

Überblick zu Kapitel 2

Im Folgenden werden **periodische Signale** betrachtet und sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich mathematisch beschrieben. Dieses Kapitel beinhaltet im Einzelnen:

- einige Grundbegriffe wie *Periodendauer*, *Grundfrequenz* und *Kreisfrequenz*,
- die Eigenschaften eines *Gleichsignals* als Grenzfall eines periodischen Signals,
- die Definition und Interpretation der *Diracfunktion*, die zum Beispiel zur Spektraldarstellung eines Gleichsignals oder eines Gleichsignalanteils benötigt wird,
- die Zeit- und Frequenzdarstellung *harmonischer Schwingungen*, und schließlich
- die Anwendung der *Fourierreihe* zur Spektralanalyse periodischer Signale.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 26 Bildschirmseiten verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch 35 Grafiken, 6 Aufgaben und 6 Zusatzaufgaben mit insgesamt 53 Teilaufgaben, sowie vier Lernvideos (LV) und ein Interaktionsmodul (IM), nämlich:

- **Periodendauer T_0 periodischer Signale** (IM zu Kap. 2.1 – Größe 21 kB)
- **Herleitung, Visualisierung der Diracfunktion** (LV zu Kap. 2.2, Größe 0.56 MB, Dauer 2:50)
- **Harmonische Schwingungen** (LV zu Kap. 2.3, Teil 1: 2.38 MB, 4:33 – Teil 2: 3.76 MB, 6:15)
- **Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten** (LV zu Kap. 2.4, Größe 1.51 MB, Dauer 3:50)
- **Genauigkeit der Fourierreihe** (LV zu Kap. 2.4, Teil 1: 1.3 MB, 3:31 – Teil 2: 3.6 MB, 8:39)

Literatur: [BS01] – [Eic03] – [Han05] – [Hay83] – [KK10] – [Küp74] – [Lük04] – [Mar94] – [Söd00]

Weitere Informationen zu diesem Thema sowie Aufgaben, Simulationen und Programmierübungen finden Sie im Kapitel 6 des Praktikums *Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik* (Prof. Söder). Diese LNT-Lehrveranstaltung basiert auf den 24 DOS-Programmen des Lehrsoftwarepakets *LNTsim*.

Hinweise zum Herunterladen der Texte und Programme von *LNTsim*

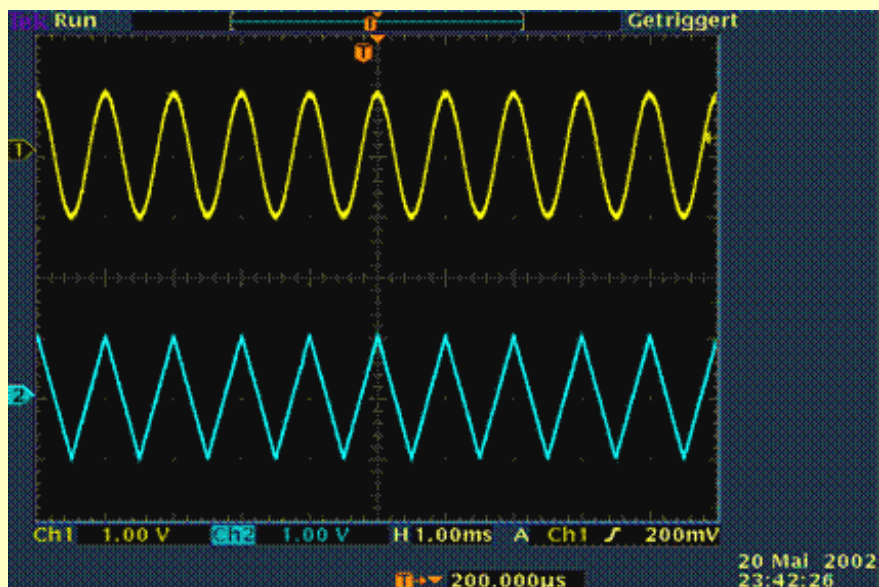
Eigenschaften und Anwendungen

Für die Nachrichtentechnik besitzen **periodische Signale** eine große Bedeutung. Sie gehören zur Klasse der **deterministischen Signale**, deren Zeitfunktion in analytischer Form angegeben werden kann. Ihr Signalverlauf ist damit für alle Zeiten t bekannt und für die Zukunft eindeutig vorhersagbar; sie sind daher niemals informationstragende Signale.

Trotzdem werden periodische Signale auch in der Nachrichtentechnik häufig benötigt, z. B.

- für die Modulation und Demodulation bei Trägerfrequenzsystemen,
- für die Synchronisation und Taktgenerierung bei Digitalsystemen,
- als Test- und Prüfsignale bei der Systemrealisierung.

Beispiel: Auf dem nachfolgenden Oszilloskopbild sehen Sie zwei typische Vertreter periodischer Signale, nämlich ein Cosinus- sowie ein Dreiecksignal. Wie aus den eingeblendeten Einstellungen hervorgeht, beträgt in beiden Fällen die Periodendauer eine Millisekunde und die Amplitude ein Volt.



Definition und Parameter

Bevor wir uns den Signalparametern eines periodischen Signals zuwenden, soll eine eindeutige Definition des Begriffs *Periodizität* erfolgen.

Definition: Ein Signal $x(t)$ bezeichnet man dann und nur dann als **periodisch**, wenn für alle beliebigen Werte von t und alle ganzzahligen Werte von i gilt:

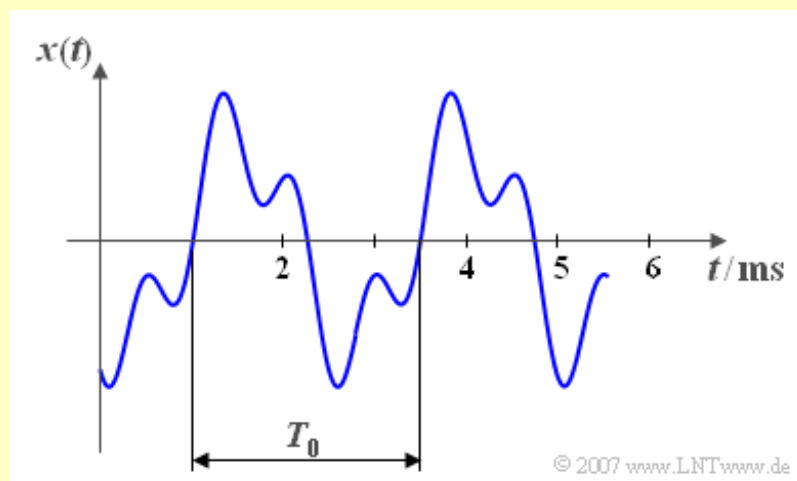
$$x(t + i \cdot T_0) = x(t).$$

Daraus ergeben sich die folgenden Kenngrößen:

- Die **Periodendauer** T_0 gibt den kleinstmöglichen Wert an, der obige Gleichung erfüllt.
- Die **Grundfrequenz** $f_0 = 1/T_0$ beschreibt die Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit (meist je Sekunde). Die Einheit „1/s“ wird auch mit „Hz“ bezeichnet, benannt nach dem deutschen Physiker **Heinrich Hertz**.
- Die **Grundkreisfrequenz** ω_0 stellt die Winkeldrehung pro Sekunde dar, die meist im Bogenmaß angegeben wird. Im Gegensatz zur Grundfrequenz ist hier nicht die Einheit „Hz“, sondern „1/s“ üblich. Es gilt folgende Gleichung:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Beispiel: Nachfolgend sehen Sie ein periodisches Zeitsignal mit der Periodendauer $T_0 = 2.5$ ms. Daraus ergeben sich die Grundfrequenz $f_0 = 400$ Hz und die Grundkreisfrequenz $\omega_0 = 2513$ 1/s.

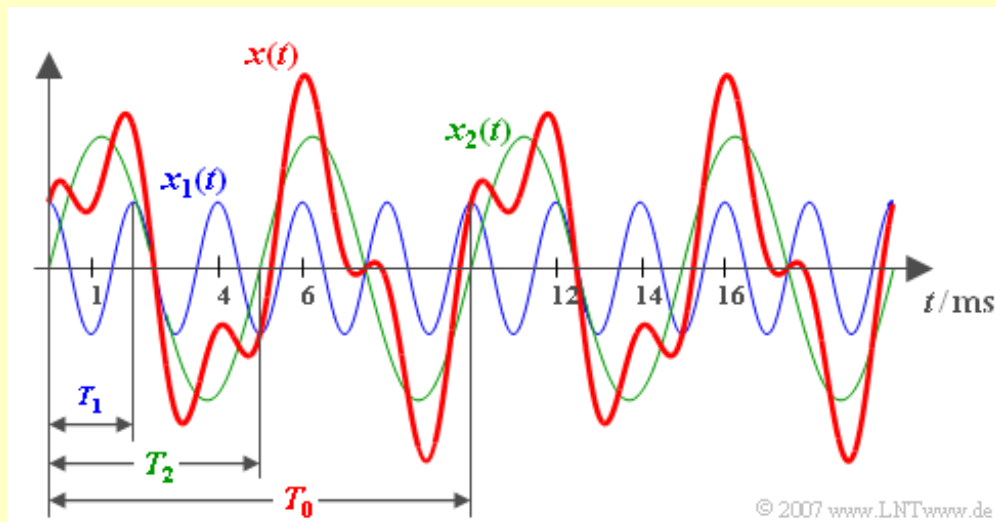


Resultierende Periodendauer

Besteht ein Signal $x(t)$ aus der Summe zweier periodischer Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$ mit Periodendauer T_1 bzw. T_2 , so ist die **resultierende Periodendauer** des Summensignals das kleinste gemeinsame Vielfache von T_1 und T_2 , und zwar unabhängig von den Amplituden- und Phasenverhältnissen.

Besitzen T_1 und T_2 dagegen kein rationales gemeinsames Vielfaches (z. B.: $T_2 = \pi \cdot T_1$), so ist das Summensignal im Gegensatz zu seinen beiden Komponenten nicht periodisch.

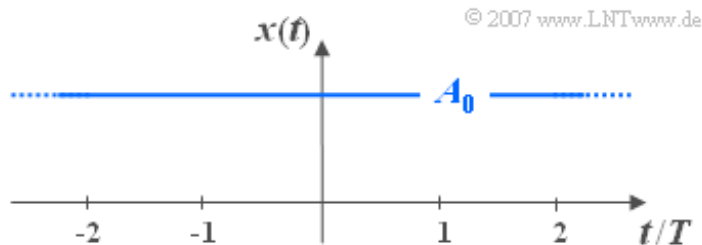
Beispiel: Ein Cosinussignal $x_1(t)$ mit der Periodendauer $T_1 = 2$ ms (blauer Signalverlauf) und ein Sinussignal $x_2(t)$ mit der Periodendauer $T_2 = 5$ ms und doppelt so großer Amplitude (grüner Verlauf) werden addiert. Das rot dargestellte Summensignal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ hat dann die resultierende Periodendauer $T_0 = 10$ ms und damit die Grundfrequenz $f_0 = 100$ Hz. Diese Frequenz selbst ist in $x(t)$ nicht enthalten, lediglich ganzzahlige Vielfache davon, nämlich $f_1 = 500$ Hz und $f_2 = 200$ Hz.



Mit nachfolgendem Interaktionsmodul können Sie die resultierende Periodendauer zweier harmonischer Schwingungen ermitteln: **Periodendauer periodischer Signale** (Dateigröße: 21 kB)

Zeitsignaldarstellung

Definition: Ein **Gleichsignal** ist ein deterministisches Signal, dessen Augenblickswerte für alle Zeiten t von $-\infty$ bis $+\infty$ konstant sind. Ein solches Signal ist der Grenzfall einer **harmonischen Schwingung**, wobei die Periodendauer T_0 einen unendlich großen Wert besitzt.



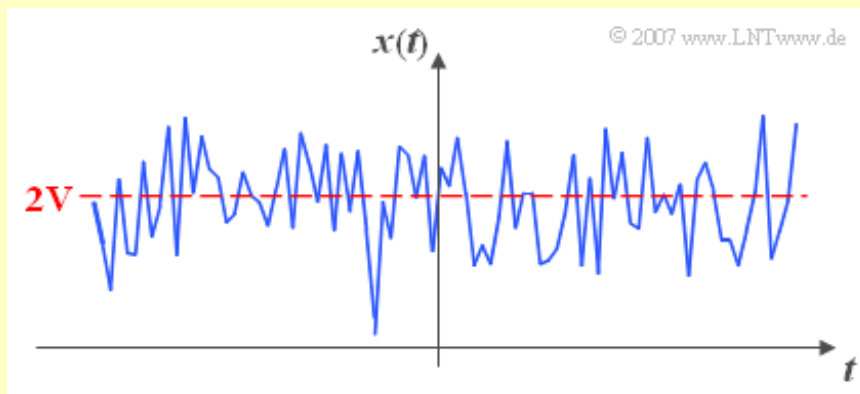
Ein Gleichsignal kann niemals Träger von Information im nachrichtentechnischen Sinne sein, doch können Nachrichtensignale durchaus einen *Gleichsignalanteil* besitzen. Alle im Folgenden für das Gleichsignal getroffenen Aussagen gelten in gleicher Weise auch für einen solchen Gleichsignalanteil.

Für den Gleichanteil A_0 eines beliebigen Signals $x(t)$ gilt:

$$A_0 = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} x(t) dt.$$

T_M ist die Messdauer, die stets möglichst groß (im Grenzfall unendlich) gewählt werden sollte und hier symmetrisch zum Zeitpunkt $t = 0$ angenommen ist.

Beispiel: Nachfolgend sehen Sie ein stochastisches Signal $x(t)$ mit dem Mittelwert $A_0 = 2 \text{ V}$.



Spektraldarstellung

Betrachten wir nun den Sachverhalt im *Frequenzbereich*. Aus der Zeitfunktion ist ersichtlich, dass diese – spektral gesehen – nur eine einzige (physikalische) Frequenz beinhaltet, nämlich die Frequenz $f = 0$. Dieses Ergebnis soll nun mathematisch hergeleitet werden.

Im Vorgriff auf das Kapitel **Fouriertransformation** wird bereits hier der mathematische Zusammenhang zwischen dem Zeitsignal $x(t)$ und dem korrespondierenden Spektrum $X(f)$ angegeben:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

Man bezeichnet die so berechnete Spektralfunktion $X(f)$ nach dem französischen Mathematiker **Jean Baptiste Fourier** als die Fouriertransformierte von $x(t)$ und verwendet als Kurzbezeichnung für diesen Funktionalzusammenhang

$$X(f) \bullet \text{---} \circ x(t).$$

Beschreibt $x(t)$ beispielsweise einen Spannungsverlauf, so hat $X(f)$ die Einheit „V/Hz“.

Wenden wir diese Transformationsgleichung auf das Gleichsignal $x(t) = A_0$ an, so erhält man:

$$X(f) = A_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt.$$

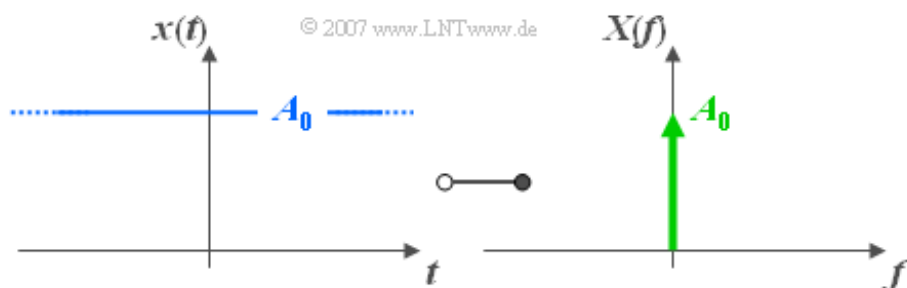
Es zeigt sich, dass dieses Integral für $f = 0$ divergiert, also einen unendlich großen Wert liefert (Integration über den konstanten Wert 1). Für jede andere Frequenz f nimmt das Integral jedoch den Wert 0 an; der dazugehörige Beweis ist allerdings nicht ganz trivial (Herleitung siehe nächste Seite).

Unsere gesuchte Spektralfunktion $X(f)$ wird durch folgende Gleichung in kompakter Weise ausgedrückt:

$$X(f) = A_0 \cdot \delta(f).$$

Man bezeichnet $\delta(f)$ als **Diracfunktion**, auch bekannt unter dem Namen „Distribution“. $\delta(f)$ ist eine mathematisch komplizierte Funktion; die exakte Herleitung finden Sie auf der nächsten Seite.

Nachfolgend sehen Sie in einer grafischen Darstellung nochmals den Funktionalzusammenhang zwischen einem Gleichsignal $x(t) = A_0$ und der dazugehörigen Spektralfunktion $X(f) = A_0 \cdot \delta(f)$. Die Diracfunktion bei der Frequenz $f = 0$ ist durch einen Pfeil dargestellt, der mit dem Gewicht A_0 versehen ist.



Diracfunktion im Frequenzbereich

Definition: Die für die Beschreibung nachrichtentechnischer Systeme äußerst wichtige **Diracfunktion** weist folgende Eigenschaften auf:

- Die Diracfunktion ist unendlich schmal, das heißt, es ist $\delta(f) = 0$ für $f \neq 0$.
- Die Diracfunktion $\delta(f)$ ist bei der Frequenz $f = 0$ unendlich hoch.
- Die Impulsfläche der Diracfunktion ergibt einen endlichen Wert, nämlich 1:

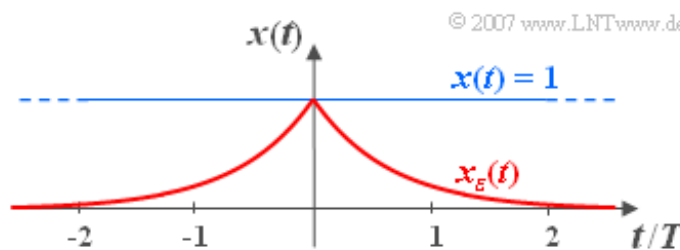
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1.$$

Aus dieser letzten Eigenschaft folgt, dass $\delta(f)$ die Einheit $\text{Hz}^{-1} = \text{s}$ besitzt.

Zur mathematischen Herleitung obiger Eigenschaften gehen wir von einem dimensionslosen Gleichsignal aus. Um die Konvergenz des Fourierintegrals zu erzwingen, wird das nicht energiebegrenzte Signal $x(t)$ mit einer beidseitig abfallenden Exponentialfunktion multipliziert. Die Grafik zeigt das Signal $x(t) = 1$ und das energiebegrenzte Signal

$$x_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon \cdot |t|}.$$

Hierbei gelte $\varepsilon > 0$. Im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ geht $x_\varepsilon(t)$ in $x(t) = 1$ über.



Zur Spektraldarstellung kommt man durch die Anwendung des vorne angegebenen Fourierintegrals:

$$X_\varepsilon(f) = \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt.$$

Durch Integration und Zusammenfassen beider Terme erhalten wir die rein reelle Spektralfunktion des energiebegrenzten Signals $x_\varepsilon(t)$:

$$X_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon - j \cdot 2\pi f} + \frac{1}{\varepsilon + j \cdot 2\pi f} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (2\pi f)^2}.$$

Die Fläche unter der Kurve ist unabhängig vom Parameter ε gleich 1. Je kleiner ε gewählt wird, um so schmaler und höher wird die Funktion, wie das nachfolgende Lehrvideo zeigt.

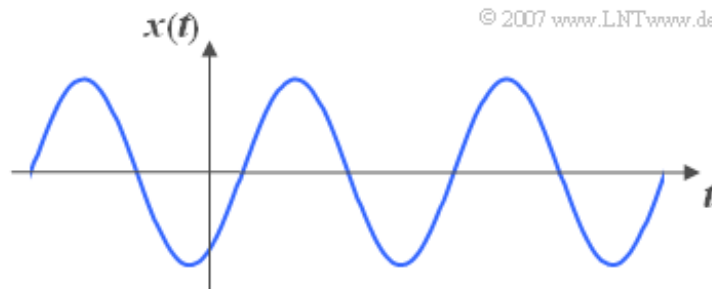
Herleitung und Visualisierung der Diracfunktion (Größe 0.56 MB, Dauer 2:50)

Der Grenzübergang für $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert die Diracfunktion mit Gewicht 1:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(f) = \delta(f).$$

Definition und Eigenschaften

Besondere Bedeutung für die Nachrichtentechnik – aber auch in vielen Naturwissenschaften – haben **harmonische Schwingungen**. Das nachfolgende Bild zeigt einen beispielhaften Signalverlauf.



Ihre Bedeutung hängt unter Anderem damit zusammen, dass die harmonische Schwingung die Lösung einer in vielen Disziplinen vorkommenden Differentialgleichung darstellt, die wie folgt lautet:

$$x(t) + k \cdot \ddot{x}(t) = 0.$$

Hierbei kennzeichnen die beiden Punkte die zweite Ableitung der Funktion $x(t)$ nach der Zeit.

Definition: Jede harmonische Schwingung kann in allgemeinsten Form wie folgt dargestellt werden:

$$x(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi). \quad \Rightarrow \quad \text{Anmerkung zur Nomenklatur}$$

In dieser Gleichung sind folgende Signalparameter verwendet:

- die **Amplitude** C , gleichzeitig der Maximalwert des Signals,
- die **Signalfrequenz** f_0 und
- der **Nullphasenwinkel** (oder kurz die *Phase*) φ der Schwingung.

Folgendes Lehrvideo verdeutlicht Eigenschaften harmonischer Schwingungen anhand von Tonleitern:

Harmonische Schwingungen (Kapitel 2.3, 2-teilig: 2.38 MB, 4:33 – 3.76 MB, 6:15)

Zeitsignaldarstellung

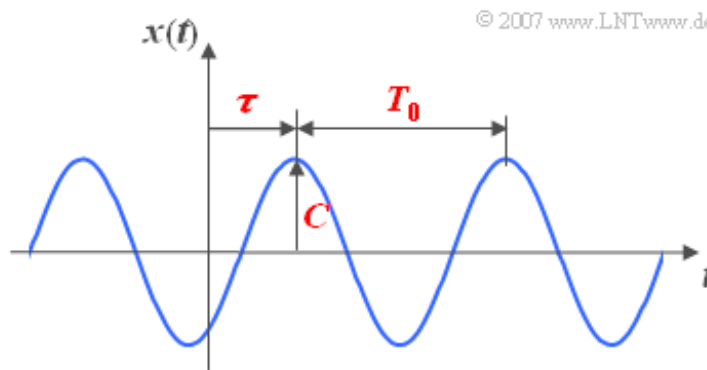
Die Amplitude C kann aus der nachfolgenden Grafik direkt abgelesen werden. Die Signalfrequenz f_0 ist gleich dem Kehrwert der Periodendauer T_0 . Schreibt man die obige Gleichung in der Form

$$x(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0(t - \tau)),$$

so erkennt man weiter, dass zwischen der Verschiebung τ gegenüber einem cosinusförmigen Signal und dem Nullphasenwinkel φ folgender Zusammenhang besteht:

$$\varphi = \frac{\tau}{T_0} \cdot 2\pi.$$

Bei einem **Cosinussignal** sind die Kenngrößen τ und φ jeweils 0. Demgegenüber ist ein **Sinussignal** um $\tau = T_0/4$ verschoben und entsprechend gilt für den Nullphasenwinkel $\varphi = \pi/2$ (im Bogenmaß) bzw. 90° .



Es ist also festzustellen, dass – wie für das obige Beispiel vorausgesetzt – bei einem positiven Wert von τ bzw. φ das (bezüglich $t = 0$) nächstgelegene Signalmaximum später kommt als beim Cosinussignal und bei negativen Werten früher. Liegt am Systemeingang ein Cosinussignal an und ist das Ausgangssignal demgegenüber um einen Wert τ verzögert, so bezeichnet man τ auch als die **Laufzeit** des Systems.

Da eine harmonische Schwingung durch lediglich drei Signalparameter eindeutig festgelegt ist, kann der gesamte Signalverlauf von $-\infty$ bis $+\infty$ auch aus nur drei Signalwerten $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ und $x_3 = x(t_3)$ analytisch beschrieben werden, wenn die Zeiten t_1 , t_2 und t_3 geeignet ausgewählt wurden.

Darstellung mit Cosinus- und Sinusanteil

Eine weitere Darstellungsform der harmonischen Schwingung lautet wie folgt:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) + B \cdot \sin(2\pi f_0 t).$$

Die Bezeichnungen A und B für die Amplituden von Cosinus- und Sinusanteil sind hier so gewählt, damit sie mit der Nomenklatur des nachfolgenden Kapitels **Fourierreihe** übereinstimmen.

Durch Anwendung trigonometrischer Umformungen erhalten wir aus der Darstellung auf der letzten Seite:

$$x(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi) = C \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + C \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\pi f_0 t).$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich direkt:

$$A = C \cdot \cos(\varphi),$$

$$B = C \cdot \sin(\varphi).$$

Der Betrag und der Nullphasenwinkel der harmonischen Schwingung können aus den Parametern A und B ebenfalls nach einfachen trigonometrischen Überlegungen berechnet werden:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right).$$

Spektraldarstellung eines Cosinussignals

Zur Herleitung der Spektralfunktion beschränken wir uns zunächst auf ein Cosinussignal, das mit der **komplexen Exponentialfunktion** und dem Satz von **Euler** auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} \cdot (e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}).$$

Bereits aus dieser Zeitbereichsdarstellung ist ersichtlich, dass das Cosinussignal – spektral gesehen – nur eine einzige (physikalische) Frequenz beinhaltet, nämlich die Frequenz f_0 .

Zur mathematischen Herleitung der Spektralfunktion benutzen wir folgende Beziehungen:

- den auf der Seite **Diracfunktion** (im Kapitel 2.2) hergeleiteten Funktionalzusammenhang:

$$x(t) = A \circ \longrightarrow \bullet X(f) = A \cdot \delta(f).$$

- den **Verschiebungssatz** (für den Frequenzbereich) im Vorgriff auf das Kapitel 3.3:

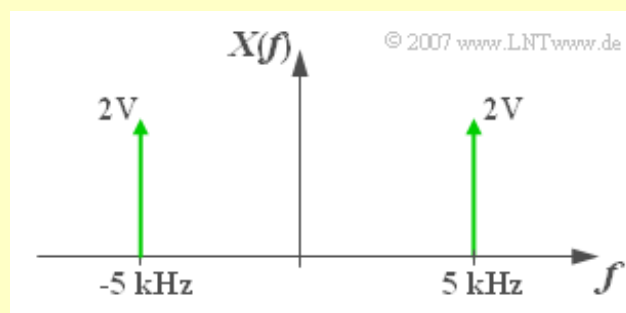
$$x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \circ \longrightarrow \bullet X(f - f_0).$$

Daraus ergibt sich die folgende Fourierkorrespondenz:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) \circ \longrightarrow \bullet X(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f - f_0).$$

Diese Gleichung bedeutet: Die Spektralfunktion eines Cosinussignals mit der Frequenz f_0 setzt sich aus zwei Diracfunktionen bei $\pm f_0$ zusammen. Die Impulsgewichte beider Diracfunktionen sind jeweils gleich der halben Signalamplitude.

Beispiel: Das Bild zeigt die Spektralfunktion einer Cosinusschwingung mit der Amplitude $A = 4 \text{ V}$ und der Frequenz $f_0 = 5 \text{ kHz}$. Die Periodendauer beträgt demnach $T_0 = 200 \text{ }\mu\text{s}$. Die Diracfunktion bei der Frequenz $-f_0$ gehört dabei zum ersten Term obiger Gleichung (aus der Bedingung $f + f_0 = 0$ ableitbar), diejenige bei $+f_0$ zum zweiten Term $\delta(f - f_0)$. Die Impulsgewichte sind jeweils 2 V .



Es soll darauf hingewiesen werden, dass die Spektralfunktion einer jeden reellen Zeitfunktion mit Ausnahme des Gleichsignals sowohl Anteile bei positiven als auch bei negativen Frequenzen aufweist. Diese Tatsache, die Studienanfänger oft Probleme bereitet, ergibt sich ganz formal aus dem Satz von Euler (siehe oben). Durch die Erweiterung des Wertebereichs der Frequenz von $f \geq 0$ auf die Menge der reellen Zahlen kommt man von der physikalischen zur **mathematischen Frequenz**. Allerdings ist für eine negative Frequenz die vorne angegebene **Definition** nicht mehr anwendbar: -5 kHz kann nicht als

„minus 5000 Schwingungen pro Sekunde“ interpretiert werden.

Im weiteren Verlauf dieses Kurses werden Sie feststellen, dass durch die (scheinbare) Verkomplizierung des einfachen Sachverhaltes später kompliziertere Sachverhalte sehr elegant und einfach beschrieben werden können.

Spektraldarstellung eines Sinussignals

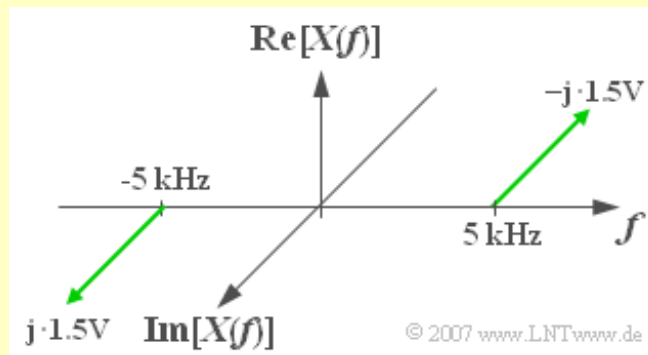
Für ein sinusförmiges Signal gilt mit dem Satz von **Euler** in ähnlicher Weise:

$$x(t) = B \cdot \sin(2\pi f_0 t) = \frac{B}{2 \cdot j} (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) = j \cdot \frac{B}{2} (e^{-j2\pi f_0 t} - e^{j2\pi f_0 t}).$$

Daraus folgt für die Spektralfunktion, die jetzt rein imaginär ist:

$$x(t) = B \cdot \sin(2\pi f_0 t) \circ \bullet X(f) = j \cdot \frac{B}{2} \cdot \delta(f + f_0) - j \cdot \frac{B}{2} \cdot \delta(f - f_0).$$

Beispiel: Das Bild zeigt die rein imaginäre Spektralfunktion einer Sinusschwingung mit der Amplitude $B = 3 \text{ V}$ und der Frequenz $f_0 = 5 \text{ kHz}$. Bei der positiven Frequenz ($+f_0$) ist der Imaginärteil negativ, bei der negativen Frequenz ($-f_0$) positiv.



Allgemeine Spektraldarstellung

Bei Überlagerung von Cosinus- und Sinusanteil entsprechend der Beziehung

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) + B \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

überlagern sich auch die einzelnen Spektralfunktionen und man erhält:

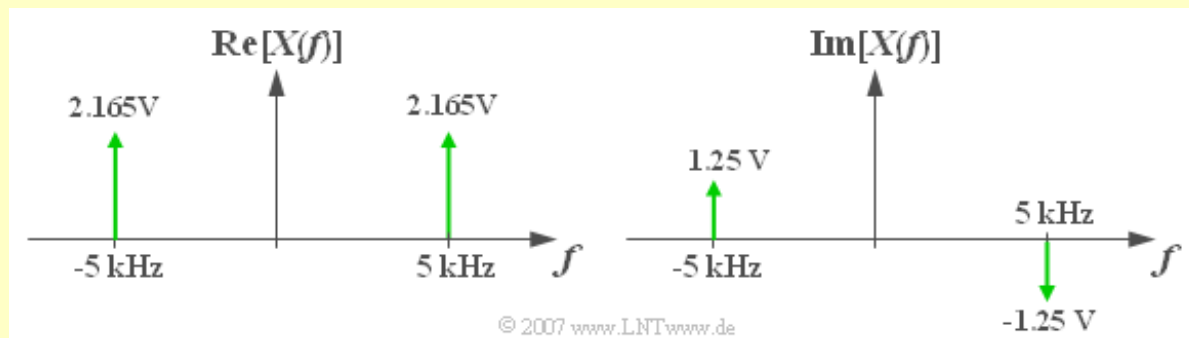
$$X(f) = \frac{A + j \cdot B}{2} \delta(f + f_0) + \frac{A - j \cdot B}{2} \delta(f - f_0).$$

Mit dem Betrag C und der Phase φ lautet diese Fourierkorrespondenz:

$$x(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi) \iff X(f) = \frac{C}{2} \cdot e^{j\varphi} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{C}{2} \cdot e^{-j\varphi} \cdot \delta(f - f_0).$$

Man erkennt, dass eine Spektralfunktion $X(f)$ nicht nur für positive und negative Frequenzen definiert ist, sondern im Allgemeinen auch noch komplexwertig ist.

Beispiel: Mit den Parametern $C = 5 \text{ V}$, $f_0 = 5 \text{ kHz}$ und $\varphi = 30 \text{ Grad}$ (im Bogenmaß $\pi/6$) ergibt sich wegen $2.5 \cdot \cos(30^\circ) = 2.165$ und $2.5 \cdot \sin(30^\circ) = 1.25$ für den Real- bzw. den Imaginärteil von $X(f)$:



Folgendes Lehrvideo verdeutlicht Eigenschaften harmonischer Schwingungen anhand von Tonleitern:

Harmonische Schwingungen (Kapitel 2.3, 2-teilig: 2.38 MB, 4:33 – 3.76 MB, 6:15)

Allgemeine Beschreibung (1)

Jede periodische Funktion $x(t)$ kann in allen Bereichen, in denen sie stetig ist oder nur endlich viele Sprungstellen aufweist, in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden, die man als **Fourierreihe** bezeichnet.

Definition: Die Fourierreihe eines periodischen Signals $x(t)$ lautet wie folgt:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n\omega_0 t).$$

Hierbei bezeichnen:

- A_0 den **Gleichanteil** von $x(t)$,
- A_n die **Cosinuskoeffizienten**,
- B_n die **Sinus koeffizienten**,
- $\omega_0 = 2\pi/T_0$ die **Grundkreisfrequenz** des periodischen Signals (T_0 ist die Periodendauer).

Soll die Fourierreihe mit dem tatsächlichen periodischen Signal $x(t)$ exakt übereinstimmen, so müssen im Allgemeinen unendlich viele Cosinus- und Sinuskoeffizienten zur Berechnung herangezogen werden. Bricht man die Fourierreihe ab und verwendet jeweils nur N dieser Koeffizienten A_n und B_n , so ergibt sich bis auf Sonderfälle ein etwas anderer Funktionsverlauf:

$$x_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^N B_n \cdot \sin(n\omega_0 t).$$

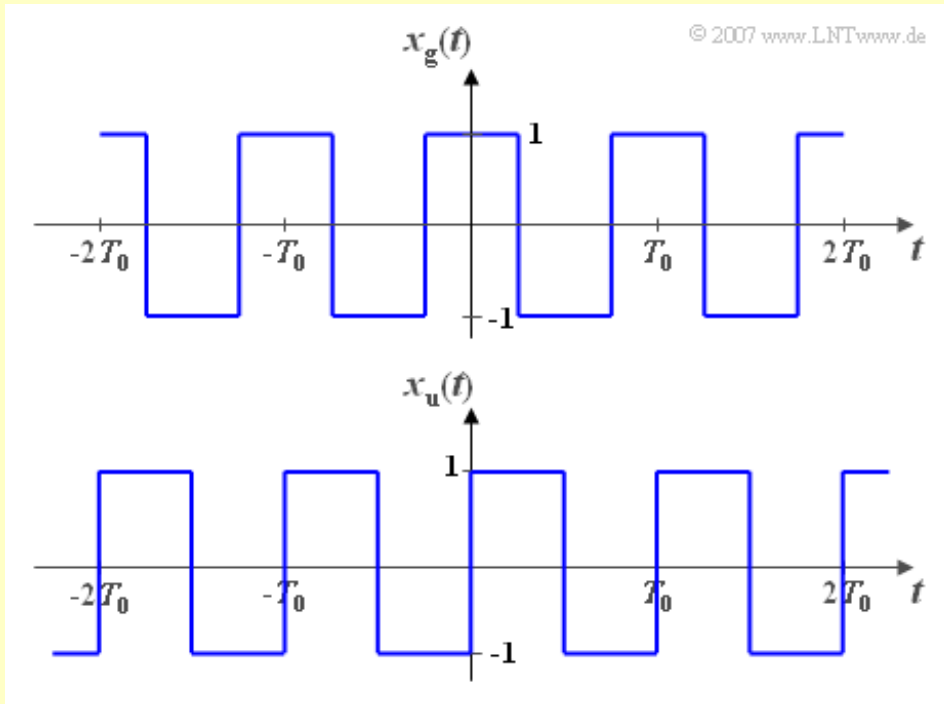
Zwischen dem periodischen Signal und dieser Fourierreihenapproximation gilt folgender Zusammenhang:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t).$$

Ist $N \cdot f_0$ die höchste im Signal $x(t)$ vorkommende Frequenz, so gilt natürlich $x_N(t) = x(t)$.

Allgemeine Beschreibung (2)

Beispiel: Wir betrachten zwei periodische Rechtecksignale, jeweils mit der Periodendauer T_0 und der Grundkreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Bei der oben skizzierten geraden Funktion $x_g(t)$ gilt $x_g(-t) = x_g(t)$. Dagegen ist die unten dargestellte Funktion ungerade: $x_u(-t) = -x_u(t)$.



In Formelsammlungen wie z. B. **[BS01]** findet man die Fourierreihendarstellungen der beiden Signale:

$$x_g(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5\omega_0 t) - \dots + \dots \right),$$

$$x_u(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots + \dots \right).$$

Wegen der allgemeingültigen Beziehung

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots = \frac{\pi}{4}$$

ergeben sich die Amplituden der beiden Rechtecksignale (Maximalwerte bei $t = 0$ bzw. $T_0/4$) jeweils zu 1. Dies lässt sich auch anhand der Signalverläufe in obigem Bild verifizieren.

Berechnung der Fourierkoeffizienten (1)

Der Fourierkoeffizient A_0 gibt den **Gleichanteil** an, der durch Mittelung über den Signalverlauf $x(t)$ bestimmt werden kann. Aufgrund der Periodizität genügt die Mittelung über eine Periode:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt.$$

Der Integrationsbereich kann auch von 0 bis T_0 (oder über eine anders festgelegte Periode) gewählt werden. Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten A_n und B_n ($n \geq 1$) beruht auf der Eigenschaft, dass die harmonischen Cosinus- und Sinusfunktionen so genannte **Orthogonalfunktionen** sind. Für diese gilt:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(n\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} T_0/2 & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} T_0/2 & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{für alle } m, n.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen ergeben sich für die Cosinus- und Sinuskoeffizienten:

$$A_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt.$$

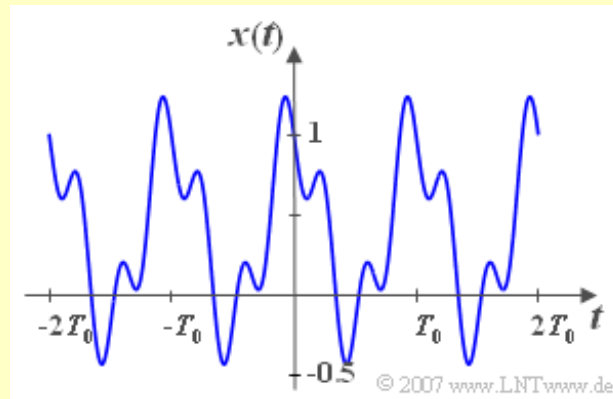
Nachfolgend finden Sie ein Lehrvideo zur weiteren Verdeutlichung dieser Gleichungen:

Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten (Dateigröße 1.51 MB, Dauer 3:50)

Berechnung der Fourierkoeffizienten (2)

Beispiel: Wir betrachten die nachfolgend gezeichnete periodische Zeitfunktion

$$x(t) = 0.4 + 0.6 \cdot \cos(\omega_0 t) - 0.3 \cdot \sin(3\omega_0 t).$$



Da das Integral der Cosinus- und der Sinusfunktion über jeweils eine Periode identisch 0 ist, erhält man für den Gleichsignalkoeffizienten $A_0 = 0.4$.

Die Bestimmungsgleichung für den Cosinuskoeffizienten A_1 lautet (Integrationsintervall von 0 bis T_0):

$$A_1 = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.4 \cdot \cos(\omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.6 \cdot \cos^2(\omega_0 t) dt - \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.3 \cdot \sin(3\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t) dt.$$

Wie gerade gezeigt, ist das letzte Integral aufgrund der Orthogonalität gleich 0; das erste ist ebenfalls 0. Nur der mittlere Term liefert hier einen Beitrag zu $A_1 = 2 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.6$. Für alle weiteren ($n \geq 2$) Cosinuskoeffizienten liefern alle drei Integrale den Wert 0, und es gilt somit stets $A_n = 0$.

Die Bestimmungsgleichungen für die Sinuskoeffizienten B_n lauten entsprechend:

$$B_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.4 \cdot \sin(n \omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.6 \cdot \cos(\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt - \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.3 \cdot \sin(3\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

Für $n \neq 3$ sind alle drei Integralwerte gleich 0 und damit gilt auch $B_n = 0$. Dagegen liefert für $n = 3$ das letzte Integral einen Beitrag, und man erhält für den Sinuskoeffizienten $B_3 = -0.3$.

Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften (1)

Einige Erkenntnisse über die Fourierkoeffizienten lassen sich bereits aus den **Symmetrieeigenschaften** der Zeitfunktion $x(t)$ ablesen.

- Ist die Funktion $x(t)$ gerade, also achsensymmetrisch um die Ordinate ($t = 0$), so verschwinden alle Sinuskoeffizienten, da die Sinusfunktion selbst eine ungerade Funktion ist:

$$B_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

- Eine ungerade Funktion $x(t)$ ist punktsymmetrisch um den Koordinatenursprung ($t = 0; x = 0$). Deshalb müssen alle Cosinuskoeffizienten verschwinden ($A_n = 0$), da die Cosinusfunktion selbst gerade ist. In diesem Fall ist auch der Gleichanteil A_0 stets 0.

$$A_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

- Liegt eine Funktion ohne Gleichanteil vor ($A_0 = 0$) und ist diese innerhalb einer Periode ungerade, das heißt, ist die Bedingung $x(t) = -x(t - T_0/2)$ erfüllt, so sind in der Fourierreihendarstellung nur ungerade Vielfache der Grundfrequenz vorhanden. Für die Koeffizienten mit geradzahligem Index gilt dagegen stets:

$$A_n = B_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots).$$

- Sind alle Koeffizienten A_n und B_n mit geradzahligem Index ($n = 2, 4, \dots$) gleich 0 und der Koeffizient $A_0 \neq 0$, so bezieht sich die im letzten Punkt genannte Symmetrieeigenschaft auf den Gleichsignalanteil, und es gilt:

$$x(t) = 2 \cdot A_0 - x(t - T_0/2).$$

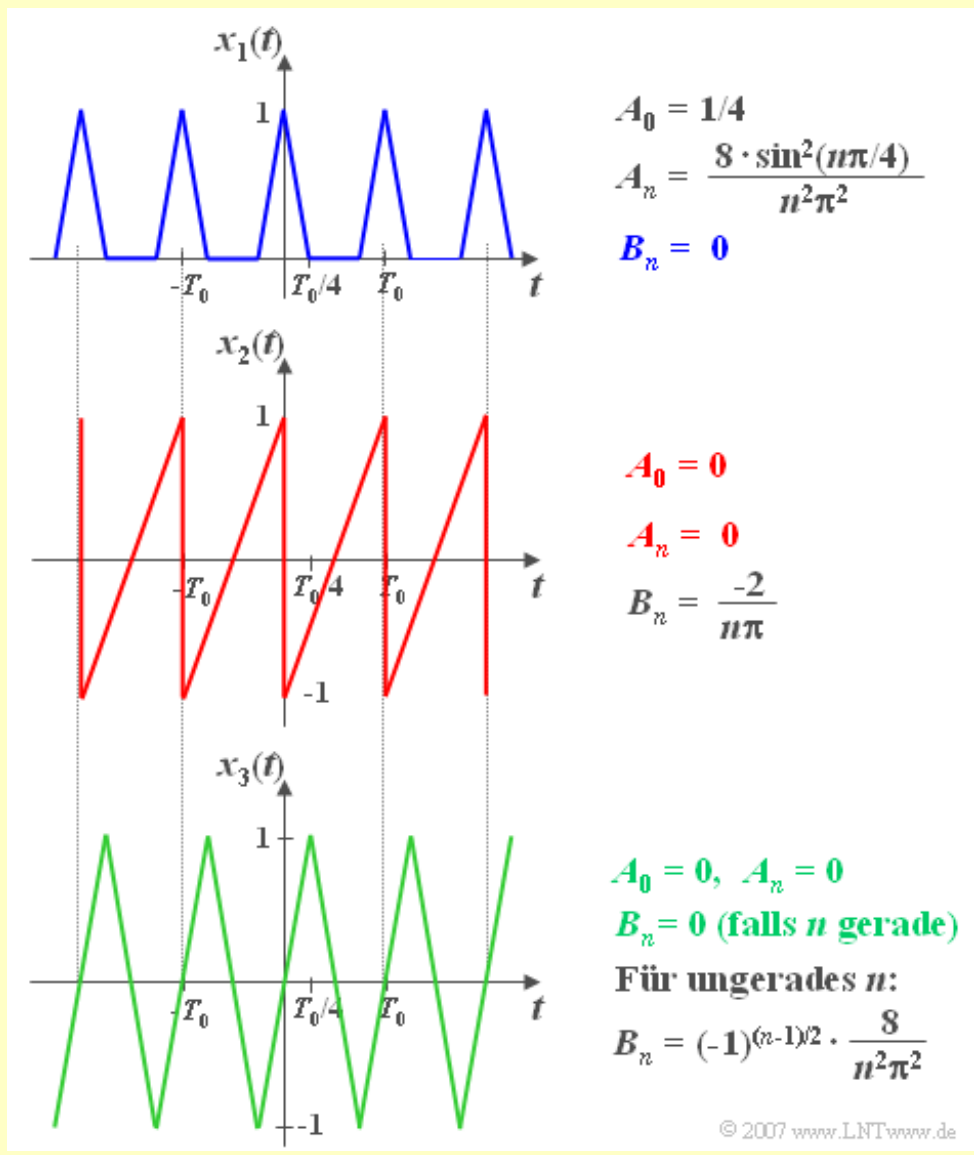
Anzumerken bleibt, dass auch mehrere dieser Symmetrieeigenschaften gleichzeitig erfüllt sein können.

Die Symmetrieeigenschaften der Fourierkoeffizienten werden im ersten Teil des nachfolgenden Videos zusammenfassend dargestellt:

Eigenschaften und Genauigkeit der Fourierreihe (Teil 1: 1.33 MB, 3:31 – Teil 2: 3.62 MB, 8:39)

Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften (2)

Beispiel: Die oben aufgeführten Eigenschaften werden nun an drei Signalverläufen verdeutlicht. $x_1(t)$ ist eine gerade und mittelwertbehaftete Funktion, die ausschließlich durch Cosinuskoeffizienten A_n bestimmt ist ($B_n = 0$). Dagegen sind bei der ungeraden Funktion $x_2(t)$ alle A_n ($n \geq 0$) identisch 0. Die ungerade Funktion $x_3(t)$ beinhaltet ebenfalls nur Sinuskoeffizienten, aber wegen $x_3(t) = -x_3(t - T_0/2)$ ausschließlich für ungeradzahlige Werte von n .



Darstellung nach Betrag und Phase

Wie auf der Seite **Darstellung mit Cosinus- und Sinusanteil** im Kapitel 2.3 für den Fall einer harmonischen Schwingung bereits gezeigt wurde, kann man jedes beliebige periodische Signal

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

auch mit Hilfe der Betrags- und Phasenkoeffizienten darstellen:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t - \varphi_n).$$

Diese modifizierten Fourierkoeffizienten weisen folgende Eigenschaften auf:

- Der Gleichsignalkoeffizient C_0 ist identisch mit A_0 .
- Die Betragskoeffizienten lauten:

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}.$$

- Für die Phasenkoeffizienten gilt:

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{B_n}{A_n}\right).$$

Komplexe Fourierreihe

Mit der Eulerschen Beziehung $\cos(x) + j \cdot \sin(x) = e^{jx}$ erhält man eine zweite Darstellungsvariante der Fourierreihenentwicklung, die von der komplexen Exponentialfunktion ausgeht.

Definition: Die **komplexe Fourierreihe** eines periodischen Signals $x(t)$ lautet wie folgt:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}.$$

Hierbei bezeichnen D_n die **komplexen Fourierkoeffizienten**, die sich aus den Cosinuskoeffizienten A_n und den Sinuskoeffizienten B_n bzw. aus den Betragskoeffizienten C_n und den Phasenkoeffizienten φ_n wie folgt berechnen lassen (gültig für $n \neq 0$):

$$D_n = \frac{1}{2} \cdot (A_n - j \cdot B_n) = \frac{1}{2} \cdot C_n \cdot e^{-j\varphi_n}.$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten können nach folgender Gleichung auch direkt berechnet werden:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Solange die Breite T_0 erhalten bleibt, kann das Integrationsintervall ebenso wie bei den Koeffizienten A_n und B_n beliebig verschoben werden, beispielsweise von 0 bis T_0 . Der Koeffizient D_0 ist stets reell und gleich dem Gleichanteil A_0 . Für die komplexen Koeffizienten mit negativem Laufindex ($n < 0$) gilt:

$$D_{-n} = D_n^* = \frac{1}{2} \cdot (A_n + j \cdot B_n).$$

Spektrum eines periodischen Signals (1)

Ausgehend von der gerade abgeleiteten komplexen Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

und dem bereits in Kapitel 2.3 mehrfach benutzten **Verschiebungssatz** erhält man für das Spektrum eines periodischen Signals $x(t)$:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot \delta(f - n \cdot f_0).$$

Dies bedeutet:

- Das Spektrum eines periodischen Signals ist ein **Linienpektrum** bei ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz $f_0 = 1/T_0$.
- Der **Gleichanteil** liefert eine Diracfunktion bei $f = 0$ mit dem Impulsgewicht A_0 .
- Daneben gibt es noch **Diracfunktionen** $\delta(f \pm n \cdot f_0)$ **bei Vielfachen von f_0** , wobei $\delta(f - n \cdot f_0)$ eine Diracfunktion bei $f = n \cdot f_0$ (also im positiven Frequenzbereich) und $\delta(f + n \cdot f_0)$ eine solche bei der Frequenz $f = -n \cdot f_0$ (im negativen Frequenzbereich) kennzeichnet.

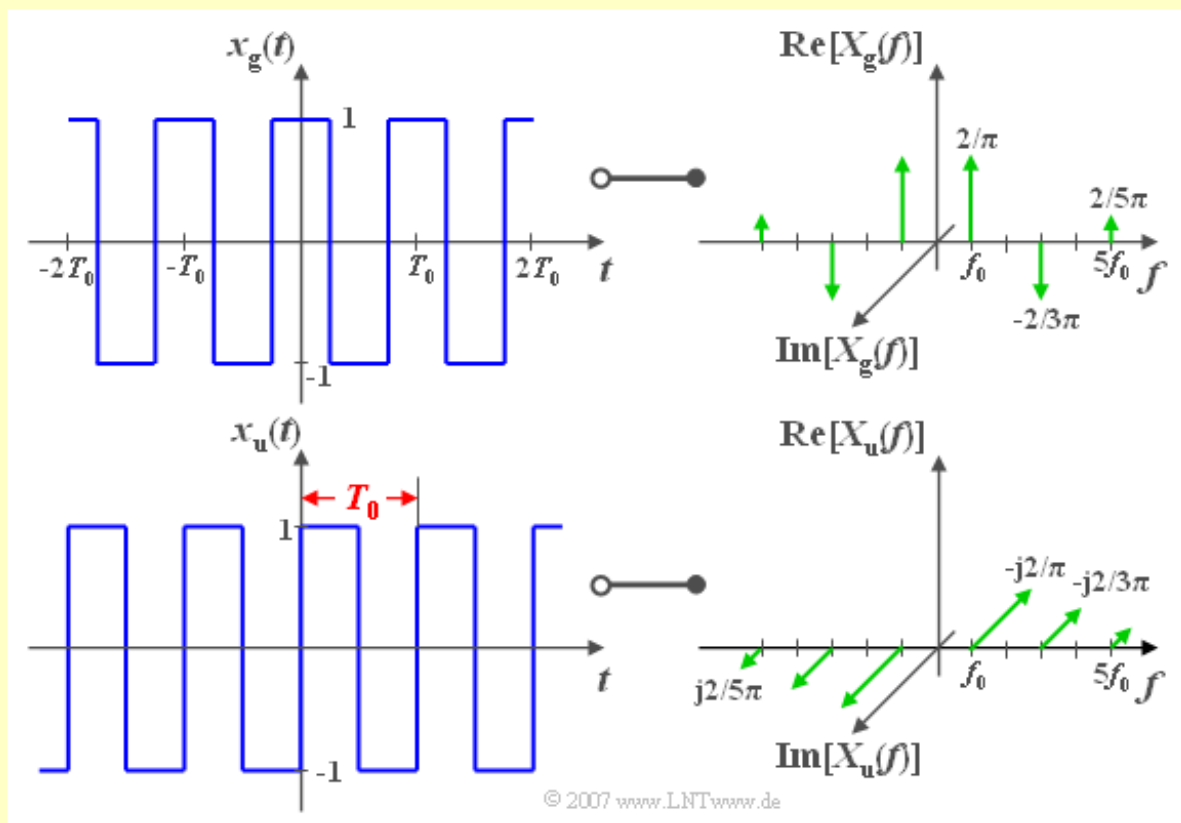
Spektrum eines periodischen Signals (2)

Beispiel: Wir betrachten – wie schon im Beispiel zu Beginn dieses Abschnitts - zwei periodische Rechtecksignale, jeweils mit Periodendauer T_0 und Grundfrequenz $f_0 = 1/T_0$. Das Signal

$$x_g(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5\omega_0 t) - \dots + \dots \right]$$

ist eine gerade, aus Cosinusanteilen zusammengesetzte Funktion. Die dazugehörige Spektralfunktion $X_g(f)$ ist damit rein reell.

Wie auf der Seite **Spektraldarstellung eines Cosinussignals** bereits beschrieben wurde, liefert die Grundwelle zwei Diracfunktionen bei $\pm f_0$, jeweils gewichtet mit $2/\pi$. Dieses Gewicht entspricht den (im Allgemeinen komplexen) Fourierkoeffizienten $D_1 = D_{-1}^*$, die nur im Sonderfall einer geraden Funktion reell sind. Weitere Diracfunktionen gibt es bei $\pm 3f_0$ (negativ), $\pm 5f_0$ (positiv), $\pm 7f_0$ (negativ) usw. Alle Phasenwerte φ_n sind aufgrund der alternierenden Vorzeichen entweder 0 oder π .



Die unten dargestellte Funktion $x_u(t)$ ist ungerade:

$$x_u(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots \right].$$

Wie auf der Seite **Spektraldarstellung eines Sinussignals** bereits beschrieben wurde, liefert hier die Grundwelle zwei Diracfunktionen bei $+f_0$ (gewichtet mit $-j \cdot 2/\pi$) bzw. bei $-f_0$ (gewichtet mit $j \cdot 2/\pi$). Auch alle weiteren Diracfunktionen bei $\pm 3f_0$, $\pm 5f_0$, usw. sind imaginär und in gleicher Richtung gewichtet wie die Diracfunktionen bei $\pm f_0$. Die beiden Betragsspektren sind gleich: $|X_u(f)| = |X_g(f)|$.

Das Gibbsche Phänomen (1)

Nicht jedes Signal eignet sich für die Fourierreihendarstellung. Hier einige Einschränkungen:

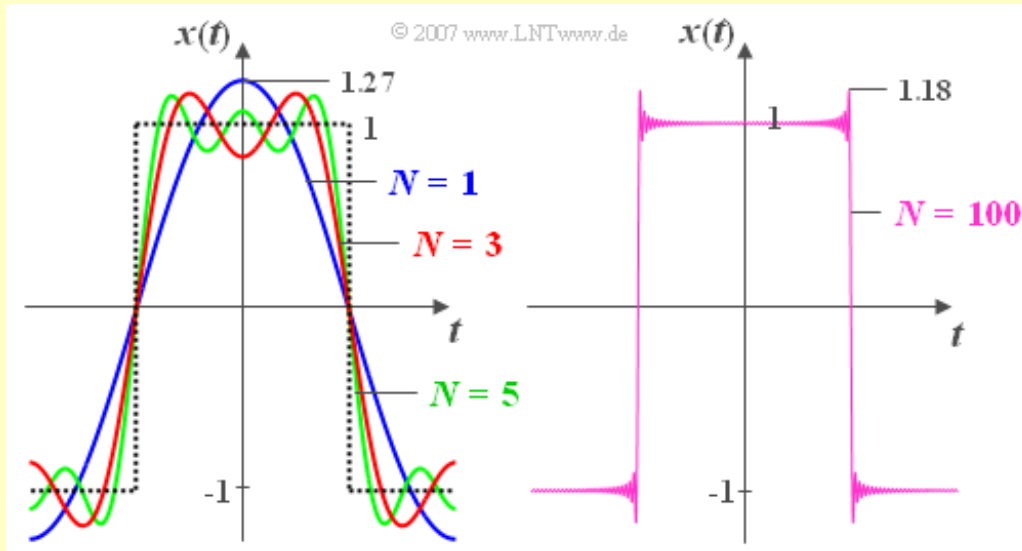
- Eine wichtige Voraussetzung für die Konvergenz der Fourierreihe ist, dass das Signal nur endlich viele Unstetigkeitsstellen je Periode besitzen darf.
- An denjenigen Stellen $t = t_j$, an denen $x(t)$ endliche Sprünge aufweist, konvergiert die Reihe gegen den aus dem jeweiligen links- und rechtsseitigen Grenzwert gebildeten arithmetischen Mittelwert.
- In der Umgebung solcher Sprungstellen kommt es meist zu hochfrequenten Oszillationen in der Reihendarstellung. Dieser Fehler ist von prinzipieller Art, das heißt, er ließe sich auch nicht vermeiden, wenn tatsächlich unendlich viele Summanden berücksichtigt würden. Man bezeichnet diesen Fehler als das *Gibbsche Phänomen*, benannt nach dem Physiker **Josiah Willard Gibbs**.
- Durch eine Erhöhung von N wird zwar der fehlerhafte Bereich kleiner, nicht jedoch die maximale Abweichung zwischen dem tatsächlichen Signal $x(t)$ und der Fourierreihendarstellung $x_N(t)$. Der maximale Fehler beträgt ca. 9% der Sprungamplitude – und zwar unabhängig von N .

Das Gibbsche Phänomen und weitere interessante Aspekte werden im folgenden Lehrvideo behandelt:

Eigenschaften und Genauigkeit der Fourierreihe (Teil 1: 1.31 MB, 3:31 – Teil 2: 3.62 MB, 8:39)

Das Gibbsche Phänomen (2)

Beispiel: Im linken Bild sehen Sie gepunktet einen Ausschnitt eines periodischen ± 1 -Rechtecksignals und die dazugehörige Fourierreihendarstellung mit $N = 1, 3$ und 5 Summanden. Die Grundwelle hat hier den Amplitudenwert $4/\pi \approx 1.27$. Auch mit $N = 5$ (das bedeutet drei Summanden, da $A_2 = A_4 = 0$) unterscheidet sich die Fourierreihe vom Rechtecksignal noch deutlich, vor allem in der Flanke.



Aus dem rechten Bild ist zu erkennen, dass die Flanke und der innere Bereich mit $N = 100$ relativ gut nachgebildet werden, es aber an der Sprungstelle aufgrund des Gibbschen Phänomens noch immer zu Überschwingern kommt. Da hier die Sprungamplituden jeweils gleich 2 sind, ergeben sich die Maximalwerte näherungsweise zu 1.18. Mit $N = 1000$ wären die Überschwinger genau so groß, aber auf einen noch engeren Raum begrenzt und bei zeitdiskreter Darstellung eventuell nicht mehr sichtbar.