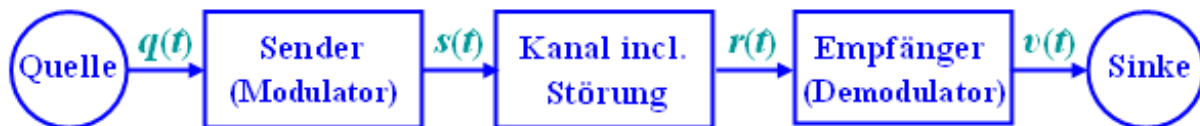


Motivation

Bei vielen Nachrichtenübertragungssystemen wird das niederfrequente Quellsignal $q(t)$ in ein BP-Signal $s(t)$ umgesetzt (**Modulation**). Nach der Übertragung über den Kanal muss das Empfangssignal $r(t)$ – gegenüber dem Sendesignal $s(t)$ eventuell verzerrt und mit (Rausch-)Störungen beaufschlagt – wieder in den ursprünglichen Frequenzbereich zurückgesetzt werden (**Demodulation**). Das Sinkensignal $v(t)$, das möglichst gut mit $q(t)$ übereinstimmen sollte, ist somit wieder ein TP-Signal.



© 2007 www.LNTwww.de

Modulation und Demodulation sind fundamentale Komponenten eines Nachrichtenübertragungssystems, die im Buch „Modulationsverfahren“ eingehend behandelt werden. Eine zusammenfassende Beschreibung finden Sie in **Kapitel 1** des vorliegenden Buches.

Die Untersuchung, Simulation, Optimierung und Dimensionierung solcher Bandpass-Systeme erfolgt meistens im **äquivalenten Tiefpassbereich**, wofür folgende Gründe genannt werden können:

- Sind Qualitätsmerkmale – wie Signal-zu-Rauschverhältnis, Bitfehlerrate, Bandbreiteneffizienz, Leistungsbedarf, usw. – eines Tiefpass-Systems bekannt, so lassen sich die entsprechenden Werte verwandter Bandpass-Systeme daraus relativ einfach herleiten. Beispiele hierfür sind die digitalen Modulationsverfahren *Amplitude Shift Keying (ASK)* und *Binary Phase Shift Keying (BPSK)*, deren Performance-Größen aus dem vergleichbaren Basisbandsystem „hochgerechnet“ werden können.
- Die einzelnen Teilkanäle bei einem sog. *Frequenzmultiplexsystem*, die sich durch verschiedene Trägerfrequenzen unterscheiden, können oft als qualitativ gleichwertig angesehen werden. Deshalb genügt es, die Berechnung und Dimensionierung auf einen einzigen Kanal zu beschränken und diese Untersuchungen im äquivalenten Tiefpass-Bereich – das heißt ohne Berücksichtigung der spezifischen Trägerfrequenz – durchzuführen.
- Häufig ist es so, dass die Bandbreite einer Nachrichtenverbindung um Größenordnungen kleiner ist als die Trägerfrequenz. So liegen beispielsweise die einzelnen Kanäle beim *GSM-Mobilfunk* im Frequenzbereich um 900 MHz (D-Netz) bzw. 1800 MHz (E-Netz), während jedem Kanal nur eine Bandbreite von 200 kHz zur Verfügung steht. Deshalb ist eine Simulation im äquivalenten TP-Bereich sehr viel weniger aufwändig als eine Simulation der entsprechenden BP-Signale.

Definition im Frequenzbereich (1)

Wir betrachten im Folgenden ein reelles BP-Signal $x(t)$ mit dem Spektrum $X(f)$. Weiterhin soll gelten:

- Das BP-Signal $x(t)$ sei aus der Modulation eines niederfrequenten Nachrichtensignals $q(t)$ mit dem Trägersignal $z(t)$ der Frequenz f_T entstanden.
- Die Art der Modulation (analog oder digital, Amplituden- oder Winkelmodulation, Einseitenband oder Zweiseitenband) ist nicht festgelegt.
- Das Spektrum $X_+(f)$ des dazugehörigen analytischen Signals $x_+(t)$ existiert nur für positive Frequenzen und ist hier doppelt so groß wie $X(f)$. $X_+(f)$ ist unabhängig von der Trägerfrequenz f_T .

Definition: Verschiebt man das Spektrum des soeben definierten analytischen Signals $x_+(t)$ um f_T nach links, so bezeichnet man das Ergebnis als das **Spektrum des äquivalenten Tiefpass-Signals**:

$$X_{TP}(f) = X_+(f + f_T).$$

Im Allgemeinen sind $X(f)$, $X_+(f)$ und $X_{TP}(f)$ komplexwertig. Ist allerdings $X(f)$ rein reell, so sind auch die Spektren $X_+(f)$ und $X_{TP}(f)$ rein reell, weil sich diese aus $X(f)$ nur aus den Operationen „Abschneiden und Verdoppeln“ bzw. „Frequenzverschiebung“ ergeben.

Bei der Berechnung des äquivalenten TP-Spektrums $X_{TP}(f)$ ist – im Gegensatz zu $X_+(f)$ – die Kenntnis der Trägerfrequenz f_T unbedingt erforderlich. Für andere Werte von f_T ergeben sich auch andere Tiefpass-Spektren.

Transformiert man obige Gleichung in den Zeitbereich, so erhält man:

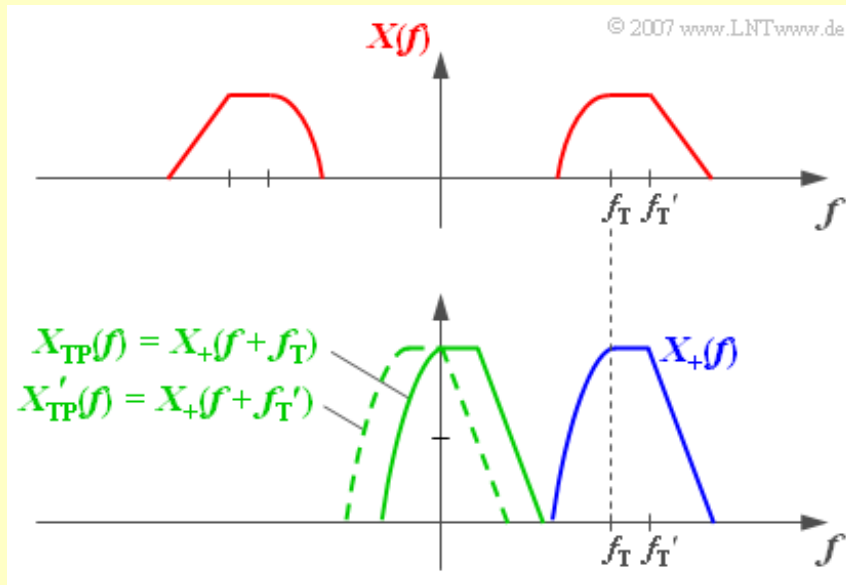
$$x_{TP}(t) = x_+(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot t}.$$

Mit der Beziehung $x(t) = \text{Re}[x_+(t)]$ ergibt sich die Vorgehensweise, wie aus dem äquivalenten TP-Signal das tatsächliche, physikalische Bandpass-Signal berechnet werden kann:

$$x(t) = \text{Re}[x_+(t)] = \text{Re}[x_{TP}(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot t}].$$

Definition im Frequenzbereich (2)

Beispiel: Das nachfolgende Bild zeigt oben die rein reelle Spektralfunktion $X(f)$ eines BP-Signals $x(t)$, das aus der Modulation eines niederfrequenten Signals mit der Trägerfrequenz f_T entstanden sei.



Darunter dargestellt sind die beiden ebenfalls reellen Spektralfunktionen $X_+(f)$ und $X_{TP}(f)$. Aufgrund der Unsymmetrien bezüglich des Frequenzursprungs sind die zugehörigen Zeitfunktionen komplex.

$X_{TP}(f)$ ist gegenüber $X_+(f)$ um f_T nach links verschoben. Wäre dagegen das Spektrum $X(f)$ das Modulationsergebnis eines anderen Nachrichtensignals $q'(t)$ mit einer anderen Trägerfrequenz f_T' , so würde sich auch ein anderes äquivalentes TP-Signal ergeben, dessen Spektralfunktion in obiger Grafik gestrichelt eingezeichnet ist.

Beschreibung im Zeitbereich (1)

Zur Vereinfachung der Darstellung gehen wir beispielhaft von einem Linienspektrum aus, so dass das analytische Signal als Summe von komplexen Drehzeigern (Zeigerverbund) dargestellt werden kann:

$$X_+(f) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i} \cdot \delta(f - f_i) \quad \bullet \text{---} \circ \quad x_+(t) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{j(2\pi f_i t - \varphi_i)}.$$

Durch die Frequenzverschiebung um f_T nach links lautet somit das äquivalente TP-Signal im Frequenz- und Zeitbereich:

$$X_{\text{TP}}(f) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i} \cdot \delta(f - \nu_i) \quad \bullet \text{---} \circ \quad x_{\text{TP}}(t) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{j(2\pi \nu_i t - \varphi_i)}.$$

Zwischen den Frequenzwerten f_i und ν_i ($i = 1, \dots, I$) gilt folgender Zusammenhang:

$$\nu_i = f_i - f_{\text{TP}}.$$

Diese Gleichungen können wie folgt interpretiert werden:

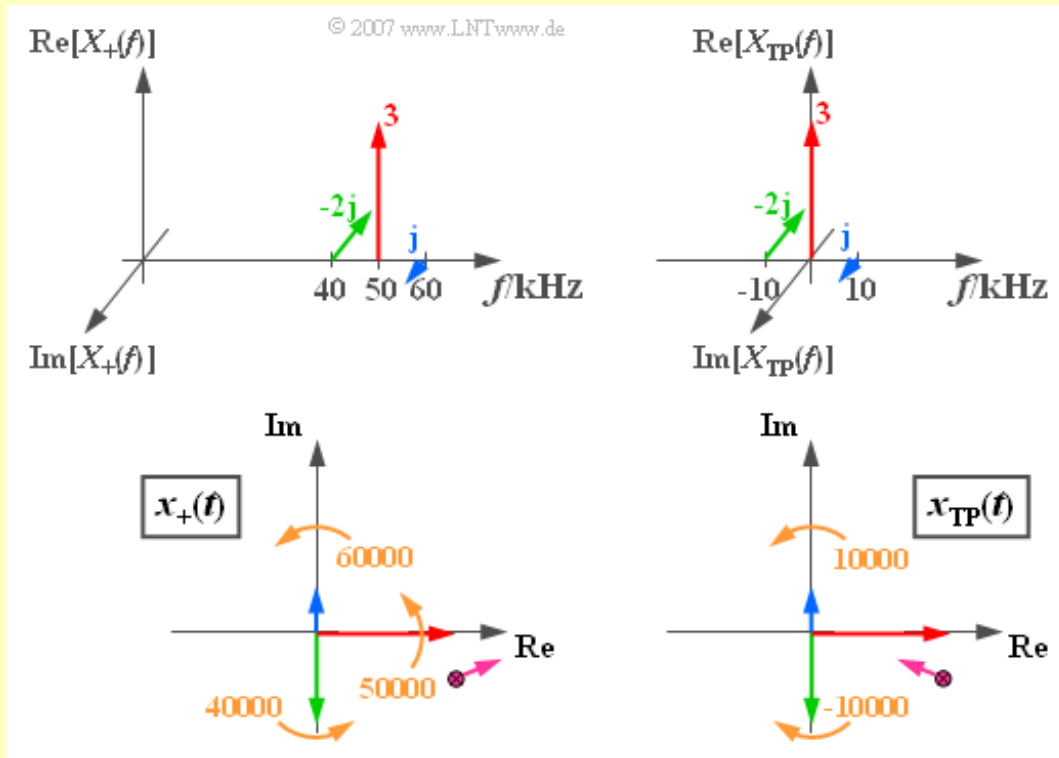
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das äquivalente Tiefpass-Signal identisch mit dem analytischen Signal:

$$x_{\text{TP}}(t = 0) = x_+(t = 0) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i}.$$

- Zu diesem Zeitpunkt ist der Zeigerverbund allein durch die I Amplitudenparameter A_i und die I Phasenlagen φ_i festgelegt.
- Zur Wiederholung aus Kapitel 4.2: Alle Zeiger des analytischen Signals $x_+(t)$ drehen entsprechend den Frequenzen f_i entgegen dem Uhrzeigersinn.
- Beim äquivalenten TP-Signal sind die Drehgeschwindigkeiten geringer. Zeiger mit $\nu_i > 0$ drehen in mathematisch positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn), solche mit $\nu_i < 0$ im Uhrzeigersinn.
- Ist der Frequenzparameter ν_i eines Zeigers gleich 0, so ruht dieser Zeiger in der komplexen Ebene entsprechend seiner Ausgangslage.

Beschreibung im Zeitbereich (2)

Beispiel: Wir betrachten das aus drei Spektrallinien bei 40 kHz, 50 kHz und 60 kHz bestehende Spektrum $X_+(f)$ gemäß der nachfolgenden Grafik. Beachtet man die angegebenen Amplituden- und Phasenparameter, so erhält man das analytische Signal $x_+(t)$ entsprechend der unteren linken Skizze.

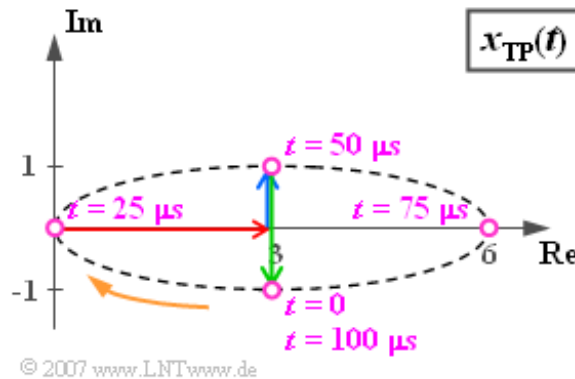


Die Momentaufnahme gilt für die Zeit $t = 0$. Alle Zeiger drehen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit entgegen dem Uhrzeigersinn. Der blaue Zeiger dreht hierbei mit 60000 Umdrehungen pro Sekunde am schnellsten; der grüne Zeiger mit $\omega_{40} = 2\pi \cdot 40000$ 1/s am langsamsten. Der violett markierte Summenpunkt der drei komplexen Zeiger bewegt sich für $t > 0$ innerhalb der komplexen Ebene in komplizierter Weise, aufgrund der Zahlenwerte zunächst in die eingezeichnete Richtung.

Der rechte Teil der Grafik beschreibt das äquivalente TP-Signal im Frequenz- und Zeitbereich, gültig für $f_T = 50$ kHz. Der rote Zeiger (Träger) liegt nun bei $f = 0$ und der dazugehörige Drehzeiger bewegt sich nicht. Der blaue Zeiger (OSB) dreht hier mit $\omega_{10} = 2\pi \cdot 10000$ 1/s entgegen dem Uhrzeigersinn. Der grüne Zeiger (USB) dreht mit gleicher Geschwindigkeit, aber in umgekehrter Richtung ($-\omega_{10}$).

Definition der Ortskurve

Betrachten wir weiterhin das im letzten Beispiel beschriebene äquivalente TP-Signal $x_{TP}(t)$, bestehend aus einem ruhenden Zeiger mit der Länge 3 (rot), dem mit $\omega_{10} = 2\pi \cdot 10000$ 1/s in mathematisch positiver Richtung rotierenden blauen Zeiger mit der komplexen Amplitude j sowie den grünen Zeiger der Länge 2, der zum Zeitpunkt $t = 0$ in Richtung der negativen imaginären Achse liegt. Dieser dreht sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit ω_{10} wie der blaue Zeiger, aber in umgekehrter Richtung ($-\omega_{10}$). Sowohl der blaue als auch der grüne Zeiger benötigen für eine Umdrehung die Periodendauer $T_0 = 100 \mu\text{s}$.



Die violett eingezeichnete Zeigersumme ist zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich $3 - j$. Nach $t = T_0/4 = 25 \mu\text{s}$ hat der resultierende Zeigerverbund den Wert 0, da nun die beiden rotierenden Zeiger in Gegenrichtung zum Träger liegen. Der weitere Verlauf kann obiger Darstellung entnommen werden. Nach $t = T_0 = 100 \mu\text{s}$ ist wieder der Ausgangszustand erreicht, das heißt, es gilt $x_{TP}(t = T_0) = x_{TP}(t = 0) = 3 - j$.

Definition: Der Kurvenzug, auf dem sich das äquivalente Tiefpass-Signal $x_{TP}(t)$ in der komplexen Ebene bewegt, wird im Folgenden als **Ortskurve** bezeichnet.

Im obigen Beispiel ist die Ortskurve eine Ellipse, die von $x_{TP}(t)$ innerhalb einer Periodendauer einmal durchlaufen wird. Dieses Beispiel bezieht sich auf die Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (ZSB-AM) eines sinusförmigen 10 kHz-Signals mit cosinusförmigem Träger beliebiger Frequenz, wobei das obere Seitenband (blauer Zeiger) gedämpft ist. Wären die Längen der beiden (blau bzw. grün gezeichneten) Drehzeiger gleich, so ergäbe sich als Ortskurve eine horizontale Gerade auf der reellen Achse (siehe Aufgabe A4.5). Im Buch „Modulationsverfahren“ werden die Ortskurven möglicher Systemvarianten noch eingehend behandelt.

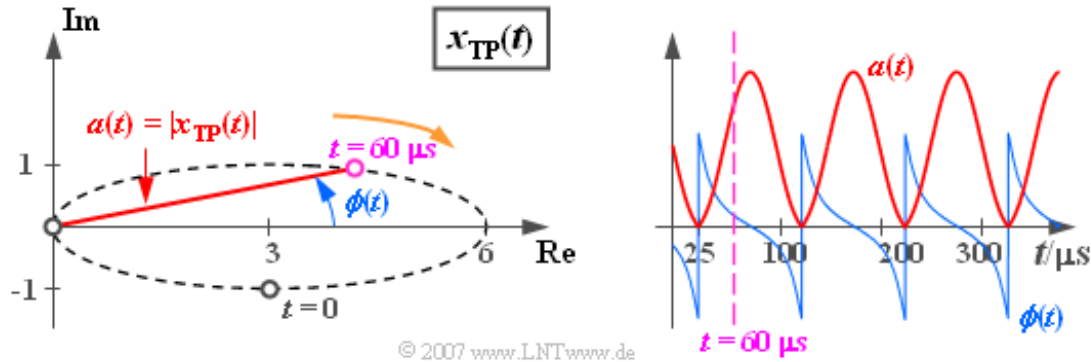
Darstellung nach Betrag und Phase

Das äquivalente TP-Signal ist im Allgemeinen komplex und kann deshalb auch in der Form

$$x_{\text{TP}}(t) = a(t) \cdot e^{j\phi(t)}$$

⇒ **Anmerkung zur Nomenklatur**

dargestellt werden. Zu beachten ist das Pluszeichen im Argument der Exponentialfunktion, das sich von der bisherigen Darstellung unterscheidet. Nähere Informationen hierüber finden Sie über den obigen Link.



Die Grafik bezieht sich wieder auf das Beispiel der letzten beiden Seiten. Hierzu ist anzumerken:

- Die **Betragsfunktion** gibt die Zeitabhängigkeit der Zeigerlänge wieder:

$$a(t) = |x_{\text{TP}}(t)| = \sqrt{\text{Re} [x_{\text{TP}}(t)]^2 + \text{Im} [x_{\text{TP}}(t)]^2}.$$

$a(t)$ ist wie $x_{\text{TP}}(t)$ periodisch mit T_0 und nimmt im Beispiel Werte zwischen 0 und 6 an.

- Die **Phasenfunktion** beschreibt den zeitabhängigen Winkel des äquivalenten TP-Signals $x_{\text{TP}}(t)$, bezogen auf den Koordinatenursprung:

$$\phi(t) = \text{arc} [x_{\text{TP}}(t)] = \arctan \frac{\text{Im} [x_{\text{TP}}(t)]}{\text{Re} [x_{\text{TP}}(t)]}. \quad \Rightarrow \text{Anmerkung zur Nomenklatur}$$

Im betrachteten Beispiel gilt $\phi(t=0) = -\arctan(1/3) \approx -18.43^\circ = -0.32 \text{ rad}$. Bei $t = 25 \mu\text{s}$ sowie zu allen äquidistanten Zeiten davon im Abstand $T_0 = 100 \mu\text{s}$ ist das äquivalente Tiefpass-Signal gleich 0, so dass zu diesen Zeitpunkten die Phase $\phi(t)$ von $-\pi/2$ auf $+\pi/2$ springt. Zum violett eingezeichneten Zeitpunkt $t = 60 \mu\text{s}$ besitzt die Phase einen leicht positiven Wert.

Zusammenhang zwischen äquivalentem TP- und BP-Signal (1)

Ein bandpassartiges Signal $x(t)$, das sich aus der Modulation eines niederfrequenten Nachrichtensignals $q(t)$ mit einem Trägersignal $z(t)$ der Frequenz f_T ergeben hat, kann wie folgt dargestellt werden:

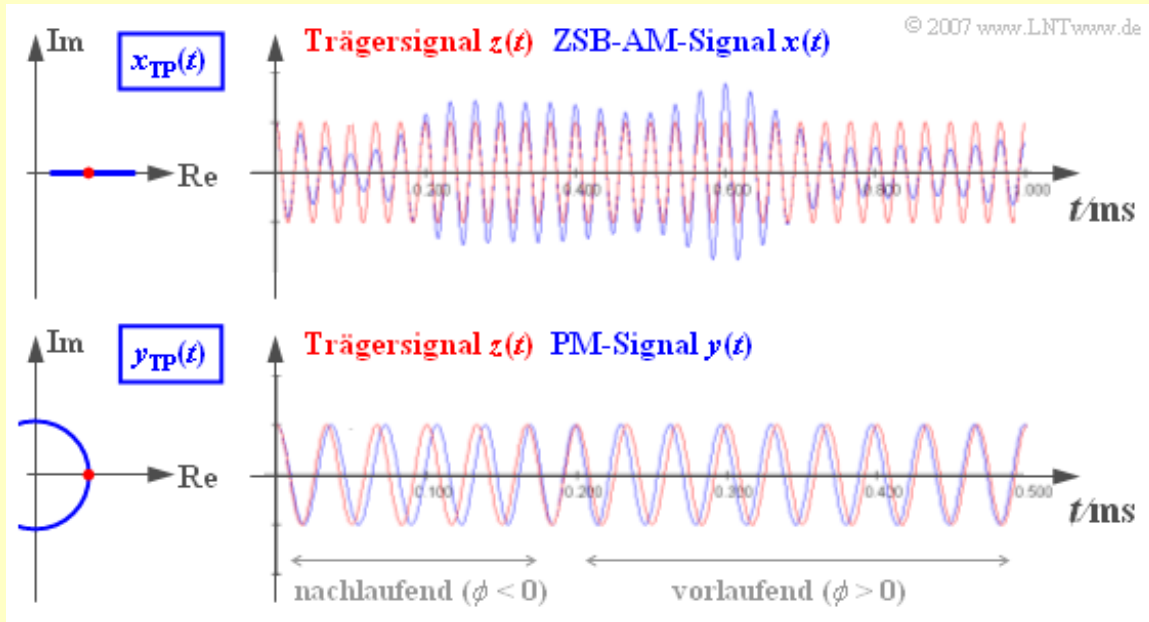
$$x(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi(t)) \quad \Rightarrow \quad \text{Anmerkung zur Nomenklatur}$$

Hierbei bedeuten:

- $a(t)$ ist die **zeitabhängige Amplitude**, die oft als **Hüllkurve** bezeichnet wird. Diese ist gemäß den Gleichungen auf der letzten Seite gleich dem Betrag $|x_{TP}(t)|$ des äquivalenten TP-Signals.
- $\phi(t)$ ist die **zeitabhängige Phase**, die ebenfalls aus dem äquivalenten TP-Signal als der Winkel zum Koordinatenursprung der komplexen Ebene ermittelt werden kann. Im physikalischen Signal $x(t)$ erkennt man den Zeitverlauf der Phase $\phi(t)$ an den Nulldurchgängen. Ist $\phi(t) > 0$, so tritt der Nulldurchgang früher auf als beim Trägersignal $z(t)$. Dagegen bedeutet $\phi(t) < 0$ eine Verschiebung des Nulldurchgangs auf einen späteren Zeitpunkt.
- Steckt die gesamte Information über das Nachrichtensignal in $a(t)$, während $\phi(t)$ konstant ist, so spricht man von Amplitudenmodulation. Dagegen ist bei Phasenmodulation die Hüllkurve $a(t)$ konstant, während $\phi(t)$ die gesamte Information über das Nachrichtensignal beinhaltet.

Zusammenhang zwischen äquivalentem TP- und BP-Signal (2)

Beispiel: In der oberen Grafik sehen Sie ein rein reelles äquivalentes TP-Signal $x_{TP}(t)$; die Ortskurve ist eine horizontale Gerade. Die Nulldurchgänge des blauen ZSB-AM-Signals $x(t)$ stimmen mit denen des rot eingezeichneten Trägersignals $z(t)$ exakt überein. Die Hüllkurve $a(t)$ beinhaltet die gesamte Information über das Nachrichtensignal.



Das unten dargestellte PM-Signal $y(t)$ hat dagegen eine konstante Einhüllende; die Ortskurve ist ein Kreisbogen. Zu Beginn ist der Phasenwert kleiner 0, sodass die Nulldurchgänge etwas später auftreten als beim rot gezeichneten Trägersignal („nachlaufend“). Bei positiven Werten des Nachrichtensignals gilt auch $\phi(t) > 0$ und die Nulldurchgänge treten früher auf als beim Trägersignal („vorlaufend“). Die Lagen der Nulldurchgänge tragen hier die gesamte Information über das Nachrichtensignal $q(t)$.

Abschließend – hoffentlich nicht zu spät – wollen wir uns noch der Frage zuwenden, warum die beiden komplexen und im Verständnis auch komplizierteren Signale $x_+(t)$ und $x_{TP}(t)$ zur Beschreibung des tatsächlichen Bandpass-Signals $x(t)$ eigentlich notwendig sind. Sie wurden in der Nachrichtentechnik nicht deshalb eingeführt, um Studierende zu verunsichern, sondern:

- Die Hüllkurve $a(t)$ und die Phasenfunktion $\phi(t)$ können aus dem tatsächlichen, physikalischen BP-Signal $x(t)$ direkt nur in einigen Sonderfällen in einfacher Weise extrahiert werden.
- Das in Realität nicht existierende äquivalente TP-Signal $x_{TP}(t)$ ist ein mathematisches Hilfsmittel, das es erlaubt, die Zeitverläufe $a(t)$ und $\phi(t)$ durch einfache geometrische Überlegungen zu bestimmen. Im Buch „Modulationsverfahren“ werden wir darauf zurückkommen.
- Das analytische Signal $x_+(t)$ ist ein Zwischenschritt beim Übergang von $x(t)$ zu $x_{TP}(t)$. Während $x_+(t)$ stets ein komplexes Signal darstellt, kann $x_{TP}(t)$ in Sonderfällen auch reell sein, z. B. bei idealer Amplitudenmodulation (vergleiche Kapitel 2 des Buches „Modulationsverfahren“).

Das nachfolgende Interaktionsmodul zeigt $x_{TP}(t)$ für die Summe dreier harmonischer Schwingungen:

Ortskurve – Darstellung des äquivalenten Tiefpass-Signals (Dateigröße 205 kB)

Darstellung nach Real- und Imaginärteil (1)

Insbesondere bei der Beschreibung von Quadraturamplitudenmodulationsverfahren (QAM) eignet sich die Darstellung des äquivalenten TP-Signals nach Real- und Imaginärteil:

$$x_{\text{TP}}(t) = x_{\text{I}}(t) + j \cdot x_{\text{Q}}(t).$$

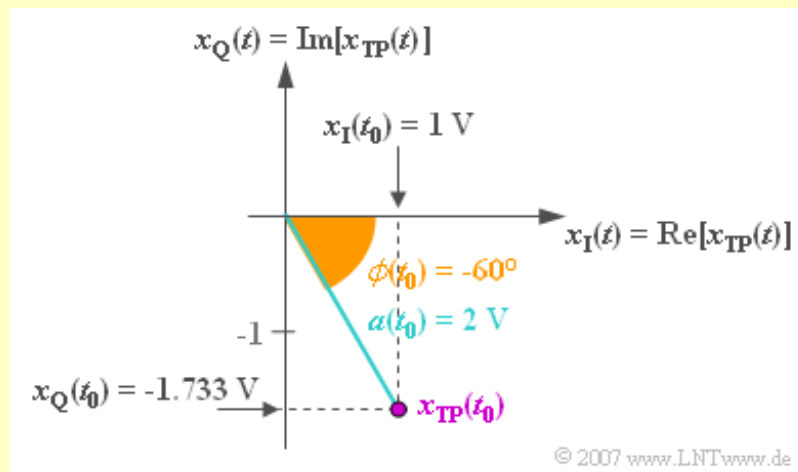
In dieser Darstellung bezeichnet $x_{\text{I}}(t)$ die **Inphasekomponente** (Normalkomponente) und $x_{\text{Q}}(t)$ die **Quadraturkomponente** von $x_{\text{TP}}(t)$.

Mit der Betragsfunktion $a(t) = |x_{\text{TP}}(t)|$ und der Phasenfunktion $\phi(t) = \arg x_{\text{TP}}(t)$ entsprechend den Definitionen auf den vorangegangenen Seiten gilt:

$$\begin{aligned} x_{\text{I}}(t) &= \operatorname{Re}[x_{\text{TP}}(t)] = a(t) \cdot \cos(\phi(t)), \\ x_{\text{Q}}(t) &= \operatorname{Im}[x_{\text{TP}}(t)] = a(t) \cdot \sin(\phi(t)). \end{aligned}$$

Beispiel: Zu einem betrachteten Zeitpunkt t_0 gilt für das äquivalente TP-Signal:

$$x_{\text{TP}}(t = t_0) = 2 \text{ V} \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} = 2 \text{ V} \cdot \cos(60^\circ) - j \cdot 2 \text{ V} \cdot \sin(60^\circ) = 1 \text{ V} - j \cdot 1.733 \text{ V}.$$



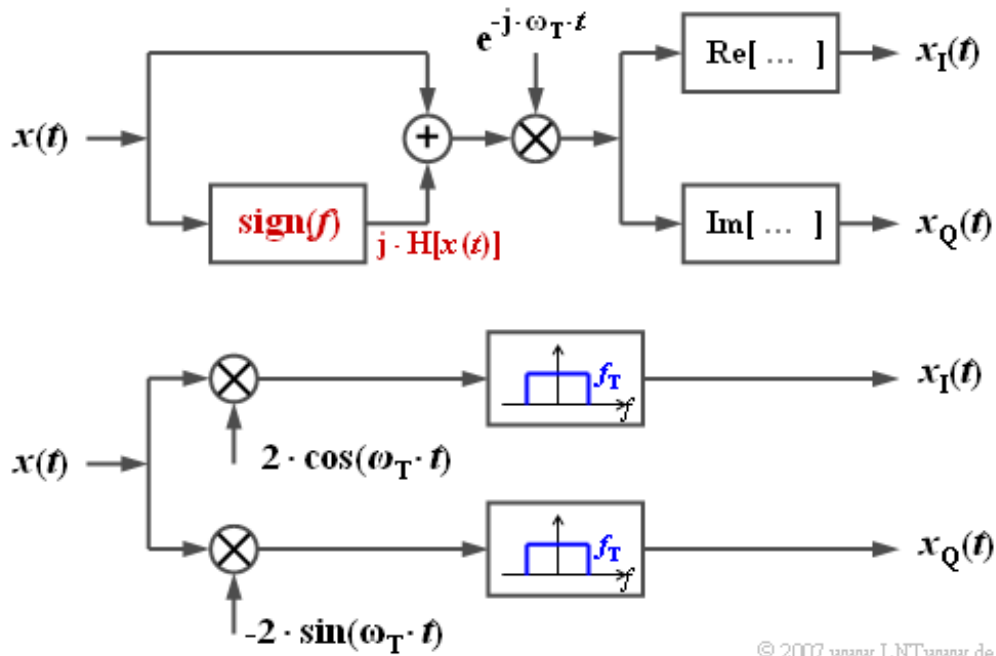
Damit ist die Inphasekomponente gleich 1 V und die Quadraturkomponente hat den Wert -1.733 V .

Durch Anwendung einfacher trigonometrischer Umformungen lässt sich zeigen, dass das physikalische, reelle BP-Signal somit auch in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t + \phi(t)) = \\ &= x_{\text{I}}(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t) - x_{\text{Q}}(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t). \end{aligned}$$

Darstellung nach Real- und Imaginärteil (2)

Das nachfolgende Bild zeigt zwei Anordnungen, um aus dem reellen BP-Signal $x(t)$ das komplexe TP-Signal aufgespalten nach Inphase- und Quadraturkomponente zu ermitteln, beispielsweise zur Darstellung auf einem Oszilloskop.



© 2007 www.LNTwww.de

Im oberen Modell wird zunächst das analytische Signal $x_+(t)$ erzeugt und dieses mit der komplexen Exponentialfunktion multipliziert. Die gesuchten Komponenten erhält man dann durch Real- bzw. Imaginärteildbildung.

Bei der unteren Anordnung erhält man für den oberen bzw. unteren Zweig nach den jeweiligen Multiplikationen:

$$\begin{aligned} a(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \phi(t)) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_T \cdot t) &= a(t) \cdot \cos(\phi(t)) + \varepsilon_{\text{oben}}(t), \\ a(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \phi(t)) \cdot (-2) \cdot \sin(\omega_T \cdot t) &= a(t) \cdot \sin(\phi(t)) + \varepsilon_{\text{unten}}(t). \end{aligned}$$

Die jeweils zweiten Anteile liegen um die doppelte Trägerfrequenz und werden durch die Tiefpässe mit jeweiliger Grenzfrequenz f_T entfernt:

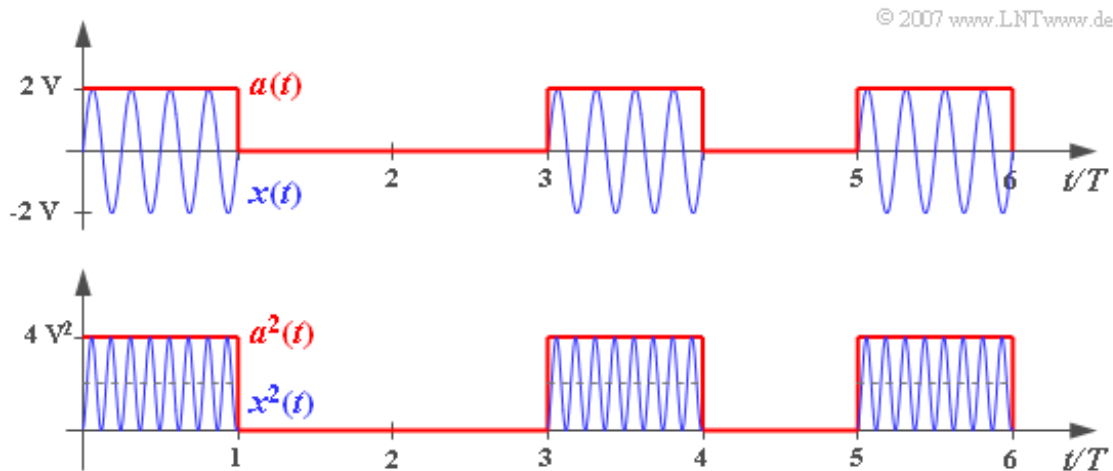
$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{oben}}(t) &= a(t) \cdot \cos(2\omega_T \cdot t + \phi(t)), \\ \varepsilon_{\text{unten}}(t) &= -a(t) \cdot \sin(2\omega_T \cdot t + \phi(t)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der letzten Seite zeigt, dass am Ausgang genau die gewünschten Komponenten $x_I(t)$ und $x_Q(t)$ verbleiben:

$$\begin{aligned} x_I(t) &= a(t) \cdot \cos(\phi(t)), \\ x_Q(t) &= a(t) \cdot \sin(\phi(t)). \end{aligned}$$

Leistung und Energie eines Bandpass-Signals (1)

Betrachten wir beispielhaft das Signal $x(t)$ in der folgenden Abbildung, das sich bei **On-Off-Keying** – auch bekannt als binäres Amplitude Shift Keying – ergibt.



Die auf 1Ω bezogene Leistung dieses BP-Signals ergibt sich nach den Ausführungen in **Kapitel 1.2** zu

$$P_x = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} x^2(t) dt.$$

Berücksichtigt man, dass die binären Nullen und Einsen im Allgemeinen gleichwahrscheinlich sind, so kann auf den Grenzübergang verzichtet werden, und man erhält für das hier vorliegende Mustersignal:

$$P_x = \frac{1}{2T} \cdot \int_0^{2T} x^2(t) dt = \frac{4V^2}{2T} \cdot \int_0^T \cos^2(\omega_T \cdot t) dt = 1V^2.$$

Aus der unteren Skizze ist zu erkennen, dass man durch Mittelung über die quadrierte Hüllkurve $a^2(t)$ – also über das Betragsquadrat des äquivalenten Tiefpass-Signals $x_{TP}(t)$ – ein um den Faktor 2 größeres Ergebnis erhält. Deshalb gilt in gleicher Weise:

$$P_x = \frac{1}{2} \cdot \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} |x_{TP}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} a^2(t) dt.$$

Dieses Resultat lässt sich verallgemeinern, und es kann auch auf energiebegrenzte Signale angewandt werden. In diesem Fall gilt für die Energie entsprechend **Kapitel 1.2** :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x_{TP}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t) dt.$$

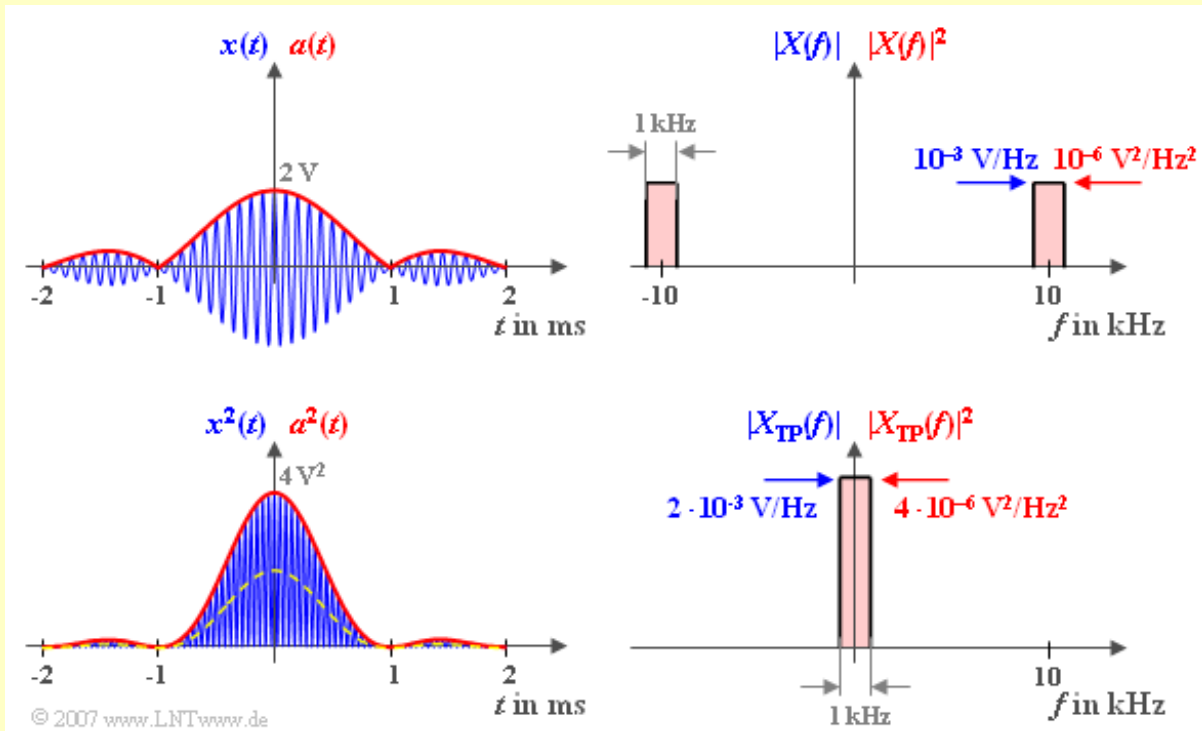
Diese Gleichung gilt allerdings nur dann exakt, wenn die zugrunde liegende Trägerfrequenz f_T sehr viel größer als die BP-Bandbreite B_{BP} ist.

Leistung und Energie eines Bandpass-Signals (2)

Beispiel: Wir betrachten das Bandpass-Signal

$$x(t) = A \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi(t)),$$

mit $A = 2\text{V}$, $B = 1\text{ kHz}$ und $f_T = 10\text{ kHz}$. Die nachfolgende Abbildung zeigt oben dieses physikalische Signal $x(t)$ und das zugehörige Betragsspektrum $|X(f)|$, das innerhalb der Bandbreite B konstant gleich $A/(2B) = 10^{-3}\text{ V/Hz}$ ist. $X(f)$ setzt sich also aus zwei Rechtecken um $\pm f_T$ zusammen.



Die Energie dieses BP-Signals könnte prinzipiell nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot \frac{\text{si}^2(\pi \cdot B \cdot t)}{(\pi \cdot B \cdot t)^2} \cdot \cos^2(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi(t)) dt.$$

Mit der auf der letzten Seite aufgeführten Gleichung gilt aber auch:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |A \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot t)|^2 dt = \\ &= A^2 \cdot \int_0^{+\infty} \text{si}^2(\pi \cdot B \cdot t) dt = A^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi B} = \frac{A^2}{2B} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2/\text{Hz}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $a(t)$ die Hüllkurve von $x(t)$. Man erkennt, dass die Signalenergie E_x unabhängig von der Phase ϕ des Trägersignals ist.

Eine zweite Lösungsmöglichkeit bietet der **Satz von Parseval**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(f)|^2 df.$$

Es gilt $|A(f)| = |X_{\text{TP}}(f)|$. Innerhalb der Bandbreite B um die Frequenz $f = 0$ ist $X_{\text{TP}}(f)$ doppelt so groß wie $X(f)$ um die Frequenz $f = f_{\text{T}}$, nämlich A/B . Dies hängt mit der Definition des Spektrums $X_+(f)$ zusammen, aus dem $X_{\text{TP}}(f)$ durch Verschiebung entsteht.

Somit lautet eine dritte Gleichung zur Energieberechnung, die natürlich zum gleichen Ergebnis führt:

$$E_x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^2 \cdot B = \frac{A^2}{2B}.$$