

Überblick zu Kapitel 3

Im Kapitel 2 wurde die Beschreibung periodischer Signale durch eine Reihe harmonischer Schwingungen („Fourierreihe“) ausführlich behandelt. Verringert man – zumindest gedanklich – die Wiederholffrequenz eines periodischen Signals immer mehr, d. h. die Periodendauer wird immer länger, so kommt man vom periodischen Signal (*Puls*) zum einmaligen **aperiodischen Signal** – häufig auch als **Impuls** bezeichnet.

Im Folgenden werden solche aperiodischen und impulsförmigen Signale eingehend betrachtet und sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich mathematisch beschrieben. Dieses Kapitel beinhaltet im Einzelnen:

- die Herleitung der beiden *Fourierintegrale* aus der Fourierreihe,
- die Erweiterung des Fourierintegrals zur *Fouriertransformation* mit Hilfe von Distributionen,
- einige *Sonderfälle* impulsartiger Signale wie Rechteck-, Gauß- und Diracimpuls,
- die *Gesetzmäßigkeiten* der Fouriertransformation, und schließlich
- die Bedeutung der *Faltungsoperation* und deren vielfältige Anwendungen.

Die Laplace- und die Hilberttransformation, die vorwiegend bzw. ausschließlich für kausale Signale bzw. Systeme anwendbar sind, werden erst im nächsten Buch „Lineare zeitinvariante Systeme“ behandelt.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 33 Bildschirmseiten mit Gleichungen, Bildern und Beispielen verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch 51 Grafiken, 9 Aufgaben und 9 Zusatzaufgaben mit insgesamt 63 Teilaufgaben, zwei Lernvideos (LV) zu Kapitel 3.1 und Kapitel 3.3 und schließlich noch drei Interaktionsmodule (IM) zu Kapitel 3.2 und Kapitel 3.4, nämlich:

- **Kontinuierliche und diskrete Spektren** (LV zu Kap. 3.1, 2-tlg: 2.9 MB, 6:20 – 2.5 MB, 5:15)
- **Zeitfunktion und zugehörige Spektralfunktion** (IM zu Kapitel 3.2 – Größe 161 kB)
- **Frequenzgang und zugehörige Impulsantwort** (IM zu Kapitel 3.2 – Größe 160 kB)
- **Gesetze der Fouriertransformation** (LV zu Kap. 3.3, 2-tlg: 2.89 MB, 5:57 – 2.89 MB, 5:55)
- **Zur Verdeutlichung der grafischen Faltung** (IM zu Kapitel 3.4 – Größe 194 kB)

Literatur: [Ach95] – [Eic03] – [Fli91] – [Föl77] – [GRS03] – [Han05] – [Hay83] – [Hof85] – [KK10] – [Kro91] – [Küp74] – [Lük04] – [Mar94] – [Obe75] – [Schü91a] – [Schü91b] – [Söd00] – [Unb90]

Die Thematik dieses Kapitels wird auch im Programm „*ft*“ des Lehrsoftwarepakets *LNTsim* behandelt. *LNTsim* beinhaltet 24 Grafikprogramme zur Darstellung wichtiger Themen der Nachrichtentechnik.

Hinweise zum Herunterladen der Programme und Anleitungen von *LNTsim*

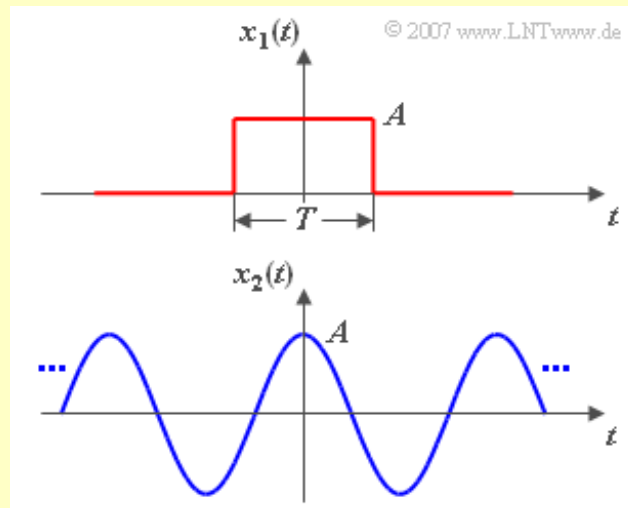
Eigenschaften aperiodischer Signale - Voraussetzungen

Im letzten Kapitel haben wir *periodische Signale* betrachtet. Das wesentliche Charakteristikum dieser Signale ist, dass für sie eine *Periodendauer* T_0 angegeben werden kann. Ist eine solche Periodendauer nicht angebar oder – was in der Praxis das gleiche ist – hat T_0 einen unendlich großen Wert, so spricht man von einem **aperiodischen Signal**.

Für das gesamte Kapitel 3 sollen folgende Voraussetzungen gelten:

- Die betrachteten Signale sind *aperiodisch*.
- Die Signale $x(t)$ sind *energiebegrenzt*, das heißt, sie besitzen nur eine endliche Energie E_x und eine vernachlässigbar kleine (mittlere) Leistung P_x .
- Im Allgemeinen konzentriert sich die Energie dieser Signale auf einen relativ kurzen Zeitbereich, so dass man auch von *impulsförmigen* Signalen spricht.

Beispiel: Das nachfolgende Bild zeigt einen Rechteckimpuls $x_1(t)$ mit Amplitude A und Dauer T als Beispiel eines aperiodischen und zeitlich begrenzten Signals. Dieser besitzt eine endliche Signalenergie ($E_1 = A^2 \cdot T$) und die Leistung $P_1 = 0$. Ein leistungsbegrenztes Signal, z. B. das unten dargestellte Cosinussignal, besitzt dagegen stets eine endliche Leistung ($P_2 = A^2/2$), aber eine unendlich große Signalenergie ($E_2 \rightarrow \infty$).



Genauere Betrachtung der Fourierkoeffizienten (1)

Wir gehen von einem periodischen Signal $x_P(t)$ mit der Periodendauer T_0 aus, das entsprechend den Ausführungen im Kapitel 2.4 als (komplexe) Fourierreihe dargestellt werden kann:

$$x_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{jn2\pi t/T_0}.$$

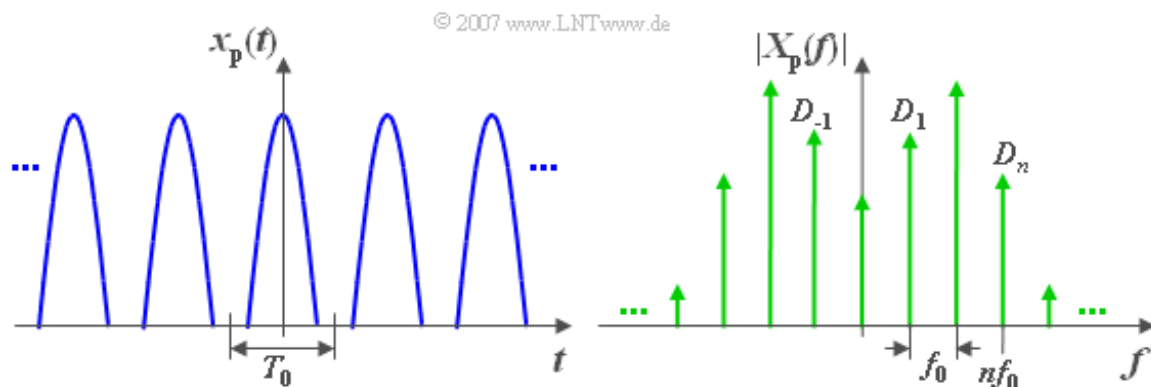
Die Fourierkoeffizienten sind im Allgemeinen komplex, und es gilt $D_{-n} = D_n^*$:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x_P(t) \cdot e^{-jn2\pi t/T_0} dt.$$

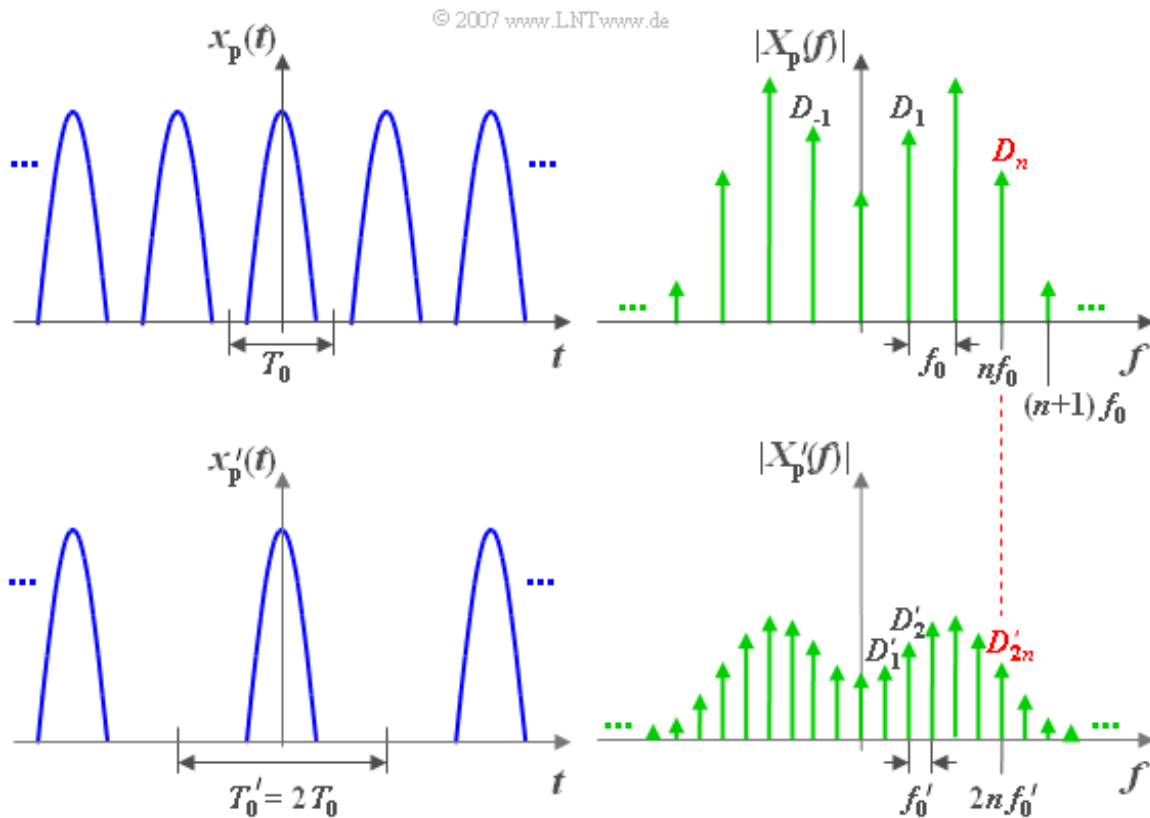
Wie im Kapitel 2.4 gezeigt wurde, ist das Spektrum $X_P(f)$ ein Linienspektrum im Abstand $f_0 = 1/T_0$:

$$X_P(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot \delta(f - n \cdot f_0).$$

Das nachfolgende Bild zeigt links das periodische Zeitsignal und rechts das zugehörige Betragsspektrum. Es ist anzumerken, dass es sich hierbei lediglich um eine schematische Skizze handelt.



Genauere Betrachtung der Fourierkoeffizienten (2)



Im unteren Bild ist ein weiteres periodisches Signal $x_p'(t)$ mit der doppelten Periodendauer $T_0' = 2 \cdot T_0$ dargestellt. Bezüglich dieses Signals gilt:

$$x_p'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n' \cdot e^{jn2\pi t/T_0'} \quad \text{mit} \quad D_n' = \frac{1}{T_0'} \cdot \int_{-T_0'/2}^{+T_0'/2} x_p'(t) \cdot e^{-jn2\pi t/T_0'} dt.$$

Im Bereich von $-T_0/2$ bis $+T_0/2$ sind die beiden Signale identisch.

Betrachten wir auch hier die Spektralfunktion $X_p'(f)$. Aufgrund der doppelten Periodendauer liegen nun die Spektrallinien enger beisammen ($f_0' = f_0/2$). Die beiden Koeffizienten D_n und D_{2n}' – im Bild rot hervorgehoben – gehören zur gleichen physikalischen Frequenz $f = n \cdot f_0 = 2n \cdot f_0'$.

Genauere Betrachtung der Fourierkoeffizienten (3)

Durch Analyse der Koeffizienten

$$D_{2n}' = \frac{1}{T_0'} \cdot \int_{-T_0'/2}^{T_0'/2} x_P'(t) \cdot e^{-j(2n)2\pi t/T_0'} dt$$

erkennen wir:

- Zwischen $T_0'/2$ und $-T_0'/2$ ist $x_P'(t)$ identisch 0, ebenso im dazu symmetrischen Intervall bei negativen Zeiten. Deshalb können die Integrationsgrenzen auf $\pm T_0'/2$ eingeschränkt werden.
- Innerhalb der neuen Integrationsgrenzen kann $x_P'(t)$ durch $x_P(t)$ ersetzt werden.

Setzen wir nun in obiger Gleichung noch $T_0' = 2T_0$, so erhalten wir:

$$D_{2n}' = \frac{1}{2T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_P(t) \cdot e^{-jn2\pi t/T_0} dt = \frac{D_n}{2}.$$

Fassen wir dieses Ergebnis kurz zusammen:

- Die Spektrallinie des Signals $x_P'(t)$ bei der Frequenz $f = n \cdot f_0'$ wird mit D_{2n}' bezeichnet. Diese Linie ist genau halb so groß wie die Spektrallinie D_n des Signals $x_P(t)$ bei der gleichen Frequenz f .
- Die Spektralfunktion $X_P'(f)$ weist zusätzliche Spektrallinien bei $(n+1/2) \cdot f_0$ auf, die dazu führen, dass jeder zweite Impuls von $x_P(t)$ um $n \cdot T_0$ gelegen (n ungeradzahlig) ausgelöscht wird.

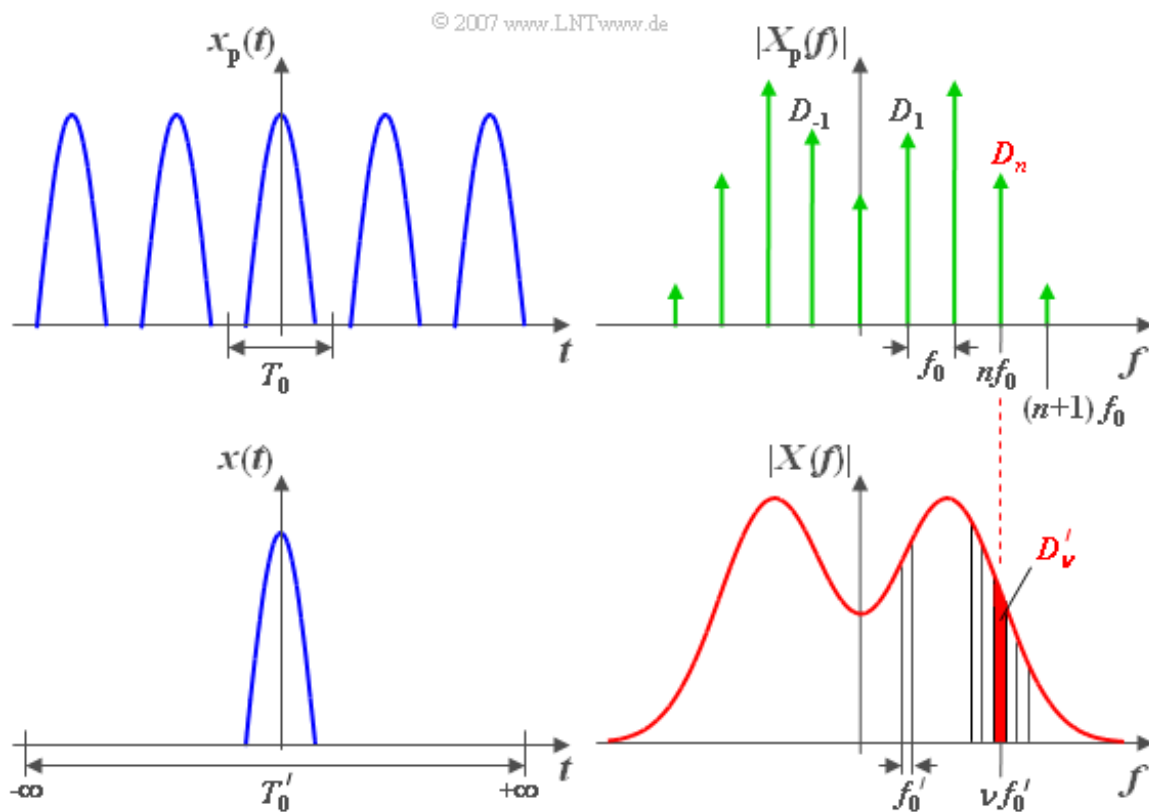
Vom periodischen zum aperiodischen Signal

Greifen wir nun die Überlegungen der vorherigen Seite auf und wählen die Periodendauer T_0' von $x_p'(t)$ allgemein um einen ganzzahligen Faktor k größer als die Periodendauer T_0 von $x_p(t)$. Dann können die bisherigen Aussagen verallgemeinert werden:

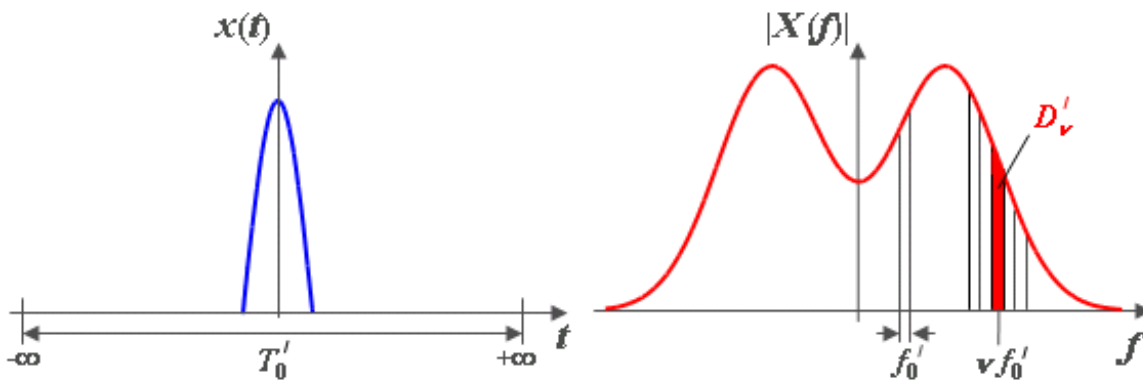
- Der Linienabstand ist bei $X_p'(f)$ um den Faktor k geringer als beim Spektrum $X_p(f)$.
- Um diesen Sachverhalt hervorzuheben, bezeichnen wir die (Frequenz-)Laufvariable der Funktion $X_p'(f)$ mit ν anstelle von n . Es gilt: $\nu = k \cdot n$.
- Für die Spektrallinie des Signals $x_p'(t)$ bei der Frequenz $f = n \cdot f_0 = \nu \cdot f_0'$ gilt:

$$D_\nu' = \frac{1}{k} \cdot D_n, \quad \text{wobei} \quad \nu = k \cdot n.$$

Wählt man nun – wie im nachfolgenden Bild schematisch dargestellt – den Faktor k und damit die Periodendauer T_0' immer größer und lässt sie schließlich nach unendlich gehen, so geht das periodische Signal $x_p(t)$ in das aperiodische Signal $x(t)$ über.



Das erste Fourierintegral (1)



Bezüglich der dazugehörigen Spektralfunktion $X(f)$ lassen sich somit folgende Aussagen treffen:

- Die einzelnen Spektrallinien liegen nun beliebig eng beieinander ($f_0' = 1/T_0' \rightarrow 0$).
- In der Spektralfunktion $X(f)$ treten nun innerhalb bestimmter Intervalle alle möglichen Frequenzen auf; $X(f)$ stellt also kein Linienspektrum mehr dar.
- Der Beitrag jeder einzelnen Frequenz f zum Signal ist verschwindend gering ($k \rightarrow \infty, D_{\nu}' \rightarrow 0$). Aufgrund der unendlich vielen Frequenzen ergibt sich jedoch insgesamt ein endliches Resultat.
- Anstatt die Fourierkoeffizienten D_{ν}' zu berechnen, wird nun eine spektrale Dichte $X(f)$ ermittelt.

Bei der Frequenz $f = \nu \cdot f_0'$ gilt dann:

$$X(f = \nu f_0') = \lim_{f_0' \rightarrow 0} \left(\frac{D_{\nu}'}{f_0'} \right) = \lim_{T_0' \rightarrow \infty} (D_{\nu}' \cdot T_0').$$

- Die spektrale Dichte $X(f)$ des aperiodischen Signals $x(t)$ ist im Spektrum $X_P(f)$ des vergleichbaren periodischen Signals $x_P(t)$ als Einhüllende erkennbar (siehe Grafiken auf den letzten Seiten).
- Im Bild entspricht D_{ν}' der rot hinterlegten Fläche des Frequenzintervalls um $\nu \cdot f_0'$ mit Breite f_0' .

Das erste Fourierintegral (2)

Verwendet man die auf der letzten Seite angegebenen Gleichungen, so erhält man:

$$X(f = \nu \cdot f_0') = \lim_{T_0' \rightarrow \infty} \int_{-T_0'/2}^{T_0'/2} x_P(t) \cdot e^{-j2\pi\nu f_0' t} dt.$$

Durch den gemeinsamen Grenzübergang ($T_0' \rightarrow \infty, f_0' \rightarrow 0$) wird nun

- aus dem periodischen Signal $x_P(t)$ das aperiodische Signal $x(t)$, und
- aus der diskreten Frequenz $\nu \cdot f_0'$ die kontinuierliche Frequenzvariable f .

Damit kommt man zum **ersten Fourierintegral**, das die Berechnung des Spektrums einer aperiodischen Zeitfunktion ermöglicht. Der Name geht auf den französischen Physiker **Jean-Baptiste-Joseph Fourier** zurück.

Definition: Die **Spektralfunktion** (oder kurz: das Spektrum) eines aperiodischen, energiebegrenzten Signals $x(t)$ ist wie folgt zu berechnen:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt.$$

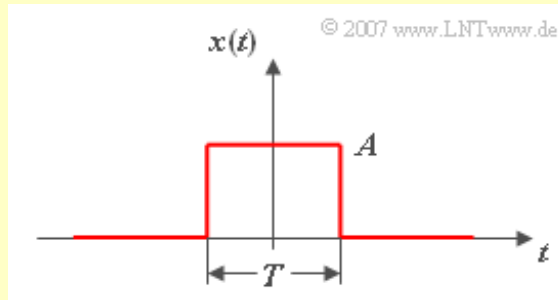
Das nachfolgende Lehrvideo soll Ihnen die Aussagen dieses Abschnitts nochmals verdeutlichen:

Unterschiede und Gemeinsamkeiten von kontinuierlichen und diskreten Spektren

(zweiteilig: Größe 2.90 MB, Dauer 6:20 bzw. 2.52 MB, 5:15)

Beispiel zum ersten Fourierintegral

Beispiel: Gegeben ist der Zeitverlauf $x(t)$. Gesucht ist die zugehörige Spektralfunktion $X(f)$.



Wir wenden dazu das erste Fourierintegral an. Aus obiger Darstellung ist zu erkennen, dass das Signal $x(t)$ für $|t| > T/2$ gleich 0 ist. Das bedeutet, dass das Integrationsintervall auf den Bereich $\pm T/2$ begrenzt werden kann. Damit erhält man den Ansatz:

$$\begin{aligned} X(f) &= A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-T/2}^{+T/2} \\ &= \frac{A}{-j2\pi f} [\cos(\pi fT) - j \cdot \sin(\pi fT) - \cos(\pi fT) - j \cdot \sin(\pi fT)] \\ \Rightarrow X(f) &= A \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}. \end{aligned}$$

Erweitert man Zähler und Nenner mit T , so erhält man:

$$X(f) = A \cdot T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi fT).$$

Die Funktion $\text{si}(x)$ wird auf der Seite **Rechteckimpuls** im Kapitel 3.2 noch eingehend analysiert.

Betrachten wir noch die Einheiten der beiden Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich:

- Ist $x(t)$ beispielsweise eine Spannung, so hat die Impulsamplitude A die Einheit „Volt“.
- Die Dimension der Größe T ist häufig die Zeit, z. B. mit der Einheit „Sekunde“.
- Der Kehrwert der Zeit entspricht der Frequenz mit der Einheit „Hertz“.
- Das Argument $f \cdot T$ ist dimensionslos.
- Die Spektralfunktion hat somit beispielsweise die Einheit „V/Hz“.

Fouriertransformation (1)

Bei nicht energiebegrenzten Signalen – z. B. einem Gleichsignal (vgl. Kapitel 2.2), einer harmonischen Schwingung (vgl. Kapitel 2.3) oder einem anklingenden Signal – divergiert das erste Fourierintegral. Unter Einbeziehung einer Hilfsfunktion kann dann die Konvergenz erzwungen werden:

$$X(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-\varepsilon|t|} \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

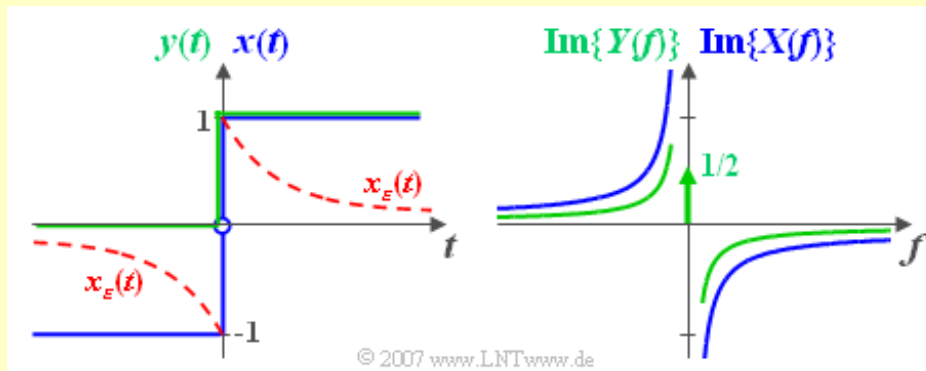
Solche nicht energiebegrenzten Signale führen im Spektrum zu **Diracfunktionen** (Distributionen). Man bezeichnet diesen allgemeinen Funktionalzusammenhang $X(f) = F[x(t)]$ als **Fouriertransformation** und verwendet hierfür das folgende Korrespondenzzeichen:

$$X(f) \bullet \longleftrightarrow \circ x(t).$$

Bei einem anklingenden Signal wird die Konvergenz allerdings nur dann erreicht, solange die Zeitfunktion weniger als exponentiell ansteigt.

Fouriertransformation (2)

Beispiel: Wir betrachten eine akausale Sprungfunktion $x(t) = \text{sign}(t)$ mit $x(t) = -1$ für negative sowie $x(t) = +1$ für positive Zeiten. Dieses Signal ist in nachfolgender Skizze links in blauer Farbe dargestellt.



Da $x(t)$ nach beiden Seiten ins Unendliche reicht, muss zur Berechnung der Fouriertransformierten für beide Abschnitte zunächst ein Konvergenzfaktor $\exp(-\varepsilon|t|)$ hinzugefügt werden (es gelte $\varepsilon > 0$). Die resultierende Zeitfunktion lautet dann:

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} e^{-\varepsilon t} & \text{für } t > 0, \\ -e^{\varepsilon t} & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Ähnlich dem Vorgehen auf der Seite **Diracfunktion** ergibt sich für die zugehörige Spektralfunktion

$$X_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon + j2\pi f} - \frac{1}{\varepsilon - j2\pi f} = \frac{-j4\pi f}{\varepsilon^2 + (2\pi f)^2}.$$

Für die betrachtete Zeitfunktion gilt:

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t).$$

Deshalb ist auch die Spektralfunktion $X(f) = F[x(t)]$ als Grenzwert von $X_\varepsilon(f)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ zu bestimmen:

$$X(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(f) = \frac{-j}{\pi f} = \frac{1}{j\pi f}.$$

Diese Spektralfunktion sehen Sie in der rechten Skizze in blauer Farbe. Dagegen gehört der grüne Kurvenzug zum Signal $y(t)$, das sich von $x(t)$ nur bei den negativen Zeiten unterscheidet. In diesem Bereich gilt $y(t) = 0$.

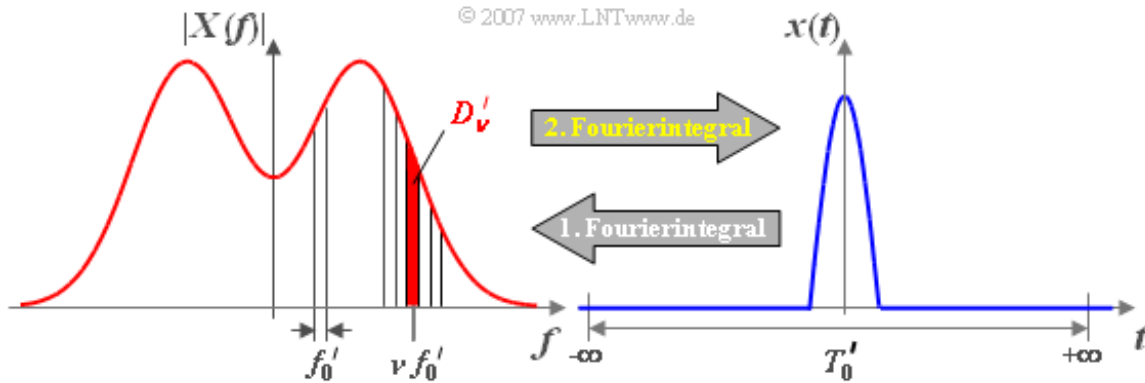
Die zugehörige Spektralfunktion ist für $f \neq 0$ nur halb so groß, wie die nachfolgende Rechnung zeigt:

$$Y(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon + j2\pi f} = \frac{1}{j2\pi f}.$$

Zudem ergibt sich auf Grund des Gleichanteils noch eine Diracfunktion bei $f = 0$ mit dem Gewicht $1/2$. Hierauf wird im Beispiel zum Abschnitt **Zuordnungssatz** (Kapitel 3.3) noch im Detail eingegangen.

Das zweite Fourierintegral

Bisher haben wir gezeigt, wie man für ein aperiodisches Signal $x(t)$ die zugehörige Spektralfunktion $X(f)$ berechnet. Nun wenden wir uns der genau umgekehrten Aufgabe zu, aus der Spektralfunktion $X(f)$ die Zeitfunktion $x(t)$ zu ermitteln.



Mit den gleichen Bezeichnungen wie auf den ersten Seiten dieses Kapitels kann man $x(t)$ als Fourierreihe schreiben, wobei nun der Grenzübergang $f_0' \rightarrow 0$ zu berücksichtigen ist:

$$x(t) = \lim_{f_0' \rightarrow 0} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} D_{\nu}' \cdot e^{j2\pi\nu f_0' t}.$$

Erweitert man nun sowohl den Zähler als auch den Nenner um f_0' , so erhält man:

$$x(t) = \lim_{f_0' \rightarrow 0} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{D_{\nu}'}{f_0'} \right) \cdot e^{j2\pi\nu f_0' t} \cdot f_0'.$$

Der Grenzübergang $f_0' \rightarrow 0$ hat nun folgende Auswirkungen:

- Die (unendliche) Summe wird zu einem Integral, wobei f_0' formal durch die differenzielle Größe df (Integrationsvariable) zu ersetzen ist.
- Die Größe $\nu \cdot f_0'$ im Exponenten beschreibt die physikalische Frequenz f .
- Der Quotient D_{ν}'/f_0' ergibt die Spektralfunktion $X(f)$ bei der Frequenz f .

Unter Berücksichtigung dieser Eigenschaften kommt man zum **zweiten Fourierintegral**.

Definition: Ist die Spektralfunktion $X(f)$ eines aperiodischen und energiebegrenzten Signals gegeben, so lautet die dazugehörige **Zeitfunktion**:

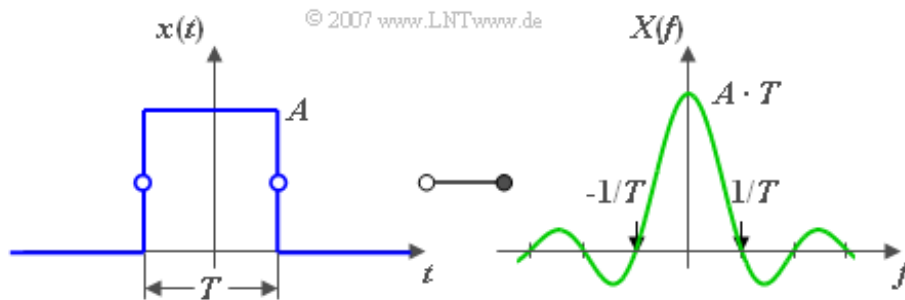
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

Rechteckimpuls

Man spricht von einem **Rechteckimpuls**, wenn für die Zeitfunktion gilt:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{für } |t| < T/2, \\ A/2 & \text{für } |t| = T/2, \\ 0 & \text{für } |t| > T/2. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet A die Impulsamplitude und T die Impulsdauer.



Die dazugehörige Spektralfunktion $X(f)$ erhält man durch Anwendung des ersten Fourierintegrals:

$$X(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} A \cdot e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2\pi ft) dt - j \cdot A \int_{-T/2}^{+T/2} \sin(2\pi ft) dt.$$

Hierbei berücksichtigen die Integrationsgrenzen $\pm T/2$, dass $x(t)$ ausserhalb des Intervalls von $-T/2$ bis $T/2$ identisch 0 ist. Das zweite Integral verschwindet aufgrund des ungeraden Integranden und man erhält:

$$X(f) = \frac{A \cdot \sin(\pi f T)}{\pi f}.$$

Definition: Zur Abkürzung definieren wir nachfolgende Funktion und bezeichnen sie als **si-Funktion**:

$$\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Durch eine Erweiterung von Zähler und Nenner jeweils mit T kann man für die **Spektralfunktion** des Rechteckimpulses auch schreiben:

$$X(f) = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T).$$

Wie die obere Grafik zeigt, besitzt $X(f)$ folgende Eigenschaften:

- Das Maximum liegt bei der Frequenz $f = 0$ und hat den Wert $A \cdot T$ (Fläche des Rechtecks).
- Bei den Frequenzen $f_n = n/T$ mit $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ besitzt das Spektrum Nullstellen:

$$X(f = f_n) = 0.$$

- Für das Betragsspektrum gilt folgende Schranke:

$$|X(f)| \leq \frac{A}{\pi \cdot |f|}.$$

Gaußimpuls (1)

Ein weiteres Beispiel eines aperiodischen Signals ist der **Gaußimpuls** mit dem Zeitverlauf

$$x(t) = A \cdot e^{-\pi(t/\Delta t)^2}.$$

Dieser Impuls wird durch zwei Parameter beschrieben, nämlich

- die Impulsamplitude A und
- die äquivalente Impulsdauer Δt .

Definition: Die Dauer eines Rechteckimpulses mit gleicher Amplitude und Fläche wie das gegebene impulsförmige Signal $x(t)$ bezeichnet man allgemein als **äquivalente Impulsdauer**:

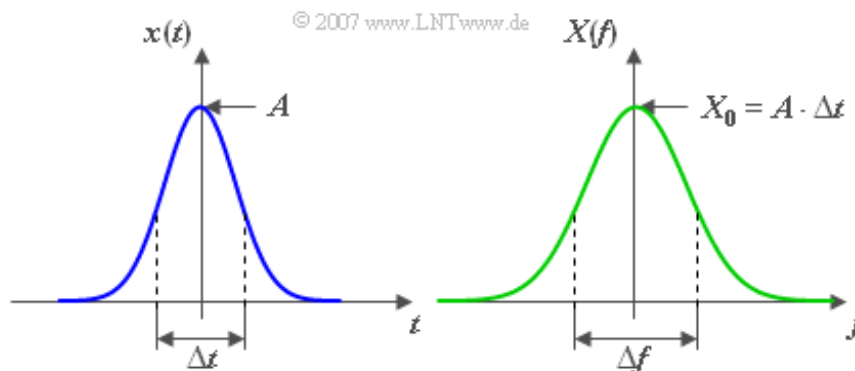
$$\Delta t = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt.$$

Der Gaußimpuls $x(t)$ weist folgende Eigenschaften auf:

- Die Zeitfunktion ist für alle Zeiten von $-\infty$ bis $+\infty$ existent und positiv. Das bedeutet gleichzeitig: Die absolute Impulsdauer ist unendlich groß.
- Das Impulsmaximum A liegt bei $t = 0$.
- Bei $t = \pm\Delta t/2$ ist der Impuls auf $e^{-\pi/4} \approx 0.456$ des Impulsmaximums abgeklungen. Bei $t = \pm 2\Delta t$ ist die Signalamplitude bereits kleiner als $0.0000035 \cdot A$.
- Die Spektralfunktion ist ebenfalls gaußförmig:

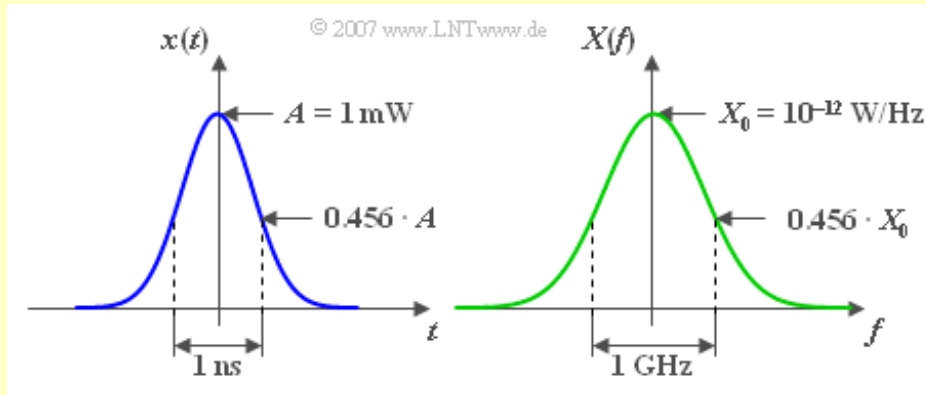
$$X(f) = A \cdot \Delta t \cdot e^{-\pi(f \cdot \Delta t)^2}.$$

- Der Verlauf von $X(f)$ hat sinngemäß die gleichen Eigenschaften wie der gaußförmige Impuls $x(t)$. Auf der Seite **Reziprozitätsgesetz** im **Kapitel 3.3** wird auf die Analogien von Zeitbereich und Frequenzbereich des Gaußimpulses nochmals gesondert eingegangen.



Gaußimpuls (2)

Beispiel: Der Ausgangsleistungsimpuls $x(t)$ eines Lasers für die digitale optische Übertragung kann im äquivalenten Tiefpassbereich meist mit guter Näherung als gaußförmig angenommen werden.



Mit den Signalparametern $A = 1$ Milliwatt und $\Delta t = 1$ Nanosekunde erhält man im Spektralbereich die vergleichbaren Kenngrößen $X_0 = X(f = 0) = A \cdot \Delta t = 10^{-12}$ W/Hz (Maximum) und die äquivalente Frequenzbandbreite $\Delta f = 1/\Delta t = 1$ GHz.

Wir möchten Sie auf zwei Interaktionsmodule zu dieser Thematik aufmerksam machen:

Impulse und deren Spektren (Dateigröße: 161 kB)

Tiefpässe im Frequenz- und Zeitbereich (Dateigröße: 160 kB)

Mit diesen beiden Interaktionsmodulen können Sie sich die Zeit- und Frequenzbereichsdarstellungen von Gauß-, Rechteck-, Dreieck-, Trapez- und Cosinus-Rolloff-Impulsen parametrisiert anzeigen lassen. Ebenso ist die Darstellung der so genannten dualen Korrespondenzen möglich.

Diracimpuls (1)

Im Kapitel 2 wurde die **Diracfunktion** zur Beschreibung des Spektrums eines Gleichsignals oder einer harmonischen Schwingung verwendet. In der Nachrichtentechnik ist es aber auch üblich und äußerst vorteilhaft, kurzfristige impulsartige Vorgänge mit Hilfe dieser mathematischen Funktion im Zeitbereich zu beschreiben und zu analysieren.

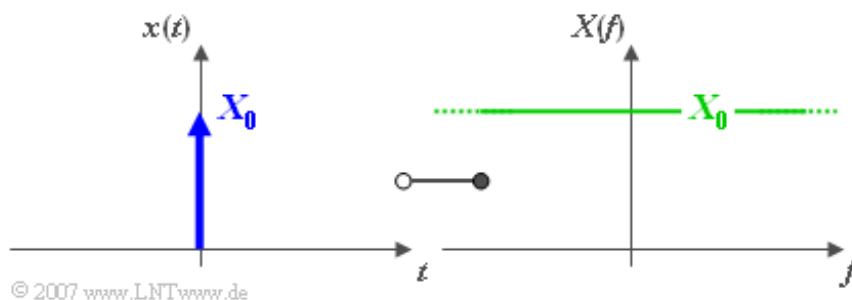
Man bezeichnet als **Diracimpuls** den Zeitverlauf

$$x(t) = X_0 \cdot \delta(t),$$

der wie folgt charakterisiert werden kann (vgl. die unten dargestellten Zeit- und Frequenzverläufe):

- Der Diracimpuls ist unendlich schmal, d. h. es ist $x(t) = 0$ für $t \neq 0$.
- Der Diracimpuls ist zum Zeitpunkt $t = 0$ unendlich hoch.
- Beschreibt $x(t)$ einen Spannungsverlauf, so hat dessen Impulsgewicht X_0 die Einheit „Vs“ (also eigentlich die Einheit „V/Hz“ einer Spektralfunktion), da $\delta(t)$ selbst die Einheit „1/s“ besitzt.
- Die Spektralfunktion des Diracimpulses beinhaltet alle Frequenzen gleichermaßen:

$$X(f) = X_0 \quad \text{für alle Frequenzen } f.$$

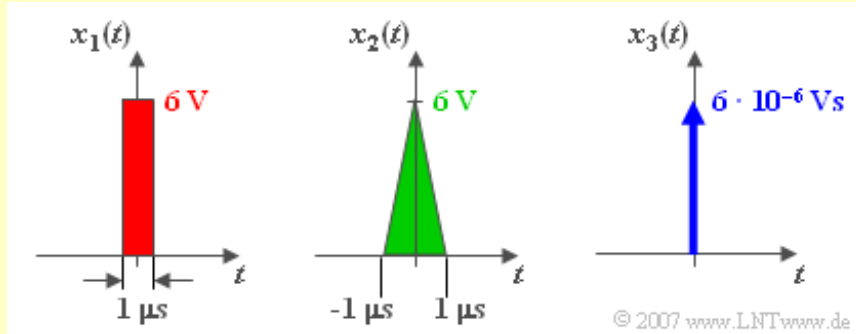


Die hier genannten Eigenschaften sind in einem Lehrvideo zusammenfassend dargestellt:

Herleitung und Visualisierung der Diracfunktion (Kapitel 2.2, Größe 0.56 MB, Dauer 2:50)

Diracimpuls (2)

Beispiel: Wir betrachten ein elektrisches Netzwerk mit ausgeprägter Tiefpasscharakteristik, z. B. mit der sehr niedrigen Grenzfrequenz $f_G = 10 \text{ kHz}$. Dessen Ausgangssignal ändert sich (nahezu) nicht, wenn eines der nachfolgenden Signale an den Eingang angelegt wird:



Da bei $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die äquivalenten Impulsdauern jeweils gleich sind ($\Delta t = 1 \mu\text{s}$) und diese sehr viel kleiner ist als $1/f_G = 100 \mu\text{s}$, hat die tatsächliche Impulsform (Rechteck oder Dreieck) keinen oder nur einen untergeordneten Einfluss auf das Ausgangssignal. Deshalb können beide Eingangsimpulse durch den Diracimpuls $x_3(t)$ angenähert werden, dessen Impulsfläche $X_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$ identisch ist mit den Impulsflächen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Bei einer Grenzfrequenz $f_G = 10 \text{ MHz}$ wäre diese vereinfachende Näherung dagegen nicht erlaubt.

Auch wenn der Diracimpuls gleich hoch wie die beiden anderen Impulse gezeichnet ist, so hat er zum Zeitpunkt $t = 0$ trotzdem einen unendlich großen Wert. Angegeben ist beim Diracimpuls immer die Impulsfläche („Impulsgewicht“), die sich gegenüber den Amplituden der anderen Impulse bereits in der Einheit („Vs“ anstelle von „V“) unterscheidet.

Multiplikation mit konstantem Faktor - Additionssatz

In diesem Abschnitt sind einige **Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation** zusammengestellt. Diese können beispielsweise dazu genutzt werden, um mit einem möglichst geringen Rechenaufwand aus bereits bekannten Transformationen

$$x(t) \circ \longrightarrow \bullet X(f), \quad x_1(t) \circ \longrightarrow \bullet X_1(f), \quad x_2(t) \circ \longrightarrow \bullet X_2(f)$$

neue Funktionszusammenhänge abzuleiten. Wir beschränken uns hier auf reelle Zeitfunktionen.

Satz: Ein **konstanter Faktor** k wirkt sich auf die Zeit- und die Spektralfunktion in gleicher Weise aus:

$$k \cdot x(t) \circ \longrightarrow \bullet k \cdot X(f).$$

Diesen Zusammenhang kann man z. B. zur Vereinfachung nutzen, indem man die Konstante k – die sowohl ein Verstärkungs- oder ein Einheitsfaktor sein kann – zunächst weglässt und erst später dem Ergebnis wieder hinzufügt.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Definition des Fourierintegrals, ebenso wie der Additionssatz, der die Grundlage für das so genannte **Superpositionsprinzip** darstellt.

Satz: Kann man eine Zeitfunktion als Summe von Teilfunktionen schreiben, so ist die resultierende Spektralfunktion die Summe der resultierenden Teilspektren (**Additionssatz**):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X(f) = X_1(f) + X_2(f).$$

Zuordnungssatz

Bereits bei der **komplexen Fourierreihe** zur Beschreibung periodischer Signale haben wir festgestellt, dass eine gerade Funktion stets zu reellen und eine ungerade Funktion ausschließlich zu imaginären Fourierkoeffizienten führt. Die Fouriertransformation zeigt ähnliche Eigenschaften.

Satz: Besteht eine reelle Zeitfunktion additiv aus einem geraden und einem ungeraden Anteil,

$$x(t) = x_g(t) + x_u(t),$$

so gilt für die dazugehörige Spektralfunktion (**Zuordnungssatz**):

$$X(f) = X_R(f) + j \cdot X_I(f) \quad \text{mit} \quad x_g(t) \circ \longrightarrow \bullet X_R(f) \quad \text{und} \quad x_u(t) \circ \longrightarrow \bullet j \cdot X_I(f).$$

Der Realteil $X_R(f)$ des Spektrums ist dann ebenfalls gerade, während $X_I(f)$ eine ungerade Funktion der Frequenz beschreibt.

Dieser Satz lässt sich einfach beweisen, wenn man den Satz von **Euler** berücksichtigt:

$$e^{-j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - j \cdot \sin(\omega_0 t).$$

Den geraden und ungeraden Anteil einer Funktion $x(t)$ kann man mit folgenden Gleichungen berechnen:

$$x_g(t) = \frac{1}{2} (x(t) + x(-t)),$$

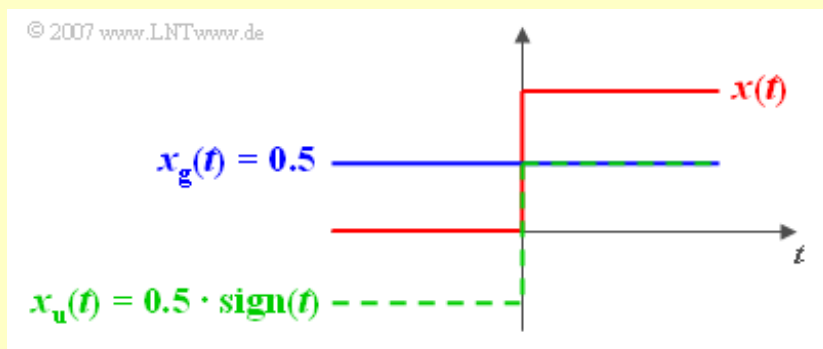
$$x_u(t) = \frac{1}{2} (x(t) - x(-t)).$$

Beispiel: Die Sprungfunktion $\gamma(t)$ kann wie folgt aufgeteilt werden:

$$x(t) = \gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(t).$$

Bei dieser Darstellung ist die so genannte Signum-Funktion verwendet:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0, \\ +1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$



Der gerade Signalanteil (blaue Kurve) ist eine Konstante mit der reellen Spektralfunktion $0.5 \cdot \delta(f)$. Das Spektrum der ungeraden Signumfunktion (grün eingezeichnet) wurde bereits im Beispiel auf der Seite **Fouriertransformation** berechnet. Damit ergibt sich als resultierende Spektralfunktion:

$$X(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) - j \cdot \frac{1}{2\pi f}.$$



Ähnlichkeitssatz

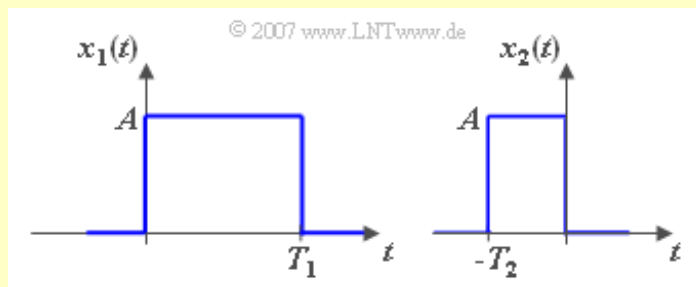
Dieser Satz zeigt den Zusammenhang zwischen den Spektralfunktionen zweier zwar formgleicher, aber gestreckter oder gestauchter Zeitsignale auf.

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, so gilt mit der reellen Konstanten k auch folgender Funktionszusammenhang (**Ähnlichkeitssatz**):

$$x(k \cdot t) \circ \bullet \frac{1}{|k|} \cdot X\left(\frac{f}{k}\right). \quad \Rightarrow \quad \text{Beweis}$$

Die Auswirkungen des Ähnlichkeitssatzes kann man sich zum Beispiel mit einem Tonband verdeutlichen. Spielt man ein solches Band mit doppelter Geschwindigkeit ab, so entspricht dies einer Stauchung des Zeitsignals ($k = 2$). Dadurch erscheinen die Frequenzen doppelt so hoch.

Beispiel: Wir betrachten zwei Rechteckimpulse gleicher Höhe, wobei $T_2 = T_1/2$ gilt.



Die Spektralfunktion von $x_1(t)$ lautet entsprechend dem Fourierintegral:

$$X_1(f) = A \cdot \frac{1 - e^{-j2\pi f T_1}}{j2\pi f} = A \cdot T_1 \cdot \frac{e^{j\pi f T_1} - e^{-j\pi f T_1}}{j2\pi f T_1} \cdot e^{-j\pi f T_1}.$$

Dafür kann auch geschrieben werden:

$$X_1(f) = A \cdot T_1 \cdot \text{si}(\pi f T_1) \cdot e^{-j\pi f T_1}.$$

Für die Spektralfunktion von $x_2(t)$ folgt aus dem Ähnlichkeitssatz mit $k = -2$:

$$X_2(f) = \frac{1}{2} \cdot X_1\left(-\frac{f}{2}\right) = \frac{A \cdot T_1}{2} \cdot \text{si}\left(-\pi f \frac{T_1}{2}\right) \cdot e^{j\pi f T_1/2}.$$

Die si-Funktion ist gerade: $\text{si}(-x) = \text{si}(x)$. Deshalb kann man auf das Vorzeichen im Argument der si-Funktion verzichten. Mit $T_2 = T_1/2$ erhält man schließlich:

$$X_2(f) = A \cdot T_2 \cdot \text{si}(\pi f T_2) \cdot e^{j\pi f T_2}.$$

Reziprozitätsgesetz von Zeitdauer und Bandbreite

Dieses wichtige Gesetz folgt direkt aus dem Ähnlichkeitssatz: Je breiter ein Impuls in seiner zeitlichen Ausdehnung ist, desto schmaler und höher ist die dazugehörige Spektralfunktion und umgekehrt.

Um quantitative Aussagen treffen zu können, definieren wir

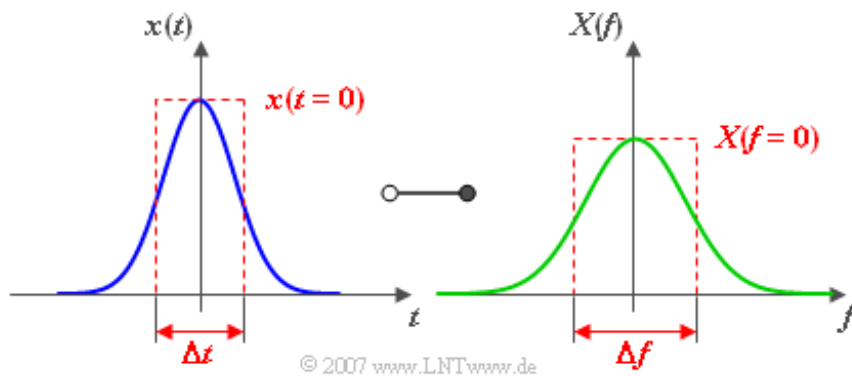
- die **äquivalente Impulsdauer** als die Breite eines flächengleichen Rechtecks im Zeitbereich:

$$\Delta t = \frac{1}{x(t=0)} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt,$$

- die **äquivalente Bandbreite** als die Breite eines flächengleichen Rechtecks im Spektralbereich:

$$\Delta f = \frac{1}{X(f=0)} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df.$$

Diese beiden Größen sind in nachfolgendem Bild am Beispiel eines Gaußimpulses und dessen ebenfalls gaußförmigem Spektrum dargestellt.



Satz: Das Produkt aus äquivalenter Impulsdauer und äquivalenter Bandbreite ist stets gleich 1:

$$\Delta t \cdot \Delta f = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Beweis}$$

Man bezeichnet diesen Zusammenhang als **Reziprozitätsgesetz**.

Anzumerken ist, dass Δf über die tatsächliche Spektralfunktion $X(f)$ und nicht über $|X(f)|$ definiert ist. Bei reellen Zeitfunktionen genügt die Integration über den geraden Funktionsanteil, da das Integral über den ungeraden Anteil wegen des **Zuordnungssatzes** stets 0 ist. Bei ungeraden Zeitfunktionen und damit rein imaginären Spektren versagen die beiden Definitionen von Δt bzw. Δf .

Beispiel: Verbreitert man den Gaußimpuls um den Faktor 3, so wird die äquivalente Bandbreite um den gleichen Faktor kleiner. Da die Impulsamplitude $x(t=0)$ nicht verändert wird, bleibt auch die Integralfläche über $X(f)$ konstant. Das heißt, dass $X(f=0)$ gleichzeitig um den Faktor 3 größer wird.

Vertauschungssatz

Diese Gesetzmäßigkeit ist besonders nützlich, um neue Fourierkorrespondenzen zu erhalten.

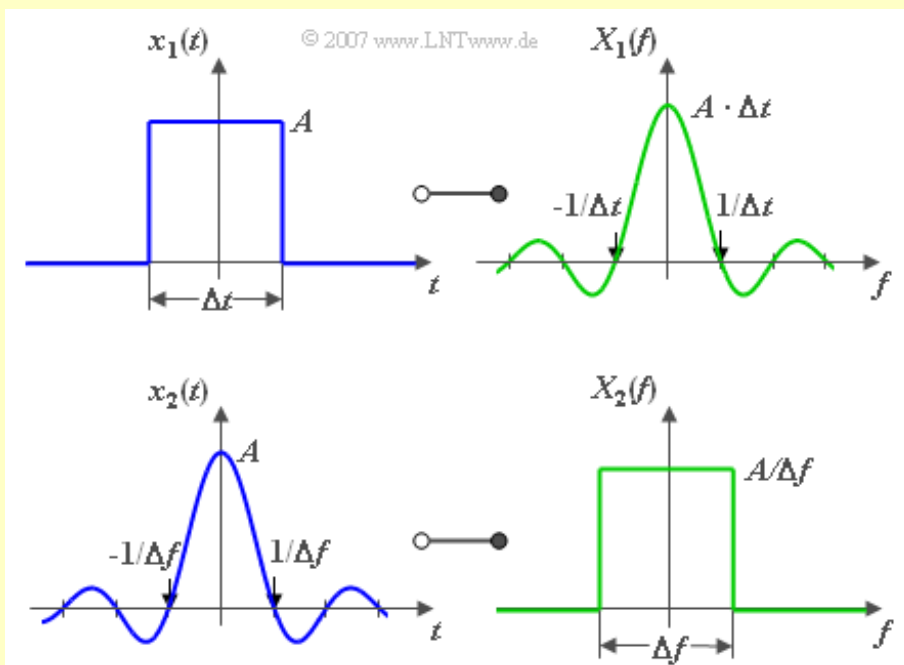
Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, dann gilt nach dem **Vertauschungssatz** auch:

$$X^*(t) \text{ --- } x^*(f) \quad \Rightarrow \quad \text{Beweis}$$

Beschränken wir uns auf reelle Zeitfunktionen, so können die Zeichen für „konjugiert komplex“ auf beiden Seiten der Fourierkorrespondenz weggelassen werden.

Beispiel: Das Gleichsignal $x(t) = 1$ besitzt das Spektrum $X(f) = \delta(f)$. Nach dem Vertauschungssatz lautet deshalb die Fouriertransformierte des Diracimpulses $x(t) = \delta(t)$ für alle f : $X(f) = 1$.

Das nachfolgende Bild zeigt eine weitere Anwendung des Vertauschungssatzes:



Verschiebungssatz

Betrachten wir nun eine Verschiebung der Zeitfunktion – z. B. verursacht durch eine Laufzeit – oder eine Frequenzverschiebung, wie sie beispielsweise bei der Amplitudenmodulation auftritt.

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte der Zeitfunktion $x(t)$, so gelten nach dem **Verschiebungssatz** auch folgende Zusammenhänge:

$$x(t - t_0) \circ \text{---} \bullet X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0},$$

$$x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \circ \text{---} \bullet X(f - f_0). \quad \Rightarrow \quad \text{Beweis}$$

Hierbei sind t_0 und f_0 Zeit- bzw. Frequenzgrößen.

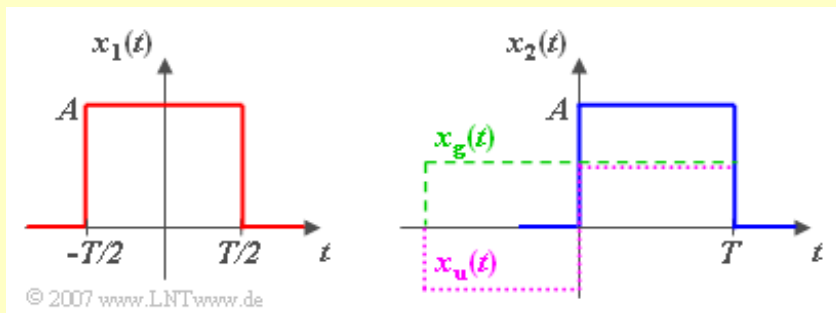
Beispiel: Wie schon mehrfach erwähnt, weist der unten dargestellte symmetrische Rechteckimpuls $x_1(t)$ das folgende Spektrum auf:

$$X_1(f) = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T).$$

Der Rechteckimpuls $x_2(t)$ ist gegenüber $x_1(t)$ um $T/2$ nach rechts verschoben: $x_2(t) = x_1(t - T/2)$.

Somit lautet sein Spektrum:

$$X_2(f) = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j\pi f T}.$$



Anzumerken ist, dass diese Spektralfunktion unter Verwendung des Eulerschen Satzes und einfacher trigonometrischer Umformungen auch wie folgt geschrieben werden kann.

$$X_2(f) = \frac{A}{2\pi f} \cdot \sin(2\pi f T) + j \cdot \frac{A}{2\pi f} \cdot [\cos(2\pi f T) - 1].$$

Das gleiche Ergebnis hätte man auch mit dem **Zuordnungssatz** erhalten. Der Realteil des Spektrums gehört zum geraden Signalanteil $x_g(t)$, der Imaginärteil zum ungeraden Anteil $x_u(t)$.

Differentiationssatz

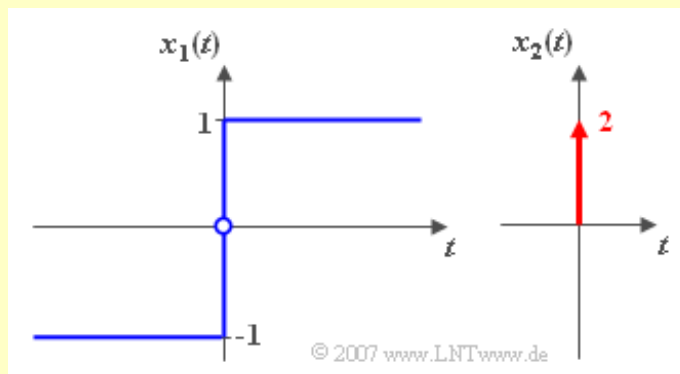
Dieser Satz zeigt, wie sich die Differentiation einer Funktion (im Zeit- bzw. Frequenzbereich) in der korrespondierenden Fouriertransformierten auswirkt; er ist auch mehrfach anwendbar. Ein einfaches Beispiel für die Anwendung dieses Satzes ist der Zusammenhang zwischen dem Strom $i(t)$ und der Spannung $u(t)$ einer Kapazität C : $i(t) = C \cdot du(t)/dt$.

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, so gelten auch folgende Fourierkorrespondenzen:

$$\frac{dx(t)}{dt} \circ \bullet j2\pi f \cdot X(f),$$
$$-t \cdot x(t) \circ \bullet \frac{1}{j2\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}. \quad \Rightarrow \quad \text{Beweis}$$

Dies sind die beiden Varianten des **Differentiationssatzes**.

Beispiel: Die Spektren der beiden skizzierten Signale wurden bereits in früheren Beispielen wie folgt berechnet: $X_1(f) = 1/(j\pi f)$, $X_2(f) = 2 = \text{const.}$



Es ist offensichtlich, dass $X_2(f) = X_1(f) \cdot j2\pi f$ gültig ist. Aus dem Differentiationssatz folgt somit, dass $x_2(t)$ gleich der Ableitung von $x_1(t)$ nach der Zeit ist. Dies stimmt tatsächlich: Für $t \neq 0$ ist die Zeitfunktion $x_1(t)$ konstant, also deren Ableitung 0 . Bei $t = 0$ ergibt sich eine unendlich große Steigung, was sich auch in der Gleichung $x_2(t) = 2 \cdot \delta(t)$ ausdrückt. Das Impulsgewicht 2 der Diracfunktion berücksichtigt, dass der Sprung innerhalb der Funktion $x_1(t)$ bei $t = 0$ die Höhe 2 hat.

Integrationsatz (1)

Betrachten wir nun die Integration, die ebenso wie die Differentiation eine lineare Operation darstellt.

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, so gelten auch die folgenden Fourierkorrespondenzen (**Integrationsatz**):

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \longrightarrow \bullet X(f) \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \right),$$
$$x(t) \left(-\frac{1}{j2\pi t} + \frac{1}{2} \cdot \delta(t) \right) \circ \longrightarrow \bullet \int_{-\infty}^f X(\nu) d\nu.$$

Da der Integrationsatz genau die Umkehrung des Differentiationssatzes darstellt, soll hier auf den Beweis verzichtet und stattdessen auf [Mar94] verwiesen werden. Wendet man auf die obere Gleichung den Differentiationssatz an, so erhält man:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \longrightarrow \bullet X(f) \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \right) \cdot j2\pi f.$$

Die Differentiation nach der oberen Grenze auf der linken Seite liefert genau den Integranden $x(t)$. Auf der rechten Seite der Fourierkorrespondenz ergibt sich richtigerweise $X(f)$, da die Diracfunktion bei $f=0$ wegen der Multiplikation mit $j2\pi f$ ausgeblendet wird.

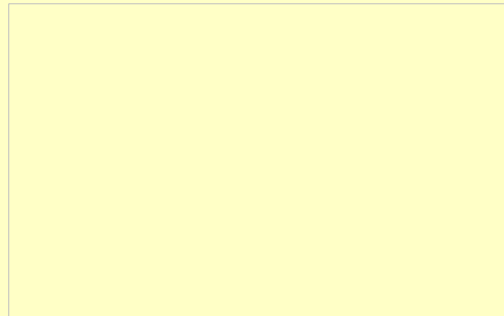
Alle im Kapitel 3.3 dargelegten Gesetzmäßigkeiten – unter Anderem auch der Differentiations- und der Integrationsatz – werden in einem Lehrvideo an Beispielen verdeutlicht:

Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation (2-teilig: 2.89 MB, 5:57 – 2.89 MB, 5:55)

Integrationsatz (2)

Beispiel: Wir betrachten die beiden Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$, die wie folgt zusammenhängen:

$$x_2(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau.$$



Aufgrund des Integrationsatzes gilt:

$$X_2(f) = \frac{1}{T} \cdot X_1(f) \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \right).$$

Mit der Spektralfunktion

$$X_1(f) = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi fT) \cdot e^{-j\pi fT}$$

erhält man somit

$$X_2(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f) + \frac{A \cdot T}{2j} \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{(\pi fT)^2} \cdot e^{-j\pi fT}$$

bzw. nach trigonometrischen Umformungen:

$$X_2(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f) + \frac{A \cdot T}{(2\pi fT)^2} [\cos(2\pi fT) - 1 - j \cdot \sin(2\pi fT)].$$

Die Diracfunktion bei $f = 0$ mit dem Gewicht $A/2$ berücksichtigt den Gleichanteil von $x_2(t)$. Das bedeutet auch: Der Gleichanteil der Rampenfunktion $x_2(t)$ ist genau so groß wie der Gleichanteil der Sprungfunktion. Das fehlende Dreieck mit den Eckkoordinaten $(0, 0)$, (T, A) und $(0, A)$ ändert am Gleichanteil nichts.

Faltung im Zeitbereich (1)

Der **Faltungssatz** ist mit das wichtigste Gesetz der Fouriertransformation. Deshalb wird in vorliegendem Tutorial diesem auch ein eigenes Unterkapitel gewidmet.

Betrachten wir zunächst den Faltungssatz im Zeitbereich und setzen voraus, dass die Spektren zweier Zeitfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bekannt sind:

$$X_1(f) \bullet \text{---} \circ x_1(t), \quad X_2(f) \bullet \text{---} \circ x_2(t).$$

Dann gilt für die Zeitfunktion des Produktes $X_1(f) \cdot X_2(f)$:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) \bullet \text{---} \circ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau.$$

Hierbei ist τ eine formale Integrationsvariable mit der Dimension einer Zeit.

Definition: Die obige Verknüpfung der Zeitfunktion $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnet man als **Faltung** und stellt diesen Funktionalzusammenhang mit einem Stern dar:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau.$$

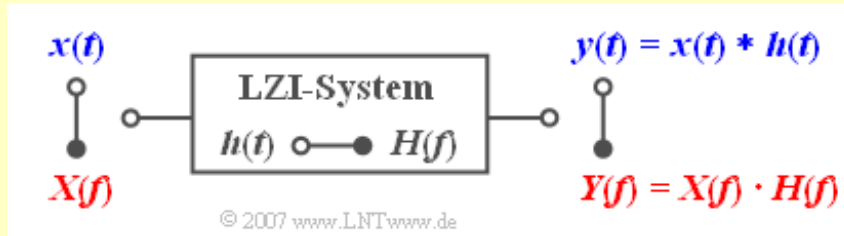
Damit lässt sich obige Fourierkorrespondenz auch wie folgt schreiben:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) \bullet \text{---} \circ x_1(t) * x_2(t). \quad \Rightarrow \quad \text{Beweis}$$

Anzumerken ist, dass die Faltung **kommutativ** ist, d. h. die Reihenfolge der Operanden ist vertauschbar.

Faltung im Zeitbereich (2)

Beispiel: Ein jedes lineare zeitinvariante (LZI-) System kann sowohl durch den Frequenzgang $H(f)$ als auch durch die Impulsantwort $h(t)$ beschrieben werden, wobei der Zusammenhang zwischen diesen beiden Systemgrößen durch die Fouriertransformation gegeben ist.



Legt man an den Eingang ein Signal $x(t)$ mit dem Spektrum $X(f)$ an, so gilt für das Spektrum des Ausgangssignals:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f).$$

Mit dem Faltungssatz ist es nun möglich, das Ausgangssignal auch direkt im Zeitbereich zu berechnen:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t).$$

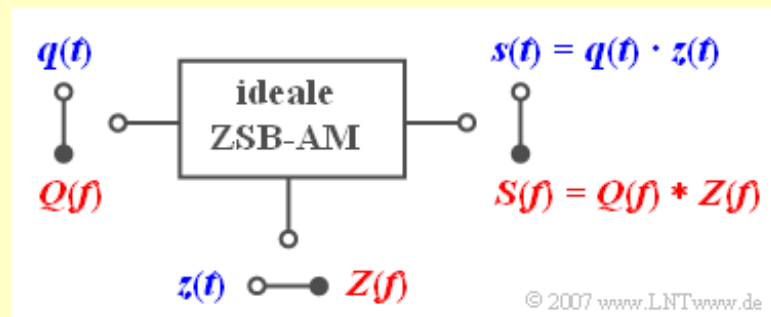
Faltung im Frequenzbereich

Die Dualität zwischen Zeit- und Frequenzbereich erlaubt auch Aussagen hinsichtlich des Spektrums des Produktsignals:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \circ \bullet X_1(f) * X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\nu) \cdot X_2(f - \nu) d\nu.$$

Dieses Resultat lässt sich ähnlich wie der **Faltungssatz im Zeitbereich** beweisen. Allerdings besitzt nun die Integrationsvariable ν die Dimension einer Frequenz.

Beispiel: Die Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (ZSB-AM) ohne Träger wird durch das unten skizzierte Modell beschrieben. Bei der Zeitbereichsdarstellung (blau) ergibt sich das modulierte Signal $s(t)$ als das Produkt aus dem Nachrichtensignal $q(t)$ und dem (normierten) Trägersignal $z(t)$.



Nach dem Faltungssatz folgt daraus für den Frequenzbereich (rot), dass das Ausgangsspektrum $S(f)$ gleich dem Faltungsprodukt aus $Q(f)$ und $Z(f)$ ist.

Faltung einer Funktion mit einer Diracfunktion

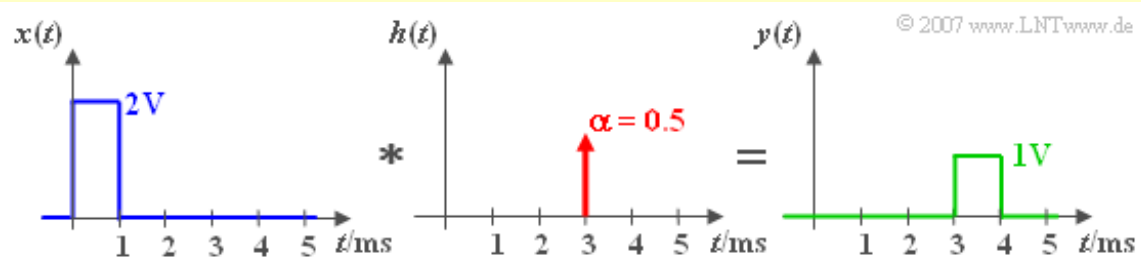
Sehr einfach wird die Faltungsoperation, wenn einer der beiden Operanden eine **Diracfunktion** ist. Dies gilt für die Faltung im Zeit- und im Frequenzbereich gleichermaßen.

Wir betrachten beispielhaft die Faltung einer Funktion $x_1(t)$ mit der Funktion $x_2(t) = \alpha \cdot \delta(t - T)$. Man erhält das Ergebnis:

$$x_1(t) * x_2(t) = \alpha \cdot x_1(t - T). \quad \Rightarrow \quad \text{Beweis}$$

In Worten: Die Faltung einer beliebigen Funktion mit einer Diracfunktion bei $t = T$ ergibt die um T nach rechts verschobene Funktion, wobei noch die Gewichtung der Diracfunktion durch den Faktor α zu berücksichtigen ist.

Beispiel: Ein Rechtecksignal $x(t)$ wird durch ein LZI-System lediglich um eine Laufzeit $\tau = 3$ ms verzögert und um den Faktor $\alpha = 0.5$ gedämpft. Dies erkennt man in nachfolgender Skizze sowohl am Ausgangssignal $y(t)$ als auch an der Impulsantwort $h(t)$.



Grafische Faltung (1)

Für die Beschreibungen auf dieser Seite wird von folgender Faltungsoperation ausgegangen:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau.$$

Die Lösung des Faltungsintegrals soll auf grafischem Wege erfolgen und es wird vorausgesetzt, dass $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zeitkontinuierliche Signale sind. Dann sind folgende Schritte erforderlich:

- Zeitvariable** der beiden Funktionen **ändern**: $x_1(t) \rightarrow x_1(\tau)$, $x_2(t) \rightarrow x_2(\tau)$.
- Zweite **Funktion spiegeln**: $x_2(\tau) \rightarrow x_2(-\tau)$.
- Gespiegelte **Funktion** um t **verschieben**: $x_2(-\tau) \rightarrow x_2(t - \tau)$.
- Multiplikation** der beiden Funktionen $x_1(\tau)$ und $x_2(t - \tau)$.
- Integration** über das Produkt bezüglich τ in den Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$.

Da die Faltung kommutativ ist, kann anstelle von $x_2(\tau)$ auch $x_1(\tau)$ gespiegelt werden.

Einige Hinweise:

Die Thematik dieses Abschnitts wird auch in nachfolgendem Interaktionsmodul veranschaulicht:

Zur Verdeutlichung der grafischen Faltung (194 kB)

Wir möchten Sie ferner auf das Programm „ft“ hinweisen, das die Faltung verschiedenartiger Impulse verdeutlicht. Dieses Lehrprogramm ist Teil des Programmpakets *LNTsim*, das von der Homepage des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik der Technischen Universität München heruntergeladen werden kann.

Hinweise zum Herunterladen der Texte und Programme von *LNTsim*

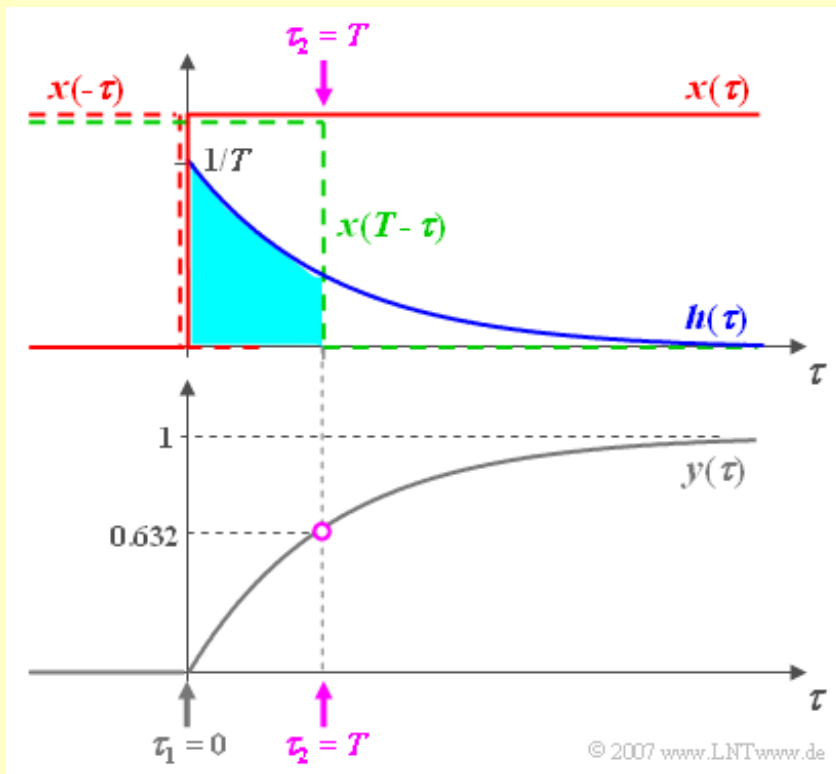
Des Weiteren möchten wir Sie auf das Java-Applet **Convolution** aufmerksam machen, das an der Universität Erlangen-Nürnberg im Rahmen des von der **Virtuellen Hochschule Bayern** geförderten eLearning-Kurses „SYSTOOL“ entwickelt wurde.

Grafische Faltung (2)

Beispiel: Am Eingang eines RC-Tiefpasses mit der Impulsantwort

$$h(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-t/T}$$

liege eine Sprungfunktion $x(t) = \gamma(t)$ an. Im Bild ist rot das sprungförmige Eingangssignal eingetragen und blau die exponentiell abfallende Impulsantwort $h(t)$, wobei die Zeitachse in τ umbenannt wurde.



Das Ausgangssignal errechnet sich aus der Faltung dieser beiden Funktionen, z. B. nach der Formel

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau.$$

Der Wert bei $t = 0$ ergibt sich nach der grafischen Faltung, indem man das Eingangssignal spiegelt, dieses gespiegelte Signal $x(-\tau)$ mit der Impulsantwort $h(\tau)$ multipliziert und darüber integriert. Da es hier kein Zeitintervall gibt, bei dem sowohl $h(\tau)$ als auch $x(-\tau)$ ungleich 0 ist, folgt daraus $y(t = 0) = 0$.

Für jeden anderen Zeitpunkt t muss $x(t - \tau)$, beispielsweise entsprechend der grün gestrichelten Kurve, verschoben werden. Da auch diese Funktion nur die binären Werte 0 oder 1 annehmen kann, wird die Integration hier sehr einfach und man erhält:

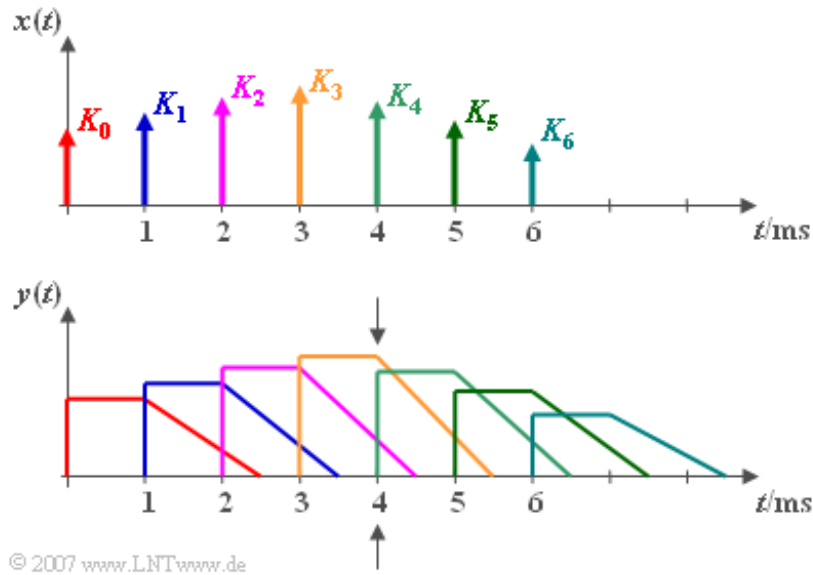
$$y(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \cdot \int_0^t e^{-\tau/T} d\tau = 1 - e^{-t/T}.$$

Obige Skizze gilt für den Zeitpunkt $t = T$ und führt zu dem Ausgangswert $1 - 1/e \approx 0.632$.

Anschauliche Deutung der Faltung

Wir betrachten ein Tiefpassfilter mit der Impulsantwort $h(t)$, die zunächst eine Millisekunde lang konstant ist und dann bis zur Zeit $t = 2.5$ ms linear abfällt. Legt man an den Eingang dieses Filters einen Diracimpuls $K_0 \cdot \delta(t)$ an, so ist das Ausgangssignal $y(t)$ formgleich mit $h(t)$. Dieser Sachverhalt ist im nachfolgenden Bild rot dargestellt.

Ein um $T = 1$ ms späterer Diracimpuls mit Gewicht $K_1 > K_0$ hat das blau eingezeichnete Ausgangssignal zur Folge, das gegenüber dem roten Signal verzögert und in der Amplitude vergrößert ist.



Wir betrachten nun das aus sieben verschiedenen gewichteten Diracimpulsen bestehende Eingangssignal

$$x(t) = \sum_{n=0}^6 K_n \cdot \delta(t - n \cdot T),$$

das als zeitdiskrete Näherung eines zeitkontinuierlichen Signals aufgefasst werden kann. Das Signal am Ausgang ist bei linearen Systemen die Summe der sieben im Bild verschiedenfarbig markierten Teilsignale:

$$y(t) = \sum_{n=0}^6 K_n \cdot h(t - n \cdot T).$$

Betrachten wir nun beispielhaft den Signalwert zum Zeitpunkt $t = 4T$:

$$y(t = 4T) = K_2 \cdot h(2T) + K_3 \cdot h(T) + K_4 \cdot h(0).$$

Dieser wird somit nur durch die Eingangssignalwerte K_2 , K_3 und K_4 bestimmt. Die Gewichtung ist entsprechend dem Beitrag der Impulsantwort: K_2 beeinflusst $y(4T)$ weniger stark als K_3 und K_4 , da $h(2T)$ kleiner als $h(T) = h(0)$ ist.