.



Zu dieser Grafik ist Folgendes anzumerken:

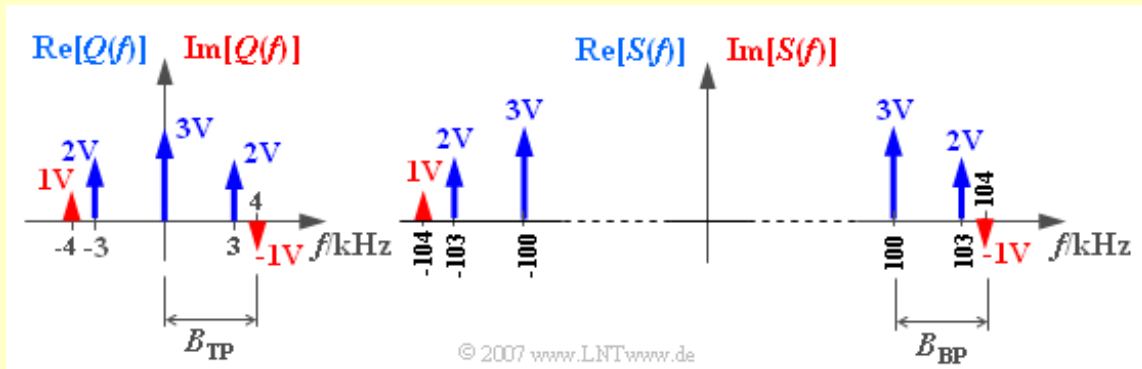
- Die Dreiecksform der dargestellten Spektren ist rein schematisch und kennzeichnet nur das belegte Frequenzband. Daraus sollte nicht geschlossen werden, dass die Spektralwerte linear mit der Frequenz zunehmen und dass alle Frequenzen innerhalb des Bandes tatsächlich belegt sind.
- Die dazugehörigen Zeitfunktionen  $x_{TP}(t)$  und  $x_{BP}(t)$  seien reell. Das bedeutet, dass nach dem **Zuordnungssatz** die Spektralfunktionen  $X_{TP}(f)$  und  $X_{BP}(f)$  jeweils einen geraden Realteil und einen ungeraden Imaginärteil besitzen – jeweils bezogen auf die Frequenz  $f=0$ .
- Als Bandbreite  $B_{TP}$  bzw.  $B_{BP}$  bezeichnen wir jeweils das belegte Frequenzband bei den positiven Frequenzen (durchgezogene Kurvenverläufe).

## Eigenschaften von Bandpass-Signalen (2)

**Beispiel:** Die nachfolgende linke Grafik zeigt das Spektrum  $Q(f)$  des Nachrichtensignals

$$q(t) = 3\text{ V} + 4\text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 3\text{ kHz} \cdot t) + 2\text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 4\text{ kHz} \cdot t).$$

Rechts dargestellt ist das Spektrum  $S(f)$  nach einer Einseitenband-Amplitudenmodulation (ESB-AM) mit der Trägerfrequenz  $f_T = 100\text{ kHz}$ . Eine eingehende Beschreibung dieses Übertragungssystems finden Sie im **Kapitel 2.3** des Buches „Modulationsverfahren“.



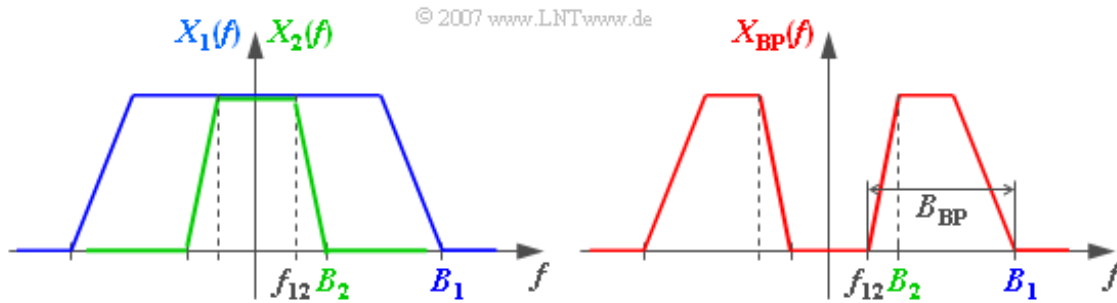
Entsprechend dieser Systembeschreibung ist  $q(t)$  eindeutig ein TP-Signal, während  $s(t)$  ein BP-Signal darstellt. Die Bandbreiten sind jeweils  $B_{TP} = B_{BP} = 4\text{ kHz}$ . Die Signale  $q(t)$  und  $s(t)$  sind zudem reell, da sowohl  $Q(f)$  als auch  $S(f)$  einen geraden Real- und einen ungeraden Imaginärteil aufweisen.

Würde beim Signal  $q(t)$  der Gleichanteil (3 V) fehlen, so würde man dieses Signal sinnvollerweise noch immer als tiefpassartig bezeichnen. Ohne Kenntnis der Aufgabenstellung könnte man  $q(t)$  dann aber auch als BP-Signal mit der Bandbreite  $B_{BP} = 1\text{ kHz}$  auffassen.

Dieses Beispiel soll zeigen, dass es kein eindeutiges mathematisches Unterscheidungsmerkmal zwischen Tiefpass- und Bandpass-Signalen gibt.

## Beschreibung eines BP-Signals mittels TP-Signalen

Wir betrachten nun zwei verschiedene TP-Spektren  $X_1(f)$  und  $X_2(f)$  mit den Bandbreiten  $B_1$  und  $B_2$ .



Aus dieser Grafik ist zu erkennen:

- Sind die beiden Spektralfunktionen bis zu einer Frequenz  $f_{12}$  identisch, so beschreibt die Differenz

$$X_{BP}(f) = X_1(f) - X_2(f)$$

ein Bandpass-Spektrum mit der Bandbreite  $B_{BP} = B_1 - f_{12}$  (siehe rechte Grafik).

- Aufgrund der Linearität der Fouriertransformation gilt für die dazugehörige Zeitfunktion:

$$x_{BP}(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

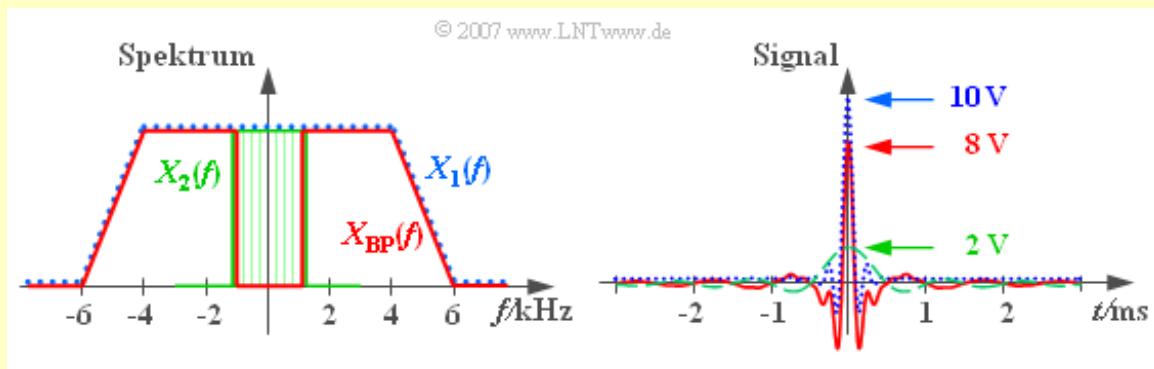
- Wegen  $X_{BP}(f=0) = 0$  verschwindet bei jedem BP-Signal das Integral über die Zeitfunktion:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_{BP}(t) dt = 0.$$

**Beispiel:** Die Grafik zeigt (jeweils in Rot) das BP-Spektrum  $X_{BP}(f)$  und die zugehörige Zeitfunktion

$$\begin{aligned} x_{BP}(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ &= 10 \text{ V} \cdot \text{si}(\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot t) \cdot \text{si}(\pi \cdot 2 \text{ kHz} \cdot t) - 2 \text{ V} \cdot \text{si}(\pi \cdot 2 \text{ kHz} \cdot t). \end{aligned}$$

Ebenfalls dargestellt sind in der Skizze die beiden TP-Spektren und -Signale.



Man erkennt aus diesen Bildern:

- Die blau-gepunktete Kurve stellt das trapezförmige Spektrum  $X_1(f)$  dar, wobei die äquivalente Bandbreite  $\Delta f_1 = 10 \text{ kHz}$  beträgt und der Rolloff-Faktor  $r_1 = 0.2$ .
- Die grüne Kurve gilt für das rechteckförmige Spektrum  $X_2(f)$  mit der äquivalenten Bandbreite

$\Delta f_2 = 2$  kHz, dessen Zeitsignal si-förmig verläuft.

- Die Differenz zwischen blauer und grüner Kurve ergibt in beiden Bereichen die jeweils roten Kurvenverläufe.

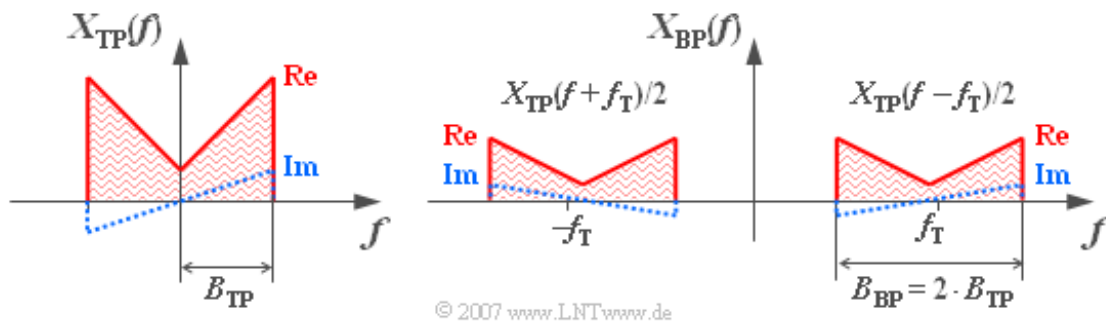
## Synthese von BP-Signalen aus dem äquivalenten TP-Signal (1)

Ist  $x_{TP}(t)$  ein reelles TP-Signal, so beschreibt der Funktionsverlauf

$$x_{BP}(t) = x_{TP}(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t) \quad \Rightarrow \text{Herleitung}$$

ein BP-Signal, dessen Einhüllende durch den Betrag  $|x_{TP}(t)|$  gegeben ist. Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Aussage ist, dass die Trägerfrequenz  $f_T$  mindestens um den Faktor 2 größer als die maximale Frequenz ( $B_{TP}$ ) des Signals  $x_{TP}(t)$  ist.

Anwendung findet dieses Prinzip zum Beispiel bei der *Amplitudenmodulation ohne Träger*, die im Buch **Modulationsverfahren – Kapitel 2.1** eingehend behandelt wird.



Die Grafik beschreibt den Sachverhalt im Frequenzbereich. Man erkennt:

- Das Spektrum  $X_{BP}(f)$  hat im Bereich um die Trägerfrequenz  $f_T$  die gleiche Form wie  $X_{TP}(f)$  im Bereich um  $f = 0$ , ist aber gegenüber diesem um den Faktor 2 gedämpft.
- Da das TP-Spektrum  $X_{TP}(f)$  bezogen auf die Frequenz  $f = 0$  stets einen geraden Real- und einen ungeraden Imaginärteil besitzt, weist das BP-Spektrum  $X_{BP}(f)$  – bezogen auf die Trägerfrequenz  $f_T$  – die gleichen Symmetrieeigenschaften auf.
- Auch das BP-Spektrum  $X_{BP}(f)$  besitzt natürlich Anteile bei negativen Frequenzen. Da das zugehörige Signal  $x_{BP}(t)$  gemäß obiger Gleichung ebenfalls reell ist, muss deshalb auch  $X_{BP}(f)$  bezüglich der Frequenz  $f = 0$  einen geraden Real- und einen ungeraden Imaginärteil besitzen.
- Die Bandbreite des BP-Signals ist doppelt so groß wie die des TP-Signals:  $B_{BP} = 2 \cdot B_{TP}$ .

*Hinweis:* Die Thematik dieses Abschnitts wird auch in folgendem Lehrvideo veranschaulicht.

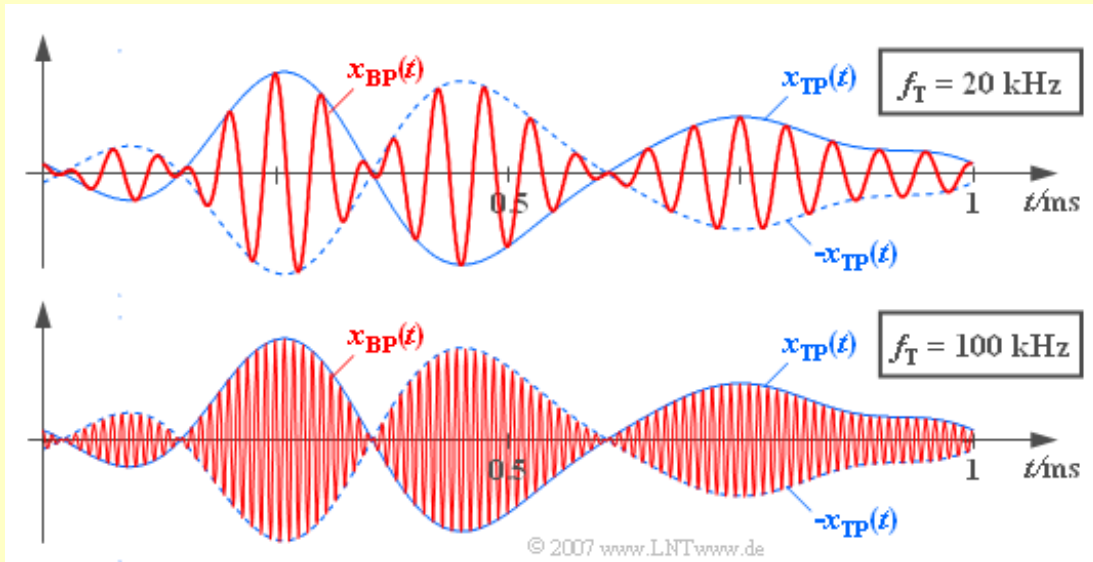
**Eigenschaften von Tiefpass- und Bandpass-Signalen** (Dateigröße 1.76 MB, Dauer 5:16)

## Synthese von BP-Signalen aus dem äquivalenten TP-Signal (2)

**Beispiel:** Ein TP-Signal besitze Anteile bei  $f_1 = 1$  kHz,  $f_2 = 2$  kHz,  $f_3 = 3$  kHz und  $f_4 = 4$  kHz:

$$x_{TP}(t) = 0.26 \cdot \cos(\omega_1 t + 20^\circ) + 0.54 \cdot \cos(\omega_2 t - 180^\circ) + 0.30 \cdot \cos(\omega_3 t + 120^\circ) + 0.14 \cdot \cos(\omega_4 t - 40^\circ).$$

Das dazugehörige Spektrum  $X_{TP}(f)$  ist wegen der von 0 verschiedenen Phasenlagen komplex.



Multipliziert man  $x_{TP}(t)$  mit einem Cosinussignal der Amplitude 1 und der Frequenz  $f_T = 20$  kHz, so ergibt sich das BP-Signal entsprechend dem oberen Bild. Das untere Bild gilt für das BP-Signal mit der Trägerfrequenz  $f_T = 100$  kHz. In beiden Bildern sind die Funktionsverläufe  $\pm|x_{TP}(t)|$  als Einhüllende der BP-Signale zu erkennen.

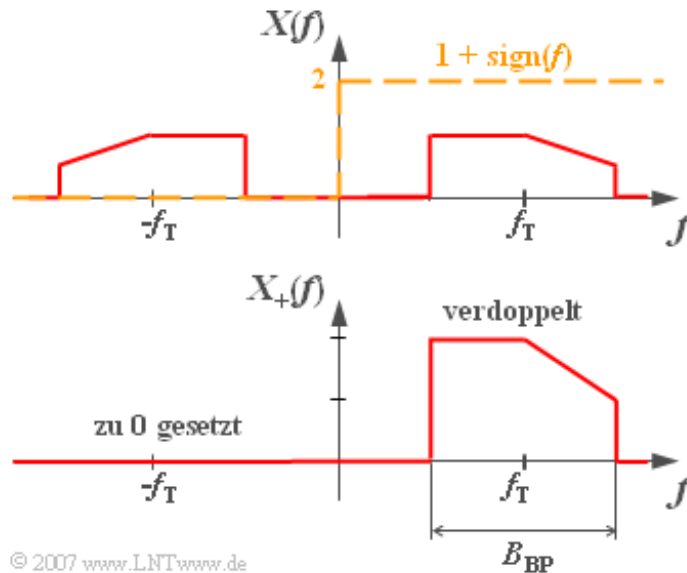
## Definition im Frequenzbereich

Wir betrachten ein reelles bandpassartiges Signal  $x(t)$  mit dem dazugehörigen BP-Spektrum  $X(f)$ , das bezüglich des Frequenznullpunktes einen geraden Real- und einen ungeraden Imaginärteil besitzt. Es wird vorausgesetzt, dass die Trägerfrequenz  $f_T$  sehr viel größer als die Bandbreite des BP-Signals  $x(t)$  ist.

**Definition:** Das zu  $x(t)$  gehörige **analytische Signal**  $x_+(t)$  ist diejenige Zeitfunktion, deren Spektrum folgende Eigenschaft erfüllt:

$$X_+(f) = (1 + \text{sign}(f)) \cdot X(f) = \begin{cases} 2 \cdot X(f) & \text{für } f > 0, \\ 0 & \text{für } f < 0. \end{cases}$$

Die so genannte **Signumfunktion** ist dabei für positive Werte von  $f$  gleich  $+1$  und für negative  $f$ -Werte gleich  $-1$ . Der Grenzwert liefert  $\text{sign}(0) = 0$ .

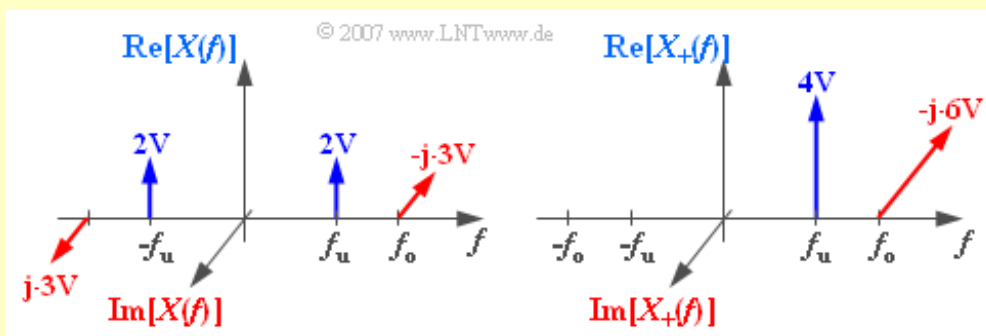


Man erkennt aus obiger Grafik die Berechnungsvorschrift für  $X_+(f)$ : Das tatsächliche BP-Spektrum  $X(f)$  wird bei positiven Frequenzen verdoppelt und bei negativen Frequenzen zu Null gesetzt. Der Index „+“ soll deutlich machen, dass das analytische Signal nur Anteile bei positiven Frequenzen aufweist.

**Beispiel:** Das nachfolgende Bild zeigt links das Spektrum  $X(f)$  des BP-Signals

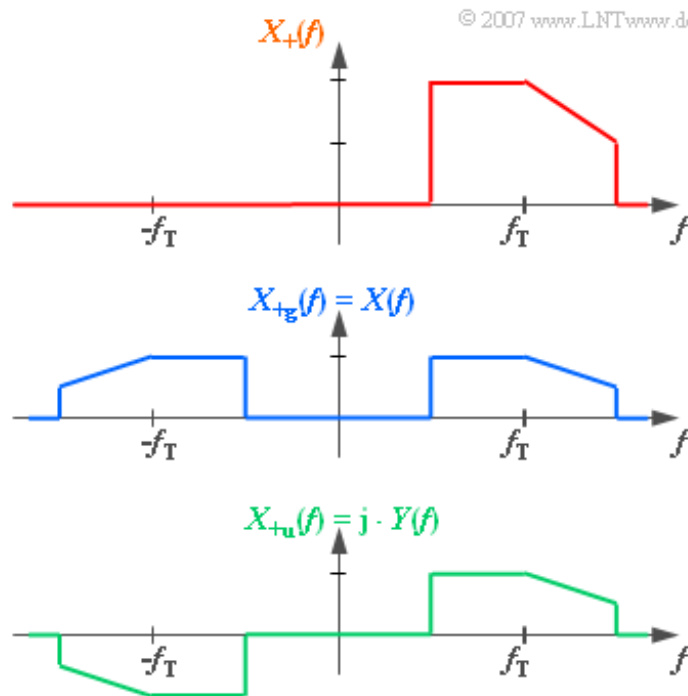
$$x(t) = 4 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_u t) + 6 \text{ V} \cdot \sin(2\pi f_o t).$$

Rechts daneben ist das Spektrum des dazugehörigen analytischen Signals dargestellt.



## Allgemeingültige Berechnungsvorschrift im Zeitbereich (1)

Betrachten wir das Spektrum  $X_+(f)$  etwas genauer und teilen dieses in einen bezüglich  $f = 0$  geraden und einen ungeraden Anteil auf:  $X_+(f) = X_{+g}(f) + X_{+u}(f)$ . Alle diese Spektren sind im Allgemeinen komplex.



Berücksichtigt man den **Zuordnungssatz** der Fouriertransformation, so sind anhand des obigen Bildes folgende Aussagen möglich:

- Der gerade Anteil  $X_{+g}(f)$  führt nach der Fouriertransformation zu einem rein reellen Zeitsignal, der ungerade Anteil  $X_{+u}(f)$  zu einem rein imaginären.
- Es ist offensichtlich, dass  $X_{+g}(f)$  gleich dem tatsächlichen Fourierpektrum  $X(f)$  und damit der Realteil von  $x_+(t)$  gleich dem vorgegebenen BP-Signal  $x(t)$  ist.
- Bezeichnen wir den Imaginärteil mit  $y(t)$ , so lautet das analytische Signal:

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot y(t).$$

- Nach den Gesetzen der Fouriertransformation entsprechend Kapitel 3.3 gilt somit für die Spektralfunktion des Imaginärteils:

$$j \cdot Y(f) = X_{+u}(f) = \text{sign}(f) \cdot X(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{\text{sign}(f)}{j} \cdot X(f).$$

- Transformiert man diese Gleichung in den Zeitbereich, so wird aus der Multiplikation die Faltung und man erhält:

$$y(t) = \frac{1}{\pi t} \star x(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

## Allgemeingültige Berechnungsvorschrift im Zeitbereich (2)

An dieser Stelle ist es erforderlich, kurz auf eine weitere Spektraltransformation einzugehen, die im Buch „Lineare zeitvariante Systeme“ noch eingehend behandelt wird.

**Definition:** Für die **Hilberttransformierte**  $H\{ \dots \}$  einer Zeitfunktion  $x(t)$  gilt:

$$y(t) = H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Dieses bestimmte Integral ist nicht auf einfache, herkömmliche Art lösbar, sondern muss mit Hilfe des Cauchy-Hauptwertsatzes ausgewertet werden. Entsprechend gilt im Frequenzbereich:

$$Y(f) = -j \cdot \text{sign}(f) \cdot X(f).$$

Das Ergebnis der letzten Seite lässt sich mit dieser Definition wie folgt zusammenfassen:

- Man erhält aus dem realen, physikalischen BP-Signal  $x(t)$  das analytische Signal  $x_+(t)$ , indem man zu  $x(t)$  einen Imaginärteil entsprechend der Hilberttransformierten hinzufügt:

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot H\{x(t)\}.$$

- Die Hilberttransformierte  $H\{x(t)\}$  verschwindet nur für das Gleichsignal  $x(t) = \text{const}$ . Bei allen anderen Signalformen ist das analytische Signal  $x_+(t)$  somit stets komplex.
- Aus dem analytischen Signal  $x_+(t)$  kann das reale BP-Signal in einfacher Weise ermittelt werden:

$$x(t) = \text{Re}\{x_+(t)\}.$$

## Zeigerdiagrammdarstellung der harmonischen Schwingung

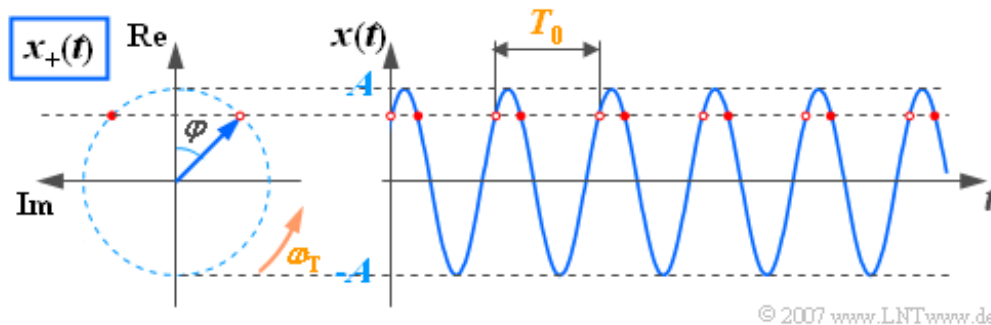
Die Spektralfunktion  $X(f)$  einer **harmonischen Schwingung**  $A \cdot \cos(2\pi f_T t - \varphi)$  besteht bekanntlich aus zwei Diracfunktionen bei den Frequenzen  $\pm f_T$ , jeweils mit komplexen Gewichten  $A/2 \cdot \exp(\pm j \cdot \varphi)$ . Somit lautet das Spektrum des analytischen Signals:

$$X_+(f) = A \cdot e^{-j\varphi} \cdot \delta(f - f_T).$$

Die dazugehörige Zeitfunktion kann durch Anwendung des **Verschiebungssatzes** berechnet werden:

$$x_+(t) = A \cdot e^{j(2\pi f_T t - \varphi)}.$$

Diese Gleichung beschreibt einen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T = 2\pi f_T$  drehenden Zeiger. Aus Darstellungsgründen ist im folgenden Bild die komplexe Ebene entgegen der üblichen Darstellung um  $90^\circ$  nach links gedreht.



Anhand dieses Bildes sind folgende Aussagen möglich:

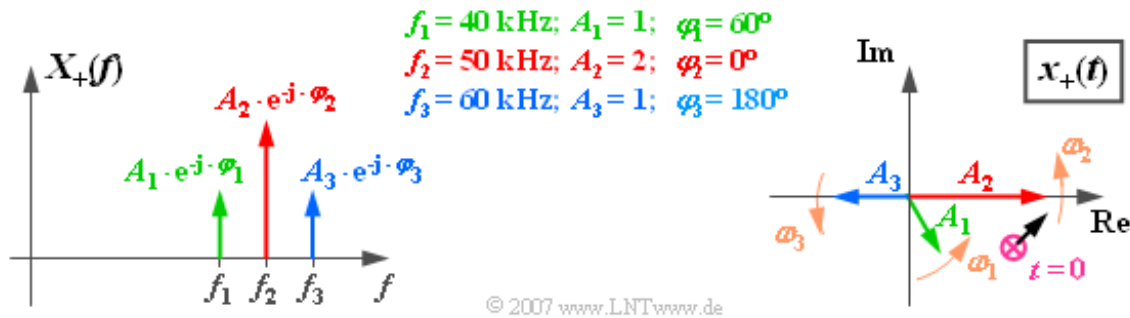
- Zum Startzeitpunkt  $t = 0$  liegt der Zeiger, dessen Länge die Signalamplitude  $A$  kennzeichnet, mit dem Winkel  $-\varphi$  in der komplexen Ebene. Im obigen Bild gilt  $\varphi = 45^\circ$ .
- Für Zeiten  $t > 0$  dreht der Zeiger mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz)  $\omega_T$  in mathematisch positiver Richtung, das heißt entgegen dem Uhrzeigersinn.
- Die Spitze des Zeigers liegt auf einem Kreis mit Radius  $A$  und benötigt für eine Umdrehung genau die Zeit  $T_0$ , also die Periodendauer.
- Die Projektion des analytischen Signals  $x_+(t)$  auf die reelle Achse liefert die Augenblickswerte des tatsächlichen, reellen BP-Signals  $x(t)$ .

## Zeigerdiagramm einer Summe harmonischer Schwingungen

Für die nachfolgende Beschreibung gehen wir von folgendem Spektrum des analytischen Signals aus:

$$X_+(f) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i} \cdot \delta(f - f_i).$$

Das linke Bild zeigt ein solches Spektrum für das Beispiel  $I = 3$ . Wählt man  $I$  relativ groß und den Abstand zwischen benachbarten Spektrallinien entsprechend klein, so können mit obiger Gleichung aber auch kontinuierliche Spektralfunktionen angenähert werden.



Im rechten Bild ist die dazugehörige Zeitfunktion dargestellt. Diese lautet allgemein:

$$x_+(t) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{j(\omega_i \cdot t - \varphi_i)}.$$

Zu dieser Grafik ist Folgendes anzumerken:

- Die Skizze zeigt die Ausgangslage der Zeiger zum Zeitpunkt  $t = 0$  entsprechend den Amplituden  $A_i$  und Phasenlagen  $\varphi_i$ .
- Die Spitze des resultierenden Zeigerverbundes ist durch das violette Kreuz markiert. Man erhält durch vektorielle Addition der drei Einzelzeiger für den Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$x_+(t) = 1 \cdot \cos(60^\circ) - 1 \cdot j \cdot \sin(60^\circ) + 2 - 1 = 1.500 - j \cdot 0.866.$$

- Für Zeiten  $t > 0$  drehen die drei Zeiger mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_i = 2\pi f_i$ . Der rote Zeiger dreht schneller als der grüne, aber langsamer als der blaue Zeiger.
- Da alle Zeiger entgegen dem Uhrzeigersinn drehen, wird sich auch der resultierende Zeiger  $x_+(t)$  tendenziell in diese Richtung bewegen. Beispielsweise liegt die Spitze des resultierenden Zeigers für die angegebenen Parameterwerte zum Zeitpunkt  $t = 1 \mu\text{s}$  bei

$$\begin{aligned} x_+(t = 1 \mu\text{s}) &= 1 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \cdot e^{j 2\pi \cdot 40 \cdot 0.001} + 2 \cdot e^{j 2\pi \cdot 50 \cdot 0.001} - 1 \cdot e^{j 2\pi \cdot 60 \cdot 0.001} \\ &= 1 \cdot e^{-j \cdot 45.6^\circ} + 2 \cdot e^{j \cdot 18^\circ} - 1 \cdot e^{j \cdot 21.6^\circ} \approx 1.673 - j \cdot 0.464. \end{aligned}$$

- Die Spitze des resultierenden Zeigers liegt nun aber nicht wie bei einer einzigen harmonischen Schwingung auf einem Kreis, sondern es entsteht eine komplizierte geometrische Figur.

Das nachfolgende Interaktionsmodul zeigt  $x_+(t)$  für die Summe dreier harmonischer Schwingungen:

### Zeigerdiagramm – Darstellung des analytischen Signals (Dateigröße 196 kB)

## Motivation

Bei vielen Nachrichtenübertragungssystemen wird das niederfrequente Quellensignal  $q(t)$  in ein BP-Signal  $s(t)$  umgesetzt (**Modulation**). Nach der Übertragung über den Kanal muss das Empfangssignal  $r(t)$  – gegenüber dem Sendesignal  $s(t)$  eventuell verzerrt und mit (Rausch-)Störungen beaufschlagt – wieder in den ursprünglichen Frequenzbereich zurückgesetzt werden (**Demodulation**). Das Sinkensignal  $v(t)$ , das möglichst gut mit  $q(t)$  übereinstimmen sollte, ist somit wieder ein TP-Signal.



© 2007 [www.LNTwww.de](http://www.LNTwww.de)

Modulation und Demodulation sind fundamentale Komponenten eines Nachrichtenübertragungssystems, die im Buch „Modulationsverfahren“ eingehend behandelt werden. Eine zusammenfassende Beschreibung finden Sie in **Kapitel 1** des vorliegenden Buches.

Die Untersuchung, Simulation, Optimierung und Dimensionierung solcher Bandpass-Systeme erfolgt meistens im **äquivalenten Tiefpassbereich**, wofür folgende Gründe genannt werden können:

- Sind Qualitätsmerkmale – wie Signal-zu-Rauschverhältnis, Bitfehlerrate, Bandbreiteneffizienz, Leistungsbedarf, usw. – eines Tiefpass-Systems bekannt, so lassen sich die entsprechenden Werte verwandter Bandpass-Systeme daraus relativ einfach herleiten. Beispiele hierfür sind die digitalen Modulationsverfahren *Amplitude Shift Keying (ASK)* und *Binary Phase Shift Keying (BPSK)*, deren Performance-Größen aus dem vergleichbaren Basisbandsystem „hochgerechnet“ werden können.
- Die einzelnen Teilkanäle bei einem sog. *Frequenzmultiplexsystem*, die sich durch verschiedene Trägerfrequenzen unterscheiden, können oft als qualitativ gleichwertig angesehen werden. Deshalb genügt es, die Berechnung und Dimensionierung auf einen einzigen Kanal zu beschränken und diese Untersuchungen im äquivalenten Tiefpass-Bereich – das heißt ohne Berücksichtigung der spezifischen Trägerfrequenz – durchzuführen.
- Häufig ist es so, dass die Bandbreite einer Nachrichtenverbindung um Größenordnungen kleiner ist als die Trägerfrequenz. So liegen beispielsweise die einzelnen Kanäle beim *GSM-Mobilfunk* im Frequenzbereich um 900 MHz (D-Netz) bzw. 1800 MHz (E-Netz), während jedem Kanal nur eine Bandbreite von 200 kHz zur Verfügung steht. Deshalb ist eine Simulation im äquivalenten TP-Bereich sehr viel weniger aufwändig als eine Simulation der entsprechenden BP-Signale.

## Definition im Frequenzbereich (1)

Wir betrachten im Folgenden ein reelles BP-Signal  $x(t)$  mit dem Spektrum  $X(f)$ . Weiterhin soll gelten:

- Das BP-Signal  $x(t)$  sei aus der Modulation eines niederfrequenten Nachrichtensignals  $q(t)$  mit dem Trägersignal  $z(t)$  der Frequenz  $f_T$  entstanden.
- Die Art der Modulation (analog oder digital, Amplituden- oder Winkelmodulation, Einseitenband oder Zweiseitenband) ist nicht festgelegt.
- Das Spektrum  $X_+(f)$  des dazugehörigen analytischen Signals  $x_+(t)$  existiert nur für positive Frequenzen und ist hier doppelt so groß wie  $X(f)$ .  $X_+(f)$  ist unabhängig von der Trägerfrequenz  $f_T$ .

**Definition:** Verschiebt man das Spektrum des soeben definierten analytischen Signals  $x_+(t)$  um  $f_T$  nach links, so bezeichnet man das Ergebnis als das **Spektrum des äquivalenten Tiefpass-Signals**:

$$X_{TP}(f) = X_+(f + f_T).$$

Im Allgemeinen sind  $X(f)$ ,  $X_+(f)$  und  $X_{TP}(f)$  komplexwertig. Ist allerdings  $X(f)$  rein reell, so sind auch die Spektren  $X_+(f)$  und  $X_{TP}(f)$  rein reell, weil sich diese aus  $X(f)$  nur aus den Operationen „Abschneiden und Verdoppeln“ bzw. „Frequenzverschiebung“ ergeben.

Bei der Berechnung des äquivalenten TP-Spektrums  $X_{TP}(f)$  ist – im Gegensatz zu  $X_+(f)$  – die Kenntnis der Trägerfrequenz  $f_T$  unbedingt erforderlich. Für andere Werte von  $f_T$  ergeben sich auch andere Tiefpass-Spektren.

Transformiert man obige Gleichung in den Zeitbereich, so erhält man:

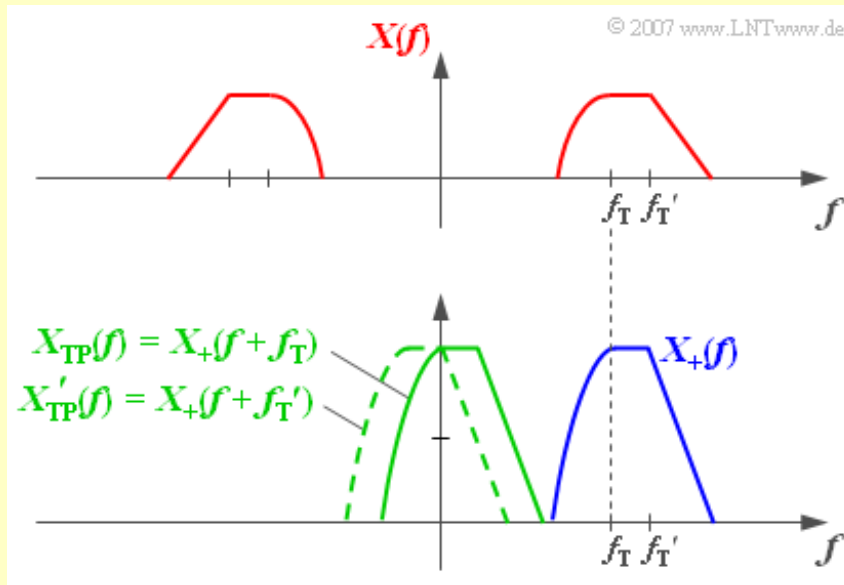
$$x_{TP}(t) = x_+(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot t}.$$

Mit der Beziehung  $x(t) = \text{Re}[x_+(t)]$  ergibt sich die Vorgehensweise, wie aus dem äquivalenten TP-Signal das tatsächliche, physikalische Bandpass-Signal berechnet werden kann:

$$x(t) = \text{Re}[x_+(t)] = \text{Re}[x_{TP}(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot t}].$$

## Definition im Frequenzbereich (2)

**Beispiel:** Das nachfolgende Bild zeigt oben die rein reelle Spektralfunktion  $X(f)$  eines BP-Signals  $x(t)$ , das aus der Modulation eines niederfrequenten Signals mit der Trägerfrequenz  $f_T$  entstanden sei.



Darunter dargestellt sind die beiden ebenfalls reellen Spektralfunktionen  $X_+(f)$  und  $X_{TP}(f)$ . Aufgrund der Unsymmetrien bezüglich des Frequenzursprungs sind die zugehörigen Zeitfunktionen komplex.

$X_{TP}(f)$  ist gegenüber  $X_+(f)$  um  $f_T$  nach links verschoben. Wäre dagegen das Spektrum  $X(f)$  das Modulationsergebnis eines anderen Nachrichtensignals  $q'(t)$  mit einer anderen Trägerfrequenz  $f_T'$ , so würde sich auch ein anderes äquivalentes TP-Signal ergeben, dessen Spektralfunktion in obiger Grafik gestrichelt eingezeichnet ist.

## Beschreibung im Zeitbereich (1)

Zur Vereinfachung der Darstellung gehen wir beispielhaft von einem Linienspektrum aus, so dass das analytische Signal als Summe von komplexen Drehzeigern (Zeigerverbund) dargestellt werden kann:

$$X_+(f) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i} \cdot \delta(f - f_i) \quad \bullet \text{---} \circ \quad x_+(t) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{j(2\pi f_i t - \varphi_i)}.$$

Durch die Frequenzverschiebung um  $f_T$  nach links lautet somit das äquivalente TP-Signal im Frequenz- und Zeitbereich:

$$X_{\text{TP}}(f) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i} \cdot \delta(f - \nu_i) \quad \bullet \text{---} \circ \quad x_{\text{TP}}(t) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{j(2\pi \nu_i t - \varphi_i)}.$$

Zwischen den Frequenzwerten  $f_i$  und  $\nu_i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) gilt folgender Zusammenhang:

$$\nu_i = f_i - f_{\text{TP}}.$$

Diese Gleichungen können wie folgt interpretiert werden:

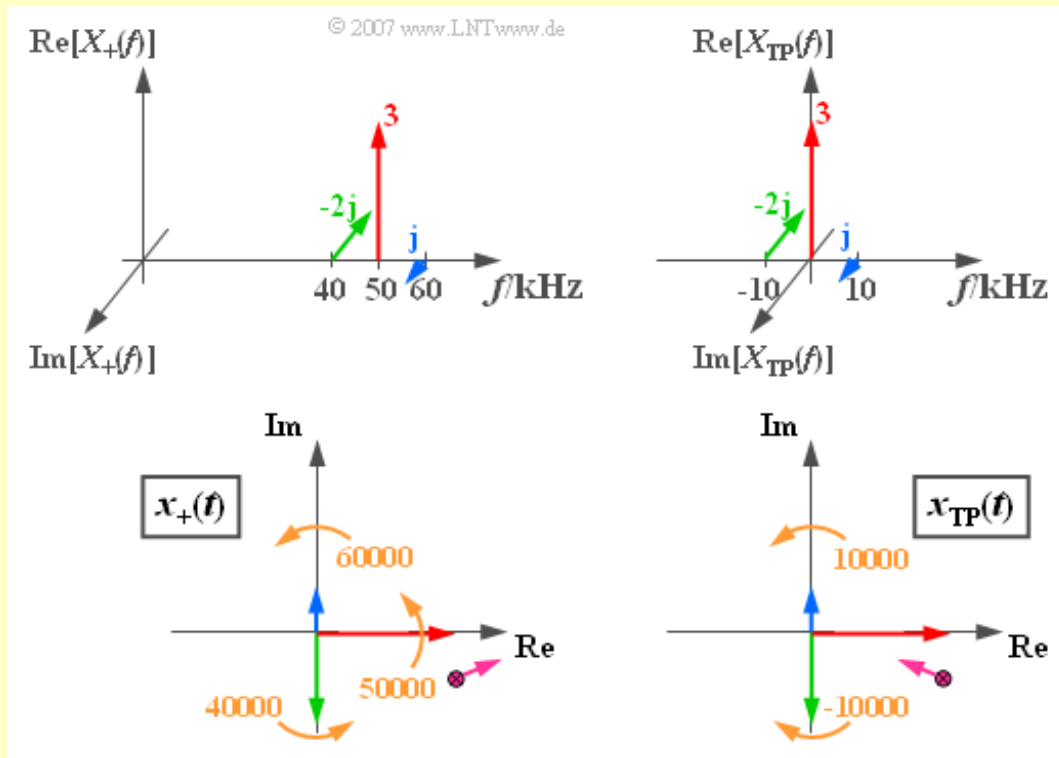
- Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist das äquivalente Tiefpass-Signal identisch mit dem analytischen Signal:

$$x_{\text{TP}}(t = 0) = x_+(t = 0) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i}.$$

- Zu diesem Zeitpunkt ist der Zeigerverbund allein durch die  $I$  Amplitudenparameter  $A_i$  und die  $I$  Phasenlagen  $\varphi_i$  festgelegt.
- Zur Wiederholung aus Kapitel 4.2: Alle Zeiger des analytischen Signals  $x_+(t)$  drehen entsprechend den Frequenzen  $f_i$  entgegen dem Uhrzeigersinn.
- Beim äquivalenten TP-Signal sind die Drehgeschwindigkeiten geringer. Zeiger mit  $\nu_i > 0$  drehen in mathematisch positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn), solche mit  $\nu_i < 0$  im Uhrzeigersinn.
- Ist der Frequenzparameter  $\nu_i$  eines Zeigers gleich 0, so ruht dieser Zeiger in der komplexen Ebene entsprechend seiner Ausgangslage.

## Beschreibung im Zeitbereich (2)

**Beispiel:** Wir betrachten das aus drei Spektrallinien bei 40 kHz, 50 kHz und 60 kHz bestehende Spektrum  $X_+(f)$  gemäß der nachfolgenden Grafik. Beachtet man die angegebenen Amplituden- und Phasenparameter, so erhält man das analytische Signal  $x_+(t)$  entsprechend der unteren linken Skizze.

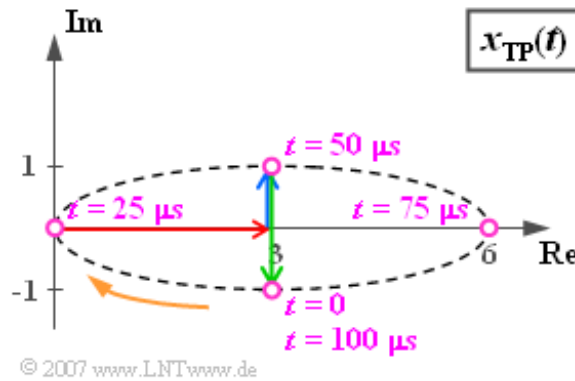


Die Momentaufnahme gilt für die Zeit  $t = 0$ . Alle Zeiger drehen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit entgegen dem Uhrzeigersinn. Der blaue Zeiger dreht hierbei mit 60000 Umdrehungen pro Sekunde am schnellsten; der grüne Zeiger mit  $\omega_{40} = 2\pi \cdot 40000$  1/s am langsamsten. Der violett markierte Summenpunkt der drei komplexen Zeiger bewegt sich für  $t > 0$  innerhalb der komplexen Ebene in komplizierter Weise, aufgrund der Zahlenwerte zunächst in die eingezeichnete Richtung.

Der rechte Teil der Grafik beschreibt das äquivalente TP-Signal im Frequenz- und Zeitbereich, gültig für  $f_T = 50$  kHz. Der rote Zeiger (Träger) liegt nun bei  $f = 0$  und der dazugehörige Drehzeiger bewegt sich nicht. Der blaue Zeiger (OSB) dreht hier mit  $\omega_{10} = 2\pi \cdot 10000$  1/s entgegen dem Uhrzeigersinn. Der grüne Zeiger (USB) dreht mit gleicher Geschwindigkeit, aber in umgekehrter Richtung ( $-\omega_{10}$ ).

## Definition der Ortskurve

Betrachten wir weiterhin das im letzten Beispiel beschriebene äquivalente TP-Signal  $x_{TP}(t)$ , bestehend aus einem ruhenden Zeiger mit der Länge 3 (rot), dem mit  $\omega_{10} = 2\pi \cdot 10000$  1/s in mathematisch positiver Richtung rotierenden blauen Zeiger mit der komplexen Amplitude  $j$  sowie den grünen Zeiger der Länge 2, der zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Richtung der negativen imaginären Achse liegt. Dieser dreht sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{10}$  wie der blaue Zeiger, aber in umgekehrter Richtung ( $-\omega_{10}$ ). Sowohl der blaue als auch der grüne Zeiger benötigen für eine Umdrehung die Periodendauer  $T_0 = 100 \mu\text{s}$ .



Die violett eingezeichnete Zeigersumme ist zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleich  $3 - j$ . Nach  $t = T_0/4 = 25 \mu\text{s}$  hat der resultierende Zeigerverbund den Wert 0, da nun die beiden rotierenden Zeiger in Gegenrichtung zum Träger liegen. Der weitere Verlauf kann obiger Darstellung entnommen werden. Nach  $t = T_0 = 100 \mu\text{s}$  ist wieder der Ausgangszustand erreicht, das heißt, es gilt  $x_{TP}(t = T_0) = x_{TP}(t = 0) = 3 - j$ .

**Definition:** Der Kurvenzug, auf dem sich das äquivalente Tiefpass-Signal  $x_{TP}(t)$  in der komplexen Ebene bewegt, wird im Folgenden als **Ortskurve** bezeichnet.

Im obigen Beispiel ist die Ortskurve eine Ellipse, die von  $x_{TP}(t)$  innerhalb einer Periodendauer einmal durchlaufen wird. Dieses Beispiel bezieht sich auf die Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (ZSB-AM) eines sinusförmigen 10 kHz-Signals mit cosinusförmigem Träger beliebiger Frequenz, wobei das obere Seitenband (blauer Zeiger) gedämpft ist. Wären die Längen der beiden (blau bzw. grün gezeichneten) Drehzeiger gleich, so ergäbe sich als Ortskurve eine horizontale Gerade auf der reellen Achse (siehe Aufgabe A4.5). Im Buch „Modulationsverfahren“ werden die Ortskurven möglicher Systemvarianten noch eingehend behandelt.

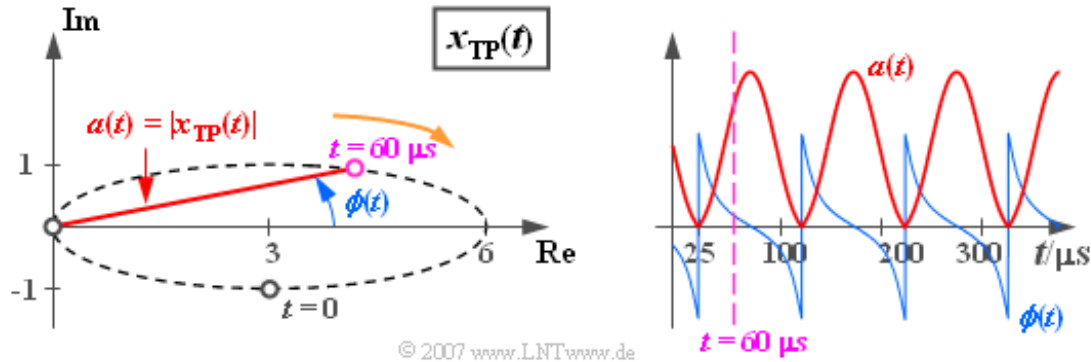
## Darstellung nach Betrag und Phase

Das äquivalente TP-Signal ist im Allgemeinen komplex und kann deshalb auch in der Form

$$x_{\text{TP}}(t) = a(t) \cdot e^{j\phi(t)}$$

⇒ **Anmerkung zur Nomenklatur**

dargestellt werden. Zu beachten ist das Pluszeichen im Argument der Exponentialfunktion, das sich von der bisherigen Darstellung unterscheidet. Nähere Informationen hierüber finden Sie über den obigen Link.



Die Grafik bezieht sich wieder auf das Beispiel der letzten beiden Seiten. Hierzu ist anzumerken:

- Die **Betragsfunktion** gibt die Zeitabhängigkeit der Zeigerlänge wieder:

$$a(t) = |x_{\text{TP}}(t)| = \sqrt{\text{Re} [x_{\text{TP}}(t)]^2 + \text{Im} [x_{\text{TP}}(t)]^2}.$$

$a(t)$  ist wie  $x_{\text{TP}}(t)$  periodisch mit  $T_0$  und nimmt im Beispiel Werte zwischen 0 und 6 an.

- Die **Phasenfunktion** beschreibt den zeitabhängigen Winkel des äquivalenten TP-Signals  $x_{\text{TP}}(t)$ , bezogen auf den Koordinatenursprung:

$$\phi(t) = \text{arc} [x_{\text{TP}}(t)] = \arctan \frac{\text{Im} [x_{\text{TP}}(t)]}{\text{Re} [x_{\text{TP}}(t)]}. \quad \Rightarrow \text{Anmerkung zur Nomenklatur}$$

Im betrachteten Beispiel gilt  $\phi(t=0) = -\arctan(1/3) \approx -18.43^\circ = -0.32 \text{ rad}$ . Bei  $t = 25 \mu\text{s}$  sowie zu allen äquidistanten Zeiten davon im Abstand  $T_0 = 100 \mu\text{s}$  ist das äquivalente Tiefpass-Signal gleich 0, so dass zu diesen Zeitpunkten die Phase  $\phi(t)$  von  $-\pi/2$  auf  $+\pi/2$  springt. Zum violett eingezeichneten Zeitpunkt  $t = 60 \mu\text{s}$  besitzt die Phase einen leicht positiven Wert.

## Zusammenhang zwischen äquivalentem TP- und BP-Signal (1)

Ein bandpassartiges Signal  $x(t)$ , das sich aus der Modulation eines niederfrequenten Nachrichtensignals  $q(t)$  mit einem Trägersignal  $z(t)$  der Frequenz  $f_T$  ergeben hat, kann wie folgt dargestellt werden:

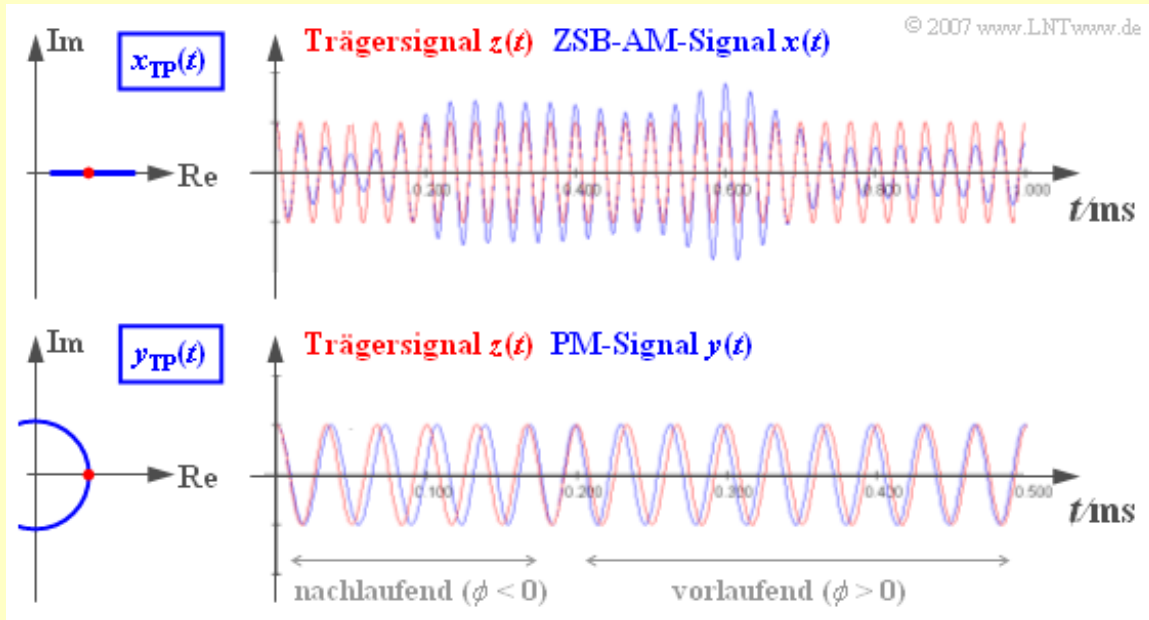
$$x(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi(t)) \quad \Rightarrow \quad \text{Anmerkung zur Nomenklatur}$$

Hierbei bedeuten:

- $a(t)$  ist die **zeitabhängige Amplitude**, die oft als **Hüllkurve** bezeichnet wird. Diese ist gemäß den Gleichungen auf der letzten Seite gleich dem Betrag  $|x_{TP}(t)|$  des äquivalenten TP-Signals.
- $\phi(t)$  ist die **zeitabhängige Phase**, die ebenfalls aus dem äquivalenten TP-Signal als der Winkel zum Koordinatenursprung der komplexen Ebene ermittelt werden kann. Im physikalischen Signal  $x(t)$  erkennt man den Zeitverlauf der Phase  $\phi(t)$  an den Nulldurchgängen. Ist  $\phi(t) > 0$ , so tritt der Nulldurchgang früher auf als beim Trägersignal  $z(t)$ . Dagegen bedeutet  $\phi(t) < 0$  eine Verschiebung des Nulldurchgangs auf einen späteren Zeitpunkt.
- Steckt die gesamte Information über das Nachrichtensignal in  $a(t)$ , während  $\phi(t)$  konstant ist, so spricht man von Amplitudenmodulation. Dagegen ist bei Phasenmodulation die Hüllkurve  $a(t)$  konstant, während  $\phi(t)$  die gesamte Information über das Nachrichtensignal beinhaltet.

## Zusammenhang zwischen äquivalentem TP- und BP-Signal (2)

**Beispiel:** In der oberen Grafik sehen Sie ein rein reelles äquivalentes TP-Signal  $x_{TP}(t)$ ; die Ortskurve ist eine horizontale Gerade. Die Nulldurchgänge des blauen ZSB-AM-Signals  $x(t)$  stimmen mit denen des rot eingezeichneten Trägersignals  $z(t)$  exakt überein. Die Hüllkurve  $a(t)$  beinhaltet die gesamte Information über das Nachrichtensignal.



Das unten dargestellte PM-Signal  $y(t)$  hat dagegen eine konstante Einhüllende; die Ortskurve ist ein Kreisbogen. Zu Beginn ist der Phasenwert kleiner 0, sodass die Nulldurchgänge etwas später auftreten als beim rot gezeichneten Trägersignal („nachlaufend“). Bei positiven Werten des Nachrichtensignals gilt auch  $\phi(t) > 0$  und die Nulldurchgänge treten früher auf als beim Trägersignal („vorlaufend“). Die Lagen der Nulldurchgänge tragen hier die gesamte Information über das Nachrichtensignal  $q(t)$ .

Abschließend – hoffentlich nicht zu spät – wollen wir uns noch der Frage zuwenden, warum die beiden komplexen und im Verständnis auch komplizierteren Signale  $x_+(t)$  und  $x_{TP}(t)$  zur Beschreibung des tatsächlichen Bandpass-Signals  $x(t)$  eigentlich notwendig sind. Sie wurden in der Nachrichtentechnik nicht deshalb eingeführt, um Studierende zu verunsichern, sondern:

- Die Hüllkurve  $a(t)$  und die Phasenfunktion  $\phi(t)$  können aus dem tatsächlichen, physikalischen BP-Signal  $x(t)$  direkt nur in einigen Sonderfällen in einfacher Weise extrahiert werden.
- Das in Realität nicht existierende äquivalente TP-Signal  $x_{TP}(t)$  ist ein mathematisches Hilfsmittel, das es erlaubt, die Zeitverläufe  $a(t)$  und  $\phi(t)$  durch einfache geometrische Überlegungen zu bestimmen. Im Buch „Modulationsverfahren“ werden wir darauf zurückkommen.
- Das analytische Signal  $x_+(t)$  ist ein Zwischenschritt beim Übergang von  $x(t)$  zu  $x_{TP}(t)$ . Während  $x_+(t)$  stets ein komplexes Signal darstellt, kann  $x_{TP}(t)$  in Sonderfällen auch reell sein, z. B. bei idealer Amplitudenmodulation (vergleiche Kapitel 2 des Buches „Modulationsverfahren“).

Das nachfolgende Interaktionsmodul zeigt  $x_{TP}(t)$  für die Summe dreier harmonischer Schwingungen:

**Ortskurve – Darstellung des äquivalenten Tiefpass-Signals** (Dateigröße 205 kB)

## Darstellung nach Real- und Imaginärteil (1)

Insbesondere bei der Beschreibung von Quadraturamplitudenmodulationsverfahren (QAM) eignet sich die Darstellung des äquivalenten TP-Signals nach Real- und Imaginärteil:

$$x_{\text{TP}}(t) = x_{\text{I}}(t) + j \cdot x_{\text{Q}}(t).$$

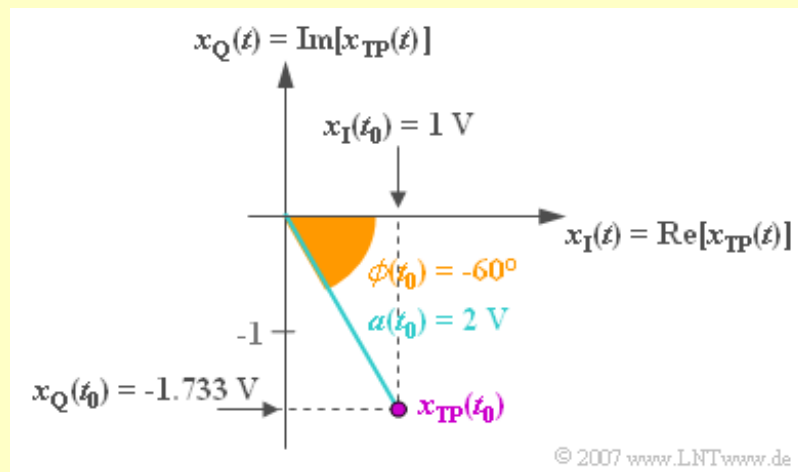
In dieser Darstellung bezeichnet  $x_{\text{I}}(t)$  die **Inphasekomponente** (Normalkomponente) und  $x_{\text{Q}}(t)$  die **Quadraturkomponente** von  $x_{\text{TP}}(t)$ .

Mit der Betragsfunktion  $a(t) = |x_{\text{TP}}(t)|$  und der Phasenfunktion  $\phi(t) = \arg x_{\text{TP}}(t)$  entsprechend den Definitionen auf den vorangegangenen Seiten gilt:

$$\begin{aligned} x_{\text{I}}(t) &= \operatorname{Re}[x_{\text{TP}}(t)] = a(t) \cdot \cos(\phi(t)), \\ x_{\text{Q}}(t) &= \operatorname{Im}[x_{\text{TP}}(t)] = a(t) \cdot \sin(\phi(t)). \end{aligned}$$

**Beispiel:** Zu einem betrachteten Zeitpunkt  $t_0$  gilt für das äquivalente TP-Signal:

$$x_{\text{TP}}(t = t_0) = 2 \text{ V} \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} = 2 \text{ V} \cdot \cos(60^\circ) - j \cdot 2 \text{ V} \cdot \sin(60^\circ) = 1 \text{ V} - j \cdot 1.733 \text{ V}.$$



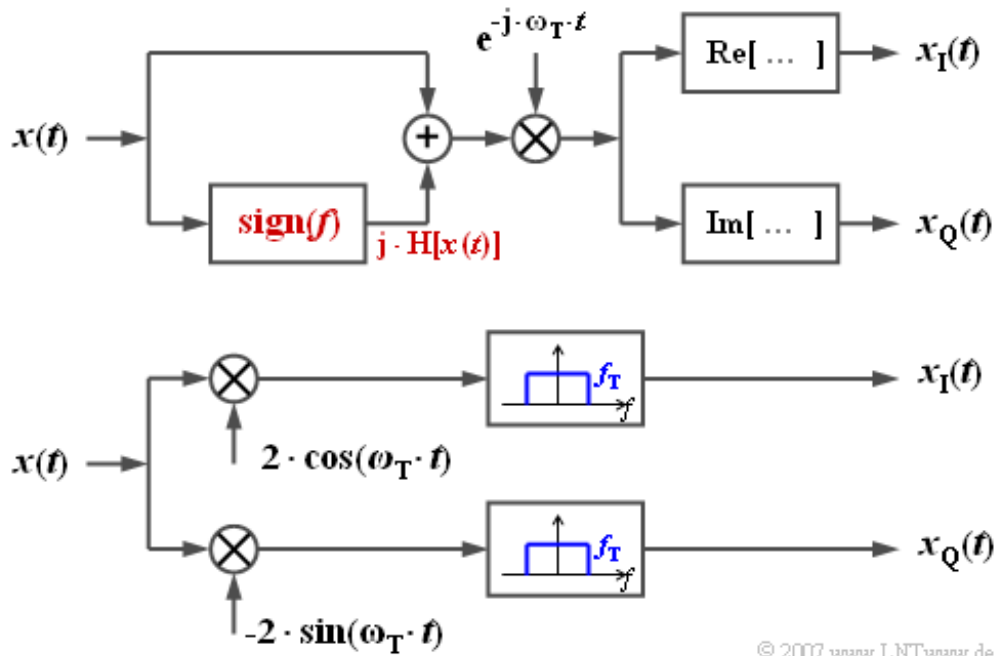
Damit ist die Inphasekomponente gleich 1 V und die Quadraturkomponente hat den Wert  $-1.733 \text{ V}$ .

Durch Anwendung einfacher trigonometrischer Umformungen lässt sich zeigen, dass das physikalische, reelle BP-Signal somit auch in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t + \phi(t)) = \\ &= x_{\text{I}}(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t) - x_{\text{Q}}(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t). \end{aligned}$$

## Darstellung nach Real- und Imaginärteil (2)

Das nachfolgende Bild zeigt zwei Anordnungen, um aus dem reellen BP-Signal  $x(t)$  das komplexe TP-Signal aufgespalten nach Inphase- und Quadraturkomponente zu ermitteln, beispielsweise zur Darstellung auf einem Oszilloskop.



© 2007 www.LNTwww.de

Im oberen Modell wird zunächst das analytische Signal  $x_+(t)$  erzeugt und dieses mit der komplexen Exponentialfunktion multipliziert. Die gesuchten Komponenten erhält man dann durch Real- bzw. Imaginärteilkonstruktion.

Bei der unteren Anordnung erhält man für den oberen bzw. unteren Zweig nach den jeweiligen Multiplikationen:

$$\begin{aligned} a(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \phi(t)) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_T \cdot t) &= a(t) \cdot \cos(\phi(t)) + \varepsilon_{\text{oben}}(t), \\ a(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \phi(t)) \cdot (-2) \cdot \sin(\omega_T \cdot t) &= a(t) \cdot \sin(\phi(t)) + \varepsilon_{\text{unten}}(t). \end{aligned}$$

Die jeweils zweiten Anteile liegen um die doppelte Trägerfrequenz und werden durch die Tiefpässe mit jeweiliger Grenzfrequenz  $f_T$  entfernt:

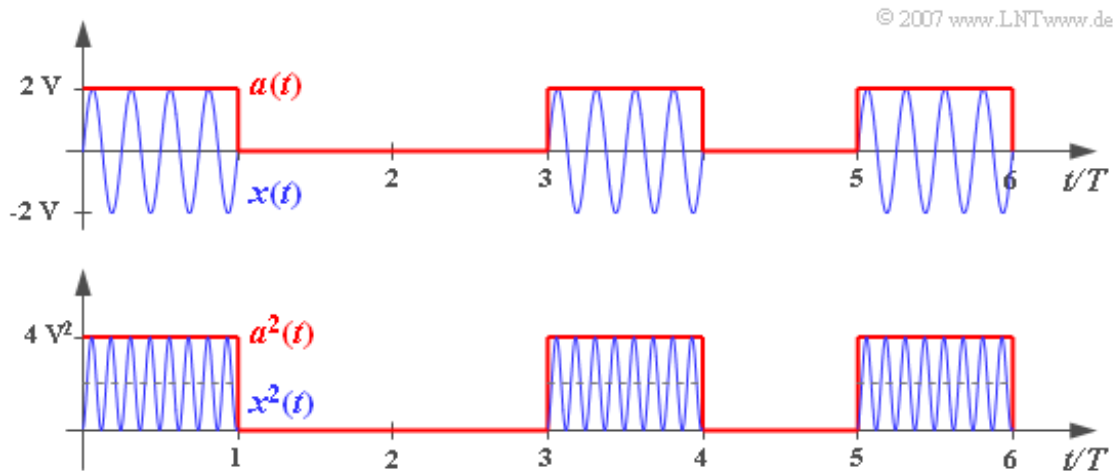
$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{oben}}(t) &= a(t) \cdot \cos(2\omega_T \cdot t + \phi(t)), \\ \varepsilon_{\text{unten}}(t) &= -a(t) \cdot \sin(2\omega_T \cdot t + \phi(t)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der letzten Seite zeigt, dass am Ausgang genau die gewünschten Komponenten  $x_I(t)$  und  $x_Q(t)$  verbleiben:

$$\begin{aligned} x_I(t) &= a(t) \cdot \cos(\phi(t)), \\ x_Q(t) &= a(t) \cdot \sin(\phi(t)). \end{aligned}$$

## Leistung und Energie eines Bandpass-Signals (1)

Betrachten wir beispielhaft das Signal  $x(t)$  in der folgenden Abbildung, das sich bei **On-Off-Keying** – auch bekannt als binäres Amplitude Shift Keying – ergibt.



Die auf  $1 \Omega$  bezogene Leistung dieses BP-Signals ergibt sich nach den Ausführungen in **Kapitel 1.2** zu

$$P_x = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} x^2(t) dt.$$

Berücksichtigt man, dass die binären Nullen und Einsen im Allgemeinen gleichwahrscheinlich sind, so kann auf den Grenzübergang verzichtet werden, und man erhält für das hier vorliegende Mustersignal:

$$P_x = \frac{1}{2T} \cdot \int_0^{2T} x^2(t) dt = \frac{4V^2}{2T} \cdot \int_0^T \cos^2(\omega_T \cdot t) dt = 1V^2.$$

Aus der unteren Skizze ist zu erkennen, dass man durch Mittelung über die quadrierte Hüllkurve  $a^2(t)$  – also über das Betragsquadrat des äquivalenten Tiefpass-Signals  $x_{TP}(t)$  – ein um den Faktor 2 größeres Ergebnis erhält. Deshalb gilt in gleicher Weise:

$$P_x = \frac{1}{2} \cdot \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} |x_{TP}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} a^2(t) dt.$$

Dieses Resultat lässt sich verallgemeinern, und es kann auch auf energiebegrenzte Signale angewandt werden. In diesem Fall gilt für die Energie entsprechend **Kapitel 1.2** :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x_{TP}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t) dt.$$

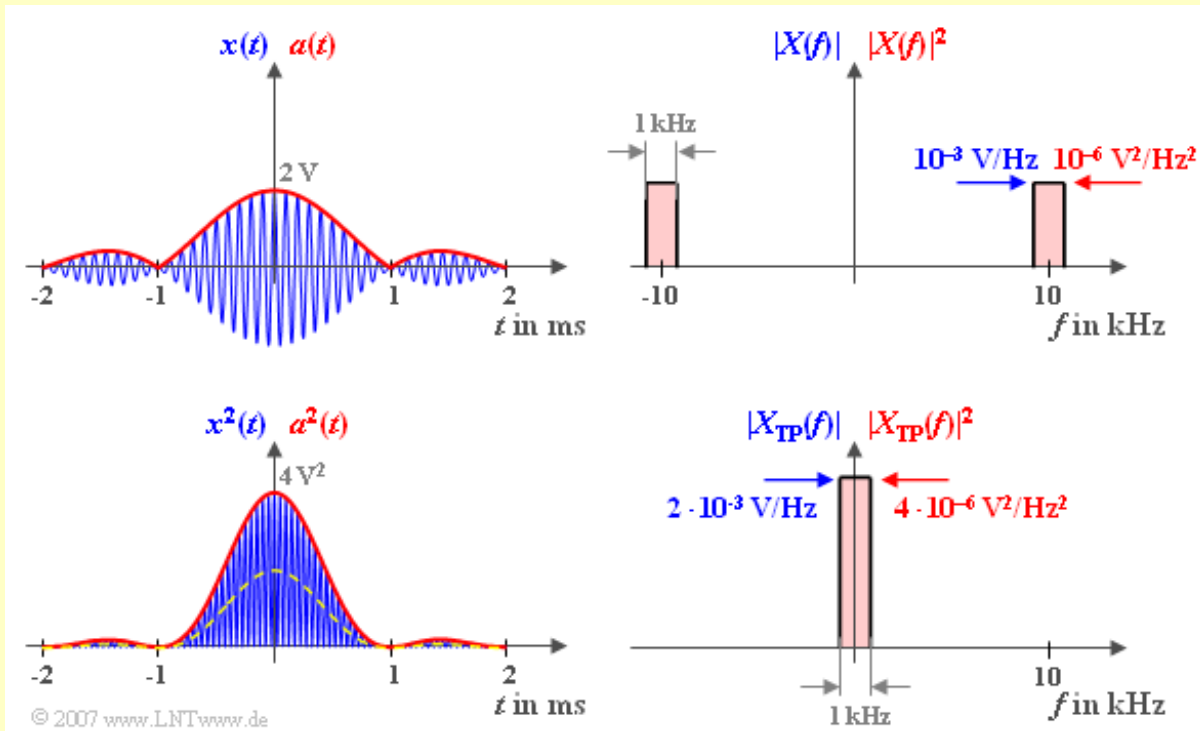
Diese Gleichung gilt allerdings nur dann exakt, wenn die zugrunde liegende Trägerfrequenz  $f_T$  sehr viel größer als die BP-Bandbreite  $B_{BP}$  ist.

## Leistung und Energie eines Bandpass-Signals (2)

**Beispiel:** Wir betrachten das Bandpass-Signal

$$x(t) = A \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi(t)),$$

mit  $A = 2\text{V}$ ,  $B = 1\text{ kHz}$  und  $f_T = 10\text{ kHz}$ . Die nachfolgende Abbildung zeigt oben dieses physikalische Signal  $x(t)$  und das zugehörige Betragsspektrum  $|X(f)|$ , das innerhalb der Bandbreite  $B$  konstant gleich  $A/(2B) = 10^{-3}\text{ V/Hz}$  ist.  $X(f)$  setzt sich also aus zwei Rechtecken um  $\pm f_T$  zusammen.



Die Energie dieses BP-Signals könnte prinzipiell nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot \frac{\sin^2(\pi \cdot B \cdot t)}{(\pi \cdot B \cdot t)^2} \cdot \cos^2(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi(t)) dt.$$

Mit der auf der letzten Seite aufgeführten Gleichung gilt aber auch:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |A \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot t)|^2 dt = \\ &= A^2 \cdot \int_0^{+\infty} \text{si}^2(\pi \cdot B \cdot t) dt = A^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi B} = \frac{A^2}{2B} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2/\text{Hz}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $a(t)$  die Hüllkurve von  $x(t)$ . Man erkennt, dass die Signalenergie  $E_x$  unabhängig von der Phase  $\phi$  des Trägersignals ist.

Eine zweite Lösungsmöglichkeit bietet der **Satz von Parseval**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(f)|^2 df.$$

Es gilt  $|A(f)| = |X_{\text{TP}}(f)|$ . Innerhalb der Bandbreite  $B$  um die Frequenz  $f = 0$  ist  $X_{\text{TP}}(f)$  doppelt so groß wie  $X(f)$  um die Frequenz  $f = f_{\text{T}}$ , nämlich  $A/B$ . Dies hängt mit der Definition des Spektrums  $X_+(f)$  zusammen, aus dem  $X_{\text{TP}}(f)$  durch Verschiebung entsteht.

Somit lautet eine dritte Gleichung zur Energieberechnung, die natürlich zum gleichen Ergebnis führt:

$$E_x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^2 \cdot B = \frac{A^2}{2B}.$$