

Zu Kapitel 1.3: Beweis des Eulerschen Satzes

Die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion lautet:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Mit imaginärem Argument kann hierfür auch geschrieben werden:

$$e^{jx} = 1 + j \cdot \frac{x}{1!} + j^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + j^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + j^4 \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Berücksichtigt man $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, $j^5 = j$, usw. und fasst die reellen und die imaginären Terme zusammen, so erhält man

$$e^{jx} = A + j \cdot B, \quad \text{wobei}$$

$$A = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \cos(x),$$

$$B = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin(x).$$

Daraus folgt direkt der Satz von Euler:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \cdot \sin(x).$$

q.e.d.

Zu Kapitel 3.3: Beweis des Ähnlichkeitssatzes

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, so gilt mit der reellen Konstanten k auch folgender Funktionszusammenhang (**Ähnlichkeitssatz**):

$$x(k \cdot t) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{|k|} \cdot X\left(\frac{f}{k}\right).$$

Für positives k folgt aus dem Fourierintegral mit der Substitution $\tau = k \cdot t$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(k \cdot t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi \cdot f/k \cdot \tau} d\tau = \frac{1}{k} \cdot X\left(\frac{f}{k}\right).$$

Für negatives k würden sich die Integrationsgrenzen vertauschen und man erhält $1/(-k) \cdot X(f/k)$. Um keine Fallunterscheidung durchführen zu müssen, wird im Ergebnis $|k|$ verwendet.

q.e.d.

Zu Kapitel 3.3: Beweis des Differentiationssatzes

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, so gelten auch folgende Fourierkorrespondenzen:

$$\frac{dx(t)}{dt} \circ \longrightarrow \bullet j2\pi f \cdot X(f),$$
$$-t \cdot x(t) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{j2\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}.$$

Dies sind die beiden Varianten des **Differentiationssatzes**.

Die erste angegebene Gleichung ergibt sich durch Differentiation des 2. Fourierintegrals nach der Zeit:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot j2\pi f \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

Gleichzeitig gilt aber auch:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

Durch Vergleich der beiden Integranden erhält man die obere Variante des Differentiationssatzes. Zur Herleitung der zweiten Variante geht man ausgehend vom ersten Fourierintegral in analoger Weise vor. Der negative Exponent im ersten Fourierintegral führt zum Minuszeichen in der Zeitfunktion.

q.e.d.

Zu Kapitel 3.3: Beweis des Reziprozitätsgesetzes

Satz: Das Produkt aus äquivalenter Impulsdauer und äquivalenter Bandbreite ist stets gleich 1:

$$\Delta t \cdot \Delta f = 1.$$

Man bezeichnet diesen Zusammenhang als **Reziprozitätsgesetz**.

Ausgehend von den beiden Fourierintegralen erhält man für $f = 0$ bzw. $t = 0$:

$$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt, \quad x(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df.$$

Berücksichtigt man dieses Ergebnis bei obigen Definitionen, so erhält man:

$$\Delta t = \frac{X(f = 0)}{x(t = 0)}, \quad \Delta f = \frac{x(t = 0)}{X(f = 0)}.$$

Daraus folgt direkt $\Delta t = 1/\Delta f$.

q.e.d.

Zu Kapitel 3.3: Beweis des Verschiebungssatzes

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte der Zeitfunktion $x(t)$, so gelten nach dem **Verschiebungssatz** auch folgende Zusammenhänge:

$$x(t - t_0) \circ \longrightarrow \bullet X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0},$$

$$x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \circ \longrightarrow \bullet X(f - f_0).$$

Hierbei sind t_0 und f_0 Zeit- bzw. Frequenzgrößen.

Bei diesem Beweis beschränken wir uns auf die erste der beiden angegebenen Gleichungen. Mit dem um rechts verschobenen Zeitsignal $x_V(t) = x(t - t_0)$ lautet das Fourierintegral:

$$X_V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \cdot e^{-j2\pi f t} dt.$$

Mit der Substitution $\tau = t - t_0$ folgt daraus:

$$X_V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f(\tau+t_0)} d\tau.$$

Der von der Integrationsvariablen τ unabhängige Term kann vor das Integral gezogen werden. Mit der Umbenennung $\tau \rightarrow t$ erhält man dann:

$$X_V(f) = e^{-j2\pi f t_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f).$$

q.e.d.

Zu Kapitel 3.3: Beweis des Vertauschungssatzes

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, dann gilt auch (**Vertauschungssatz**):

$$X^*(t) \circ \longrightarrow \bullet x^*(f).$$

Beschränken wir uns auf reelle Zeitfunktionen, so können die Zeichen für „konjugiert komplex“ auf beiden Seiten der Fourierkorrespondenz weggelassen werden.

Das erste Fourierintegral lautet mit der Zeitvariablen u anstelle von t :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-j2\pi fu} \, du.$$

Bezeichnet man nun die Frequenzvariable f mit t , so lautet die obige Gleichung:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-j2\pi tu} \, du.$$

Ändert man das Exponentenvorzeichen, so muss $X(t)$ durch $X^*(t)$ und $x(u)$ durch $x^*(u)$ ersetzt werden:

$$X^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u) \cdot e^{j2\pi tu} \, du.$$

Mit der Umbenennung $u \rightarrow f$ kommt man zum zweiten Fourierintegral:

$$X^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(f) \cdot e^{j2\pi ft} \, df.$$

q.e.d.

Zu Kapitel 3.4: Beweis des Faltungssatzes

Definition: Man bezeichnet die folgende Verknüpfung der Zeitfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ als **Faltung** und stellt diesen Funktionalzusammenhang mit einem Stern dar:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau.$$

Daraus ergibt sich die folgende Fourierkorrespondenz:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) \bullet \text{---} \circ x_1(t) * x_2(t).$$

Die Fourierintegrale der Zeitfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ lauten mit veränderten Integrationsvariablen:

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau,$$
$$X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t') \cdot e^{-j2\pi ft'} dt'.$$

Bildet man das Produkt der Spektralfunktionen, so erhält man:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t') \cdot e^{-j2\pi f(\tau+t')} d\tau dt'.$$

Mit der Substitution $t = \tau + t'$ ergibt sich:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \right] \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

Hier ist berücksichtigt, dass die Exponentialfunktion unabhängig von der inneren Integrationsvariablen τ ist und deshalb nur als Faktor des inneren Integrals fungiert.

Bezeichnen wir nun das Produkt der beiden Spektren mit $P(f)$ und dementsprechend die dazugehörige Zeitfunktion mit $p(t)$, so lautet das entsprechende Fourierintegral:

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

Ein Koeffizientenvergleich der beiden Integrale zeigt, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau.$$

q.e.d.

Zu Kapitel 3.4: Faltung mit einer Diracfunktion

Es gelte $x_2(t) = \alpha \cdot \delta(t - T)$ und dementsprechend $X_2(f) = \alpha \cdot e^{-j2\pi fT}$. Für die Spektralfunktion des Signals $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ gilt dann:

$$Y(f) = X_1(f) \cdot \alpha \cdot e^{-j2\pi fT}.$$

Die komplexe Exponentialfunktion führt lediglich zu einer Zeitverschiebung um T (Verschiebungssatz), der Faktor α zu einer Dämpfung ($\alpha < 1$) bzw. Verstärkung ($\alpha > 1$). Daraus folgt:

$$y(t) = \alpha \cdot x_1(t - T).$$

q.e.d.

Zu Kapitel 4.1: Zusammenhang zwischen TP- und BP-Signalen

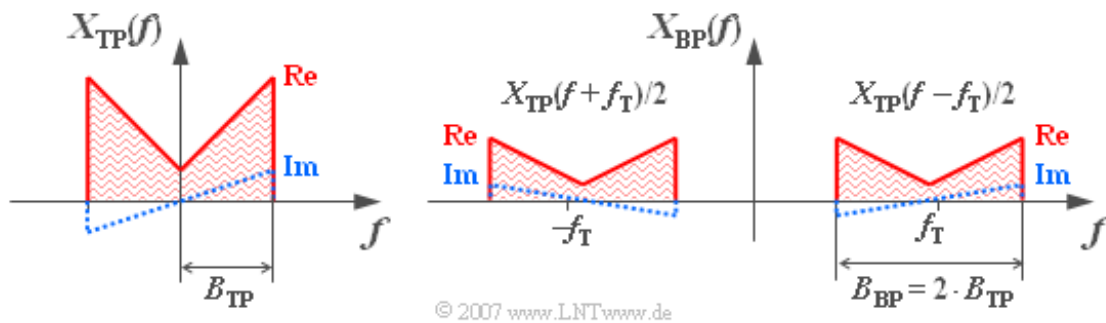
Wir betrachten ein TP-Signal $x_{TP}(t)$ mit dem Spektrum $X_{TP}(f)$. Multipliziert man dieses Signal mit einem (dimensionslosen) Trägersignal

$$z(t) = \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t) \quad \bullet \quad Z(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f - f_T) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_T),$$

so ergibt sich nach dem Faltungssatz für das Spektrum des Signals $x_{BP}(t) = x_{TP}(t) \cdot z(t)$:

$$X_{BP}(f) = X_{TP}(f) \star Z(f) = \frac{1}{2} \cdot X_{TP}(f - f_T) + \frac{1}{2} \cdot X_{TP}(f + f_T).$$

Hier ist berücksichtigt, dass die Faltung der Spektralfunktion $X_{TP}(f)$ mit der verschobenen Diracfunktion $\delta(f - f_T)$ die um f_T nach rechts verschobene Funktion $X_{TP}(f - f_T)$ ergibt.



Die Grafik verdeutlicht das Ergebnis obiger Gleichung.

Zu Kapitel 4.3: Zur Bezeichnung der Phase in diesem Tutorial

Nach der in diesem Lehrtutorial gewählten Nomenklatur gibt es für eine harmonische Schwingung zwei Darstellungsformen:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_T t - \varphi),$$

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi).$$

Es ist offensichtlich, dass $\phi = -\varphi$ gilt. Beide Größen geben die Phase des Signals an. Beispielsweise gilt für ein sinusförmiges Signal $\varphi = 90^\circ$ und $\phi = -90^\circ$.

Die Verwendung zweier unterschiedlicher Größen, nämlich das in Deutschland gebräuchliche φ und das im anglo-amerikanischen Raum verwendete ϕ – beide kennzeichnen das „kleine griechische phi“ – für den gleichen Sachverhalt hat folgende Gründe:

- Nahezu alle Fachbücher zum Thema „Signaldarstellung“ benutzen die erste Gleichung mit dem Minuszeichen. Auch bei der Fourierreihe und dem Fourierintegral wird – zumindest implizit – die Phase mit negativem Vorzeichen berücksichtigt.
- Bei der Beschreibung der Modulationsverfahren verwendet man dagegen meist die Gleichung mit dem positiven Vorzeichen. So gilt zum Beispiel bei Phasenmodulation für das modulierte Signal und das dazugehörige äquivalente TP-Signal:

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi(t)),$$

$$s_{TP}(t) = A \cdot e^{j\phi(t)}.$$

- In vielen Lehrbüchern werden je nach Anwendung die Gleichung mit Pluszeichen oder diejenige mit Minuszeichen verwendet, aber stets mit gleichem Phasenbezeichner. Durch die Verwendung zweier unterschiedlicher Symbole φ und ϕ wird diese Doppeldeutigkeit beseitigt.

Zu Kapitel 5.1: Spektralfunktion des Diracpulses

Der Diracpuls im Zeitbereich besteht aus unendlich vielen Diracimpulsen, jeweils im gleichen Abstand T_A und alle mit gleichem Impulsgewicht T_A :

$$p_\delta(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} T_A \cdot \delta(t - \nu \cdot T_A).$$

Die Herleitung der zugehörigen Spektralfunktion $P_\delta(f)$ geschieht in mehreren Schritten:

- Da $p_\delta(t)$ periodisch mit T_A ist, kann die (komplexe) Fourierreihendarstellung angewandt werden:

$$p_\delta(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} D_\mu \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot t / T_A} \quad \text{mit} \quad D_\mu = \frac{1}{T_A} \cdot \int_{-T_A/2}^{+T_A/2} p_\delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot t / T_A} dt.$$

- Im Integrationsbereich von $-T_A/2$ bis $+T_A/2$ ist $p_\delta(t) = T_A \cdot \delta(t)$. Damit kann für die komplexen Fourierkoeffizienten geschrieben werden:

$$D_\mu = \int_{-T_A/2}^{+T_A/2} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot t / T_A} dt.$$

- Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass für $t \neq 0$ der Diracimpuls gleich 0 ist und für $t = 0$ der komplexe Drehfaktor gleich 1, gilt weiter:

$$D_\mu = \int_{-T_A/2}^{+T_A/2} \delta(t) dt = 1 \quad \Rightarrow \quad p_\delta(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot t / T_A}.$$

- Der Verschiebungssatz im Frequenzbereich lautet mit $f_A = 1/T_A$:

$$e^{j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot f_A \cdot t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \delta(f - \mu \cdot f_A).$$

- Wendet man dieses Ergebnis auf die gesamte Summe der komplexen Exponentialfunktionen an, so erhält man schließlich

$$P_\delta(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A).$$

q.e.d.