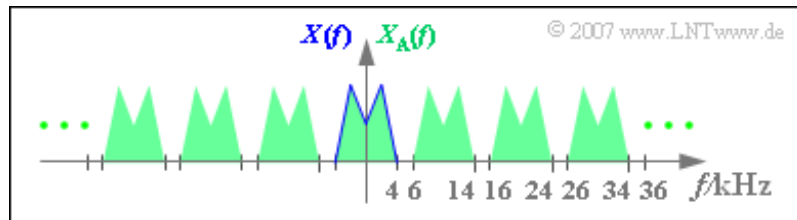


Musterlösung zur Aufgabe A5.1

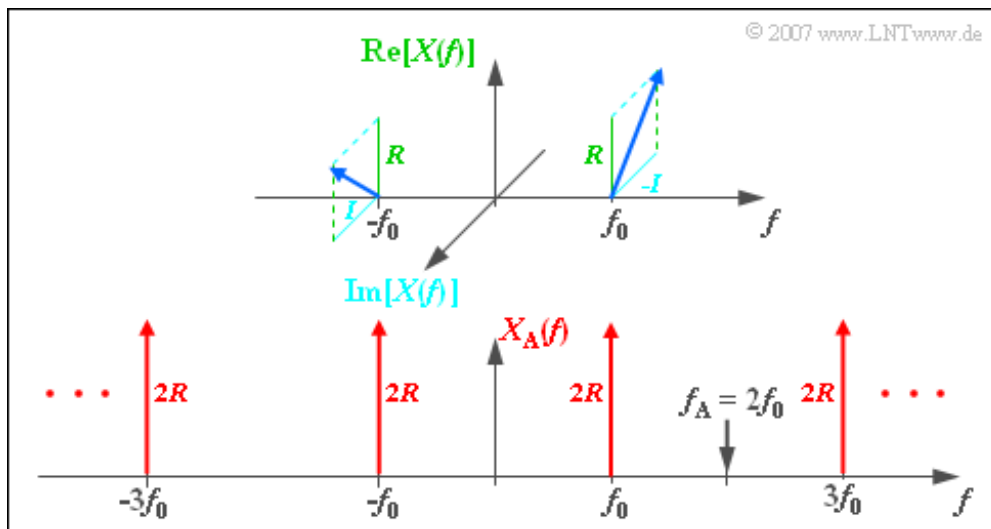
- a) Der Abstand zweier benachbarter Abtastwerte beträgt $T_A = 0.1$ ms. Somit erhält man für die Abtastrate $f_A = 1/T_A = 10$ kHz.
- b) Das Spektrum $X_A(f)$ des abgetasteten Signals erhält man aus $X(f)$ durch periodische Fortsetzung im Abstand $f_A = 10$ kHz. Aus der Skizze erkennt man, dass $X_A(f)$ durchaus Anteile bei $f = 2.5$ kHz und $f = 6.5$ kHz besitzen kann, nicht jedoch bei $f = 5.5$ kHz. Auch bei $f = 34.5$ kHz wird $X_A(f) = 0$ gelten.



- c) Es muss sichergestellt sein, dass alle Frequenzen des Analogsignals mit $H(f) = 1$ bewertet werden. Daraus folgt (siehe Skizze): $f_{1, \min} = B_{\text{NF}} = 4$ kHz.
- d) Ebenso muss garantiert werden, dass alle Spektralanteile von $X_A(f)$, die in $X(f)$ nicht enthalten sind, durch den Tiefpass entfernt werden. Entsprechend der Skizze gilt: $f_{2, \max} = f_A - B_{\text{NF}} = 6$ kHz.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.1

- a) Aus der Grafik erkennt man die Amplitude $A = 2V$ sowie die Periodendauer $T_0 = 0.2$ ms. Daraus ergibt sich die Signalfrequenz $f_0 = 1/T_0 = 5$ kHz.
- b) Die Abtastrate ist hier $f_A = 1/T_A = 12.5$ kHz. Dieser Wert ist größer als $2 \cdot f_0 = 10$ kHz. Damit ist das Abtasttheorem unabhängig von der Phase erfüllt, und es gilt stets $y(t) = x(t)$.
- c) Die Abtastrate beträgt nun $f_A = 2 \cdot f_0 = 10$ kHz. Nur im Sonderfall des Cosinussignals ist das Abtasttheorem erfüllt und es gilt $y_1(t) = x_1(t)$, das heißt $A_1 = A = 2$ V und $\varphi_1 = 0$.



Dieses Ergebnis soll nun noch exakt mathematisch hergeleitet werden, wobei im Hinblick auf die noch anstehenden Teilaufgaben auch eine Phase φ im Eingangssignal berücksichtigt wird:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t - \varphi).$$

Dann gilt für die Spektralfunktion, die in der oberen Grafik skizziert ist:

$$X(f) = \frac{A}{2} \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi} \cdot \delta(f - f_0).$$

Mit den Abkürzungen

$$R = \frac{A}{2} \cdot \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad I = \frac{A}{2} \cdot \sin(\varphi)$$

kann hierfür auch geschrieben werden:

$$X(f) = (R + j \cdot I) \cdot \delta(f + f_0) + (R - j \cdot I) \cdot \delta(f - f_0).$$

Das Spektrum des mit $f_A = 2f_0$ abgetasteten Signals $x_A(t)$ lautet somit:

$$X_A(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} X(f - \mu \cdot f_A) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} X(f - 2\mu \cdot f_0).$$

Die zweite Grafik zeigt, dass $X_A(f)$ aus Diracfunktionen bei $\pm f_0, \pm 3f_0, \pm 5f_0$, usw. besteht. Alle Gewichte sind rein reell und gleich $2R$. Die Imaginärteile des periodisch fortgesetzten Spektrums heben sich auf.

Berücksichtigt man weiter den rechteckförmigen Tiefpass, dessen Grenzfrequenz exakt bei $f_G = f_0$ liegt,

sowie $H(f_G) = 0.5$, so erhält man für das Spektrum nach der Signalrekonstruktion:

$$Y(f) = R \cdot \delta(f + f_0) + R \cdot \delta(f - f_0), \quad R = \frac{A}{2} \cdot \cos(\varphi).$$

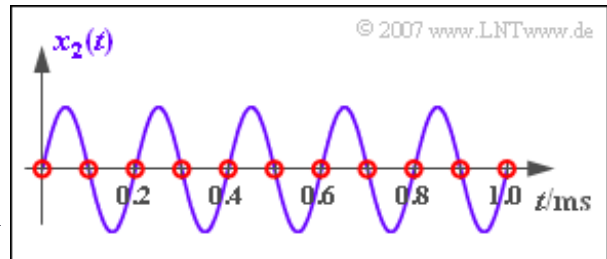
Die Fourierreücktransformation führt auf

$$y(t) = A \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t).$$

Es ergibt sich also unabhängig von der Eingangsphase φ ein cosinusförmiger Verlauf. Ist $\varphi = 0$ wie beim Signal $x_1(t)$, so ist auch die Amplitude des Ausgangssignals gleich A .

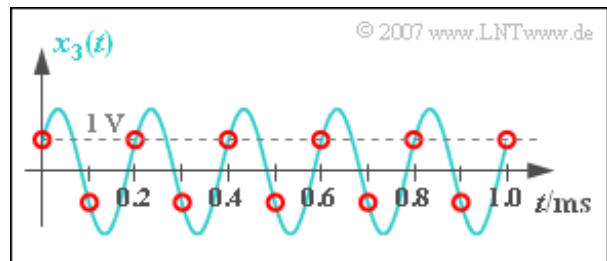
d) Das Sinussignal hat die Phase 90° . Daraus folgt direkt $y_2(t) = 0$ und damit auch die Amplitude $A_2 = 0$.

Dieses Ergebnis wird verständlich, wenn man sich die Abtastwerte in der Grafik betrachtet. Alle Abtastwerte (rote Kreise) sind 0, so dass natürlich auch nach dem Filter kein Signal vorhanden sein kann.



e) Auch das Ausgangssignal $y_3(t)$ ist cosinusförmig, das heißt: $\varphi_3 = 0$. Die Amplitude ist gleich

$$A_3 = A \cdot \cos(60^\circ) = \frac{A}{2} = 1 \text{ V}.$$



Wenn Sie die rot eingezeichneten Abtastwerte in der Grafik betrachten, so werden Sie zugeben, dass Sie als

„Signalrekonstrukteur“ keine andere Entscheidung treffen würden als der Tiefpass.

Musterlösung zur Aufgabe A5.2

a) Aus der IDFT-Gleichung wird mit $D(\mu) = 0$ für $\mu \neq 0$:

$$d(\nu) = D(0) \cdot w^0 = D(0) = 1 \quad (0 \leq \nu \leq 7)$$

$$\Rightarrow d(0) = d(1) = 1.$$

Dieser Parametersatz beschreibt somit die diskrete Form der Fourierkorrespondenz des Gleichsignals:

$$x(t) = 1 \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(f) = \delta(f).$$

b) Hier sind alle Spektralkoeffizienten 0 mit Ausnahme von $D_1 = D_7 = 0.5$. Daraus folgt für $0 \leq \nu \leq 7$:

$$d(\nu) = 0.5 \cdot e^{-j \cdot (\pi/4) \cdot \nu} + 0.5 \cdot e^{-j \cdot (7\pi/4) \cdot \nu}.$$

Aufgrund der Periodizität gilt aber auch:

$$d(\nu) = 0.5 \cdot e^{-j \cdot (\pi/4) \cdot \nu} + 0.5 \cdot e^{j \cdot (\pi/4) \cdot \nu} = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \nu\right)$$

$$\Rightarrow d(0) = 1, \quad d(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707.$$

Es handelt sich also um das zeitdiskrete Äquivalent zu

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot f_A \cdot t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_A) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f - f_A),$$

wobei f_A die kleinste in der DFT darstellbare Frequenz bezeichnet.

c) Gegenüber der Teilaufgabe b) ist nun die Frequenz doppelt so groß, nämlich $2 \cdot f_A$ anstelle von f_A :

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot (2f_A) \cdot t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f + 2f_A) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f - 2f_A),$$

Damit beschreibt die Folge $\langle d(\nu) \rangle$ zwei Perioden der Cosinusschwingung, und es gilt für $0 \leq \nu \leq 7$:

$$d(\nu) = 0.5 \cdot e^{-j \cdot (\pi/2) \cdot \nu} + 0.5 \cdot e^{j \cdot (\pi/2) \cdot \nu} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \nu\right)$$

$$\Rightarrow d(0) = 1, \quad d(1) = 0.$$

d) Durch eine weitere Verdoppelung der Cosinusfrequenz auf $4f_A$ kommt man schließlich zur zeitkontinuierlichen Fourierkorrespondenz

$$d(\nu) = 0.5 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot \nu} + 0.5 \cdot e^{j \cdot \pi \cdot \nu} = \cos(\pi \cdot \nu)$$

und damit zu den Zeitkoeffizienten

$$d(0) = d(2) = d(4) = d(6) = 1, \quad d(1) = d(3) = d(5) = d(7) = -1.$$

Zu beachten ist, dass die beiden Diracfunktionen in der zeitdiskreten Darstellung aufgrund der Periodizität zusammenfallen. Das heißt: Die Koeffizienten $D(4) = 0.5$ und $D(-4) = 0.5$ ergeben zusammen $D(4) = 1$.

e) Auch die Diskrete Fouriertransformation ist linear. Deshalb ist das Superpositionsprinzip weiterhin anwendbar. Die Koeffizienten $D(\mu)$ aus Spalte E ergeben sich als die Summen der Spalten A und D. Deshalb wird aus der alternierenden Folge $\langle d(\nu) \rangle$ entsprechend Teilaufgabe d) die um 1 nach oben verschobene Folge:

$$d(0) = d(2) = d(4) = d(6) = 2, \quad d(1) = d(3) = d(5) = d(7) = 0.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.2

a) Aus der Grafik ergeben sich mit $A = 4\text{V}$ folgende Werte:

$$d(0) = 4\text{V}, d(1) = d(7) = 3\text{V}, d(2) = d(6) = 2\text{V}, d(3) = d(5) = 1\text{V}, d(4) = 0.$$

b) Entsprechend der Grafik gilt $T_A = T/4$. Mit $T = 1\text{ms}$ erhält man somit $T_A = 0.25\text{ms}$.

c) Der Zusammenhang zwischen den Abständen der Abtastwerte im Zeit- und Frequenzbereich lautet:

$$N \cdot f_A \cdot T_A = 1 \Rightarrow f_A = \frac{1}{8 \cdot 0.25\text{ms}} = 0.5\text{kHz}.$$

d) Mit $N = 8$ und $\mu = 0$ folgt aus der DFT-Gleichung

$$D(0) = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\nu=0}^7 d(\nu) = \frac{1\text{V}}{8} \cdot (4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 3) = 2\text{V}.$$

Der DFT-Wert $D(0)$ beschreibt den Spektralwert bei $f = 0$, wobei folgender Zusammenhang gilt:

$$X(f = 0) = \frac{D(0)}{f_A} = \frac{2\text{V}}{0.5\text{kHz}} = 4 \cdot 10^{-3}\text{V/Hz}.$$

Dieser Wert stimmt mit dem theoretischen Wert $A \cdot T$ überein.

e) Mit $N = 8$ und $\mu = 2$ erhält man:

$$\begin{aligned} D(2) &= \frac{1}{8} \cdot \sum_{\nu=0}^7 d(\nu) \cdot e^{-j \cdot (\pi/2) \cdot \nu} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\nu=0}^7 d(\nu) \cdot (-j)^\nu = \\ &= \frac{1\text{V}}{8} \cdot (4 - 3 \cdot j - 2 + j - j - 2 + 3 \cdot j) = 0. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hätte man auch ohne Rechnung vorhersagen können. Die DFT-Koeffizienten $D(\mu)$ sind gleichzeitig die Fourierkoeffizienten der im Abstand $T_P = 2T$ periodifizierten Funktion $x_{\text{per}}(t)$. Diese ist in der Grafik auf der Angabenseite gestrichelt eingezeichnet. Aufgrund von Symmetrieeigenschaften sind aber alle geradzahigen Fourierkoeffizienten gleich 0. Das heißt: Auch $D(4)$ und $D(6)$ sind hier 0.

f) Der Koeffizient $D(7)$ beschreibt die periodifizierte Spektralfunktion bei der Frequenz $f = 7 \cdot f_A$. Aufgrund der Periodizität und von Symmetrieeigenschaft gilt:

$$D(7) = D(-1) = D^*(1).$$

Vorzugsweise berechnen wir diesen DFT-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} D(1) &= \frac{1}{8} \cdot \sum_{\nu=0}^7 d(\nu) \cdot e^{-j \cdot (\pi/4) \cdot \nu} = \frac{1\text{V}}{8} \cdot \\ &\cdot \left(4 + 3 \cdot \frac{1-j}{\sqrt{2}} - 2 \cdot j + \frac{-1-j}{\sqrt{2}} - j + \frac{-1+j}{\sqrt{2}} - j + 2 \cdot j + 3 \cdot \frac{1-j}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \approx 0.854\text{V}. \end{aligned}$$

Da $D(1)$ rein reell ist, gilt $D(7) = D(1) = 0.854\text{V}$. Daraus ergeben sich für die zugehörigen Werte der

kontinuierlichen Spektralfunktion:

$$X(f = -f_A) = X(f = +f_A) = \frac{D(1)}{f_A} = 1.708 \cdot 10^{-3} \text{ V/Hz}.$$

Aufgrund der impliziten periodischen Fortsetzung durch die DFT stimmt dieser mit dem tatsächlichen Wert $4 \cdot A \cdot T/\pi^2 = 1.621 \cdot 10^{-3} \text{ V/Hz}$ nicht exakt überein. Der relative Fehler beträgt somit ca. 5.3%.

Musterlösung zur Aufgabe A5.3

a) Mit den Parametern $N = 512$ und $f_A \cdot T = 1/8$ folgt nach Multiplikation $f_p \cdot T = 64$. Dadurch wird der Frequenzbereich $-f_p/2 \leq f < f_p/2$ erfasst:

$$f_{\max} \cdot T = 32.$$

b) Die Periodifizierung der Zeitfunktion basiert auf dem Parameter $T_p = 1/f_A = 8T$. Der Abstand zweier Abtastwerte beträgt somit

$$T_A/T = \frac{T_p/T}{N} = \frac{8}{512} = 0.015625.$$

c) Mit dieser Maßnahme wird gleichzeitig T_p von $8T$ auf $4T$ halbiert. Berücksichtigt werden somit nur noch Abtastwerte im Bereich $-2T \leq t < 2T$, was zu einer (geringfügigen) Erhöhung des Abbruchfehlers führt. Der mittlere quadratische Fehler (MQF) steigt dadurch beim Gaußimpuls $x_1(t)$ von $0.15 \cdot 10^{-15}$ auf $8 \cdot 10^{-15}$, obwohl der Aliasingfehler durch diese Maßnahme geringfügig vermindert wird.

d) Durch die Halbierung von f_A wird auch f_p halbiert. Dadurch erhöht sich der Aliasingfehler bei gleichzeitig kleinerem Abbruchfehler. Insgesamt steigt beim Gaußimpuls $x_1(t)$ MQF von $1.5 \cdot 10^{-16}$ auf $3.3 \cdot 10^{-16}$.

e) Wie aus der Grafik zu ersehen ist, trifft die letzte Aussage nicht zu im Gegensatz zu den ersten beiden. Aufgrund des langsamen, si-förmigen Abfalls der Spektralfunktion dominiert der Aliasingfehler. Der MQF-Wert ist bei $f_A \cdot T = 1/8$ mit $1.4 \cdot 10^{-5}$ deutlich größer als beim Gaußimpuls ($1.5 \cdot 10^{-16}$).

f) Die Spektralfunktion $X_3(f)$ hat einen rechteckförmigen Verlauf, so dass die beiden ersten Aussagen nicht zutreffen. Dagegen lässt sich bei dieser si-förmigen Zeitfunktion ein Abbruchfehler nicht vermeiden, der zu den angegebenen großen MQF-Werten führt.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.3

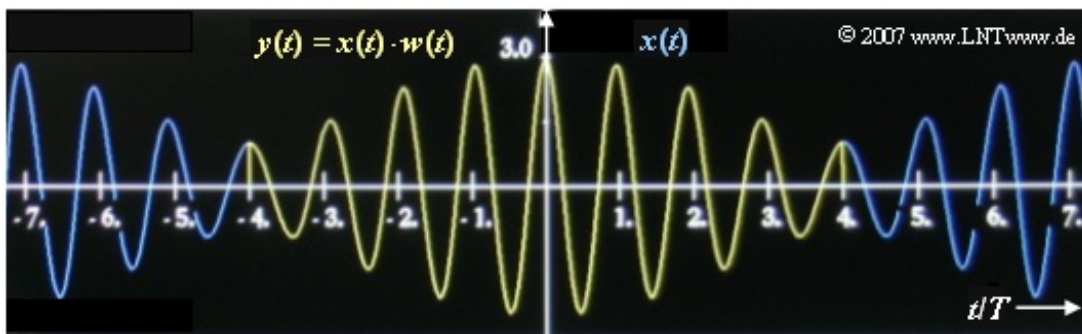
- a)** Bereits mit $N = 128$ ist $T_p = 1.28 T$, also größer als die Breite des Rechtecks. Somit spielt hier der Abbruchfehler überhaupt keine Rolle. Der MQF-Wert wird allein durch den Aliasingfehler bestimmt. Die Zahlenwerte bestätigen, dass MQF (nahezu) unabhängig von N ist.
- b)** Aus $T_A/T = 0.01$ folgt $f_p \cdot T = 100$. Alle Stützwerte von $X(f)$ liegen im Bereich $-50 \leq f \cdot T < 50$. Für den Abstand zweier Abtastwerte im Frequenzbereich gilt $f_A = f_p/N$. Daraus ergibt sich $f_A \cdot T \approx 0.781$ (für $N = 128$) bzw. $f_A \cdot T \approx 0.196$ (für $N = 512$).
- c)** Die erste Aussage ist zutreffend. Für $N = 128$ ergibt sich für das Produkt $\text{MQF} \cdot f_A \approx 4.7 \cdot 10^{-6}/T$, für $N = 512$ dagegen ein um den Faktor 4 kleinerer Wert. Durch „Zero-Padding“ wird keine größere Genauigkeit der DFT erzielt, dafür aber eine feinere „Auflösung“ des Frequenzbereichs. Das Produkt $\text{MQF} \cdot f_A$ berücksichtigt diese Tatsache; es sollte stets möglichst klein sein.
- d)** Wegen $T_A \cdot f_A \cdot N = 1$ ergibt sich bei konstantem N ein kleinerer f_A -Wert, wenn man T_A vergrößert. Aus der Tabelle auf der Angabenseite erkennt man, dass damit der mittlere quadratische Fehler MQF signifikant (um den Faktor 400) vergrößert wird. Dieser Effekt ist auf die Zunahme des Aliasingfehlers zurückzuführen, da durch den Übergang von $T_A/T = 0.01$ auf $T_A/T = 0.05$ die Frequenzperiode um den Faktor 5 kleiner wird. Dagegen spielt der Abbruchfehler beim Rechteckimpuls weiterhin keine Rolle, solange $T_p = N \cdot T_A$ größer ist als die Impulsdauer T .
- e)** Alle Aussagen treffen zu. Mit den Parameterwerten $N = 64$ und $T_A/T = 0.01$ tritt ein extrem großer Abbruchfehler auf. Alle Zeitkoeffizienten sind hier 1, so dass die DFT fälschlicherweise ein Gleichsignal anstelle der Rechteckfunktion interpretiert.

Musterlösung zur Aufgabe A5.4

a) Bei Verwendung des Hanning-Fensters müssten zunächst 3 Diracfunktionen zu erkennen sein, auch wenn $x(t)$ nur eine Frequenz beinhaltet \Rightarrow es wurde das Rechteckfenster verwendet.

Mit $T_P = 4$ ms ergibt sich für die Frequenzauflösung $f_A = 1/T_P = 0.25$ kHz. Damit liegt die Frequenz f_2 nicht im vorgegebenen Raster und $Y(f)$ würde sich aus sehr vielen Diraclinien zusammensetzen. Das heißt: die dritte Aussage ist falsch.

Wie aus der nachfolgenden Grafik hervorgeht, hat $x(t)$ die Periodendauer $T_0 = 8$ ms. Wählt man den DFT-Parameter gleich $T_P = 8$ ms (oder ein ganzzahliges Vielfaches davon), so stimmt die periodische Fortsetzung $P\{x(t)\}$ im Intervall $|t| \leq T_P/2$ mit $x(t)$ überein, so dass sich die Gewichtungsfunktion $w(t)$ nicht störend auswirkt: Das DFT-Spektrum $Y(f)$ stimmt somit mit dem tatsächlichen Spektrum überein.



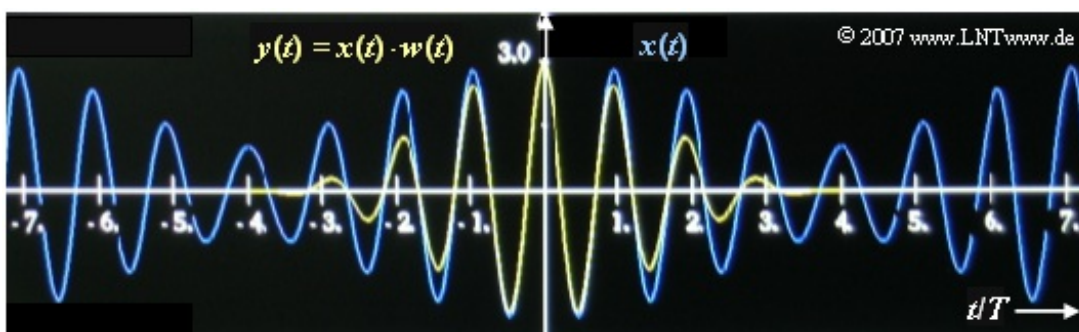
b) Wegen $T_P = 8$ ms setzt sich das Hanning-Spektrum $W(f)$ aus drei Diracfunktionen bei positiven Frequenzen und drei dazu achsensymmetrischen Diracs bei negativen Frequenzen zusammen. Für die positiven Frequenzen lautet die Spektralfunktion:

$$W(f) = 0.5 \cdot \delta(f) + 0.25 \cdot \delta(f - f_A) + 0.25 \cdot \delta(f + f_A).$$

Das Ausgangsspektrum ergibt sich aus der Faltung zwischen $X(f)$ und $W(f)$. Bei positiven Frequenzen ergeben sich nun vier Diracs mit folgenden Gewichten:

$$\begin{aligned} G(f = 0.875 \text{ kHz}) &= 1 \text{ V} \cdot 0.25 = 0.250 \text{ V}, \\ G(f = f_1 = 1.000 \text{ kHz}) &= 1 \text{ V} \cdot 0.5 + 0.5 \text{ V} \cdot 0.25 = 0.625 \text{ V}, \\ G(f = f_2 = 1.125 \text{ kHz}) &= 1 \text{ V} \cdot 0.25 + 0.5 \text{ V} \cdot 0.5 = 0.500 \text{ V}, \\ G(f = 1.250 \text{ kHz}) &= 0.5 \text{ V} \cdot 0.25 = 0.125 \text{ V}. \end{aligned}$$

Aus der folgenden Grafik erkennt man die Abschwächung der Ränder durch die Gewichtungsfunktion $w(t)$ des Hanning-Fensters.



c) Das Rechteck-Fenster liefert dann ein sehr stark verfälschtes Ergebnis, wenn die Fensterbreite T_P

(wie hier) nicht an die Frequenz des Cosinussignals angepasst ist. In diesem Fall ist das Hanning-Fenster besser geeignet. Daraus folgt: Richtig ist der zweite Lösungsvorschlag.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.4

a) Nach einfacher trigonometrischer Umformung ergibt sich für die zeitkontinuierliche Fensterfunktion:

$$w(t) = \cos^2\left(\pi \cdot \frac{t}{T_P}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T_P}\right).$$

Nach der Zeitdiskretisierung mit $\nu = t/T_A$ und $T_P/T_A = N = 32$ erhält man für das zeitdiskrete Fenster:

$$\begin{aligned} w(\nu) = w(\nu \cdot T_A) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{\nu}{N}\right) \\ \Rightarrow w(\nu = 0) &= 1.000, \\ w(\nu = 1) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = 0.990, \\ w(\nu = -8) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0.500. \end{aligned}$$

b) Die periodische Fortsetzung von $w(t)$ entsprechend der Periodendauer T_P liefert ein (periodisches) Signal mit einem Gleich- und einem Cosinusanteil. Daraus folgt mit $f_A = 1/T_P$:

$$P\{w(t)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot f_A \cdot t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad 0.5 \cdot \delta(f) + 0.25 \cdot \delta(f \pm f_A).$$

Das zeitbegrenzte Signal $w(t)$ ergibt sich aus $P\{w(t)\}$ durch Multiplikation mit einer Rechteckfunktion der Amplitude 1 und der Dauer T_P . Dessen Spektrum $W(f)$ erhält man somit aus der Faltung der obigen Spektralfunktion mit der Funktion $T_P \cdot \text{si}(\pi f T_P) = 1/f_A \cdot \text{si}(\pi \cdot f/f_A)$:

$$w(t) \circ \longrightarrow \bullet \quad W(f) = \frac{0.5}{f_A} \cdot \text{si}\left(\frac{\pi f}{f_A}\right) + \frac{0.25}{f_A} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{f - f_A}{f_A}\right) + \frac{0.25}{f_A} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{f + f_A}{f_A}\right).$$

Diese Spektralfunktion ist gerade und für alle Frequenzen f auch reell. Der Spektralwert bei der Frequenz $f = 0$ ergibt die Fensterfläche:

$$W(f = 0) = \frac{0.5}{f_A} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) dt.$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2 und 3.

c) Das Ergebnis aus b) zeigt weiter, dass $W(f = \pm f_A) = W(0)/2$ ist. Aufgrund des monotonen Verlaufs im Bereich $|f| < f_A$ ist die Betragsfunktion $|W(f)|$ genau bei $\pm f_A$ zum ersten Mal auf die Hälfte des Maximums abgefallen. Damit gilt $B_{\text{6dB}}/f_A = 2$.

d) Der größte Spektralbetrag außerhalb der Hauptkeule tritt bei den Frequenzen $f = \pm 2.5 f_A$ auf. Mit dem Ergebnis aus b) gilt:

$$\begin{aligned} W(f = 2.5 \cdot f_A) &= \frac{0.5}{f_A} \cdot \text{si}(2.5\pi) + \frac{0.25}{f_A} \cdot \text{si}(1.5\pi) + \frac{0.25}{f_A} \cdot \text{si}(3.5\pi) = \\ &= \frac{0.25}{\pi \cdot f_A} \left[\frac{2}{2.5} - \frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5} \right] \approx -\frac{0.0121}{f_A}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für den minimalen Abstand zwischen Hauptkeule und Seitenkeulen:

$$A_{H/S} = 20 \cdot \lg \frac{|W(0)|}{|W(2.5 \cdot f_A)|} = 20 \cdot \lg \frac{0.5}{0.0121} \approx 32.3 \text{ dB}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A5.5

a) Entsprechend der auf dem Angabenblatt gegebenen allgemeinen DFT-Gleichung gilt unter Berücksichtigung der alternierenden Zeitkoeffizienten:

$$\begin{aligned} 8 \cdot D(3) &= w^0 - w^3 + w^6 - w^9 + w^{12} - w^{15} + w^{18} - w^{21} = \\ &= w^0 - w^3 + w^2 - w^1 + w^4 - w^7 + w^6 - w^5. \end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass aufgrund der Periodizität $w^9 = w^1$, $w^{12} = w^4$, $w^{15} = w^7$, $w^{18} = w^2$ und $w^{21} = w^5$ ist. Nach Umsortieren gilt in gleicher Weise

$$\begin{aligned} 8 \cdot D(3) &= (w^0 + w^4) - (w^1 + w^5) + (w^2 + w^6) - (w^3 + w^7) = \\ &= (1 + w + w^2 + w^3) \cdot (w^0 + w^4). \end{aligned}$$

Wegen $w^0 = 1$ und $w^4 = \exp(-j \cdot \pi) = -1$ erhält man somit $D(3) = 0$.

b) In analoger Weise zu a) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} 8 \cdot D(4) &= w^0 - w^4 + w^8 - w^{12} + w^{16} - w^{20} + w^{24} - w^{28} = \\ &= 4 \cdot (w^0 - w^4) = 8 \Rightarrow D(4) = 1. \end{aligned}$$

c) Der Term $w^0 = 1$ muss nicht weiter berücksichtigt werden. Alle Ausgangswerte mit ungeraden Indizes sind somit durch die Subtraktion zweier identischer Eingangswerte gleich 0. Die erste Aussage trifft dagegen nicht zu: Es gilt $X(0) = X(2) = +2$ und $X(4) = X(6) = -2$.

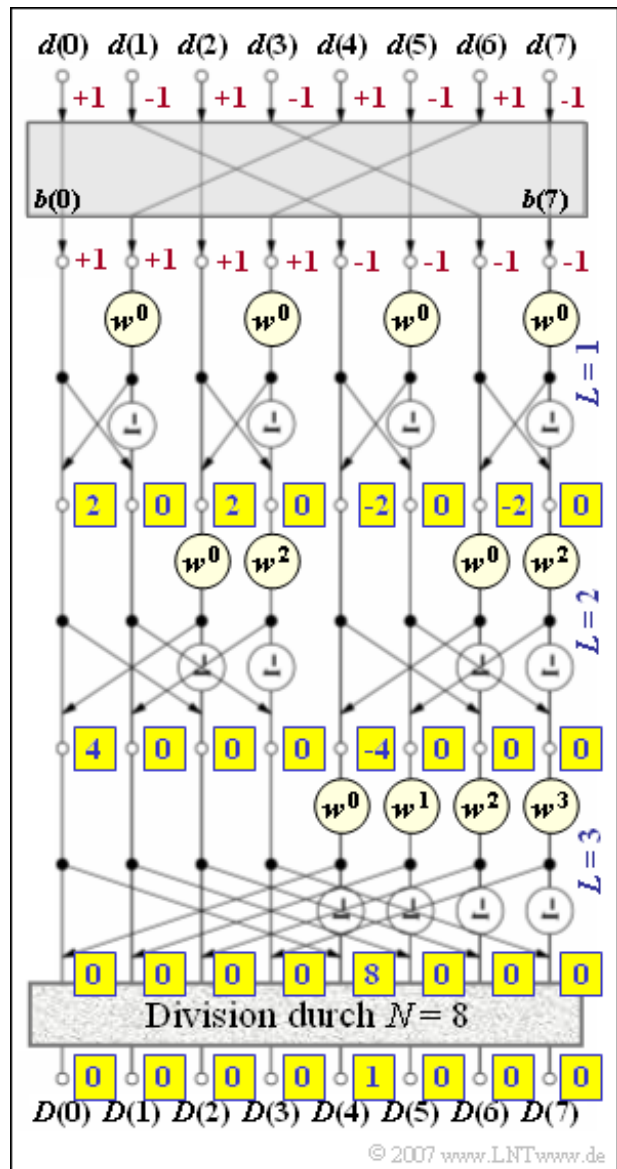
d) Auf die Multiplikation mit $w^2 = -j$ kann verzichtet werden, da im Signalflussplan die entsprechenden Eingangsgrößen 0 sind. Man erhält somit $Y(0) = 4$ und $Y(4) = -4$. Alle anderen Werte ergeben sich zu 0.

e) Wegen $Y(5) = Y(6) = Y(7) = 0$ spielen auch in der dritten Stufe die Multiplikationen mit w , w^2 und w^3 keine Rolle. Alle Spektralkoeffizienten $D(\mu)$ ergeben sich zu 0 mit Ausnahme von

$$D(4) = \frac{1}{N} \cdot (Y(0) - Y(4)) = 1.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit den Ergebnissen aus a) und b) überein.

f) Nachdem sowohl die Zeitkoeffizienten $d(v)$ als auch alle Spektralkoeffizienten $D(\mu)$ rein reell sind, besteht kein Unterschied zwischen der FFT und der IFFT. Das bedeutet gleichzeitig: die Eingangs- und Ausgangswerte können vertauscht werden.



Die Teilaufgabe e) hat das folgende Ergebnis geliefert:

$$d(\text{gerades } \nu) = +1, \quad d(\text{ungerades } \nu) = -1 \quad \Rightarrow \quad D(\mu = 4) = 1, \quad D(\mu \neq 4) = 0.$$

Durch Vertauschen der Eingangs- und Ausgangswerte kommt man zur Aufgabenstellung von (f):

$$d(\nu = 4) = 1, \quad d(\nu \neq 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad D(\text{gerades } \mu) = +1, \quad D(\text{ungerades } \mu) = -1.$$

Insbesondere würde sich $D(3) = -1$ und $D(4) = +1$ ergeben.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.5

a) Jede komplexe Addition erfordert zwei reelle Additionen:

$$(R_1 + j \cdot I_1) + (R_2 + j \cdot I_2) = (R_1 + R_2) + j \cdot (I_1 + I_2) \Rightarrow A_A = 2.$$

b) Jede komplexe Multiplikation erfordert vier reelle Multiplikationen und zwei reelle Additionen:

$$(R_1 + j \cdot I_1)(R_2 + j \cdot I_2) = (R_1 \cdot R_2 - I_1 \cdot I_2) + j \cdot (R_1 \cdot I_2 + R_2 \cdot I_1) \\ \Rightarrow A_M = 2, \quad M_M = 4.$$

c) Die Basisoperationen lauten mit den komplexen Eingangsgrößen E_1 , E_2 und w^μ :

$$A_1 = E_1 + E_2 \cdot w^\mu, \\ A_2 = E_1 - E_2 \cdot w^\mu.$$

Dies bedeutet eine komplexe Multiplikation und zwei komplexe Additionen:

$$a_B = 2, \quad m_B = 1.$$

d) Im Gegensatz zu den Computern in der Anfangszeit nimmt heute eine Multiplikation keine wesentlich größere Rechenzeit in Anspruch als eine Addition bzw. Subtraktion. Mit den Ergebnissen aus a), b) und c) erhält man für die Gesamtzahl der Rechenoperationen:

$$O_B = a_B \cdot A_A + a_B \cdot (A_M + M_M) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10.$$

e) Insgesamt gibt es $\lg N$ Stufen, in denen jeweils $N/2$ Basisoperationen auszuführen sind:

$$O_{\text{FFT}} = \lg N \cdot \frac{N}{2} \cdot O_B = 5 \cdot N \cdot \lg N \\ \Rightarrow O_{\text{FFT}}(N = 16) = 5 \cdot 16 \cdot 4 = 320, \\ O_{\text{FFT}}(N = 1024) = 5 \cdot 1024 \cdot 10 = 51200.$$

f) Der Rechenzeitgewinn der FFT gegenüber der herkömmlichen DFT ergibt sich zu:

$$G_{\text{FFT}} = \frac{O_{\text{DFT}}}{O_{\text{FFT}}} = \frac{8 \cdot N^2}{5 \cdot N \cdot \lg N} = 1.6 \cdot \frac{N}{\lg N} \\ \Rightarrow G_{\text{FFT}}(N = 16) = 1.6 \cdot \frac{16}{4} = 6.4, \\ G_{\text{FFT}}(N = 1024) = 1.6 \cdot \frac{1024}{10} \approx 164.$$