

Reelle Zahlenmengen

In den nachfolgenden Kapiteln dieses Buches werden komplexe Größen stets eine wichtige Rolle spielen. Obwohl das Rechnen mit komplexen Zahlen bereits in der Schulmathematik behandelt und geübt wird, haben unsere Erfahrungen gezeigt, dass auch Studierende von naturwissenschaftlichen und technischen Fachgebieten damit durchaus Probleme haben. Deshalb werden am Ende dieses Grundlagenkapitels die Rechenregeln für komplexe Zahlen kurz zusammengefasst.

Vielleicht hängen diese Schwierigkeiten auch damit zusammen, dass „komplex“ im Alltag oft als Synonym für „kompliziert“ verwendet wird, während „reell“ laut Duden für „zuverlässig, ehrlich und redlich“ steht.

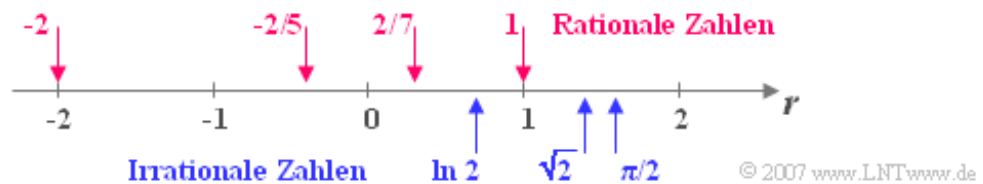
Zunächst folgen einige Anmerkungen über reelle Zahlenmengen, für die im strengen mathematischen Sinne die Bezeichnung „Zahlenkörper“ richtiger wäre. Hierzu gehören:

- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Mit diesen Zahlen sind die Rechenoperationen Addition, Multiplikation und „ x^y “ möglich. Das jeweilige Ergebnis ist wieder eine natürliche Zahl.
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$. Diese Zahlenmenge ist eine Erweiterung der natürlichen Zahlen \mathbb{N} . Die Einführung der Menge \mathbb{Z} war notwendig, um die Ergebnismenge einer Subtraktion zu erfassen, zum Beispiel $5 - 7 = -2$.
- **Rationale Zahlen** $\mathbb{Q} = \{z/n\}$ mit $z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Mit dieser auch als Bruchzahlen bekannten Zahlenmenge liegt auch für jede Division ein definiertes Ergebnis vor. Schreibt man eine rationale Zahl in Dezimalschreibweise, so treten ab einer gewissen Dezimalstelle nur Nullen auf (zum Beispiel $-2/5 = -0.400\dots$) oder es sind Periodizitäten zu erkennen (z.B. $2/7 = 0.285714285\dots$). Da $n = 1$ erlaubt ist, sind die ganzen Zahlen eine Teilmenge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- **Irrationale Zahlen** $\mathbb{Q} \neq \{z/n\}$ mit $z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Obwohl es unendlich viele rationale Zahlen gibt, verbleiben ebenfalls unendlich viele Zahlen, die nicht als Bruch dargestellt werden können. Beispiele hierfür sind die Zahl $\pi = 3.141592654\dots$ (wobei es auch bei mehr Dezimalstellen keine Perioden gibt) oder das Ergebnis der folgenden Gleichung:

$$a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2} = \pm 1.414213562\dots$$

Auch diese Zahl ist irrational, was bereits **Euklid** in der Antike bewiesen hat.

- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q} \neq$. Die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen ergibt die Menge der reellen Zahlen. Diese können entsprechend ihren Zahlenwerten geordnet und auf dem so genannten Zahlenstrahl eingezeichnet werden.



Weitere Informationen zu dieser Thematik finden Sie im Internet, z.B. bei **mathe-online**.

Imaginäre und komplexe Zahlen

Mit der Einführung der irrationalen Zahlen war die Lösung der Gleichung $a^2 - 2 = 0$ möglich, nicht jedoch von $a^2 + 1 = 0$. Der Mathematiker **Leonhard Euler** löste dieses Problem, indem er den Körper der reellen Zahlen um die imaginären Zahlen erweiterte. Er definierte dazu die imaginäre Einheit

$$j = \sqrt{-1} \Rightarrow j^2 = -1.$$

Anzumerken ist, dass Euler diese Größe mit „j“ bezeichnet hat und dies auch heute noch in der Mathematik so üblich ist. In der Elektrotechnik hat sich dagegen die Bezeichnung „j“ durchgesetzt, da „i“ bereits mit dem zeitabhängigen Strom belegt ist.

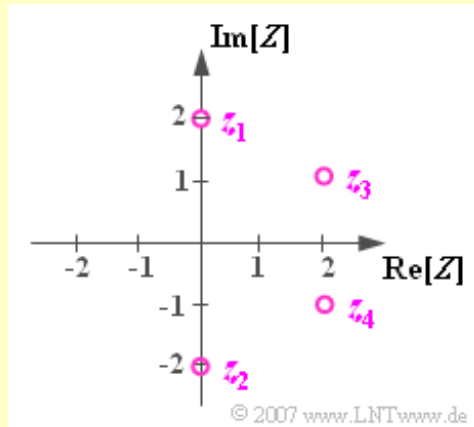
Definition: Die **komplexe Zahl** z ist die Summe einer reellen Zahl x und einer imaginären Zahl $j \cdot y$:

$$z = x + j \cdot y.$$

x und y entstammen hierbei der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen. Die Menge aller möglichen komplexen Zahlen bezeichnet man als den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen.

Aus dem Zahlenstrahl der reellen Zahlen wird nun die komplexe Ebene, die durch zwei um 90° verdrehte Zahlenstränge für Real- und Imaginärteil aufgespannt wird.

Beispiel: Die komplexe Zahl $z_1 = 2j$ ist eine der zwei möglichen Lösungen der Gleichung $z^2 + 4 = 0$. Eine andere Lösung ist $z_2 = -2j$.



Dagegen geben $z_3 = 2 + j$ und $z_4 = 2 - j$ die beiden Lösungen zu folgender Gleichung an:

$$(z - 2 - j)(z - 2 + j) = 0 \Rightarrow z^2 - 4 \cdot z + 5 = 0.$$

Man bezeichnet z_4 auch als die **Konjugiert-Komplexe** von z_3 .

$$(z - 2 - j)(z - 2 + j) = 0 \Rightarrow z^2 - 4 \cdot z + 5 = 0.$$

Anmerkung: In der Literatur werden komplexe Größen oft durch eine Unterstreichung gekennzeichnet. Darauf wird in den Büchern von LNTwww verzichtet.

Darstellung nach Betrag und Phase

Eine komplexe Zahl z kann außer durch den Realteil x und den Imaginärteil y auch durch ihren **Betrag** $|z|$ und die **Phase** ϕ beschrieben werden. Es gelten folgende Umrechnungen:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x},$$

$$x = |z| \cdot \cos(\phi), \quad y = |z| \cdot \sin(\phi).$$

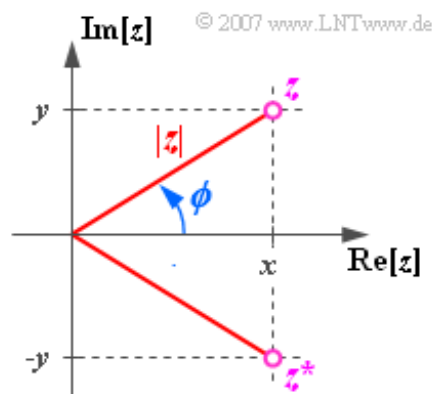
Somit gilt für die komplexe Größe z auch folgende Darstellung:

$$z = |z| \cdot \cos(\phi) + j \cdot |z| \cdot \sin(\phi) = |z| \cdot e^{j \cdot \phi}.$$

Hier ist der Satz von Euler verwendet. Dieser besagt, dass die komplexe Größe $\exp(j\phi)$ den Realteil $\cos(\phi)$ und den Imaginärteil $\sin(\phi)$ aufweist. Der **Beweis des Eulerschen Satzes** basiert auf dem Vergleich der entsprechenden Potenzreihenentwicklungen.

Weiter erkennt man aus nachfolgender Grafik, dass für die **Konjugiert-Komplexe** von $z = x + j \cdot y$ gilt:

$$z^* = x - j \cdot y = |z| \cdot e^{-j \cdot \phi}.$$



Rechenregeln für komplexe Zahlen

Die Rechengesetze für zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = x_1 + j \cdot y_1 = |z_1| \cdot e^{j \cdot \phi_1}, \quad z_2 = x_2 + j \cdot y_2 = |z_2| \cdot e^{j \cdot \phi_2}$$

sind derart definiert, dass sich für den Sonderfall eines verschwindenden Imaginärteils die Rechenregeln der reellen Zahlen ergeben. Man spricht vom so genannten **Permanenzprinzip**.

Für die Grundrechenarten gelten folgende Regeln:

- Die **Summe** zweier komplexer Zahlen (bzw. deren **Differenz**) wird gebildet, indem man ihre Real- und Imaginärteile addiert (bzw. subtrahiert):

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2),$$

$$z_4 = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2).$$

- Das **Produkt** zweier komplexer Zahlen kann in der Realteil- und Imaginärteildarstellung durch Ausmultiplizieren unter Berücksichtigung von $j^2 = -1$ gebildet werden. Einfacher gestaltet sich die Multiplikation allerdings, wenn z_1 und z_2 mit Betrag und Phase geschrieben werden:

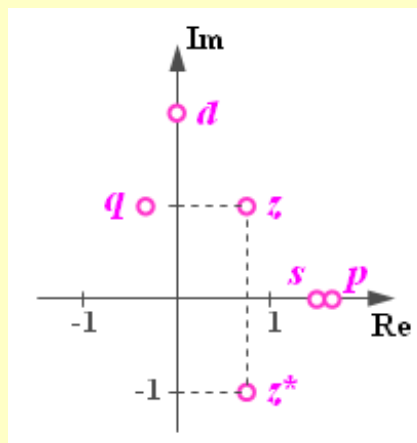
$$z_5 = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1),$$

$$z_5 = |z_1| \cdot e^{j \cdot \phi_1} \cdot |z_2| \cdot e^{j \cdot \phi_2} = |z_5| \cdot e^{j \cdot \phi_5} \Rightarrow |z_5| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \phi_5 = \phi_1 + \phi_2.$$

- Die **Division** ist in der Exponentialschreibweise ebenfalls überschaubarer. Hier werden die beiden Beträge dividiert und die Phasen im Exponenten subtrahiert:

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = |z_6| \cdot e^{j \cdot \phi_6} \Rightarrow |z_6| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \phi_6 = \phi_1 - \phi_2.$$

Beispiel: Die komplexe Zahl $z = 0.75 + j = 1.25 \cdot e^{j53.1^\circ}$ sowie deren Konjugiert-Komplexe $z^* = 0.75 - j = 1.25 \cdot e^{-j53.1^\circ}$ sind in der Grafik als Punkte innerhalb der komplexen Ebene dargestellt, zusätzlich die Summe $s = z + z^* = 1.5$ (rein reell) und die Differenz $d = z - z^* = 2j$ (rein imaginär).



Das Produkt $p = z \cdot z^* = 1.25^2 \approx 1.5625$ ist in diesem Fall ebenfalls rein reell, während der Quotient $q = z/z^* = e^{j106.2^\circ}$ den Betrag 1 und den doppelten Phasenwinkel wie z aufweist.

Die Thematik von Kapitel 1.3 wird auch in folgendem Lehrvideo behandelt:

Rechnen mit komplexen Zahlen (Größe 5.87 MB, Dauer 11:52)