

## Allgemeine Beschreibung (1)

Jede periodische Funktion  $x(t)$  kann in allen Bereichen, in denen sie stetig ist oder nur endlich viele Sprungstellen aufweist, in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden, die man als **Fourierreihe** bezeichnet.

**Definition:** Die Fourierreihe eines periodischen Signals  $x(t)$  lautet wie folgt:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n\omega_0 t).$$

Hierbei bezeichnen:

- $A_0$  den **Gleichanteil** von  $x(t)$ ,
- $A_n$  die **Cosinuskoeffizienten**,
- $B_n$  die **Sinusoeffizienten**,
- $\omega_0 = 2\pi/T_0$  die **Grundkreisfrequenz** des periodischen Signals ( $T_0$  ist die Periodendauer).

Soll die Fourierreihe mit dem tatsächlichen periodischen Signal  $x(t)$  exakt übereinstimmen, so müssen im Allgemeinen unendlich viele Cosinus- und Sinuskoeffizienten zur Berechnung herangezogen werden. Bricht man die Fourierreihe ab und verwendet jeweils nur  $N$  dieser Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$ , so ergibt sich bis auf Sonderfälle ein etwas anderer Funktionsverlauf:

$$x_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^N B_n \cdot \sin(n\omega_0 t).$$

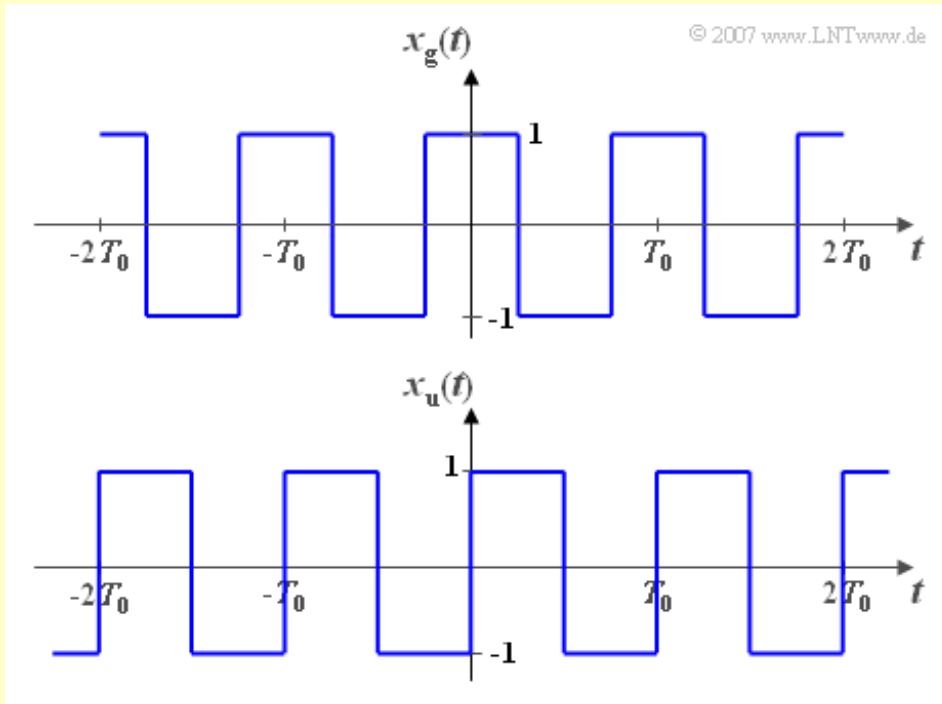
Zwischen dem periodischen Signal und dieser Fourierreihenapproximation gilt folgender Zusammenhang:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t).$$

Ist  $N \cdot f_0$  die höchste im Signal  $x(t)$  vorkommende Frequenz, so gilt natürlich  $x_N(t) = x(t)$ .

## Allgemeine Beschreibung (2)

**Beispiel:** Wir betrachten zwei periodische Rechtecksignale, jeweils mit der Periodendauer  $T_0$  und der Grundkreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . Bei der oben skizzierten geraden Funktion  $x_g(t)$  gilt  $x_g(-t) = x_g(t)$ . Dagegen ist die unten dargestellte Funktion ungerade:  $x_u(-t) = -x_u(t)$ .



In Formelsammlungen wie z. B. **[BS01]** findet man die Fourierreihendarstellungen der beiden Signale:

$$x_g(t) = \frac{4}{\pi} \left( \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5\omega_0 t) - \dots + \dots \right),$$

$$x_u(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots + \dots \right).$$

Wegen der allgemeingültigen Beziehung

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots = \frac{\pi}{4}$$

ergeben sich die Amplituden der beiden Rechtecksignale (Maximalwerte bei  $t = 0$  bzw.  $T_0/4$ ) jeweils zu 1. Dies lässt sich auch anhand der Signalverläufe in obigem Bild verifizieren.

## Berechnung der Fourierkoeffizienten (1)

Der Fourierkoeffizient  $A_0$  gibt den **Gleichanteil** an, der durch Mittelung über den Signalverlauf  $x(t)$  bestimmt werden kann. Aufgrund der Periodizität genügt die Mittelung über eine Periode:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt.$$

Der Integrationsbereich kann auch von 0 bis  $T_0$  (oder über eine anders festgelegte Periode) gewählt werden. Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  ( $n \geq 1$ ) beruht auf der Eigenschaft, dass die harmonischen Cosinus- und Sinusfunktionen so genannte **Orthogonalfunktionen** sind. Für diese gilt:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(n\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} T_0/2 & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} T_0/2 & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{für alle } m, n.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen ergeben sich für die Cosinus- und Sinuskoeffizienten:

$$A_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt.$$

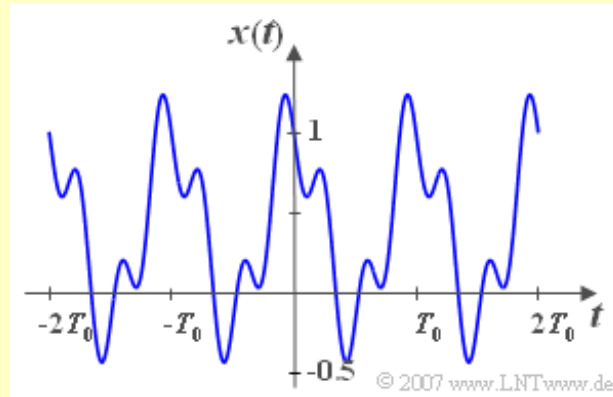
Nachfolgend finden Sie ein Lehrvideo zur weiteren Verdeutlichung dieser Gleichungen:

**Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten** (Dateigröße 1.51 MB, Dauer 3:50)

## Berechnung der Fourierkoeffizienten (2)

**Beispiel:** Wir betrachten die nachfolgend gezeichnete periodische Zeitfunktion

$$x(t) = 0.4 + 0.6 \cdot \cos(\omega_0 t) - 0.3 \cdot \sin(3\omega_0 t).$$



Da das Integral der Cosinus- und der Sinusfunktion über jeweils eine Periode identisch 0 ist, erhält man für den Gleichsignalkoeffizienten  $A_0 = 0.4$ .

Die Bestimmungsgleichung für den Cosinuskoeffizienten  $A_1$  lautet (Integrationsintervall von 0 bis  $T_0$ ):

$$A_1 = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.4 \cdot \cos(\omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.6 \cdot \cos^2(\omega_0 t) dt - \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.3 \cdot \sin(3\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t) dt.$$

Wie gerade gezeigt, ist das letzte Integral aufgrund der Orthogonalität gleich 0; das erste ist ebenfalls 0. Nur der mittlere Term liefert hier einen Beitrag zu  $A_1 = 2 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.6$ . Für alle weiteren ( $n \geq 2$ ) Cosinuskoeffizienten liefern alle drei Integrale den Wert 0, und es gilt somit stets  $A_n = 0$ .

Die Bestimmungsgleichungen für die Sinuskoeffizienten  $B_n$  lauten entsprechend:

$$B_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.4 \cdot \sin(n \omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.6 \cdot \cos(\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt - \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.3 \cdot \sin(3\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

Für  $n \neq 3$  sind alle drei Integralwerte gleich 0 und damit gilt auch  $B_n = 0$ . Dagegen liefert für  $n = 3$  das letzte Integral einen Beitrag, und man erhält für den Sinuskoeffizienten  $B_3 = -0.3$ .

## Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften (1)

Einige Erkenntnisse über die Fourierkoeffizienten lassen sich bereits aus den **Symmetrieeigenschaften** der Zeitfunktion  $x(t)$  ablesen.

- Ist die Funktion  $x(t)$  gerade, also achsensymmetrisch um die Ordinate ( $t = 0$ ), so verschwinden alle Sinuskoeffizienten, da die Sinusfunktion selbst eine ungerade Funktion ist:

$$B_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

- Eine ungerade Funktion  $x(t)$  ist punktsymmetrisch um den Koordinatenursprung ( $t = 0; x = 0$ ). Deshalb müssen alle Cosinuskoeffizienten verschwinden ( $A_n = 0$ ), da die Cosinusfunktion selbst gerade ist. In diesem Fall ist auch der Gleichanteil  $A_0$  stets 0.

$$A_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

- Liegt eine Funktion ohne Gleichanteil vor ( $A_0 = 0$ ) und ist diese innerhalb einer Periode ungerade, das heißt, ist die Bedingung  $x(t) = -x(t - T_0/2)$  erfüllt, so sind in der Fourierreihendarstellung nur ungerade Vielfache der Grundfrequenz vorhanden. Für die Koeffizienten mit geradzahligem Index gilt dagegen stets:

$$A_n = B_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots).$$

- Sind alle Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  mit geradzahligem Index ( $n = 2, 4, \dots$ ) gleich 0 und der Koeffizient  $A_0 \neq 0$ , so bezieht sich die im letzten Punkt genannte Symmetrieeigenschaft auf den Gleichsignalanteil, und es gilt:

$$x(t) = 2 \cdot A_0 - x(t - T_0/2).$$

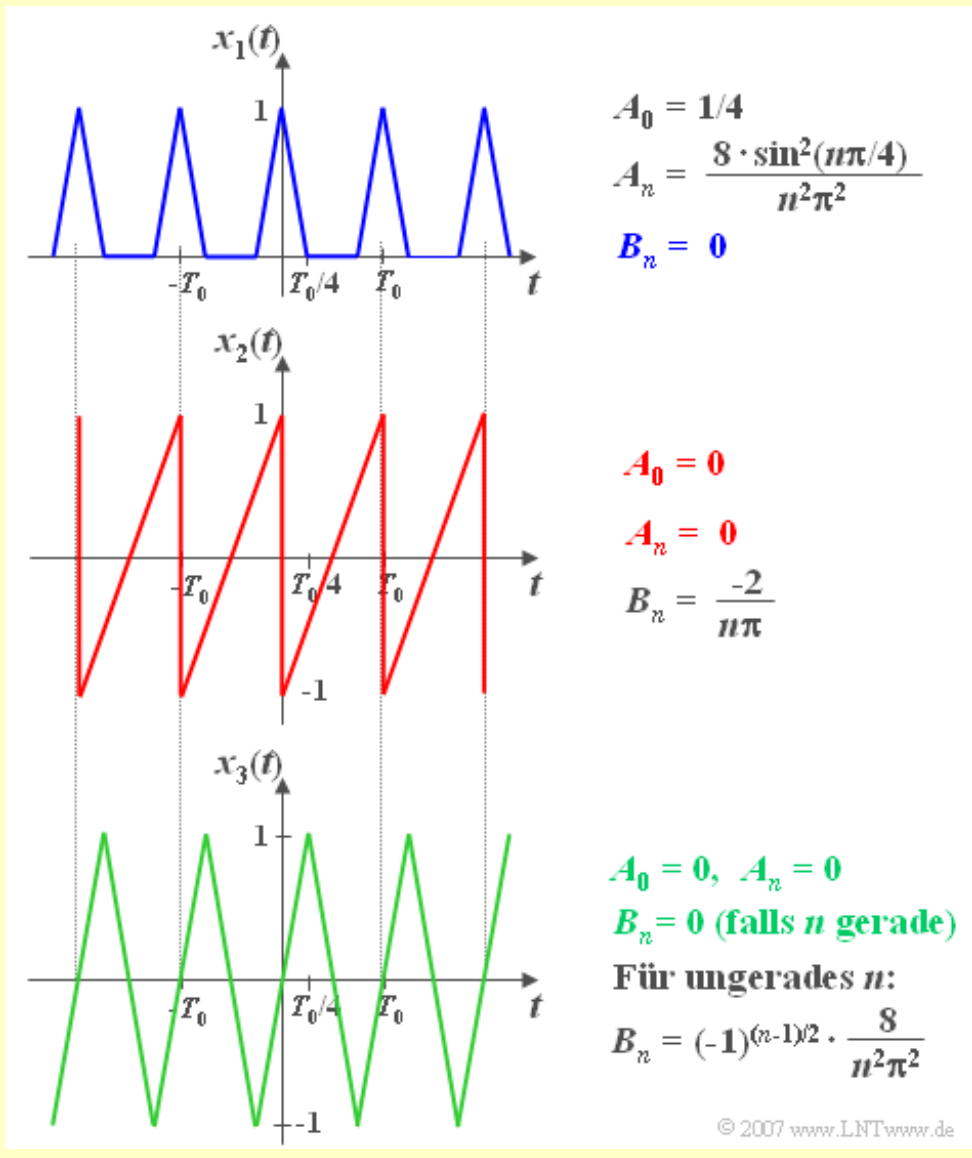
Anzumerken bleibt, dass auch mehrere dieser Symmetrieeigenschaften gleichzeitig erfüllt sein können.

Die Symmetrieeigenschaften der Fourierkoeffizienten werden im ersten Teil des nachfolgenden Videos zusammenfassend dargestellt:

**Eigenschaften und Genauigkeit der Fourierreihe** (Teil 1: 1.33 MB, 3:31 – Teil 2: 3.62 MB, 8:39)

## Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften (2)

**Beispiel:** Die oben aufgeführten Eigenschaften werden nun an drei Signalverläufen verdeutlicht.  $x_1(t)$  ist eine gerade und mittelwertbehaftete Funktion, die ausschließlich durch Cosinuskoeffizienten  $A_n$  bestimmt ist ( $B_n = 0$ ). Dagegen sind bei der ungeraden Funktion  $x_2(t)$  alle  $A_n$  ( $n \geq 0$ ) identisch 0. Die ungerade Funktion  $x_3(t)$  beinhaltet ebenfalls nur Sinuskoeffizienten, aber wegen  $x_3(t) = -x_3(t - T_0/2)$  ausschließlich für ungeradzahlige Werte von  $n$ .



## Darstellung nach Betrag und Phase

Wie auf der Seite **Darstellung mit Cosinus- und Sinusanteil** im Kapitel 2.3 für den Fall einer harmonischen Schwingung bereits gezeigt wurde, kann man jedes beliebige periodische Signal

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

auch mit Hilfe der Betrags- und Phasenkoeffizienten darstellen:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t - \varphi_n).$$

Diese modifizierten Fourierkoeffizienten weisen folgende Eigenschaften auf:

- Der Gleichsignalkoeffizient  $C_0$  ist identisch mit  $A_0$ .
- Die Betragskoeffizienten lauten:

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}.$$

- Für die Phasenkoeffizienten gilt:

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{B_n}{A_n}\right).$$

## Komplexe Fourierreihe

Mit der Eulerschen Beziehung  $\cos(x) + j \cdot \sin(x) = e^{jx}$  erhält man eine zweite Darstellungsvariante der Fourierreihenentwicklung, die von der komplexen Exponentialfunktion ausgeht.

**Definition:** Die **komplexe Fourierreihe** eines periodischen Signals  $x(t)$  lautet wie folgt:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}.$$

Hierbei bezeichnen  $D_n$  die **komplexen Fourierkoeffizienten**, die sich aus den Cosinuskoeffizienten  $A_n$  und den Sinuskoeffizienten  $B_n$  bzw. aus den Betragskoeffizienten  $C_n$  und den Phasenkoeffizienten  $\varphi_n$  wie folgt berechnen lassen (gültig für  $n \neq 0$ ):

$$D_n = \frac{1}{2} \cdot (A_n - j \cdot B_n) = \frac{1}{2} \cdot C_n \cdot e^{-j\varphi_n}.$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten können nach folgender Gleichung auch direkt berechnet werden:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Solange die Breite  $T_0$  erhalten bleibt, kann das Integrationsintervall ebenso wie bei den Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  beliebig verschoben werden, beispielsweise von 0 bis  $T_0$ . Der Koeffizient  $D_0$  ist stets reell und gleich dem Gleichanteil  $A_0$ . Für die komplexen Koeffizienten mit negativem Laufindex ( $n < 0$ ) gilt:

$$D_{-n} = D_n^* = \frac{1}{2} \cdot (A_n + j \cdot B_n).$$

## Spektrum eines periodischen Signals (1)

Ausgehend von der gerade abgeleiteten komplexen Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

und dem bereits in Kapitel 2.3 mehrfach benutzten **Verschiebungssatz** erhält man für das Spektrum eines periodischen Signals  $x(t)$ :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot \delta(f - n \cdot f_0).$$

Dies bedeutet:

- Das Spektrum eines periodischen Signals ist ein **Linienpektrum** bei ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz  $f_0 = 1/T_0$ .
- Der **Gleichanteil** liefert eine Diracfunktion bei  $f = 0$  mit dem Impulsgewicht  $A_0$ .
- Daneben gibt es noch **Diracfunktionen**  $\delta(f \pm n \cdot f_0)$  **bei Vielfachen von  $f_0$** , wobei  $\delta(f - n \cdot f_0)$  eine Diracfunktion bei  $f = n \cdot f_0$  (also im positiven Frequenzbereich) und  $\delta(f + n \cdot f_0)$  eine solche bei der Frequenz  $f = -n \cdot f_0$  (im negativen Frequenzbereich) kennzeichnet.

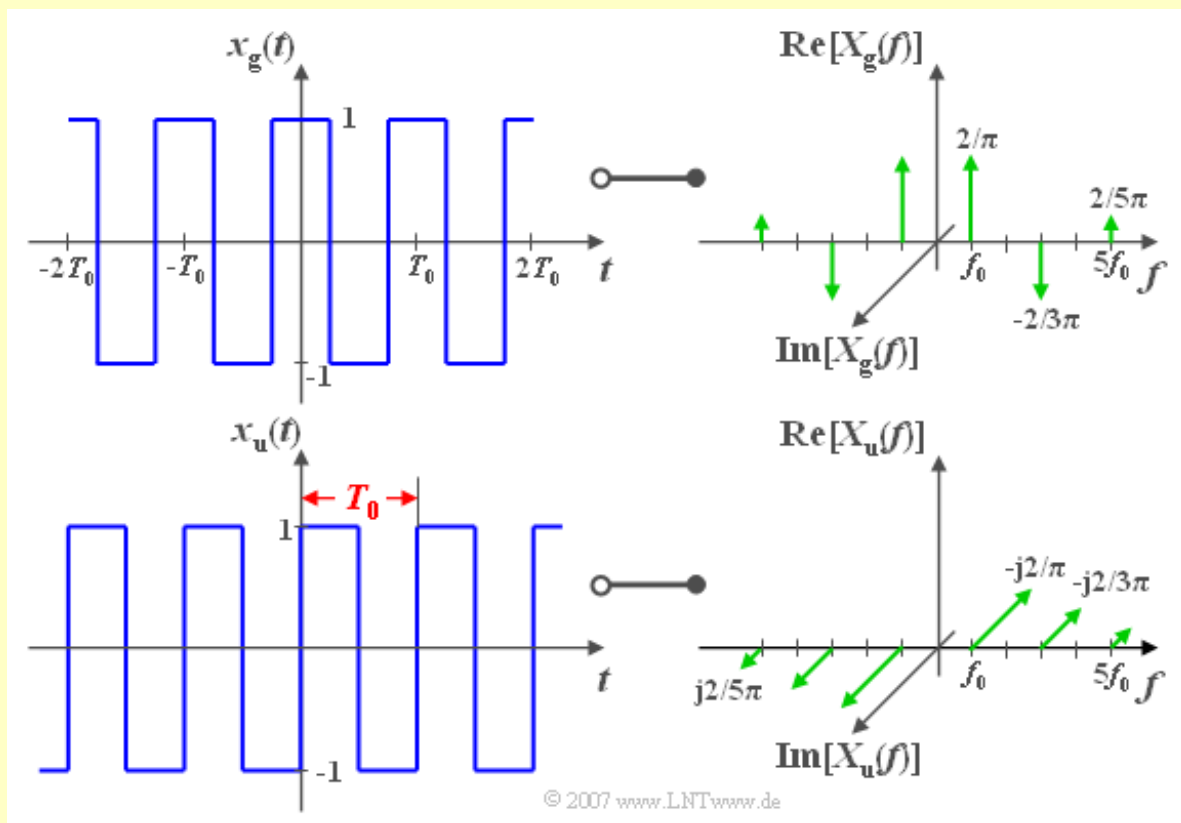
## Spektrum eines periodischen Signals (2)

**Beispiel:** Wir betrachten – wie schon im Beispiel zu Beginn dieses Abschnitts - zwei periodische Rechtecksignale, jeweils mit Periodendauer  $T_0$  und Grundfrequenz  $f_0 = 1/T_0$ . Das Signal

$$x_g(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5\omega_0 t) - \dots + \dots \right]$$

ist eine gerade, aus Cosinusanteilen zusammengesetzte Funktion. Die dazugehörige Spektralfunktion  $X_g(f)$  ist damit rein reell.

Wie auf der Seite **Spektraldarstellung eines Cosinussignals** bereits beschrieben wurde, liefert die Grundwelle zwei Diracfunktionen bei  $\pm f_0$ , jeweils gewichtet mit  $2/\pi$ . Dieses Gewicht entspricht den (im Allgemeinen komplexen) Fourierkoeffizienten  $D_1 = D_{-1}^*$ , die nur im Sonderfall einer geraden Funktion reell sind. Weitere Diracfunktionen gibt es bei  $\pm 3f_0$  (negativ),  $\pm 5f_0$  (positiv),  $\pm 7f_0$  (negativ) usw. Alle Phasenwerte  $\varphi_n$  sind aufgrund der alternierenden Vorzeichen entweder 0 oder  $\pi$ .



Die unten dargestellte Funktion  $x_u(t)$  ist ungerade:

$$x_u(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots \right].$$

Wie auf der Seite **Spektraldarstellung eines Sinussignals** bereits beschrieben wurde, liefert hier die Grundwelle zwei Diracfunktionen bei  $+f_0$  (gewichtet mit  $-j \cdot 2/\pi$ ) bzw. bei  $-f_0$  (gewichtet mit  $j \cdot 2/\pi$ ). Auch alle weiteren Diracfunktionen bei  $\pm 3f_0$ ,  $\pm 5f_0$ , usw. sind imaginär und in gleicher Richtung gewichtet wie die Diracfunktionen bei  $\pm f_0$ . Die beiden Betragsspektren sind gleich:  $|X_u(f)| = |X_g(f)|$ .

## Das Gibbsche Phänomen (1)

Nicht jedes Signal eignet sich für die Fourierreihendarstellung. Hier einige Einschränkungen:

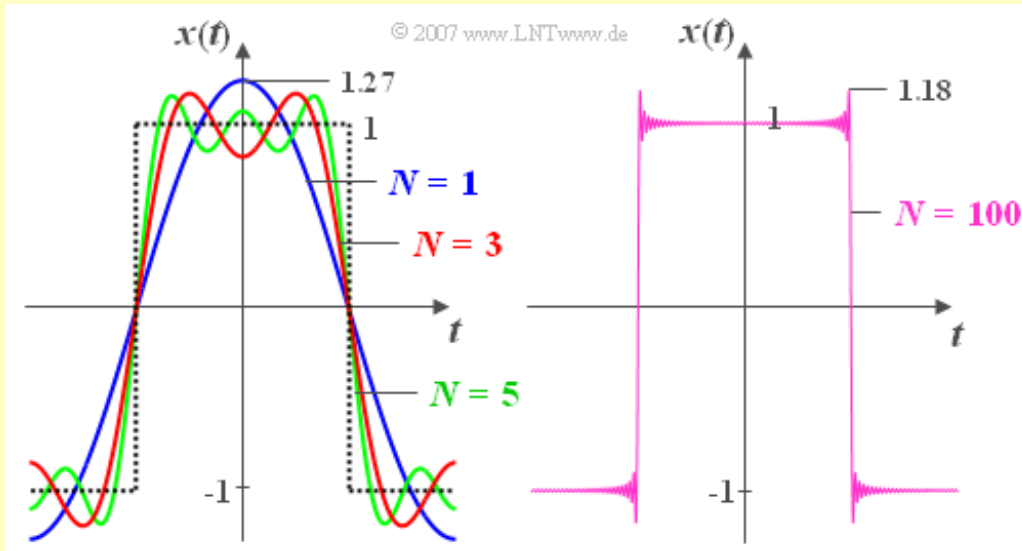
- Eine wichtige Voraussetzung für die Konvergenz der Fourierreihe ist, dass das Signal nur endlich viele Unstetigkeitsstellen je Periode besitzen darf.
- An denjenigen Stellen  $t = t_j$ , an denen  $x(t)$  endliche Sprünge aufweist, konvergiert die Reihe gegen den aus dem jeweiligen links- und rechtsseitigen Grenzwert gebildeten arithmetischen Mittelwert.
- In der Umgebung solcher Sprungstellen kommt es meist zu hochfrequenten Oszillationen in der Reihendarstellung. Dieser Fehler ist von prinzipieller Art, das heißt, er ließe sich auch nicht vermeiden, wenn tatsächlich unendlich viele Summanden berücksichtigt würden. Man bezeichnet diesen Fehler als das *Gibbsche Phänomen*, benannt nach dem Physiker **Josiah Willard Gibbs**.
- Durch eine Erhöhung von  $N$  wird zwar der fehlerhafte Bereich kleiner, nicht jedoch die maximale Abweichung zwischen dem tatsächlichen Signal  $x(t)$  und der Fourierreihendarstellung  $x_N(t)$ . Der maximale Fehler beträgt ca. 9% der Sprungamplitude – und zwar unabhängig von  $N$ .

Das Gibbsche Phänomen und weitere interessante Aspekte werden im folgenden Lehrvideo behandelt:

**Eigenschaften und Genauigkeit der Fourierreihe** (Teil 1: 1.31 MB, 3:31 – Teil 2: 3.62 MB, 8:39)

## Das Gibbsche Phänomen (2)

**Beispiel:** Im linken Bild sehen Sie gepunktet einen Ausschnitt eines periodischen  $\pm 1$ -Rechtecksignals und die dazugehörige Fourierreihendarstellung mit  $N = 1, 3$  und  $5$  Summanden. Die Grundwelle hat hier den Amplitudenwert  $4/\pi \approx 1.27$ . Auch mit  $N = 5$  (das bedeutet drei Summanden, da  $A_2 = A_4 = 0$ ) unterscheidet sich die Fourierreihe vom Rechtecksignal noch deutlich, vor allem in der Flanke.



Aus dem rechten Bild ist zu erkennen, dass die Flanke und der innere Bereich mit  $N = 100$  relativ gut nachgebildet werden, es aber an der Sprungstelle aufgrund des Gibbschen Phänomens noch immer zu Überschwingern kommt. Da hier die Sprungamplituden jeweils gleich 2 sind, ergeben sich die Maximalwerte näherungsweise zu 1.18. Mit  $N = 1000$  wären die Überschwinger genau so groß, aber auf einen noch engeren Raum begrenzt und bei zeitdiskreter Darstellung eventuell nicht mehr sichtbar.