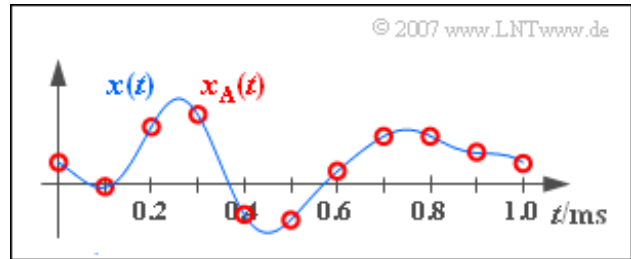


A5.1: Abtasttheorem

Gegeben ist ein Analogsignal $x(t)$ entsprechend der Skizze. Bekannt ist, dass dieses Signal keine höheren Frequenzen als $B_{\text{NF}} = 4 \text{ kHz}$ beinhaltet. Durch die Abtastung mit der Abtastrate f_A erhält man das in der Grafik rot eingezeichnete Signal $x_A(t)$.



Zur Signalrekonstruktion wird ein Tiefpass mit dem Frequenzgang

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < f_1, \\ 0 & \text{für } |f| > f_2 \end{cases}$$

eingesetzt. Der Bereich zwischen den Frequenzen f_1 und $f_2 > f_1$ ist für die Lösung dieser Aufgabe nicht relevant.

Die Eckfrequenzen f_1 und f_2 sind so zu bestimmen, dass das Ausgangssignal $y(t)$ des Tiefpasses mit dem Signal $x(t)$ exakt übereinstimmt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.1**. Zu der hier behandelten Thematik gibt es auch ein Interaktionsmodul:

Abtastung periodischer Signale und Signalrekonstruktion (Dateigröße: 124 kB).

Fragebogen zu "A5.1: Abtasttheorem"

a) Ermitteln Sie aus der Grafik die zugrundeliegende Abtastrate.

$$f_A = \quad \text{kHz}$$

b) Bei welchen Frequenzen besitzt $X_A(f)$ mit Sicherheit **keine** Anteile?

- $f = 2.5$ kHz,
- $f = 5.5$ kHz,
- $f = 6.5$ kHz,
- $f = 34.5$ kHz.

c) Wie groß ist die minimale untere Eckfrequenz f_1 , damit die Signalrekonstruktion noch perfekt funktioniert?

$$f_{1, \min} = \quad \text{kHz}$$

d) Wie groß ist die maximale obere Eckfrequenz f_2 , damit die Signalrekonstruktion noch perfekt funktioniert?

$$f_{2, \max} = \quad \text{kHz}$$

Z5.1: Zeitdiskrete Harmonische

Wir betrachten drei harmonische Schwingungen, alle mit gleicher Frequenz und gleicher Amplitude:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t), \\x_2(t) &= A \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t), \\x_3(t) &= A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t - 60^\circ).\end{aligned}$$

Die Parameter f_0 und A können der Grafik entnommen werden.

Es wird angenommen, dass ein solches Signal $x(t)$ zu den Zeitpunkten $\nu \cdot T_A$ abgetastet wird, wobei hier speziell die Werte $T_A = 80 \mu\text{s}$ und $T_A = 100 \mu\text{s}$ analysiert werden sollen. Das abgetastete Signal $x_A(t)$ steht auch beim Empfänger unverfälscht zur Verfügung.

Die Signalrekonstruktion erfolgt durch einen idealen

Tiefpass mit dem Frequenzgang $H(f)$, der aus dem abgetasteten Signal $y_A(t) = x_A(t)$ das Signal $y(t)$ formt:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < f_G, \\ 0.5 & \text{für } |f| = f_G, \\ 0 & \text{für } |f| > f_G, \end{cases}$$

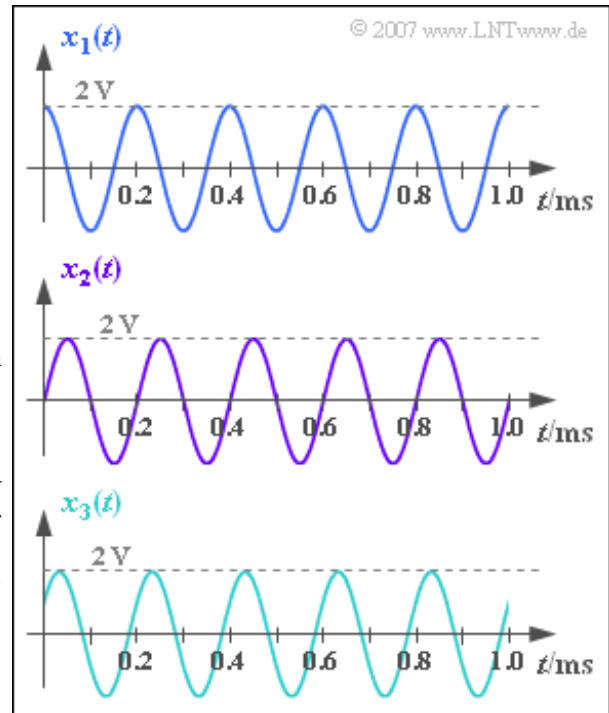
Hierbei gibt f_G die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters an. Für diese soll gelten:

$$f_G = \frac{1}{2 \cdot T_A}.$$

Das Abtasttheorem ist erfüllt, wenn $y(t) = x(t)$ gilt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.1**. Zu der hier behandelten Thematik gibt es auch ein Interaktionsmodul:

Abtastung periodischer Signale und Signalrekonstruktion (124 kB).



Fragebogen zu "Z5.1: Zeitdiskrete Harmonische"

a) Wie groß sind Amplitude und Frequenz der Signale $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$?

$$A = \quad \text{V}$$

$$f_0 = \quad \text{kHz}$$

b) Bei welchen Eingangssignalen ist das Abtasttheorem erfüllt, und es gilt demnach $y(t) = x(t)$, wenn $T_A = 80 \mu\text{s}$ beträgt?

$x_1(t)$,

$x_2(t)$,

$x_3(t)$.

c) Wie lautet das Ausgangssignal $y_1(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi_1)$ mit $T_A = 100 \mu\text{s}$?
Interpretieren Sie das Ergebnis.

$$A_1 = \quad \text{V}$$

$$\varphi_1 = \quad \text{Grad}$$

d) Es gelte weiter $T_A = 100 \mu\text{s}$. Welche Amplitude A_2 besitzt das Ausgangssignal, wenn das Sinussignal $x_2(t)$ anliegt?

$$A_2 = \quad \text{V}$$

e) Welche Amplitude A_3 besitzt das Ausgangssignal, wenn das Signal $x_3(t)$ anliegt?
Es gelte weiterhin $T_A = 100 \mu\text{s}$.

$$A_3 = \quad \text{V}$$

A5.2: DFT oder IDFT?

Bei der Diskreten Fouriertransformation (DFT) werden aus den Zeitabstastwerten $d(\nu)$ mit $\nu = 0, \dots, N - 1$ die diskreten Spektralkoeffizienten $D(\mu)$ mit $\mu = 0, \dots, N - 1$ wie folgt berechnet:

$$D(\mu) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} d(\nu) \cdot w^{\nu \cdot \mu}.$$

Hierbei ist mit w der komplexe Drehfaktor abgekürzt, der folgendermaßen definiert ist:

$$w = e^{-j \cdot 2\pi/N} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right).$$

Entsprechend gilt für die Inverse Diskrete Fouriertransformation (IDFT) als **Umkehrfunktion** der DFT:

$$d(\nu) = \sum_{\mu=0}^{N-1} D(\mu) \cdot w^{-\nu \cdot \mu}.$$

In dieser Aufgabe sollen für verschiedene Beispielfolgen $D(\mu)$ – die in obiger Tabelle mit „A“, „B“, „C“, „D“, „E“ bezeichnet sind – die Zeitkoeffizienten $d(\nu)$ ermittelt werden. Es gilt somit stets $N = 8$.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.2**. Diese können Sie sich auch mit folgendem Interaktionsmodul verdeutlichen:

Diskrete Fouriertransformation (Größe: 279 kB)

	A	B	C	D	E
D(0)	1	0	0	0	1
D(1)	0	0.5	0	0	0
D(2)	0	0	0.5	0	0
D(3)	0	0	0	0	0
D(4)	0	0	0	1	1
D(5)	0	0	0	0	0
D(6)	0	0	0.5	0	0
D(7)	0	0.5	0	0	0

© 2007 www.LNTwww.de

Fragebogen zu "A5.2: DFT oder IDFT?"

a) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(v)$ für die Koeffizienten $D(\mu)$ von Spalte A?

$$D(\mu) \text{ gemäß „A“: } d(0) =$$

$$D(\mu) \text{ gemäß „A“: } d(1) =$$

b) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(v)$ für die Koeffizienten $D(\mu)$ von Spalte B?

$$D(\mu) \text{ gemäß „B“: } d(0) =$$

$$D(\mu) \text{ gemäß „B“: } d(1) =$$

c) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(v)$ für die Koeffizienten $D(\mu)$ von Spalte C?

$$D(\mu) \text{ gemäß „C“: } d(0) =$$

$$D(\mu) \text{ gemäß „C“: } d(1) =$$

d) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(v)$ für die Koeffizienten $D(\mu)$ von Spalte D?

$$D(\mu) \text{ gemäß „D“: } d(0) =$$

$$D(\mu) \text{ gemäß „D“: } d(1) =$$

e) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(v)$ für die Koeffizienten $D(\mu)$ von Spalte E?

$$D(\mu) \text{ gemäß „E“: } d(0) =$$

$$D(\mu) \text{ gemäß „E“: } d(1) =$$

Z5.2: DFT eines Dreieckimpulses

Betrachtet wird ein Dreieckimpuls $x(t)$ mit der Amplitude $A = 4 \text{ V}$ und äquivalenter Impulsdauer $\Delta t = T = 1 \text{ ms}$:

$$x(t) = \begin{cases} A \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) & \text{für } |t| \leq T, \\ 0 & \text{für } |t| > T. \end{cases}$$

Dessen Spektrum $X(f)$ erhält man durch Anwendung der herkömmlichen Fouriertransformation:

$$X(f) = A \cdot T \cdot \text{si}^2(\pi f T).$$

Die Spektralfunktion soll nun durch eine DFT mit $N = 8$ angenähert werden, wobei die N Koeffizienten für den Zeitbereich – $d(0), \dots, d(7)$ – der nebenstehenden Grafik entnommen werden können. Die dazugehörigen Spektralkoeffizienten $D(0), \dots, D(7)$ sind in dieser Aufgabe zu ermitteln. Für $\mu = 0, \dots, N-1$ gilt:

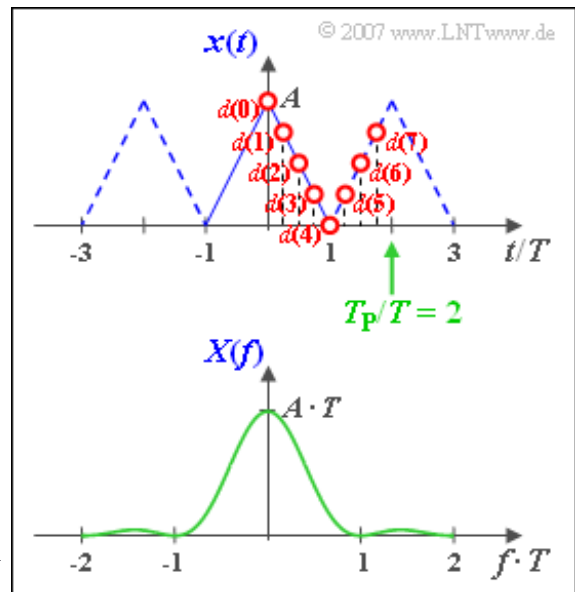
$$D(\mu) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} d(\nu) \cdot w^{\nu \cdot \mu}.$$

Bezeichnet man den Abstand zweier Abtastwerte im Zeitbereich mit T_A und den entsprechenden Frequenzabstand zweier Linien mit f_A , so gilt folgender Zusammenhang:

$$N \cdot f_A \cdot T_A = 1.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.2**. Diese können Sie sich auch mit folgendem Interaktionsmodul verdeutlichen:

Diskrete Fouriertransformation (Größe: 279 kB)



Fragebogen zu "Z5.2: DFT eines Dreieckimpulses"

a) Geben Sie die Zeitkoeffizienten $d(v)$ an. Wie groß sind $d(0)$, $d(3)$ und $d(6)$?

$$d(0) = \quad \text{V}$$

$$d(3) = \quad \text{V}$$

$$d(6) = \quad \text{V}$$

b) Wie groß ist der Abstand T_A zweier Zeitabstastwerte?

$$T_A = \quad \text{ms}$$

c) Wie groß ist der Abstand f_A zweier DFT-Frequenzabstastwerte?

$$f_A = \quad \text{kHz}$$

d) Berechnen Sie den Koeffizienten $D(0)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

$$|D(0)| = \quad \text{V}$$

e) Berechnen Sie den Koeffizienten $D(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis, auch im Hinblick auf die Koeffizienten $D(4)$ und $D(6)$.

$$|D(2)| = \quad \text{V}$$

f) Berechnen Sie den DFT-Koeffizienten $D(7)$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

$$|D(7)| = \quad \text{V}$$

A5.3: Mittlerer quadratischer Fehler

Wir betrachten drei impulsartige Signale, nämlich

- einen **Gaußimpuls** entsprechend

$$x_1(t) = A \cdot e^{-\pi(t/T)^2},$$

- einen **Rechteckimpuls** $x_2(t)$ mit der Amplitude A und der Dauer T ,

$$x_2(t) = \begin{cases} A & \text{für } |t| < T/2, \\ 0 & \text{für } |t| > T/2, \end{cases}$$

- einen **Spaltimpuls** gemäß

$$x_3(t) = A \cdot \text{si}(\pi \cdot t/T), \quad \text{si}(x) = \sin(x)/x.$$

Die Signalparameter seien jeweils $A = 1 \text{ V}$ und $T = 1 \text{ ms}$.

Die herkömmliche, kontinuierliche Fouriertransformation führt zu folgenden Spektralfunktionen:

- $X_1(f)$ ist ebenfalls gaußförmig,
- $X_2(f)$ verläuft entsprechend der si-Funktion,
- $X_3(f)$ ist für $|f| < 1/(2T)$ konstant und außerhalb 0.

Für alle Spektralfunktionen gilt $X(f=0) = A \cdot T$.

Ermittelt man das frequenzdiskrete Spektrum durch die Diskrete Fouriertransformation (DFT) mit den DFT-Parametern $N = 512$ und $f_A \cdot T = 1/4, 1/8$ bzw. $1/16$, so wird dies aufgrund von Abbruch- und/oder Aliasingfehler zu Verfälschungen führen. Hierbei gibt N die Anzahl der berücksichtigten Abtastwerte im Zeit- und Frequenzbereich an und f_A den Stützstellenabstand im Frequenzbereich. Die weiteren DFT-Parameter liegen mit N und f_A eindeutig fest. Für diese gilt:

$$f_P = N \cdot f_A, \quad T_P = 1/f_A, \quad T_A = T_P/N.$$

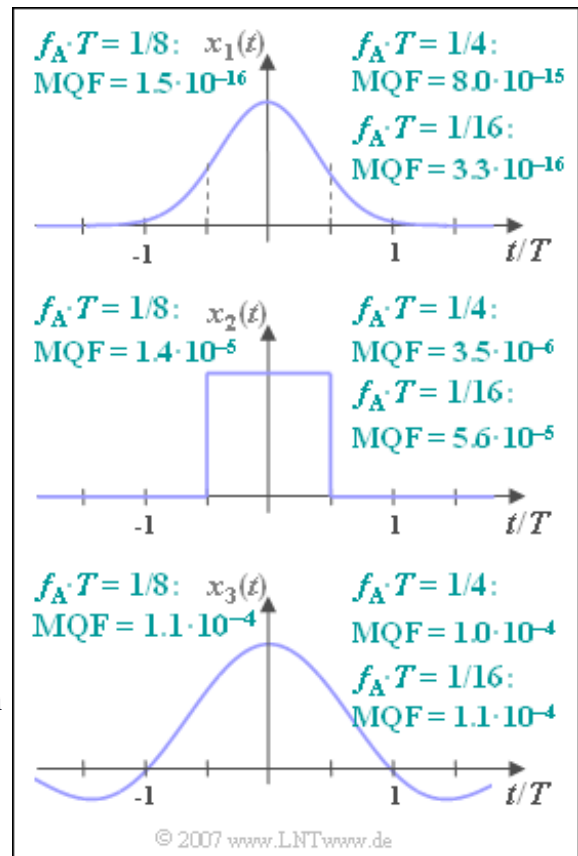
Die Genauigkeit der DFT-Approximation wird durch den mittleren quadratischen Fehler (MQF) erfasst:

$$\text{MQF} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\mu=0}^{N-1} \left| X(\mu \cdot f_A) - \frac{D(\mu)}{f_A} \right|^2.$$

Die sich ergebenden MQF-Werte sind in der Grafik für $N = 512$ sowie für $f_A \cdot T = 1/4, f_A \cdot T = 1/8$ bzw. $f_A \cdot T = 1/16$ angegeben.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.3**. Diese sind auch in folgendem Lehrvideo zusammengefasst:

Fehlermöglichkeiten bei Anwendung der DFT (Größe 1.85 MB, Dauer 7:26)



Fragebogen zu "A5.3: Mittlerer quadratischer Fehler"

a) Welcher Frequenzbereich $|f| \leq f_{\max}$ wird mit $f_A \cdot T = 1/8$ erfasst?

$$f_{\max} \cdot T =$$

b) In welchem Zeitabstand T_A werden die Abtastwerte des Zeitsignals gewonnen?

$$T_A/T =$$

c) Aufgrund welchen Effekts ergibt sich ein größerer MQF-Wert, wenn man nun $f_A \cdot T = 1/4$ anstelle von $f_A \cdot T = 1/8$ verwendet?

- Der Abbruchfehler wird vergrößert.
- Der Aliasingfehler wird vergrößert.

d) Aufgrund welchen Effekts ergibt sich ein größerer MQF-Wert, wenn dagegen $f_A \cdot T = 1/16$ anstelle von $f_A \cdot T = 1/8$ verwendet wird?

- Der Abbruchfehler wird vergrößert.
- Der Aliasingfehler wird vergrößert.

e) Interpretieren Sie die angegebenen MQF-Werte für den Rechteckimpuls $x_2(t)$. Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu?

- Es ergibt sich ein größerer MQF-Wert, da $X_2(f)$ asymptotisch langsamer abfällt als $X_1(f)$.
- Es dominiert der Aliasingfehler.
- Es dominiert der Abbruchfehler.

f) Interpretieren Sie die angegebenen MQF-Werte für den Spaltimpuls $x_3(t)$ im Vergleich zum Gaußimpuls. Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu?

- Es ergibt sich ein größerer MQF-Wert, da $X_3(f)$ asymptotisch langsamer abfällt als $X_1(f)$.
- Es dominiert der Aliasingfehler.
- Es dominiert der Abbruchfehler.

Z5.3: Zero-Padding

In dieser Aufgabe betrachten wir die DFT eines Rechteckimpulses $x(t)$ der Höhe 1 und der Dauer T . Damit hat die Spektralfunktion $X(f)$ einen $\text{sinc}(f)/f$ -förmigen Verlauf.

Für diesen Sonderfall soll der Einfluss des DFT-Parameters N analysiert werden, wobei der Stützstellenabstand im Zeitbereich jeweils $T_A = T/100$ bzw. $T_A = T/20$ betragen soll. Nebenstehend sind für unterschiedliche Werte von N die sich ergebenden Werte für den mittleren quadratischen Fehler der Stützwerte im Frequenzbereich angegeben:

$$\text{MQF} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\mu=0}^{N-1} \left| X(\mu \cdot f_A) - \frac{D(\mu)}{f_A} \right|^2.$$

T_A/T	N	MQF
0.01	64	$\approx 1.2 \cdot 10^{-2}$
0.01	128	$\approx 6.0 \cdot 10^{-6}$
0.01	256	$\approx 6.0 \cdot 10^{-6}$
0.01	512	$\approx 6.0 \cdot 10^{-6}$
0.05	64	$\approx 1.5 \cdot 10^{-4}$
0.05	128	$\approx 1.5 \cdot 10^{-4}$
0.05	256	$\approx 1.5 \cdot 10^{-4}$
0.05	512	$\approx 1.5 \cdot 10^{-4}$

© 2007 www.LNTwww.de

Für $T_A/T = 0.01$ sind somit stets 101 der DFT-Koeffizienten $d(\nu)$ von 0 verschieden. Davon besitzen 99 den Wert 1 und die beiden Randkoeffizienten sind jeweils gleich 0.5. Vergrößert man N , so wird das DFT-Koeffizientenfeld nur mit Nullen aufgefüllt. Man spricht von „**Zero-Padding**“.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.3**. Diese sind auch in folgendem Lehrvideo zusammengefasst:

Fehlermöglichkeiten bei Anwendung der DFT (Größe 1.85 MB, Dauer 7:26)

Fragebogen zu "Z5.3: Zero-Padding"

a) Welche Aussagen können aus den angegebenen MQF-Werten für $T_A/T = 0.01$ und $N \geq 128$ abgeleitet werden?

- Der MQF-Wert ist hier nahezu unabhängig von N .
- Der MQF-Wert wird durch den Abbruchfehler bestimmt.
- Der MQF-Wert wird durch den Aliasingfehler bestimmt.

b) Wie groß ist der Abstand f_A benachbarter Abtastwerte im Frequenzbereich für $N = 128$ und $N = 512$?

$$N = 128 : f_A \cdot T =$$

$$N = 512 : f_A \cdot T =$$

c) Welche Aussagen erlaubt das Produkt $\text{MQF} \cdot f_A$ hinsichtlich DFT-Qualität?

- Dieses berücksichtigt Genauigkeit und Dichte der DFT-Werte.
- $\text{MQF} \cdot f_A$ sollte möglichst groß sein.

d) Es sei N konstant gleich 128. Welche Aussagen gelten für den Vergleich der DFT-Ergebnisse mit $T_A/T = 0.01$ und $T_A/T = 0.05$?

- Mit $T_A/T = 0.05$ erhält man eine feinere Frequenzauflösung.
- Mit $T_A/T = 0.05$ ist der MQF-Wert kleiner.
- Mit $T_A/T = 0.05$ nimmt der Einfluss des Abbruchfehlers ab.
- Mit $T_A/T = 0.05$ wächst der Einfluss des Aliasingfehlers.

e) Welche Aussagen treffen dagegen für den Vergleich der DFT-Ergebnisse mit $T_A/T = 0.01$ und $T_A/T = 0.05$ bei $N = 64$ zu?

- Mit $T_A/T = 0.05$ erhält man eine feinere Frequenzauflösung.
- Mit $T_A/T = 0.05$ ist der MQF-Wert kleiner.
- Mit $T_A/T = 0.05$ nimmt der Einfluss des Abbruchfehlers ab.
- Mit $T_A/T = 0.05$ wächst der Einfluss des Aliasingfehlers.

A5.4: Spektralanalyse

Gegeben sei der prinzipielle Verlauf eines periodischen Signals. Unbekannt sind die Parameter A_1, f_1, A_2 und f_2 :

$$x(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + A_2 \cdot \cos(2\pi \cdot f_2 \cdot t).$$

Nach Gewichtung dieses Signals mit der Fensterfunktion $w(t)$ wird das Produkt $y(t) = x(t) \cdot w(t)$ einer Diskreten Fouriertransformation (DFT) mit den DFT-Parametern $N = 512$ und T_P unterworfen. Die Zeitdauer T_P des analysierten Signalausschnitts kann vom Benutzer beliebig eingestellt werden.

Für die Fensterung stehen zwei Funktionen zur Verfügung, die jeweils für $|t| > T_P/2$ identisch 0 sind:

- das **Rechteckfenster**:

$$w(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{für } -N/2 \leq \nu < N/2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{1}{f_A} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{f}{f_A}\right),$$

- das **Hanning-Fenster**:

$$w(\nu) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{\nu}{N}\right) & \text{für } -N/2 \leq \nu < N/2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{0.5}{f_A} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{f}{f_A}\right) + \frac{0.25}{f_A} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{f - f_A}{f_A}\right) + \frac{0.25}{f_A} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{f + f_A}{f_A}\right).$$

Beachten Sie, dass die Frequenzauflösung f_A gleich dem Kehrwert des einstellbaren DFT-Parameters T_P ist. $W(f)$ ist die Fouriertransformierte der zeitkontinuierlichen Fensterfunktion $w(t)$, während die oben angegebene Funktion $w(\nu)$ die zeitdiskrete Gewichtungsfunktion angibt.

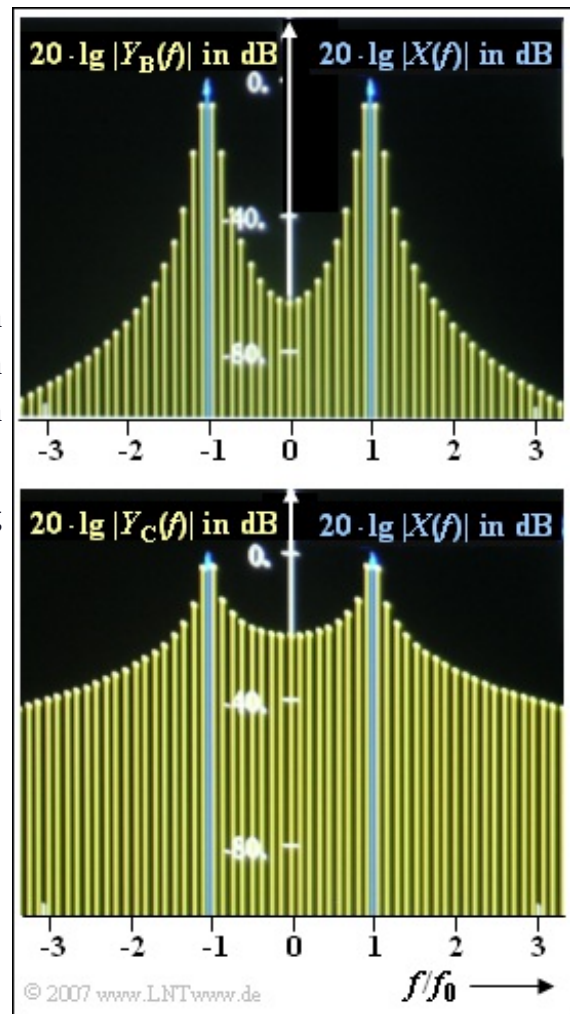
Im Laufe der Aufgabe wird auf verschiedene Spektralfunktionen $Y(f)$ Bezug genommen, zum Beispiel auf

$$Y_A(f) = 1 \text{ V} \cdot \delta(f \pm 1 \text{ kHz}) + 0.5 \text{ V} \cdot \delta(f \pm 1.125 \text{ kHz}).$$

In obiger Grafik sind zwei weitere Spektralfunktionen $Y_B(f)$ und $Y_C(f)$ abgebildet, die sich ergeben, wenn ein 1 kHz-Signal mittels DFT analysiert wird und der DFT-Parameter $T_P = 8.5 \text{ ms}$ ungünstig gewählt ist.

Für eines der Bilder ist das Rechteckfenster zugrundegelegt, für das andere das Hanning-Fenster. Nicht angegeben wird, welche Spektralfunktion zu welchem Fenster gehört.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 5.4**.



Fragebogen zu "A5.4: Spektralanalyse"

a) Welche der folgenden Aussagen treffen mit Sicherheit zu, wenn die DFT das Ausgangsspektrum $Y_A(f)$ anzeigt?

- Zur Gewichtung wurde das Rechteckfenster verwendet.
- Zur Gewichtung wurde das Hanning-Fenster verwendet.
- Es wurde der DFT-Parameter $T_P = 4$ ms verwendet.
- Das DFT-Spektrum $Y_A(f)$ stimmt mit dem Spektrum $X(f)$ überein.

b) Wie lautet $Y(f)$ bei Verwendung des Hanning-Fensters und $T_P = 8$ ms, wenn das Eingangsspektrum $X(f) = Y_A(f)$ anliegt? Geben Sie die Gewichte der Diraclinien bei $f_1 = 1$ kHz und $f_2 = 1.125$ kHz an.

$$G(f_1 = 1 \text{ kHz}) = \quad \quad \quad \text{V}$$

$$G(f_2 = 1.125 \text{ kHz}) = \quad \quad \quad \text{V}$$

c) Wir betrachten das 1 kHz-Cosinussignal $x(t)$. Welches Spektrum – $Y_B(f)$ oder $Y_C(f)$ – ergibt sich mit dem Rechteck- bzw. dem Hanning-Fenster, wenn der DFT-Parameter $T_P = 8.5$ ms ungünstig gewählt ist?

- $Y_B(f)$ ergibt sich bei Rechteckfensterung.
- $Y_B(f)$ ergibt sich mit dem Hanning-Fenster.

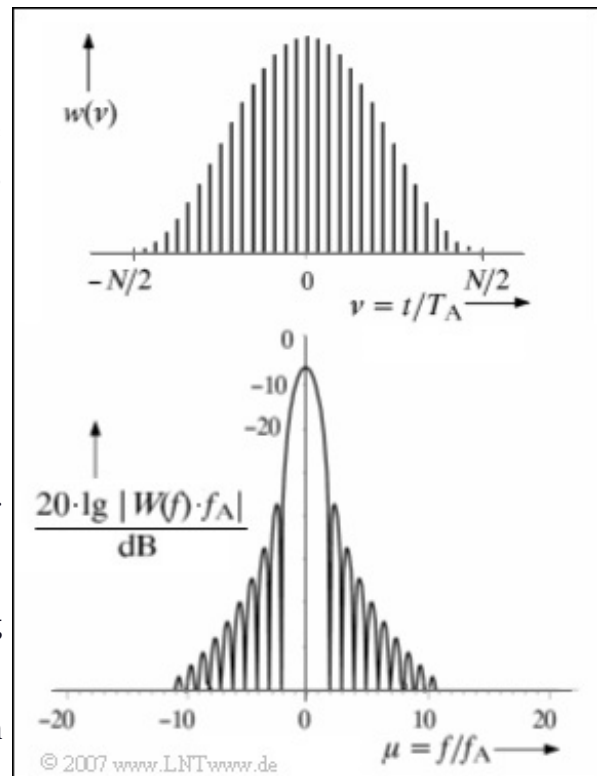
Z5.4: Zum Hanning-Fenster

In dieser Aufgabe sollen wichtige Eigenschaften des oft verwendeten Hanning-Fensters hergeleitet werden. Die zeitkontinuierliche Darstellung im Intervall von $-T_P/2$ bis $+T_P/2$ lautet hier wie folgt:

$$\begin{aligned} w(t) &= \cos^2\left(\pi \cdot \frac{t}{T_P}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T_P}\right)\right). \end{aligned}$$

Außerhalb des symmetrischen Zeitbereichs der Dauer $T_P = 0.5 \text{ ms}$ ist $w(t)$ identisch 0.

Die obere Grafik zeigt die zeitdiskrete Zeitdarstellung $w(v) = w(v \cdot T_A)$, wobei T_A um den Faktor $N = 32$ kleiner ist als T_P . Der Definitionsbereich der diskreten Zeitvariablen v reicht von -16 bis $+15$.



In der unteren Grafik ist die Fouriertransformierte $W(f)$ der zeitkontinuierlichen Fensterfunktion $w(t)$ nach einer geeigneten Normierung logarithmisch dargestellt, wobei die frequenzkontinuierliche Abszisse in der Grafik auf $f_A = 1/T_P$ normiert ist. Man erkennt:

- Die äquidistanten Werte $W(\mu \cdot f_A)$ sind 0 mit Ausnahme von $\mu = 0$ und $\mu = \pm 1$.
- Die Hauptkeule erstreckt sich somit auf den Frequenzbereich $|f| \leq 2 \cdot f_A$.
- $W(f)$ ist außerhalb der Hauptkeule betragsmäßig am größten für $f = \pm 2.5 \cdot f_A$. Somit gilt hier für den minimalen Abstand zwischen Haupt- und Seitenkeulen:

$$A_{H/S} = 20 \cdot \lg \frac{|W(0)|}{|W(2.5 \cdot f_A)|} \quad (\text{in dB}).$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 5.4**.

Fragebogen zu "Z5.4: Zum Hanning-Fenster"

a) Geben Sie die zeitdiskreten Koeffizienten $w(v)$ des Hanning-Fensters analytisch an. Welche Zahlenwerte ergeben sich $v = 0$, $v = 1$ und $v = -8$?

$$w(v = 0) =$$

$$w(v = 1) =$$

$$w(v = -8) =$$

b) Berechnen Sie die Spektralfunktion $W(f)$ allgemein. Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- $W(f)$ liefert für spezielle Frequenzwerte komplexe Ergebnisse.
- $W(f)$ ist bezüglich f gerade, das heißt, es gilt stets $W(-f) = W(f)$.
- Der Spektralwert $W(f = 0)$ ist gleich $0.5/f_A$ und somit reell.

c) Wie groß sind $W(f = \pm f_A)$ und die auf f_A normierte 6 dB-Bandbreite?

$$B_{6\text{dB}}/f_A =$$

d) Berechnen Sie den minimalen Abstand zwischen Hauptkeule und Seitenkeulen.

$$A_{H/S} = \quad \text{dB}$$

A5.5: Fast-Fouriertransformation

Die Grafik zeigt den Signalflussplan der DFT für das Beispiel $N = 8$, die aus den acht Zeitkoeffizienten $d(0), \dots, d(7)$ die Spektralkoeffizienten $D(0), \dots, D(7)$ ermittelt. Für diese gilt mit $0 \leq \mu \leq 7$:

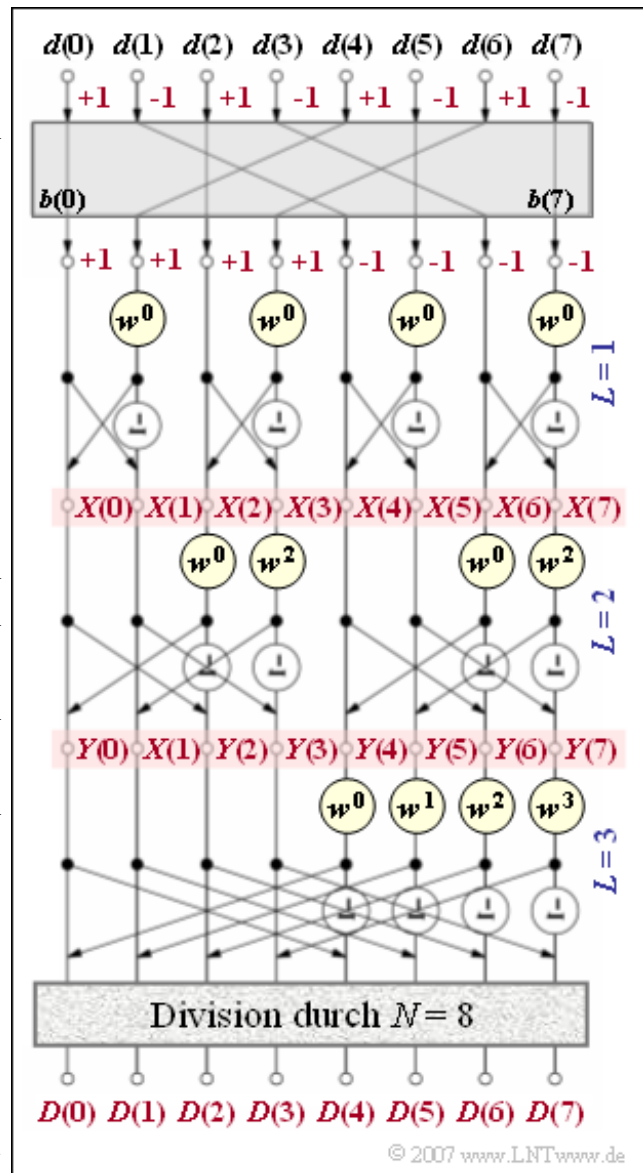
$$D(\mu) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} d(\nu) \cdot w^{\nu \cdot \mu},$$

wobei der komplexe Drehfaktor $w = \exp(-j2\pi/N)$ zu verwenden ist. Mit $N = 8$ ergibt sich $\exp(-j\pi/4)$.

Am Eingang wird die alternierende ± 1 -Folge $\langle d(\nu) \rangle$ angelegt. Nach der Bitumkehroperation ergibt sich daraus die Folge $\langle b(\kappa) \rangle$. Es gilt $b(\kappa) = d(\nu)$, wenn man ν als Dualzahl darstellt und die resultierenden 3 Bit als κ in umgekehrter Reihenfolge geschrieben werden. Beispielsweise folgt aus $\nu = 1$ (001) die Position $\kappa = 4$ (100), während $d(2)$ an der gleichen Position 2 (010) verbleibt.

Der eigentliche FFT-Algorithmus geschieht für das Beispiel $N = 8$ in $\text{ld } N = 3$ Stufen ($L = 1, 2, 3$), wobei in jeder Stufe vier Basisoperationen – sog. Butterflies – durchzuführen sind. Die Werte am Ausgang der ersten Stufe werden in dieser Aufgabe mit $X(0), \dots, X(7)$ bezeichnet, die der zweiten mit $Y(0), \dots, Y(7)$. Nach der dritten und letzten Stufe sind alle Werte noch durch N zu dividieren.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil zu **Kapitel 5.5**.



Fragebogen zu "A5.5: Fast-Fouriertransformation"

a) Berechnen Sie den Koeffizienten $D(3)$ nach der allgemeinen DFT-Gleichung.

$$D(3) =$$

b) Berechnen Sie den DFT-Koeffizienten $D(4)$.

$$D(4) =$$

c) Ermitteln Sie die Ausgangswerte $X(0)$, , $X(7)$ der ersten Stufe. Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- Alle Werte mit geradzahigen Indizes sind gleich 2.
- Alle Werte mit ungeradzahigen Indizes sind gleich 0.

d) Ermitteln Sie die Ausgangswerte $Y(0)$, , $Y(7)$ der zweiten Stufe. Geben Sie zur Kontrolle die Werte $Y(0)$ und $Y(4)$ ein.

$$Y(0) =$$

$$Y(4) =$$

e) Berechnen Sie alle N Spektralwerte $D(\mu)$, insbesondere

$$D(\mu = 4) =$$

$$D(\mu \neq 4) =$$

f) Welche Spektralkoeffizienten würden sich für $d(v = 4) = 1$ und $d(v \neq 4) = 0$ ergeben? Geben Sie zur Kontrolle ein:

$$D(\mu = 3) =$$

$$D(\mu = 4) =$$

Z5.5: Rechenaufwand für die FFT

Der FFT-Algorithmus realisiert eine Diskrete Fouriertransformation mit dem kleinstmöglichen Rechenaufwand, wenn der Parameter N eine Zweierpotenz ist. Im einzelnen sind zur Durchführung einer Fast-Fouriertransformation folgende Rechenschritte notwendig:

- Die FFT geschieht in $\log_2 N$ Stufen, wobei in jeder Stufe die gleiche Anzahl an Rechenoperationen durchzuführen ist.
- Die Grafik zeigt die dritte und letzte Stufe für das Beispiel $N = 8$. Man erkennt, dass in dieser und auch den anderen Stufen jeweils $N/2$ Basisoperationen durchzuführen sind.
- In jeder Basisoperation, die man oft auch als **Butterfly** bezeichnet, werden aus den beiden komplexen Eingangsgrößen E_1 und E_2 zwei komplexe Ausgänge berechnet:

$$\begin{aligned} A_1 &= E_1 + E_2 \cdot w^\mu, \\ A_2 &= E_1 - E_2 \cdot w^\mu. \end{aligned}$$

- Hierbei bezeichnet $w = \exp(-j \cdot 2\pi/N)$ den komplexen Drehfaktor. Für das Beispiel $N = 8$ hat dieser folgenden Wert:

$$w = e^{-j \cdot \pi/4} = \cos(45^\circ) - j \cdot \sin(45^\circ).$$

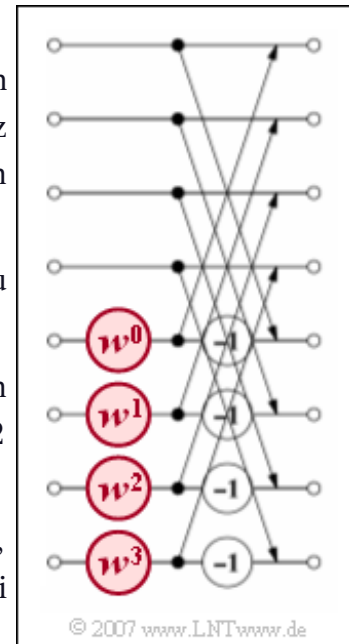
- Der Exponent μ dieses komplexen Drehfaktors kann alle ganzzahligen Werte zwischen 0 und $N/2 - 1$ annehmen. Für $N = 8$ gilt:

$$w^0 = 1, \quad w^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w^2 = -j, \quad w^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mit dieser Aufgabe sollen die für die FFT erforderliche Anzahl von Rechenoperationen (O_{FFT}) ermittelt und mit dem für die DFT angebbaren Wert $O_{\text{DFT}} \approx 8 N^2$ verglichen werden. Es ist zu beachten:

- Sinnvollerweise werden die Potenzen von w vor dem eigentlichen Algorithmus berechnet und in einer Lookup-Tabelle abgelegt. Die hierfür notwendigen Operationen bleiben unberücksichtigt.
- Die Bitumkehroperation – eine Umsortierung, die vor der ersten Stufe durchzuführen ist – wird bei dieser Abschätzung der erforderlichen Rechenoperationen ebenfalls nicht berücksichtigt.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 5.5**.



Fragebogen zu "Z5.5: Rechenaufwand für die FFT"

a) Wieviele reelle Additionen (A_A) sind für eine komplexe Addition erforderlich?

$$A_A =$$

b) Wieviele reelle Additionen (A_M) und Multiplikationen (M_M) sind für eine komplexe Multiplikation erforderlich?

$$A_M =$$

$$M_M =$$

c) Wieviele komplexe Additionen/Subtraktionen (a_B) und komplexe Multiplikationen (m_B) erfordert eine einzige Basisoperation („Butterfly“)?

$$a_B =$$

$$m_B =$$

d) Wieviele reelle Rechenoperationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen gleichermaßen) erfordert eine Basisoperation?

$$O_B =$$

e) Wieviele reelle Operationen (O_{FFT}) erfordert der gesamte FFT-Algorithmus? Welche Zahlenwerte ergeben sich für $N = 16$ und $N = 1024$?

$$O_{\text{FFT}}(N = 16) =$$

$$O_{\text{FFT}}(N = 1024) =$$

f) Welcher Zeitgewinn $G_{\text{FFT}} = O_{\text{DFT}}/O_{\text{FFT}}$ ergibt sich für $N = 16$ und $N = 1024$?

$$G_{\text{FFT}}(N = 16) =$$

$$G_{\text{FFT}}(N = 1024) =$$