Faltung im Zeitbereich (1)

Der **Faltungssatz** ist mit das wichtigste Gesetz der Fouriertransformation. Deshalb wird in vorliegendem Tutorial diesem auch ein eigenes Unterkapitel gewidmet.

Betrachten wir zunächst den Faltungssatz im Zeitbereich und setzen voraus, dass die Spektren zweier Zeitfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bekannt sind:

$$X_1(f) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\, x_1(t), \quad X_2(f) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\, x_2(t).$$

Dann gilt für die Zeitfunktion des Produktes $X_1(f) \cdot X_2(f)$:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Hierbei ist τ eine formale Integrationsvariable mit der Dimension einer Zeit.

Definition: Die obige Verknüpfung der Zeitfunktion $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnet man als **Faltung** und stellt diesen Funktionalzusammenhang mit einem Stern dar:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

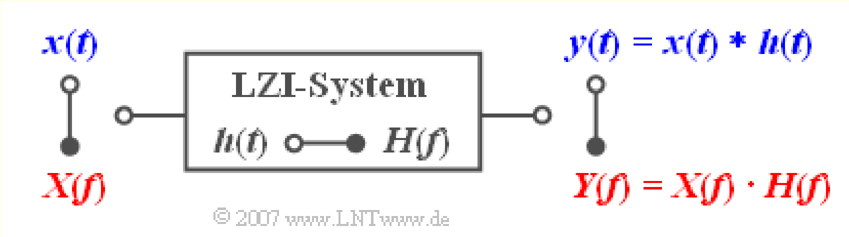
Damit lässt sich obige Fourierkorrespondenz auch wie folgt schreiben:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\, x_1(t) * x_2(t).$$ ⇒ **Beweis**

Anzumerken ist, dass die Faltung **kommutativ** ist, d. h. die Reihenfolge der Operanden ist vertauschbar.

Faltung im Zeitbereich (2)

Beispiel: Ein jedes lineare zeitinvariante (LZI-) System kann sowohl durch den Frequenzgang $H(f)$ als auch durch die Impulsantwort $h(t)$ beschrieben werden, wobei der Zusammenhang zwischen diesen beiden Systemgrößen durch die Fouriertransformation gegeben ist.



Legt man an den Eingang ein Signal $x(t)$ mit dem Spektrum $X(f)$ an, so gilt für das Spektrum des Ausgangssignals:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f).$$

Mit dem Faltungssatz ist es nun möglich, das Ausgangssignal auch direkt im Zeitbereich zu berechnen:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = h(t) * x(t).$$

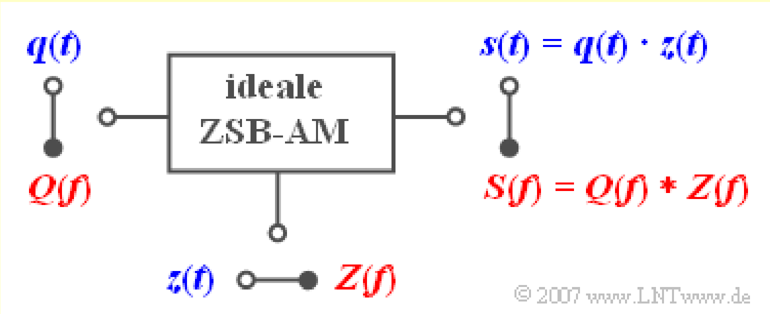
Faltung im Frequenzbereich

Die Dualität zwischen Zeit- und Frequenzbereich erlaubt auch Aussagen hinsichtlich des Spektrums des Produktsignals:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, X_1(f) * X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\nu) \cdot X_2(f-\nu)\,\mathrm{d}\nu.$$

Dieses Resultat lässt sich ähnlich wie der **Faltungssatz im Zeitbereich** beweisen. Allerdings besitzt nun die Integrationsvariable ν die Dimension einer Frequenz.

Beispiel: Die Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (ZSB-AM) ohne Träger wird durch das unten skizzierte Modell beschrieben. Bei der Zeitbereichsdarstellung (blau) ergibt sich das modulierte Signal $s(t)$ als das Produkt aus dem Nachrichtensignal $q(t)$ und dem (normierten) Trägersignal $z(t)$.



Nach dem Faltungssatz folgt daraus für den Frequenzbereich (rot), dass das Ausgangsspektrum $S(f)$ gleich dem Faltungsprodukt aus $Q(f)$ und $Z(f)$ ist.

Faltung einer Funktion mit einer Diracfunktion

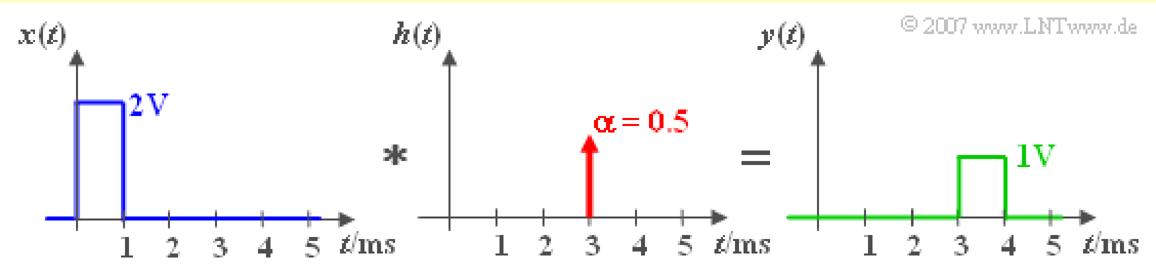
Sehr einfach wird die Faltungsoperation, wenn einer der beiden Operanden eine **Diracfunktion** ist. Dies gilt für die Faltung im Zeit- und im Frequenzbereich gleichermaßen.

Wir betrachten beispielhaft die Faltung einer Funktion $x_1(t)$ mit der Funktion $x_2(t) = \alpha \cdot \delta(t - T)$. Man erhält das Ergebnis:

$$x_1(t) * x_2(t) = \alpha \cdot x_1(t - T).$$ ⇒ **Beweis**

In Worten: Die Faltung einer beliebigen Funktion mit einer Diracfunktion bei $t = T$ ergibt die um T nach rechts verschobene Funktion, wobei noch die Gewichtung der Diracfunktion durch den Faktor α zu berücksichtigen ist.

Beispiel: Ein Rechtecksignal $x(t)$ wird durch ein LZI-System lediglich um eine Laufzeit $\tau = 3$ ms verzögert und um den Faktor α = 0.5 gedämpft. Dies erkennt man in nachfolgender Skizze sowohl am Ausgangssignal $y(t)$ als auch an der Impulsantwort $h(t)$.



Grafische Faltung (1)

Für die Beschreibungen auf dieser Seite wird von folgender Faltungsoperation ausgegangen:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Die Lösung des Faltungsintegrals soll auf grafischem Wege erfolgen und es wird vorausgesetzt, dass $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zeitkontinuierliche Signale sind. Dann sind folgende Schritte erforderlich:

a. **Zeitvariable** der beiden Funktionen **ändern**: $x_1(t) \rightarrow x_1(\tau)$, $x_2(t) \rightarrow x_2(\tau)$.
b. Zweite **Funktion spiegeln**: $x_2(\tau) \rightarrow x_2(-\tau)$.
c. Gespiegelte **Funktion** um t **verschieben**: $x_2(-\tau) \rightarrow x_2(t-\tau)$.
d. **Multiplikation** der beiden Funktionen $x_1(\tau)$ und $x_2(t-\tau)$.
e. **Integration** über das Produkt bezüglich τ in den Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$.

Da die Faltung kommutativ ist, kann anstelle von $x_2(\tau)$ auch $x_1(\tau)$ gespiegelt werden.

Einige Hinweise:
Die Thematik dieses Abschnitts wird auch in nachfolgendem Interaktionsmodul veranschaulicht:

Zur Verdeutlichung der grafischen Faltung (194 kB)

Wir möchten Sie ferner auf das Programm *„ft”* hinweisen, das die Faltung verschiedenartiger Impulse verdeutlicht. Dieses Lehrprogramm ist Teil des Programmpakets *LNTsim*, das von der Homepage des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik der Technischen Universität München heruntergeladen werden kann.

Hinweise zum Herunterladen der Texte und Programme von *LNTsim*

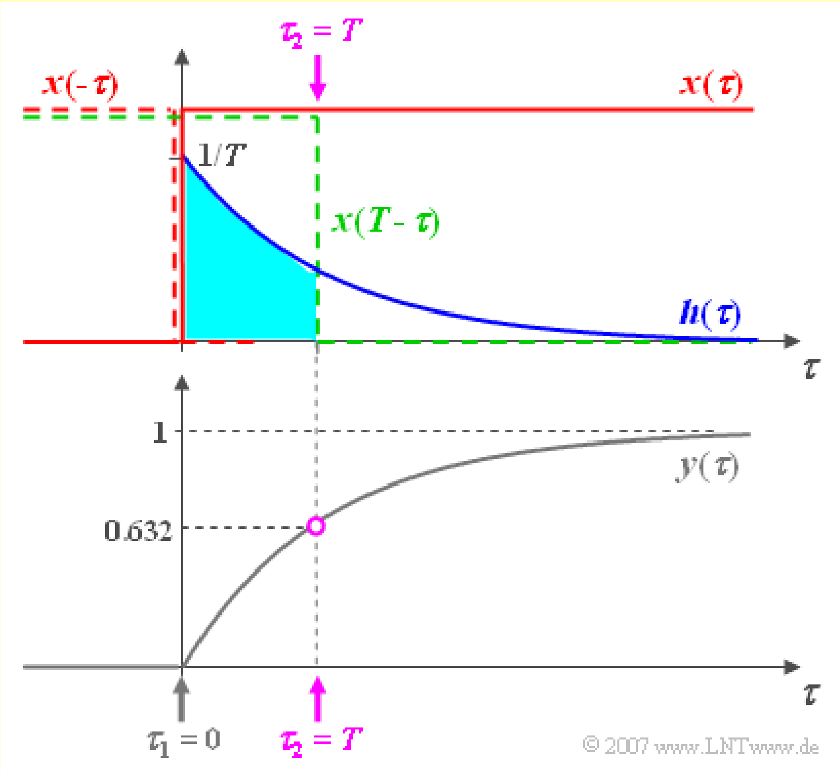
Des Weiteren möchten wir Sie auf das Java-Applet **Convolution** aufmerksam machen, das an der Universität Erlangen-Nürnberg im Rahmen des von der **Virtuellen Hochschule Bayern** geförderten eLearning-Kurses „SYSTOOL” entwickelt wurde.

Grafische Faltung (2)

Beispiel: Am Eingang eines RC-Tiefpasses mit der Impulsantwort

$$h(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{e}^{-t/T}$$

liege eine Sprungfunktion $x(t) = \gamma(t)$ an. Im Bild ist rot das sprungförmige Eingangssignal eingetragen und blau die exponentiell abfallende Impulsantwort $h(t)$, wobei die Zeitachse in τ umbenannt wurde.



Das Ausgangssignal errechnet sich aus der Faltung dieser beiden Funktionen, z. B. nach der Formel

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Der Wert bei t = 0 ergibt sich nach der grafischen Faltung, indem man das Eingangssignal spiegelt, dieses gespiegelte Signal $x(-\tau)$ mit der Impulsantwort $h(\tau)$ multipliziert und darüber integriert. Da es hier kein Zeitintervall gibt, bei dem sowohl $h(\tau)$ als auch $x(-\tau)$ ungleich 0 ist, folgt daraus $y(t = 0) = 0$.

Für jeden anderen Zeitpunkt t muss $x(t-\tau)$, beispielsweise entsprechend der grün gestrichelten Kurve, verschoben werden. Da auch diese Funktion nur die binären Werte 0 oder 1 annehmen kann, wird die Integration hier sehr einfach und man erhält:

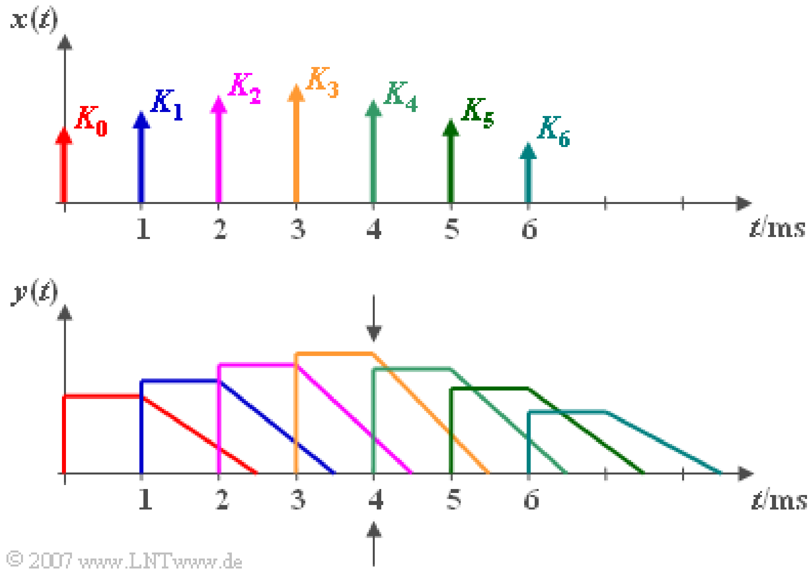
$$y(t) = \int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T} \cdot \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau/T}\,\mathrm{d}\tau = 1 - \mathrm{e}^{-t/T}.$$

Obige Skizze gilt für den Zeitpunkt $t = T$ und führt zu dem Ausgangswert 1 – 1/e ≈ 0.632.

Anschauliche Deutung der Faltung

Wir betrachten ein Tiefpassfilter mit der Impulsantwort $h(t)$, die zunächst eine Millisekunde lang konstant ist und dann bis zur Zeit t = 2.5 ms linear abfällt. Legt man an den Eingang dieses Filters einen Diracimpuls $K_0 \cdot \delta(t)$ an, so ist das Ausgangssignal $y(t)$ formgleich mit $h(t)$. Dieser Sachverhalt ist im nachfolgenden Bild rot dargestellt.

Ein um T = 1 ms späterer Diracimpuls mit Gewicht $K_1 > K_0$ hat das blau eingezeichnete Ausgangssignal zur Folge, das gegenüber dem roten Signal verzögert und in der Amplitude vergrößert ist.



Wir betrachten nun das aus sieben verschieden gewichteten Diracimpulsen bestehende Eingangssignal

$$x(t) = \sum_{n=0}^{6} K_n \cdot \delta(t - n \cdot T),$$

das als zeitdiskrete Näherung eines zeitkontinuierlichen Signals aufgefasst werden kann. Das Signal am Ausgang ist bei linearen Systemen die Summe der sieben im Bild verschiedenfarbig markierten Teilsignale:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{6} K_n \cdot h(t - n \cdot T).$$

Betrachten wir nun beispielhaft den Signalwert zum Zeitpunkt $t = 4T$:

$$y(t = 4T) = K_2 \cdot h(2T) + K_3 \cdot h(T) + K_4 \cdot h(0).$$

Dieser wird somit nur durch die Eingangssignalwerte K_2, K_3 und K_4 bestimmt. Die Gewichtung ist entsprechend dem Beitrag der Impulsantwort: K_2 beeinflusst $y(4T)$ weniger stark als K_3 und K_4, da $h(2T)$ kleiner als $h(T) = h(0)$ ist.