

Überblick zu Kapitel 5 des Buches „Modulationsverfahren“

In diesem letzten Kapitel werden mit CDM und OFDM zwei Beispiele von modernen digitalen Modulationsverfahren behandelt, die häufig auch – unter den Bezeichnungen CDMA bzw. OFDMA – als Vielfachzugriffsverfahren angewandt werden.

Bei **CDMA** (*Code Division Multiple Access*) wird für jeden Teilnehmer eine spezifische Spreizfolge bereitgestellt. Solche Spreizfolgen – und damit auch das Gesamtsignal – sind im Vergleich zum Nutzsignal hochfrequent, so dass dieses Verfahren auch als Bandspreizung bezeichnet wird. Insbesondere wird es in den Zellulernetzen der dritten Generation wie zum Beispiel **UMTS** eingesetzt.

OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplex*) ist ein Mehrträger-Modulationsverfahren, das auf der Orthogonalität der verwendeten, meist sehr vielen Träger basiert. Aufgrund seiner vorteilhaften Eigenschaften erfährt es eine zunehmende Verbreitung bei leitungsgebundenen (**xDSL**), aber auch bei mobilen Übertragungssystemen. Insbesondere wird es in den Zellulernetzen der vierten Generation (**4G**) als Vielfachzugriffsverfahren (OFDMA) Verwendung finden.

Dieses Kapitel beinhaltet im Einzelnen:

- die Aufgaben von Vielfachzugriffsverfahren allgemein,
- eine allgemeine Beschreibung von Bandspreizverfahren,
- Realisierungsaspekte und Anwendungen von CDMA,
- eine allgemeine Beschreibung von OFDM,
- Realisierungsaspekte und Anwendungen von OFDM.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 60 Bildschirmseiten mit 70 Grafiken, Gleichungen und Beispielen verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch 10 Aufgaben und 8 Zusatzaufgaben mit insgesamt 93 Teilaufgaben, sowie ein Lernvideo und sechs Interaktionsmodule.

Literatur: [Dic98] – [Hag05] – [Han08] – [Hin08] – [KöZ08] – [Roh07] – [Vie08] – [Wei71] – [ZP85]

Zur weiteren Verdeutlichung der CDMA-Thematik empfehlen wir das Grafik- und Simulationsprogramm *CDMA* unter Windows. Dieses ist Bestandteil des Lehrsoftwarepakets *LNTwin* und wird seit Jahren im Praktikum *Simulation digitaler Übertragungssysteme* am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der TU München eingesetzt:

Hinweise zum Herunterladen der Programme und Anleitungen von *LNTwin*

Die Eigenschaften von OFDM werden durch das folgende interaktive Flash-Modul verdeutlicht:

OFDM-Spektrum und –Signale (1.3 MB)

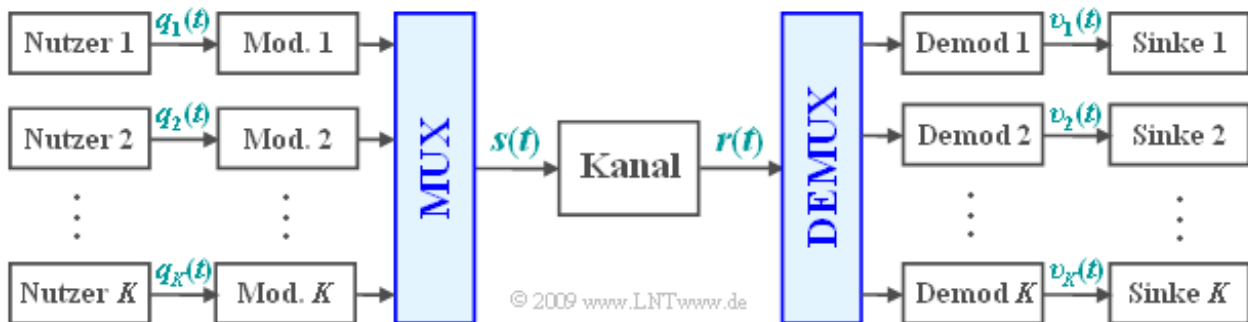
Multiplexer und Demultiplexer

Bisher sind wir stets von einer einzigen Nachrichtenquelle ausgegangen, die Informationen

- zu einer einzigen Sinke überträgt (Punkt-zu-Punkt-Verbindung), oder
- mehrere Teilnehmer gleichzeitig versorgt (Punkt-zu-Mehrpunkt-Verbindung, *Broadcast*).

Dies entspricht aber eher selten den in der Praxis auftretenden Situationen. Vielmehr versorgt ein Kommunikationssystem – zumindest ein wirtschaftlich tragbares – viele Teilnehmer, die Informationen versenden wollen und gleichzeitig für die anderen Teilnehmer als Nachrichtensinken fungieren.

Für jede Klasse von Anwendungen steht in der Regel nur eine beschränkte Frequenzbandbreite zur Verfügung. Insbesondere bei Funksystemen ist die Bandbreite – da nicht beliebig vermehrbar – eine wichtige Ressource. Die *World Administrative Radio Conference* (WARC) koordiniert weltweit die Nutzung der heute und zukünftig verfügbaren Frequenzen. Ingenieure haben die Aufgabe, das für eine Anwendung zur Verfügung gestellte Frequenzband so effektiv wie möglich zu nutzen und damit möglichst viele Teilnehmer zu versorgen.



Die Grafik zeigt die Vorgehensweise. Die K Quellensignale $q_k(t)$ werden jeweils geeignet moduliert, vom **Multiplexer** (MUX) zum Sendesignal $s(t)$ zusammengefasst und anschließend über den gemeinsamen physikalischen Kanal übertragen. Der **Demultiplexer** (DEMUX) hat die Aufgabe, die Informationen für die K Teilnehmer (Sinken) aus dem Empfangssignal $r(t)$ zu extrahieren.

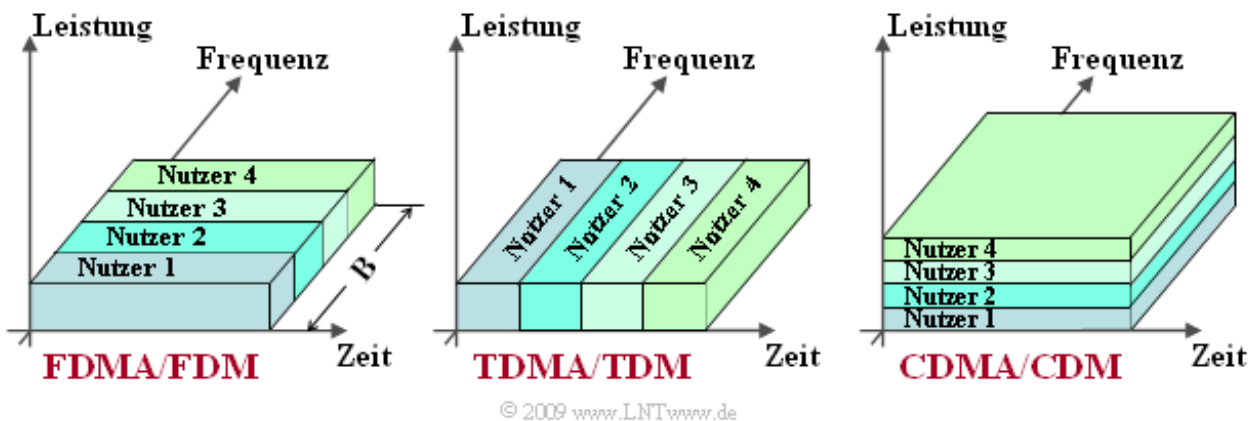
FDMA, TDMA und CDMA (1)

Die folgende Grafik mit den drei Achsen Zeit, Frequenz und Leistung verdeutlicht drei weit verbreitete **Vielfachzugriffsverfahren**, nämlich

- *Frequency Division Multiple Access* (**FDMA**),
- *Time Division Multiple Access* (**TDMA**), und
- *Code Division Multiple Access* (**CDMA**).

Mit der hier angegebenen Bezeichnung geht man davon aus, dass es mehrere Sender–Empfänger–Paare gibt, die sich ein Übertragungsmedium selbständig aufteilen. Beim Mobilfunk ist beispielsweise dieses Übertragungsmedium die Funkschnittstelle, vereinfacht ausgedrückt die „Luft“ in der Umgebung einer Basisstation. Die Kanalzuteilung geschieht entweder mit einer zentralen Instanz in der Basisstation oder die Teilnehmer arbeiten mit einer Kollisionserkennung.

Dagegen spricht man von **Multiplexing**, wenn am Anfang eines Übertragungsweges ein Multiplexer mehrere Signale bündelt (wie im Bild auf der letzten Seite dargestellt) und am Ende ein Demultiplexer dieses gemeinsame Signal wieder auftrennt. Abkürzend verwendet man anstelle von FDMA, TDMA und CDMA in diesem Fall FDM, TDM und CDM – also *Frequency (Time, Code) Division Multiplexing*.

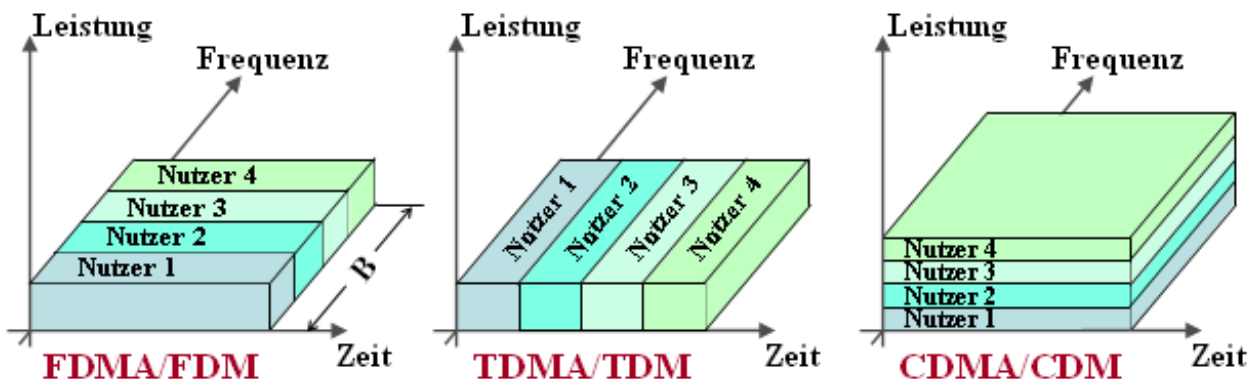


Die Bildbeschreibung folgt auf der nächsten Seite. Der Vollständigkeit halber soll vorher ein weiteres Vielfachzugriffsverfahren erwähnt werden: *Space Division Multiple Access* (**SDMA**). Hier wird durch die Verwendung von Gruppenantennen (auch Antennen–Arrays genannt) beim Sender eine selektive räumliche Ausbreitung der Signalkomponenten ermöglicht. Die Trennung der einzelnen Nutzer beim Empfänger erfolgt demzufolge durch die räumliche Position der jeweiligen Endgeräte.

FDMA, TDMA und CDMA (2)

Die in der Grafik unten nochmals dargestellten Verfahren lassen sich wie folgt charakterisieren:

- Bei **Frequency Division Multiple Access** (FDMA) bekommt jeder der K Nutzer nur einen Teil der gesamten Bandbreite B zugewiesen und kann darin zeitkontinuierlich (analog oder digital) übertragen. Wie in **Kapitel 1.1** bereits im Detail beschrieben, können so alle Nutzer gleichzeitig mit unterschiedlicher Trägerfrequenz senden, ohne dass sich dadurch die Übertragungsqualität verschlechtert. Voraussetzung ist, dass kein Nutzer mehr als die gerade noch zulässige Bandbreite B/K belegt und dass außerdem Filter mit beliebig steilen Flanken zur Kanalseparierung verfügbar sind. Anderenfalls sind Schutzabstände zwischen den einzelnen Frequenzbändern einzuhalten.
- Bei **Time Division Multiple Access** (TDMA) nutzen dagegen alle K Teilnehmer das gesamte Frequenzband B , allerdings nur jeweils zu einem Bruchteil ($1/K$) der Zeit. Bei zeitkontinuierlich anfallenden Symbolen erfordert dieses **Zeitmultiplexverfahren** eine Zwischenspeicherung beim Sender, eine blockweise Übertragung mit einer um den Faktor K höheren Datenrate sowie eine Einrichtung beim Empfänger, der die Blöcke in den einzelnen Zeitschlitzen wieder zu einem kontinuierlichen Datenstrom zusammenfügt.
- Bei **Code Division Multiple Access** (CDMA) wird das gleiche Frequenzband der Breite B von allen Teilnehmern zu allen Zeiten gemeinsam benutzt; sie liegen leistungsmäßig quasi übereinander. Um die Teilnehmersignale am Empfänger separieren zu können, werden sie am Sender mit einer gegenüber der Nutzbandbreite um den Faktor $J \geq K$ höherfrequenten periodischen Binärfolge multipliziert, was spektral gesehen einer Bandspreizung um diesen Faktor J entspricht. Man spricht von *PN-Modulation* oder von *Direct Sequence Spread Spectrum*. Findet man J zueinander orthogonale Spreizfolgen, so können bei idealen Bedingungen bis zu J Nutzer den gemeinsamen Kanal ohne gegenseitige Beeinflussung gleichzeitig belegen, allerdings jeder einzelne nur mit der Nutzbandbreite B/J (bezogen auf die Daten). Durch die Bandspreizung belegt aber jeder Nutzer das gesamte Frequenzband B .



Anwendungsbeispiele

Zeitmultiplex (**TDM**) wird schon sehr lange eingesetzt, zum Beispiel in der 1972 standardisierten *Plesiochronous Digital Hierarchy* (PDH). Ausgehend von der Datenrate 2.048 Mbit/s ergeben sich die höheren Bitraten 8.448, 34.368, 139.264 und 564.992 Mbit/s, jeweils durch eine Vervierfachung unter Berücksichtigung eines gewissen Overheads. Seit 1988 gibt es daneben die *Synchronous Digital Hierarchy* (SDH) mit den Datenraten 155.52, 622.08, 2488.32, 9953.28 und 39813.12 Mbit/s ≈ 40 Gbit/s (jeweils genau Faktor 4), die in den neueren optischen Systemen zum Einsatz kommt.

Das älteste Multiplexverfahren ist **FDM**, das bereits seit den Anfängen der analogen Rundfunktechnik in den 1930er Jahren eingesetzt wird. Beispielsweise umfasst der VHF II-Bereich – besser bekannt als UKW – den Frequenzbereich von 87.5 bis 108 MHz, also eine Bandbreite von 20.5 MHz. Mit dem ursprünglichen Frequenzraster von 300 kHz konnten somit $K = 68$ Kanäle bereitgestellt werden. Heutzutage wird das Kanalaraster mit 150 kHz Abstand meist enger gewählt.

Der Anfang der 1990er Jahre eingeführte europäische Mobilfunkstandard **GSM** benutzt neben einer TDMA-Komponente (8 Zeitschlitze pro Frequenzkanal) ebenfalls eine FDMA-Komponente. Die gesamte im sog. *D-Band* zur Verfügung stehende Bandbreite $B = 24.8$ MHz – bei der Verbindung von der Mobilstation zur Basisstation (Uplink) der Frequenzbereich 890.1 ... 914.9 MHz und in der Gegenrichtung (Downlink) der Bereich 935.1 ... 959.9 MHz – wird per Frequenzmultiplex (FDMA) in 124 jeweils 200 kHz breite Bänder unterteilt. Die maximal mögliche Kanalzahl beträgt somit (theoretisch) $8 \cdot 124 = 992$. Da allerdings benachbarte Zellen nicht die gleichen Frequenzen benutzen dürfen, da es sonst an den Zellgrenzen zu einem beträchtlichem Qualitätsverlust kommen würde, ergibt sich für das GSM-System eine maximal mögliche Kanalzahl von 330 (Reuse-Faktor 3).

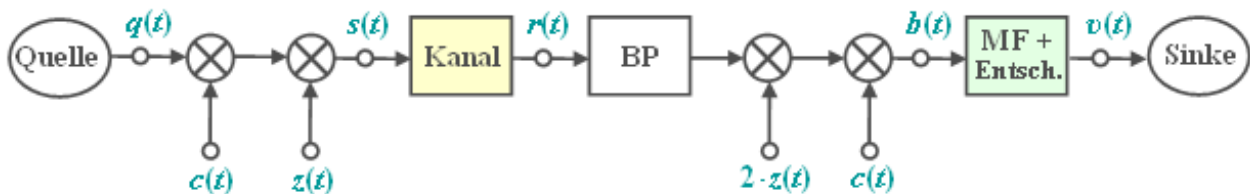
Von großer Bedeutung ist *Orthogonal Frequency Division Multiplex* (**OFDM**), auf dem sowohl **DSL** (*Digital Subscriber Line*) als auch das 4G-Mobilfunksystem **LTE** (*Long Term Evolution*) aufbaut. Hierbei handelt es sich um ein Mehrträgersystem, bei dem sich die einzelnen Spektralfunktionen zwar überlappen, aber auf Grund von Orthogonalität nicht stören. Das OFDM-Prinzip wird in **Kapitel 5.5** (sowie in den Kapiteln 5.6 bis 5.8) detailliert beschrieben.

Vorher betrachten wir aber in den Kapiteln 5.2 bis 5.4 verschiedene Varianten von bandspreizenden Verfahren und *Code Division Multiple Access* (**CDMA**), das zum Beispiel im 3G-Mobilfunkstandard **UMTS** (*Universal Mobile Telecommunication System*) Anwendung findet.

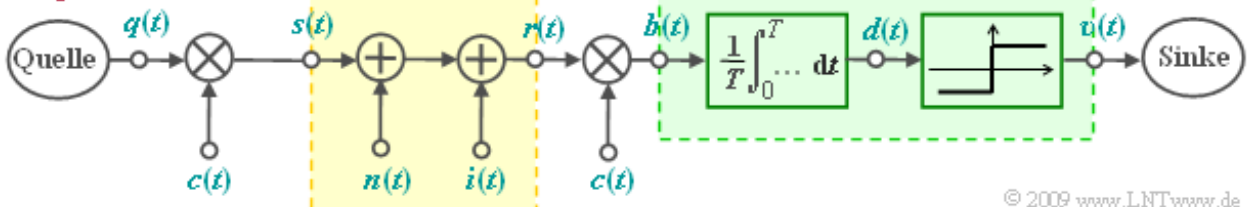
Blockschaltbild und äquivalentes Tiefpassmodell

Eine Möglichkeit zur Realisierung eines CDMA-Systems bietet die so genannte **PN-Modulation**, die hier anhand des nachfolgend skizzierten Blockschaltbildes erklärt werden soll. Darunter gezeichnet ist das dazugehörige Modell im äquivalenten Tiefpassbereich. In beiden Bildern ist der verzerrungsfreie Kanal (AWGN und eventuell Interferenzen durch andere Nutzer) gelb hinterlegt und der optimale Empfänger (Matched-Filter plus Schwellenwertentscheider) grün.

Blockschaltbild



Tiefpassmodell



© 2009 www.LNTwww.de

Dieses System lässt sich wie folgt charakterisieren:

- Verzichtet man auf die Multiplikation mit dem Spreizsignal $c(t)$ bei Sender und Empfänger, so ergibt sich ein herkömmliches **BPSK-System** mit dem Trägersignal $z(t)$ und dem AWGN-Kanal, gekennzeichnet durch das additive Gaußsche Störsignal $n(t)$. Der zweite Störanteil (Interferenzen anderer Teilnehmer) entfällt in diesem Fall: $i(t) = 0$.
- Für das Folgende wird vorausgesetzt (dies ist essentiell für die PN-Modulation), dass das digitale Quellensignal $q(t)$ einen NRZ-rechteckförmigen Verlauf hat. In diesem Fall lässt sich das Matched-Filter durch einen Integrator über eine Symboldauer T ersetzen \Rightarrow **Integrate & Dump**. Anschließend folgt der Schwellenwertentscheider.

Prinzip und Eigenschaften von Bandspreizverfahren

Im Folgenden betrachten wir die PN-Modulation im *äquivalenten Tiefpassbereich*. Charakteristisch für diese Modulationsart ist die Multiplikation des bipolaren und rechteckförmigen Digitalsignals $q(t)$ mit einer pseudozufälligen ± 1 -Spreizfolge $c(t)$:

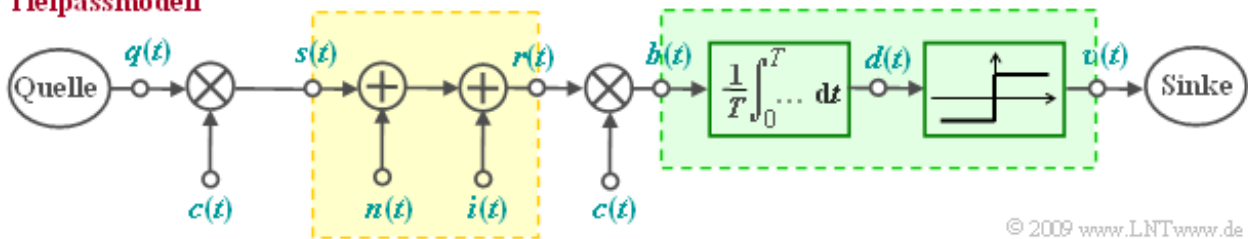
$$s(t) = q(t) \cdot c(t).$$

Die Dauer T_c eines Spreizchips ist um den ganzzahligen **Spreizfaktor** J kleiner als die Dauer T eines Quellensymbols, so dass das Sendesignalspektrum

$$S(f) = Q(f) \star C(f)$$

etwa um diesen Faktor J breiter ist als die Spektralfunktion $Q(f)$ des Quellensignals. Deshalb bezeichnet man dieses Verfahren auch als PN-Bandspreizung, wobei „PN“ für **Pseudo-Noise** steht. Im Englischen ist die Bezeichnung *Direct Sequence Spread Spectrum*, abgekürzt DS-SS, üblich.

Tiefpassmodell



In vorherigen Kapiteln war stets ein wesentliches Ziel der Modulation, möglichst bandbreiteneffizient zu sein. Hier versucht man im Gegensatz dazu, das Signal auf eine möglichst große Bandbreite zu spreizen.

Merke: Die Bandbreitenerweiterung um J ist notwendig, um mehreren Teilnehmern die gleichzeitige Nutzung des gleichen Frequenzbandes zu ermöglichen. Im Idealfall können 2^J geeignete Spreizfolgen gefunden und somit ein CDMA-System für 2^J gleichzeitige Nutzer realisiert werden.

Desweiteren bieten Bandspreizverfahren noch folgende Vorteile:

- Man kann ein zusätzliches niederratiges DS-SS-Signal über ein ansonsten von FDMA-Kanälen höherer Datenrate genutztes Frequenzband übertragen, ohne die Hauptanwendungen signifikant zu stören. Das bandgespreizte Signal verschwindet quasi unter dem Rauschpegel dieser Signale.
- Gezielte schmalbandige Störer („Sinusstörer“) lassen sich mit dieser Technik gut bekämpfen. Dieser militärische Gesichtspunkt war auch ausschlaggebend dafür, dass Bandspreizverfahren überhaupt erfunden und weiterentwickelt wurden.
- Weiter bietet die Bandspreiztechnik allgemein, insbesondere aber *Frequency Hopping* (schnelle diskrete Veränderung der Trägerfrequenz über einen großen Bereich) und die *Chirp-Modulation* (kontinuierliches Verändern der Trägerfrequenz während eines Bitintervalls) auch die Möglichkeit, besser über frequenzselektive Kanäle übertragen zu können.

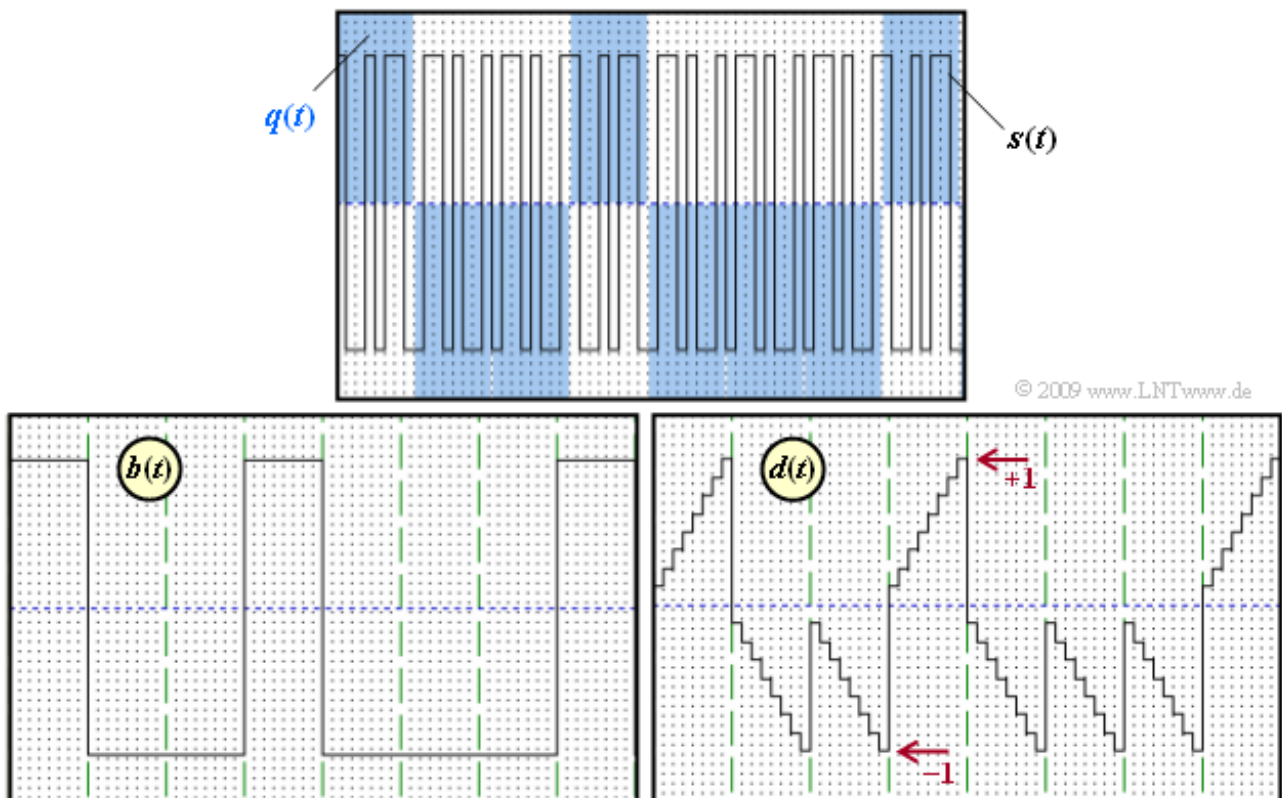
Ein Nachteil der PN-Modulation ist, dass es bei ungünstigen Bedingungen zwischen den Teilnehmern zu Interferenzen kommen kann, die im Modell durch die Störgröße $i(t)$ berücksichtigt sind. Für den Rest von Kapitel 5.2 und im Kapitel 5.3 wird aber nur ein einziger Sender betrachtet, so dass vorerst das Interferenzsignal $i(t) = 0$ gesetzt werden kann.

Signalverläufe bei einem einzigen Teilnehmer (1)

Die folgende Grafik zeigt

- oben das Quellensignal $q(t)$ und das (bandgespreizte) Sendesignal $s(t)$,
- links unten das Signal $b(t)$ nach der Bandstauchung, sowie
- rechts unten das Detektionssignal $d(t)$ nach dem Integrator, direkt vor dem Entscheider.

Es ist eine zeitdiskrete und normierte Signaldarstellung mit Rechtecken im Abstand der Chipdauer T_c gewählt. Der Spreizfaktor ist $J = 8$, als Spreizfolge wird die **Walsh-Funktion** Nr. 7 zugrunde gelegt. Alle Bilder gelten für den rauschfreien Fall $\Rightarrow n(t) = 0$.



Zu den einzelnen Signalverläufen ist zu vermerken:

- Das ± 1 -Datensignal $q(t)$ ist durch die blaue Hinterlegung gekennzeichnet. Nach Multiplikation mit dem Spreizsignal $c(t)$ ergibt sich das um den Faktor $J = 8$ höherfrequente Sendesignal $s(t)$.
- Das Spreizsignal $c(t)$ ist periodisch mit $T = J \cdot T_c$ und besitzt somit ein Linienspektrum. Im ersten, vierten und achten Datenbit ist $c(t)$ gleich $s(t)$, zu den anderen Zeiten gilt dagegen $c(t) = -s(t)$.
- Nach der Bandstauchung, also nach chipsynchroner Multiplikation mit $c(t) \in \{\pm 1\} \Rightarrow c^2(t) = 1$ beim Empfänger, ergibt sich das Signal $b(t)$. Im verzerrungs- und rauschfreien Fall gilt

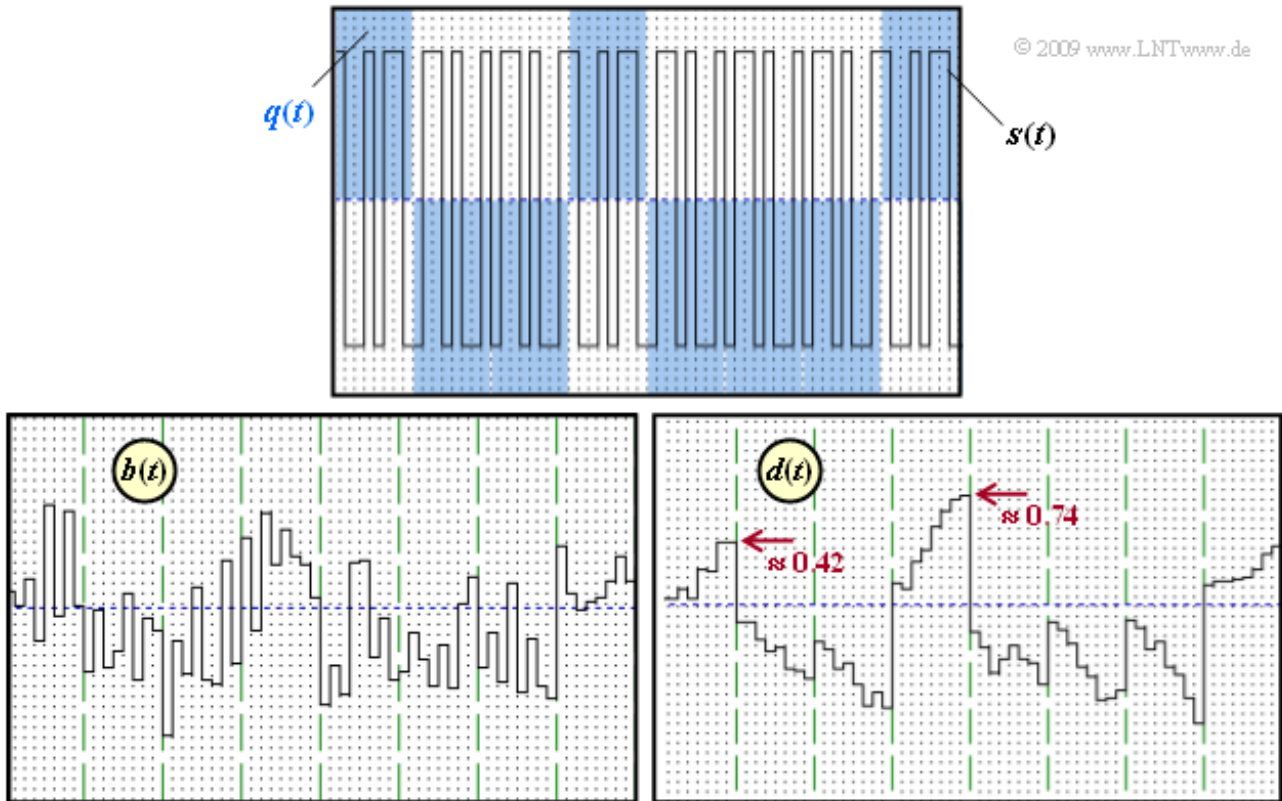
$$b(t) = r(t) \cdot c(t) = s(t) \cdot c(t) = [q(t) \cdot c(t)] \cdot c(t) = q(t).$$
- Die Integration von $b(t)$ über jeweils ein Bit ergibt ein linear ansteigendes/abfallendes Signal $d(t)$. Der Treppfenverlauf im rechten Bild ist allein auf die zeitdiskrete Darstellung zurückzuführen.
- Zu den äquidistanten Detektionszeitpunkten gilt im verzerrungs- und rauschfreien Fall

$$d(\nu T) = \frac{1}{T} \cdot \int_{(\nu-1)T}^{\nu T} b(t) dt = a_\nu \in \{+1, -1\},$$

wobei a_ν den ν -ten Amplitudenkoeffizienten des Quellensignals $q(t)$ angibt.

Signalverläufe bei einem einzigen Teilnehmer (2)

Die beiden unteren Grafiken ändern sich signifikant, wenn man AWGN-Rauschen berücksichtigt. Der AWGN-Parameter ist für diese Darstellung zu $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 6$ dB vorausgesetzt.



Nun ist das bandgestauchte Signal $b(t)$ nicht mehr abschnittsweise konstant und das Detektionssignal $d(t)$ nicht mehr linear ansteigend bzw. abfallend. Nach Schwellenwertentscheidung der Detektionsabstastwerte $d(vT)$ ergeben sich trotzdem meist die gesuchten Amplitudenkoeffizienten, wobei sich „meist“ durch die **Bitfehlerwahrscheinlichkeit** p_B quantifizieren lässt. Wegen

$$b(t) = [s(t) + n(t)] \cdot c(t) = q(t) + n(t) \cdot c(t)$$

und aufgrund der Tatsache, dass die statistischen Eigenschaften von weißem Rauschen $n(t)$ durch die Multiplikation mit dem ± 1 -Signal $c(t)$ nicht verändert werden, erhält man unabhängig vom Spreizgrad J das gleiche Ergebnis wie bei der **herkömmlichen BPSK** ohne Bandspreizung und Bandstauchung:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right)$$

Zusätzlicher Sinusstörer um die Trägerfrequenz

Wir gehen weiterhin von nur einem einzigen Teilnehmer aus. Im Unterschied zu der Berechnung auf der letzten Seite soll aber nun neben dem AWGN-Rauschen $n(t)$ auch ein **schmalbandiger Störer** $i(t)$ um die Trägerfrequenz f_T mit der Leistung P_I und der Bandbreite B_I wirksam sein.

Im Grenzfall $B_I \rightarrow 0$ lautet das Leistungsdichtespektrum dieses „Sinusstörers“:

$$\Phi_i(f) = \frac{P_I}{2} \cdot [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)] .$$

Bei einem herkömmlichen Übertragungssystem ohne Bandspreizung/Bandstauchung würde ein solcher Schmalbandstörer die Fehlerwahrscheinlichkeit in unzumutbarer Weise erhöhen. Bei einem System mit Bandspreizung (PN-Modulation) ist der störende Einfluss deutlich geringer, da

- die Bandstauchung beim Empfänger hinsichtlich des Sinusstörers als Bandspreizung wirkt,
- sich dadurch dessen Leistung auf ein sehr breites Frequenzband $B_c = 1/T_c \gg B$ verteilt,
- die zusätzlich störende Leistungsdichte im Nutzfrequenzband ($\pm B$) eher niedrig ist und durch eine geringfügige Erhöhung der AWGN-Rauschleistungsdichte N_0 erfasst werden kann:

$$p_B \approx Q \left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0 + P_I \cdot T_c}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0} \cdot \left(\frac{1}{1 + P_I \cdot T_c / N_0} \right)} \right) .$$

Daraus ergibt sich die SNR-Degradation mit $T = J \cdot T_c$ und $B = 1/T$ zu $[1 + P_I / (J \cdot N_0 \cdot B)]^{-1}$. Je größer der Spreizfaktor J ist, desto geringer ist die Erhöhung der Rauschleistung durch den Sinusstörer.

Diese Tatsache hat dazu geführt, dass in der Literatur der Spreizfaktor J oft als **Spreizgewinn** bezeichnet wird, vergleiche beispielsweise [ZP85]. In diesen Büchern geht es dabei aber meist um militärische Anwendungen der Bandspreizverfahren, wobei manchmal sogar vom „günstigsten Störer“ die Rede ist, nämlich dann, wenn die Degradation am größten ist. Mit solchen Anwendungen wollen wir uns hier nicht befassen.

Näherungsweise kann aber die obige Gleichung der Fehlerwahrscheinlichkeit auch angewandt werden, wenn eine ungespreizte Übertragung höherer Datenrate und ein Spread Spectrum System geringer Rate im gleichen Frequenzband arbeiten. Der störende Einfluss des erstgenannten Systems mit Bandbreite B_I auf das Spread Spectrum System lässt sich näherungsweise als *Schmalbandstörer* behandeln, so lange B_I hinreichend klein ist.

Beachten Sie aber bitte: Bei AWGN-Rauschen (und auch vielen anderen Kanälen) lässt sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit durch Bandspreizung nicht verringern. Im günstigsten Fall bleibt diese gleich (siehe letzte Seite). In unserem Sinne ist Bandspreizung eine erforderliche Maßnahme, um mehrere Teilnehmer gleichzeitig im gleichen Frequenzband versorgen zu können. Wir betrachten im Folgenden ausschließlich den CDMA-Aspekt und sprechen deshalb auch weiterhin vom Spreizfaktor J und nicht von einem Spreizgewinn.

Definition der Korrelationsfunktionen

Wichtige Beurteilungskriterien für Spreizfolgen sind die Korrelationsfunktionen. Betrachtet man zwei ergodische Prozesse mit den Musterfunktionen $x(t)$ und $y(t)$, so gilt für die **Kreuzkorrelationsfunktion** (KKF) der beiden Prozesse (siehe **Kapitel 4.6** im Buch „Stochastische Signaltheorie“):

$$\varphi_{xy}(\tau) = \overline{x(t) \cdot y(t + \tau)} = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} x(t) \cdot y(t + \tau) dt.$$

Die überstreichende Linie kennzeichnet hierbei eine *Zeitmittelung*.

$\varphi_{xy}(\tau)$ ist ein quantitatives Maß für die lineare statistische Abhängigkeit der Augenblickswerte von Musterfunktionen $x(t)$ und $y(t + \tau)$ der beiden Zufallsprozesse und dient somit der Beschreibung der statistischen Verwandtschaft zwischen diesen. Es gilt:

- Sind $x(t)$ und $y(t)$ unkorreliert, so ist $\varphi_{xy}(\tau)$ identisch 0 (das heißt für alle Werte von τ).
- Im allgemeinen ist $\varphi_{xy}(\tau)$ nicht symmetrisch, sondern das KKF–Maximum tritt bei $\tau_{\max} \neq 0$ auf.
- In diesem Fall ergibt sich die maximale Korrelation durch eine gegenseitige Verschiebung der beiden betrachteten Signale um die Zeit τ_{\max} .

Setzt man in obiger Gleichung $y(t) = x(t)$, so kommt man zur **Autokorrelationsfunktion** (AKF)

$$\varphi_{xx}(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Die AKF ist ein Maß für die inneren statistischen Bindungen eines durch die Musterfunktion $x(t)$ festgelegten stationären und ergodischen Prozesses.
- Ist $x(t)$ reell, so ist $\varphi_{xx}(\tau)$ eine reelle gerade Funktion: $\varphi_{xx}(-\tau) = \varphi_{xx}(\tau)$. Phasenbeziehungen gehen in der AKF verloren. Beschreibt $x(t)$ einen komplexen Prozesse, so ist auch die AKF komplex.
- Der Maximalwert der AKF liegt bei $\tau = 0$. Es gilt stets $|\varphi_{xx}(\tau)| \leq \varphi_{xx}(0)$, wobei $\varphi_{xx}(0)$ die Signalleistung $P_x = E[x^2(t)]$ angibt.
- Der Gleichanteil eines nichtperiodischen Signals kann aus dem Grenzwert ($\tau \rightarrow \infty$) ermittelt werden:

$$\overline{x(t)} = E[x(t)] = \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_{xx}(\tau)}.$$

AKF und KKF beschreiben die inneren Bindungen bzw. die gegenseitigen statistischen Abhängigkeiten im Zeitbereich. Die entsprechenden Beschreibungsfunktionen im Frequenzbereich sind

- das **Leistungsdichtespektrum** $\Phi_{xx}(f)$, sowie
- das **Kreuzleistungsdichtespektrum** $\Phi_{xy}(f)$.

Bei ergodischen Prozessen gilt dabei:

$$\Phi_{xx}(f) \bullet \text{---} \circ \varphi_{xx}(\tau), \quad \Phi_{xy}(f) \bullet \text{---} \circ \varphi_{xy}(\tau).$$

Hinweis: Im Folgenden schreiben wir wie im Buch „Stochastische Signaltheorie“ vereinfachend für die AKF $\varphi_x(\tau)$ anstelle von $\varphi_{xx}(\tau)$ und für das LDS $\Phi_x(f)$ anstelle von $\Phi_{xx}(f)$. Weitere Informationen zu diesem Thema sowie Übungsaufgaben, Simulationen und Programmierübungen finden Sie im Kapitel 9 (Programm „stp“) des Praktikums „Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik“ am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der TU München. Diese Lehrveranstaltung basiert auf den 24 DOS-Programmen des Lehrsoftwarepaketes *LNTsim*.

Hinweise zum Herunterladen der Texte und Programme von *LNTsim*

Periodische AKF und KKF

Bei periodischen Signalen kann auf den Grenzübergang bei der AKF- und der KKF-Berechnung verzichtet werden, und man erhält mit der Periodendauer T_0 (diese muss für beide Signale gleich sein):

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot x(t + \tau) dt,$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot y(t + \tau) dt.$$

In diesem Fall ist die AKF ebenfalls eine periodische Funktion, und man spricht von der *periodischen Autokorrelationsfunktion* (PAKF). Diese zeigt folgende Eigenschaft:

$$\varphi_x(\pm T_0) = \varphi_x(\pm 2T_0) = \dots = \varphi_x(0).$$

Wir wenden nun obige Berechnungsvorschrift auf das Spreizsignal

$$c(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu \cdot g_c(t - \nu \cdot T_c)$$

an, wobei ein Rechteckimpuls $g_c(t)$ der Breite T_c vorausgesetzt wird; T_c nennt man die *Chipdauer*. Berücksichtigt man die Periodizität ($T_0 = P \cdot T_c$) der Amplitudenkoeffizienten $c_\nu \in \{\pm 1\}$, so ergeben sich die diskreten AKF-Werte bei Vielfachen von T_c mit dem Parameter λ :

$$\varphi_c(\lambda \cdot T_c) = \frac{1}{P} \cdot \sum_{\nu=0}^{P-1} c_\nu \cdot c_{\nu+\lambda}.$$

Der maximale PAKF-Wert ergibt sich für $\lambda = 0$ und für Vielfache der Periodenlänge P . Aufgrund des rechteckigen Impulses $g_c(t)$ ist der PAKF-Verlauf zwischen zwei Abtastwerten $\lambda \cdot T_c$ und $(\lambda + 1) \cdot T_c$ stets linear. Entsprechend ist die *periodische Kreuzkorrelationsfunktion* (PKKF) zwischen den zwei unterschiedlichen Spreizfolgen $\langle c_\nu \rangle$ und $\langle c'_\nu \rangle$ gleicher Periodenlänge P wie folgt gegeben:

$$\varphi_{cc'}(\lambda \cdot T_c) = \frac{1}{P} \cdot \sum_{\nu=0}^{P-1} c_\nu \cdot c'_{\nu+\lambda}.$$

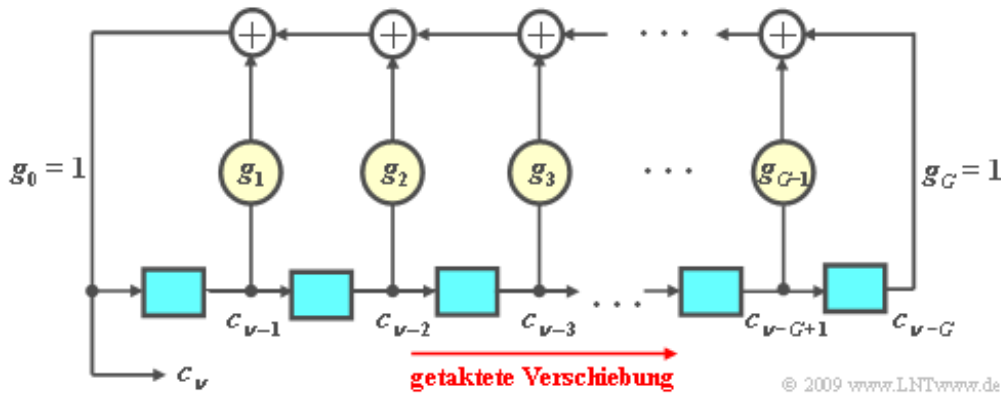
Beurteilungskriterien für PN–Spreizfolgen

Die Qualität eines auf PN–Modulation basierenden CDMA–Systems hängt signifikant von den PAKF– und PKKF–Eigenschaften der verwendeten Spreizfolgen ab. Zusammenfassend kann man sagen:

- Die PAKF der verwendeten Spreizcodeklasse sollte möglichst durch einen ausgeprägten *Peak* bei $\lambda = 0$ gekennzeichnet sein, um die Synchronisation beim Empfänger einfach gestalten zu können. Bei Mehrwegeempfang mit einem Echo der Laufzeitdifferenz $\lambda \cdot T_c$ ist zudem die Degradation aufgrund von Impulsinterferenzen um so geringer, je kleiner $|\varphi_c(\lambda \cdot T_c)|$ ist.
- Der störende Einfluss interferierender CDMA–Teilnehmer lässt sich durch den PKKF–Wert $\varphi_{cc'}(\lambda = 0)$ abschätzen. Ist dieser gleich 0, so spricht man von *orthogonalen Funktionen*. Die Fehlerwahrscheinlichkeit wird in diesem Fall nicht erhöht. Sind alle Spreizfolgen orthogonal, so ergibt sich auch bei J Teilnehmern die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie bei nur einem Nutzer.
- Diese letzte Aussage ist in synchronen Systemen mit verzerrungsfreiem Kanal (z.B. AWGN) von besonderer Bedeutung. Bei asynchronem Betrieb oder Mehrwegeempfang kommt es dagegen zu einer *De–Orthogonalisierung* und der strengeren Forderung, dass die PKKF zwischen den einzelnen Folgen zu allen Zeitpunkten (betragsmäßig) möglichst kleine Werte annehmen soll.
- Bei der Auswahl von Codefamilien für ein CDMA–System ist weiter darauf zu achten, dass bei gegebenem Spreizgrad $J = P$ möglichst viele Codefolgen mit günstigen Eigenschaften hinsichtlich der obigen drei Punkte gefunden werden können, um somit auch möglichst viele Teilnehmer gleichzeitig im gleichen Frequenzband versorgen zu können.

PNFolgen maximaler Länge (1)

Mit einem rückgekoppelten Schieberegister wie unten dargestellt lässt sich eine Folge mit günstigen Autokorrelationseigenschaften erzeugen, wenn die Rückführungskoeffizienten $g_i, i = 1, \dots, G-1$ geeignet gewählt werden. Die Folge $\langle c_\nu \rangle$ ist periodisch und deshalb im strengen Sinne nicht zufällig. Aufgrund der großen Periodenlänge P erscheint sie aber für einen unbedarften Betrachter als stochastisch. Man spricht von einer **PN-Folge** (Pseudo Noise).



Im **Kapitel 2.5** des Buches „Stochastische Signaltheorie“ ist diese Schaltung im Detail beschrieben. Hier folgt nur eine kurze Zusammenfassung:

- Die zu früheren Zeitpunkten generierten Binärwerte $c_{\nu-1}, \dots, c_{\nu-G}$ sind in den G Speicherzellen des Schieberegisters abgelegt. Man bezeichnet G als den *Grad* des Schieberegisters.
- Die Koeffizienten g_1, \dots, g_{G-1} sind Binärwerte, wobei eine „1“ eine Rückkopplung an der entsprechenden Stelle des Schieberegisters kennzeichnet und eine „0“ keine Rückführung.
- Für das aktuell erzeugte Symbol gilt mit $g_i \in \{0, 1\}$ und $i = 1, \dots, G-1$:

$$c_\nu = (g_1 \cdot c_{\nu-1} + g_2 \cdot c_{\nu-2} + \dots + g_i \cdot c_{\nu-i} + \dots + g_{G-1} \cdot c_{\nu-G+1} + c_{\nu-G}) \bmod 2.$$

- Die Modulo-2-Addition kann zum Beispiel durch eine XOR-Verknüpfung realisiert werden:

$$(x + y) \bmod 2 = x \text{ XOR } y = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

- Sind nicht alle G Speicherzellen mit Nullen vorbelegt, so entsteht eine periodische Zufallsfolge $\langle c_\nu \rangle$. Die Periodenlänge P dieser Folge hängt stark von den Rückkopplungskoeffizienten g_i ab.
- Für jeden Grad G gibt es zumindest zwei Konfigurationen mit der hierfür maximalen Periodenlänge

$$P_{\max} = 2^G - 1.$$

In der folgenden Tabelle sind für einige Werte von G das Generatorpolynom einer solchen M -Sequenz und die dazugehörige (maximale) Periodenlänge P angegeben, wobei das „ M “ für „Maximal“ steht. Auf der nächsten Seite werden die hier gemachten Aussagen am Beispiel $G = 4$ verdeutlicht.

Grad G	Polynom	Periode P
4	$D^4 + D^3 + 1$	15
5	$D^5 + D^3 + 1$	31
6	$D^6 + D^5 + 1$	63
7	$D^7 + D^4 + 1$	127
9	$D^9 + D^5 + 1$	511
15	$D^{15} + D^{14} + 1$	32.767
31	$D^{31} + D^{28} + 1$	2.147.483.647

© 2009 www.LNTwww.de

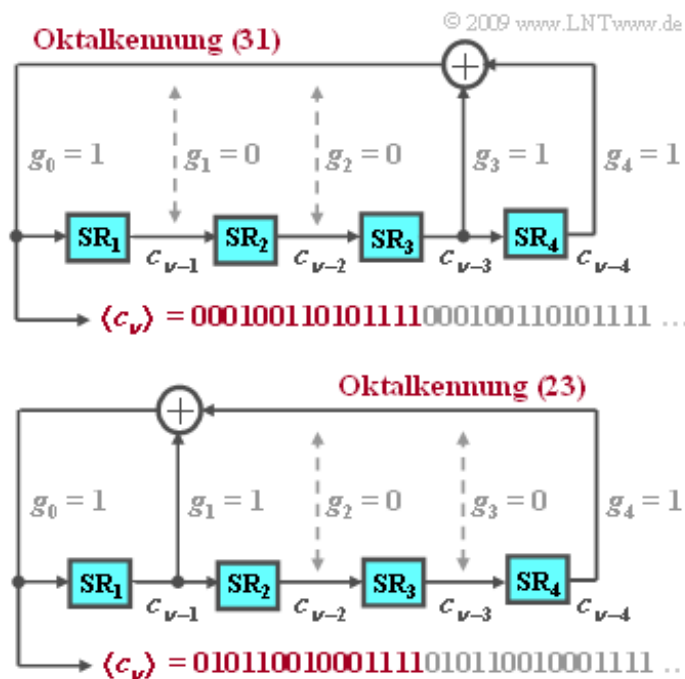
PN-Folgen maximaler Länge (2)

Die Grafik zeigt zwei mögliche Anordnungen zur Erzeugung einer PN-Folge maximaler Länge für $G = 4 \Rightarrow P = 15$. Als Kurzbezeichnung wird meist die Oktaldarstellung der Binärzahl $(g_G, \dots, g_2, g_1, g_0)$ gewählt, wobei $g_0 = g_G = 1$ anzusetzen ist. Für die obere Konfiguration erhält man $(11001)_{\text{binär}} = (31)_{\text{oktal}}$, das dazugehörige Generatorpolynom lautet

$$G(D) = D^4 + D^3 + 1.$$

Die untere Anordnung $(10011)_{\text{binär}} = (23)_{\text{oktal}}$ ist dagegen durch das zu $G(D)$ reziproke Polynom $G_R(D)$ beschreibbar:

$$G_R(D) = D^4 \cdot (D^{-4} + D^{-3} + 1) = D^4 + D + 1.$$



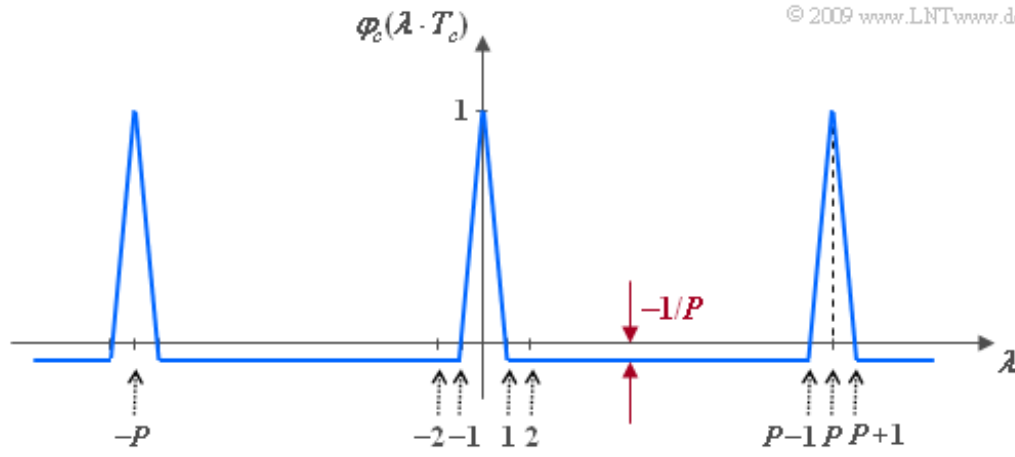
Da sowohl $G(D)$ als auch $G_R(D)$ **primitive Generatorpolynome** darstellen (der Nachweis hierfür ist nicht einfach), haben beide Ausgangsfolgen die für $G = 4$ maximale Periodenlänge $P = 15$. Wie in **Aufgabe A5.3** gezeigt wird, ergibt sich die PAKF in der unipolaren Darstellung $\Rightarrow c_\nu \in \{0, 1\}$ zu

$$\varphi_{c, \text{unipolar}}(\lambda \cdot T_c) = \begin{cases} (P + 1)/(2P) & \text{für } \lambda = 0, \pm P, \pm 2P, \dots \\ (P + 1)/(4P) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Umsetzung in bipolare Amplitudenkoeffizienten ($0 \Rightarrow +1, 1 \Rightarrow -1$) erhält man

$$\varphi_{c, \text{bipolar}}(\lambda \cdot T_c) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = 0, \pm P, \pm 2P, \dots \\ -P & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieser Verlauf ist nachfolgend skizziert. Man erkennt den gewünschten ausgeprägten Peak in der PAKF. Dagegen sind die Kreuzkorrelationseigenschaften der PN-Sequenzen weniger gut, wie im Kapitel 5.4 noch gezeigt werden wird.



Codefamilien mit MSequenzen

Bei CDMA wird für jeden Teilnehmer eine spezifische Spreizfolge gleicher Periodenlänge P benötigt. Als **Codefamilie** bezeichnet man eine (möglichst große) Menge an Spreizsequenzen gleicher Periodenlänge P , gültig jeweils für einen Registergrad G .

Die Tabelle zeigt, dass die Anzahl von PN-Sequenzen maximaler Länge sehr gering ist. Beispielsweise gibt es für den Grad $G = 5 \Rightarrow P = 31$ gerade einmal sechs M -Sequenzen, nämlich die PN-Generatoren mit den Oktalkennungen (45), (51), (57), (67), (73) und (75).

Grad G	3	4	5	7	11	15
Periode $P = 2^G - 1$	7	15	31	127	2047	32767
Anzahl M -Sequenzen	2	2	6	18	176	1800
Mächtigkeit	2	0	3	6	4	2

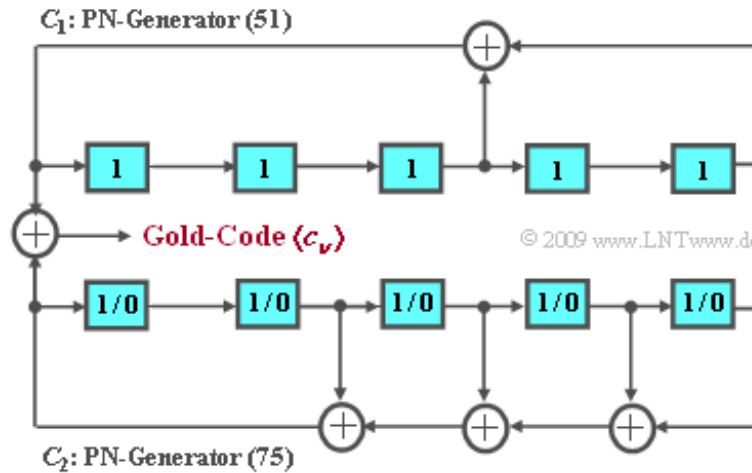
© 2009 www.LNTwww.de

Desweiteren ist in der Literatur auch der Begriff **Mächtigkeit** der Codefamilie zu finden. Diese Größe gibt an, wie viele M -Sequenzen und damit gleichzeitige CDMA-Teilnehmer möglich sind, wenn man fordert, dass alle Codepaare „günstige PKKF-Eigenschaften“ aufweisen. Aus Platzgründen kann hier nicht explizit ausgeführt werden, was man unter „günstig“ genau zu verstehen hat. Hierzu sei auf die Originalliteratur verwiesen, z.B. [ZP85].

Die letzte Zeile in obiger Tabelle macht deutlich, dass die Mächtigkeit von M -Sequenz-Codefamilien äußerst beschränkt ist, auch bei großem G und damit großer Periodenlänge P . Ist G ein Vielfaches von 4 $\Rightarrow P = 15, P = 255, P = 4095$ usw., so gibt es grundsätzlich keine günstigen Paare.

Gold-Codes

Um größere Codefamilien als mit M-Sequenzen möglich zu erhalten, müssen die Anforderungen an die PKKF abgeschwächt werden. Mit dieser Einschränkung erhält man aber Codefamilien mit einer weitaus größeren Mächtigkeit, so dass auch mehr CDMA-Teilnehmer versorgt werden können.



Gold-Codes verwenden dieses Prinzip. Die Vorschrift zur Erzeugung einer **Gold-Code-Familie** (GCF) lautet, wobei ein „+“ eine Modulo-2-Addition bezeichnet:

$$GCF(C_1, C_2) = \{C_1, C_2, C_1 + C_2, C_1 + D \cdot C_2, C_1 + D^2 \cdot C_2, \dots, C_1 + D^{P-1} \cdot C_2\}.$$

Das Prinzip ist in der obigen Grafik an einem Beispiel dargestellt:

- Die Folgen C_1 und C_2 sind ein günstiges Paar von M-Sequenzen gleicher Periodenlänge, zum Beispiel die PN-Generatoren mit den Oktalkennungen (51) und (75) vom Grad $G = 5$ und damit der Periodenlänge $P = 31$.
- Die GC-Familie besteht zum einen aus diesen beiden M-Sequenzen und aus Modulo-2-Addition dieser Folgen. Dabei wird C_1 mit fester Phase (gekennzeichnet durch die Vorbelegung aller Speicherzellen mit Einsen) verwendet, während für die Folge C_2 alle P möglichen Anfangsphasen zulässig sind (alle Vorbelegungen außer der Nullbelegung).
- Verwendet man eine solche Codefamilie für CDMA, so stehen insgesamt $K_{GCF} = P + 2 = 2^G + 1$ Folgen zur Verfügung. Die PAKF dieser Folgen ist nun aber nicht mehr zweiwertig wie die beiden PN-Sequenzen (+1 bzw. -1/31), sondern vierwertig (+1, +7/31, -1/31, -9/31). Durch die Phase von C_2 ändert sich zwar der spezifische Verlauf, aber nicht die möglichen PAKF-Werte.

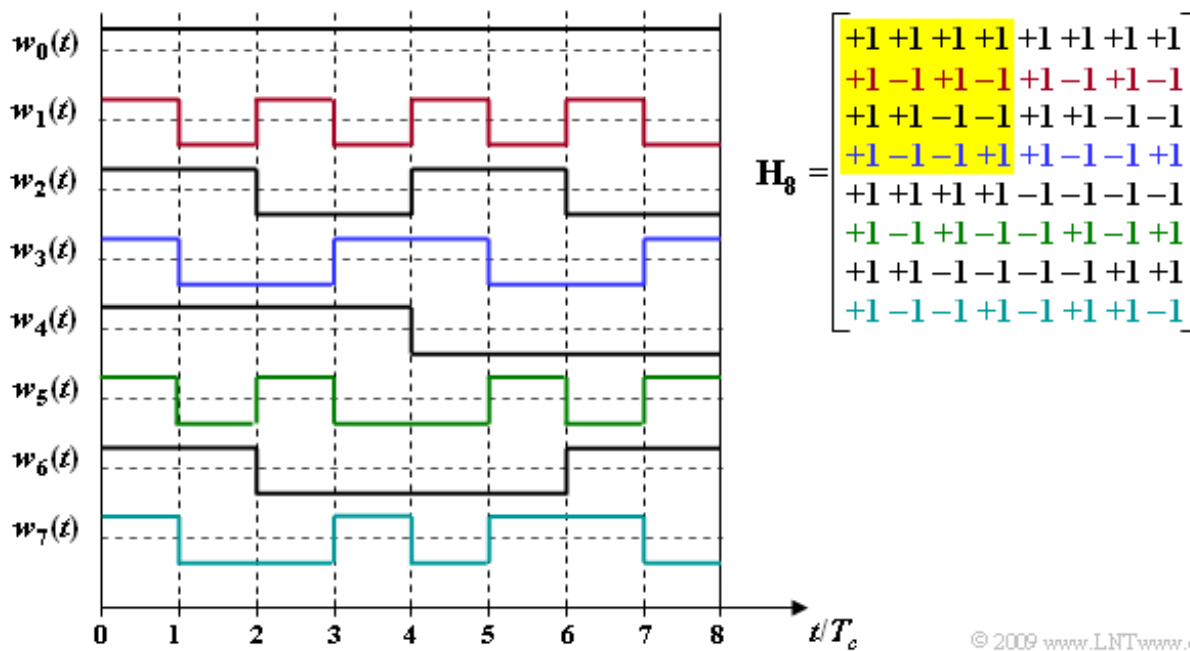
Gold-Codes werden zum Beispiel bei UMTS zur Verwürfelung herangezogen, wie im **Kapitel 4.3** des Buches „Beispiele von Nachrichtensystemen“ ausgeführt ist. Die beiden Muttercode-Schieberegister sind dabei jeweils mit $G = 18$ Speicherzellen aufgebaut.

Walsh-Funktionen

Spreizfolgen mit sehr günstigen PKKF-Eigenschaften sind die so genannten **Walsh-Funktionen**, deren Konstruktion auf der **Hadamard-Matrix** basiert und durch Rekursion in einfacher Weise durchführbar ist. Ausgehend von der Matrix H_2 können weitere Hadamard-Matrizen H_{2^J} wie folgt generiert werden:

$$H_2 = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H_{2^J} = \begin{bmatrix} H_J & H_J \\ H_J & -H_J \end{bmatrix} \Rightarrow H_4 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Die J Zeilen einer solchen Matrix beschreiben die J möglichen Spreizfolgen (jeweils der Länge J), die zur Kennzeichnung von $w_0(t)$ bis $w_{J-1}(t)$ durchnummeriert werden. Die Grafik zeigt die Hadamard-Matrix H_8 (rechts) und die damit $J-1$ konstruierbaren Spreizfolgen. $J-1$ deshalb, da die ungespreizte Folge $w_0(t)$ meist nicht verwendet wird. Beachten Sie bitte in der Grafik die farbliche Zuordnung zwischen den Zeilen der Hadamard-Matrix und den Spreizfolgen $w_j(t)$. Die Matrix H_4 ist gelb hinterlegt.



Man erkennt aus dieser Darstellung:

- Nimmt man zwei beliebige Zeilen und bildet die Korrelation (Mittelung über die Produkte), so ergibt sich stets der PKKF-Wert 0. Somit sind Walsh-Funktionen für einen verzerrungsfreien Kanal und ein synchrones CDMA-System aufgrund ihrer Orthogonalität optimale Spreizfolgen.
- Bei asynchronem Betrieb (Beispiel: Uplink eines Mobilfunksystems) oder De-Orthogonalisierung aufgrund von Mehrwegeausbreitung sind dagegen Walsh-Funktionen allein zur Bandspreizung nicht unbedingt geeignet – siehe **Aufgabe A5.4**.
- Hinsichtlich PAKF sind diese Folgen weniger gut: Jede einzelne Walsh-Funktion hat eine andere PAKF und jede einzelne PAKF ist ungünstiger als bei einer vergleichbaren PN-Sequenz. Das bedeutet: Die Synchronisierung ist bei Walsh-Funktionen schwieriger als mit PN-Sequenzen.

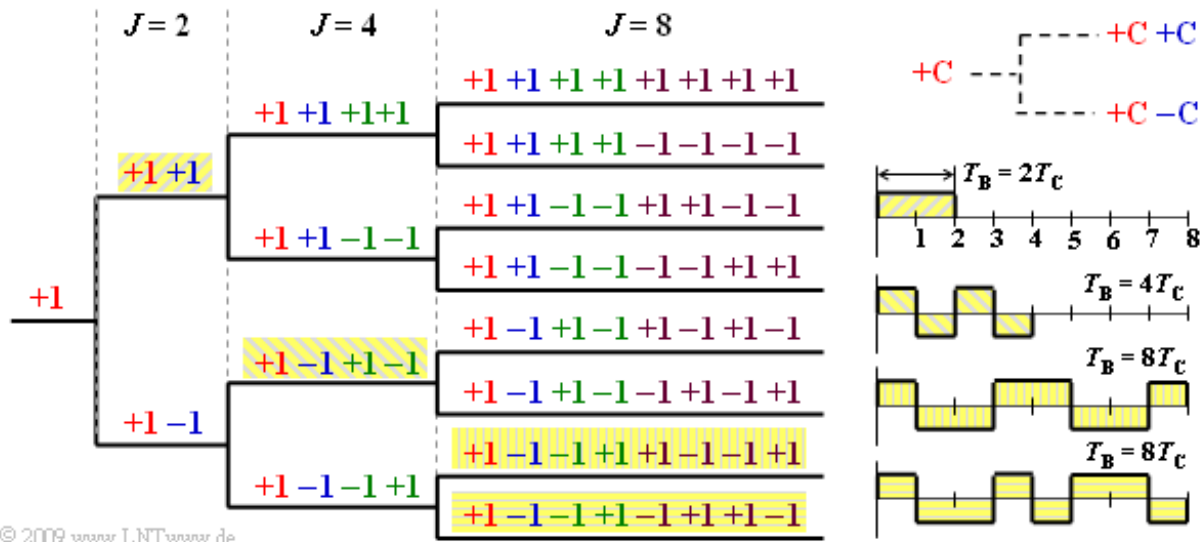
Hinweis: Die nachfolgende Animation zeigt den Konstruktionsalgorithmus solcher Folgen:

Codes mit variablem Spreizfaktor (OVSF-Code)

Das 3G-Mobilfunksystem UMTS stellt verschiedene Datenraten zur Verfügung. Hierzu werden

- Spreizfolgen mit unterschiedlichen Spreizfaktoren $J = 4$ bis $J = 512$ benötigt,
- die aber wiederum zueinander orthogonal sein müssen.

Die so genannten **OVSF-Codes** (*Orthogonal Variable Spreading Factor*) können, wie in der Grafik zu sehen ist, mit Hilfe eines Codebaumes erstellt werden. Dabei entstehen bei jeder Verzweigung aus einem Code C zwei neue Codes $(+C +C)$ und $(+C -C)$, wie in der Grafik oben rechts angedeutet.



© 2009 www.LNTwww.de

Anzumerken ist, dass kein Vorgänger und Nachfolger eines Codes von anderen Teilnehmern benutzt werden darf. Im Beispiel könnte demnach folgende Auswahl getroffen werden:

- acht Codes mit dem Spreizfaktor $J = 8$, oder
- die vier hinterlegten Codes – einmal mit $J = 2$, einmal mit $J = 4$ und zweimal mit $J = 8$.

Im zweiten Fall können die weiteren sechs Codes mit $J = 8$ nicht verwendet werden, da sie entweder mit „ $+1 +1$ “ oder mit „ $+1 -1 +1 -1$ “ beginnen. Aus den vier zugehörigen Spreizfolgen in der Grafik rechts unten erkennt man, dass bei konstanter Chipdauer T_C der Nutzer mit dem Spreizfaktor $J = 2$ mit höherer Datenrate übertragen kann als die Teilnehmer mit $J = 4$ bzw. $J = 8$, da seine Bitdauer T_B kleiner ist.

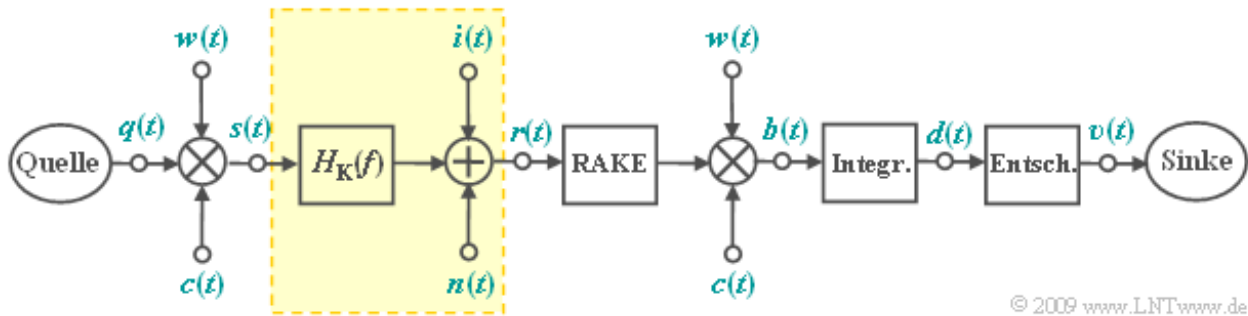
Aus der Grafik erkennt man weiter, dass die periodische KKF an der Stelle $\tau = 0$ stets 0 ist. Das heißt: Bildet man das Produkt von zwei beliebigen dieser Folgen und integriert man über den dargestellten Zeitbereich, so ergibt sich stets der Wert 0. Das bedeutet: Ein OVSF-Code ist orthogonal zu allen anderen OVSF-Codes der gleichen Familie, solange es nicht zu Verschiebungen kommt.

Hinweis: Die folgende Animation zeigt den Konstruktionsalgorithmus dieser Codes und die zulässige Auswahl der Spreizfolgen:

OVSF-Codes

Das CDMA–System IS–95

Die Eigenschaften der PN–Modulation sollen nun am Beispiel des amerikanischen Mobilfunkstandards **IS–95**, der sich aus den Arbeiten der Fa. Qualcomm Inc. und insbesondere von **Andrew J. Viterbi** ergeben hat, quantitativ angegeben werden. In etwas vereinfachter Darstellung – ohne Faltungscodierer, Interleaver und De–Interleaver sowie dem Viterbi–Decoder beim Empfänger – ergibt sich das folgende Blockschaltbild.



Es gelten folgende Aussagen:

- Das Spreizsignal $c(t)$ bewirkt eine *Bandspreizung* um den Spreizfaktor J , wobei auf den nächsten Seiten sowohl Walsh–Funktionen als auch M–Sequenzen betrachtet werden. Die *Bandstauchung* beim Empfänger benutzt phasensynchron die gleiche Spreizfolge.
- Das zusätzliche ± 1 –Signal $w(t)$ ermöglicht eine zusätzliche *Verwürfelung*, bewirkt jedoch keine weitere Bandspreizung. Die Rechteckdauer von $w(t)$ ist genau so groß wie die Rechteckdauer von $c(t)$. Man nennt T_c die *Chipdauer*.
- Ohne Bandspreizung und Verwürfelung (bzw. mit $J = 1$) entspricht die Übertragungskette der **BPSK–Modulation**. Das Matched–Filter ist durch die Variante **Integrate & Dump** realisiert, so dass es sich um ein optimales System handelt.
- Mit $H_K(f) = 1$ ergibt sich das *AWGN–Kanalmmodell* mit dem gaußverteilten Rauschsignal $n(t)$ und der AWGN–Kenngröße E_B/N_0 . Die zusätzliche Störkomponente $i(t)$ fasst die *Interferenzen* der anderen Teilnehmer zusammen.
- Bei einem Mehrwegekanal (ein Hauptpfad und ein oder mehrere Nebenpfade) können die entstehenden Impulsinterferenzen durch den Einsatz eines RAKE–Empfängers vermindert werden. Hierauf wird erst auf der letzten Seite dieses Abschnitts näher eingegangen.

Alle nachfolgenden Ergebnisse wurden mit dem Simulationsprogramm „CDMA“ ermittelt. Dieses ist Bestandteil des Lehrsoftwarepakets *LNTwin* und wird an der TU München im Praktikum „Simulation digitaler Übertragungssysteme“ [Söd01] eingesetzt.

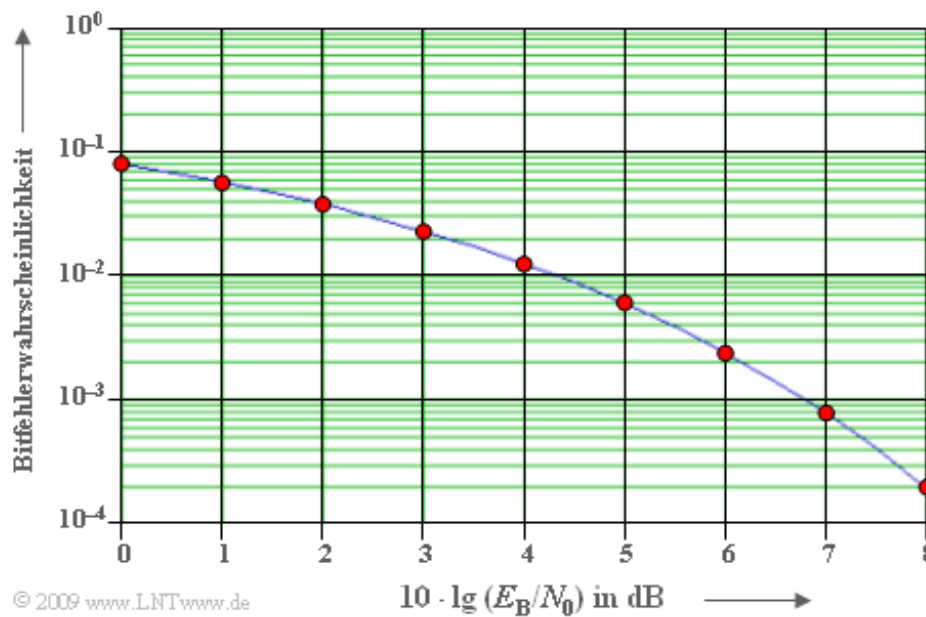
Hinweise zum Download der Programme und Anleitungen von *LNTwin*

Systemkonfigurationen mit minimaler Fehlerwahrscheinlichkeit

Die nachfolgende Grafik zeigt als durchgezogene blaue Kurve die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei BPSK in Abhängigkeit des logarithmierten AWGN-Parameters E_B/N_0 (Signalenergie pro Bit bezogen auf die Rauschleistungsdichte). Es gilt mit der **komplementären Gaußschen Fehlerfunktion** $Q(x)$:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right).$$

Beispielsweise ergibt sich für $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 8$ dB näherungsweise $p_B = 2 \cdot 10^{-4}$.

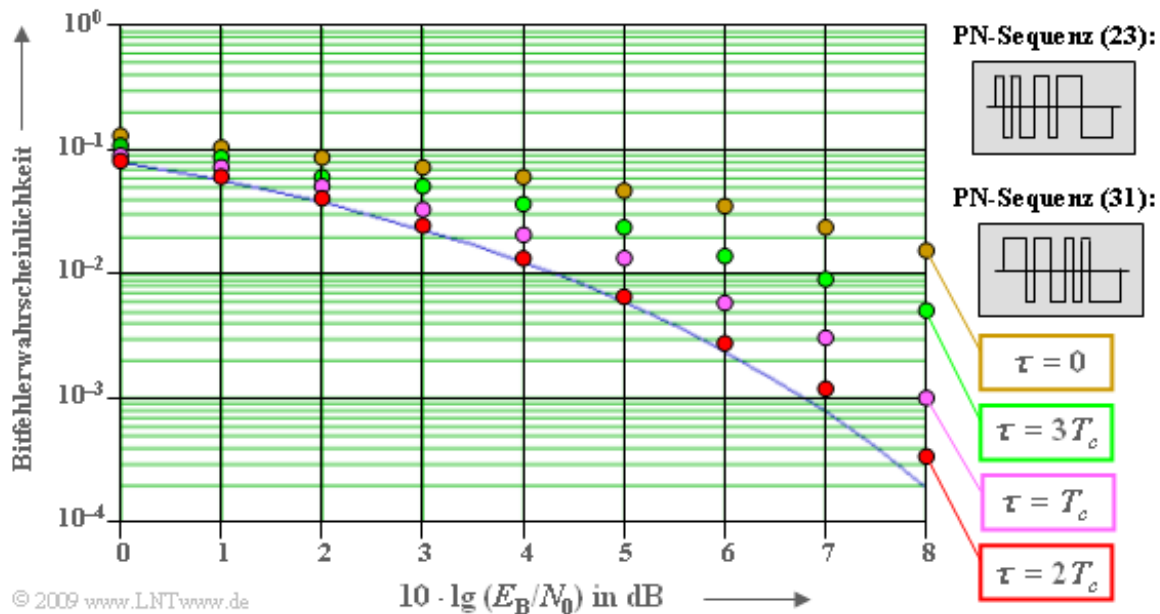


Den gleichen minimalen Wert liefert eine Simulation (rote Punkte) unter folgenden Bedingungen:

- die PN-Modulation, egal ob mit einer M-Sequenz oder mit einer Walsh-Funktion, bei beliebigem Spreizgrad J , falls nur ein Teilnehmer aktiv ist,
- der synchrone CDMA-Betrieb mit Walsh-Funktionen, auch wenn im gleichen Frequenzband andere Nutzer (maximal $J-1$) aktiv sind,
- in beiden Fällen nur zutreffend beim AWGN-Kanal. Da hier keine Impulsinterferenzen auftreten, kann auch auf den RAKE-Empfänger verzichtet werden.

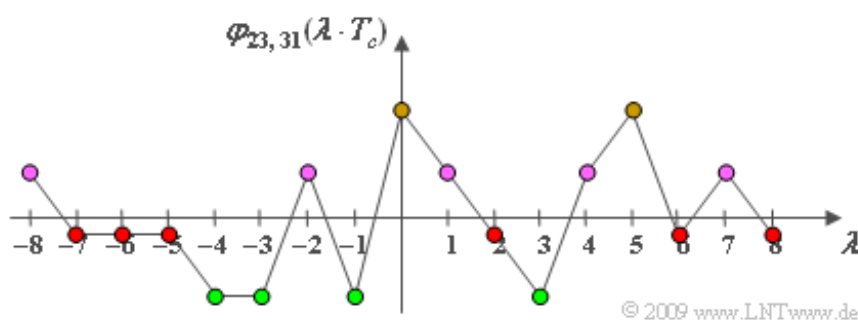
Zwei Teilnehmer mit M-Sequenz-Spreizung

Wir betrachten den störenden Einfluss eines zweiten Teilnehmers auf die Fehlerwahrscheinlichkeit von Teilnehmer 1. Die Spreizung erfolgt mittels M-Sequenzen, die im Gegensatz zu den Walsh-Funktionen nicht zueinander orthogonal sind. Der Spreizfaktor ist zu $J = 15$ angenommen. Die Oktalkennungen der verwendeten PN-Generatoren seien (23) und (31).



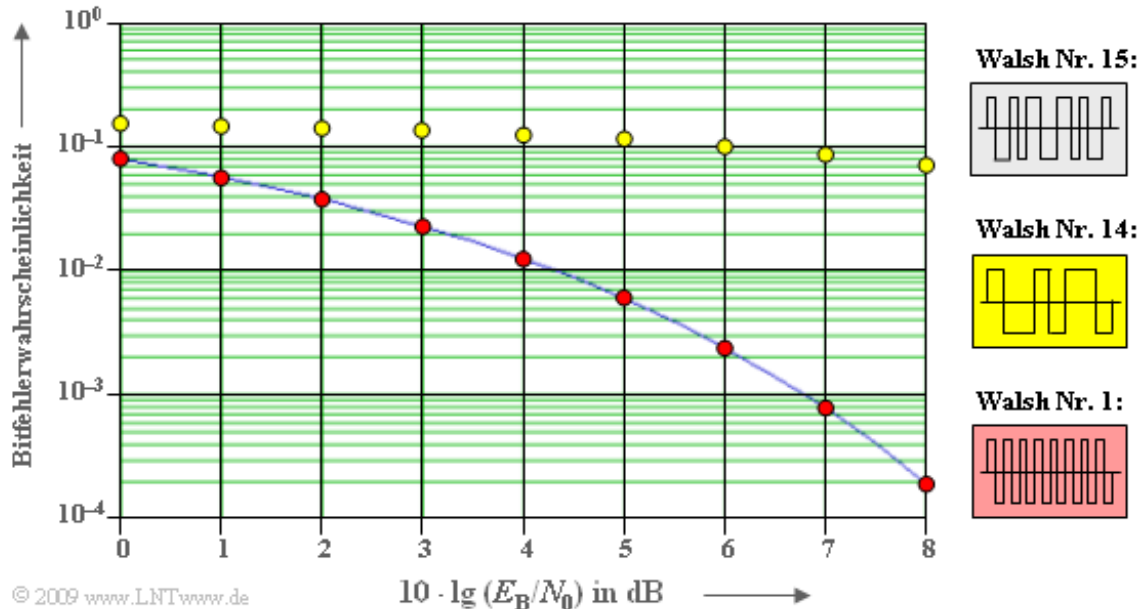
Diese Grafik lässt sich wie folgt deuten:

- Bei nur einem Teilnehmer ergibt sich die blaue durchgezogene Kurve. Der zweite (taktsynchrone) Teilnehmer erhöht die Fehlerwahrscheinlichkeit gravierend, zum Beispiel für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 8$ dB von $p_B = 2 \cdot 10^{-4}$ auf $p_B = 1.5\%$ (braune Markierungen, $\tau = 0$).
- Durch einen Phasenversatz der PN-Sequenzen gegeneinander um Vielfache der Chipdauer kann man beträchtliche Verbesserungen erzielen. Verschiebt man beispielsweise die PN-Sequenz (31) des interferierenden Teilnehmers um $\tau = 2T_c$ nach rechts (rote Markierungen), so erhält man statt 1.5% nur mehr die Fehlerwahrscheinlichkeit $3.4 \cdot 10^{-4}$.
- Die Ergebnisse werden verständlich, wenn man die PKKF $\varphi_{23,31}(\lambda T_c)$ zwischen den Sequenzen (23) und (31) betrachtet. Je kleiner der PKKF-Betrag ist, desto kleiner wird p_B . Man könnte also auch die zweite PN-Sequenz um 6 oder 8 Chipdauern nach rechts oder um 5, 6 oder 7 nach links verschieben. In all diesen Fällen ist der PKKF-Betrag minimal gleich $1/15$ (rote Punkte) im Vergleich zu $\varphi_{23,31}(0) = 7/15$, $\varphi_{23,31}(T_c) = 3/15$, $|\varphi_{23,31}(3 T_c)| = 5/15$.



Asynchroner CDMA-Betrieb mit Walsh-Funktionen

Auf Seite 2 dieses Kapitels wurde gezeigt, dass bei Verwendung von orthogonalen Walsh-Funktionen die Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B auch bei Vorhandensein anderer CDMA-Teilnehmer gegenüber der BPSK-Vergleichskurve (System ohne Bandspreizung) nicht verändert wird, so lange alle Teilnehmer synchron arbeiten. Diese Voraussetzung ist im Mobilfunk im allgemeinen für den Downlink (der Sender ist eine Basisstation) erfüllt, nicht jedoch im Uplink (Sender sind viele mobile Endgeräte).



Die Grafik zeigt die Fehlerwahrscheinlichkeitskurven für den jeweils ungünstigsten Phasenversatz der Spreizfolgen von betrachtetem Teilnehmer und störendem Teilnehmer (jeweils $J = 16$). Der erstere benutze dabei stets die Walsh-Funktion Nr. 15. Das Ergebnis kann wie folgt zusammengefasst werden:

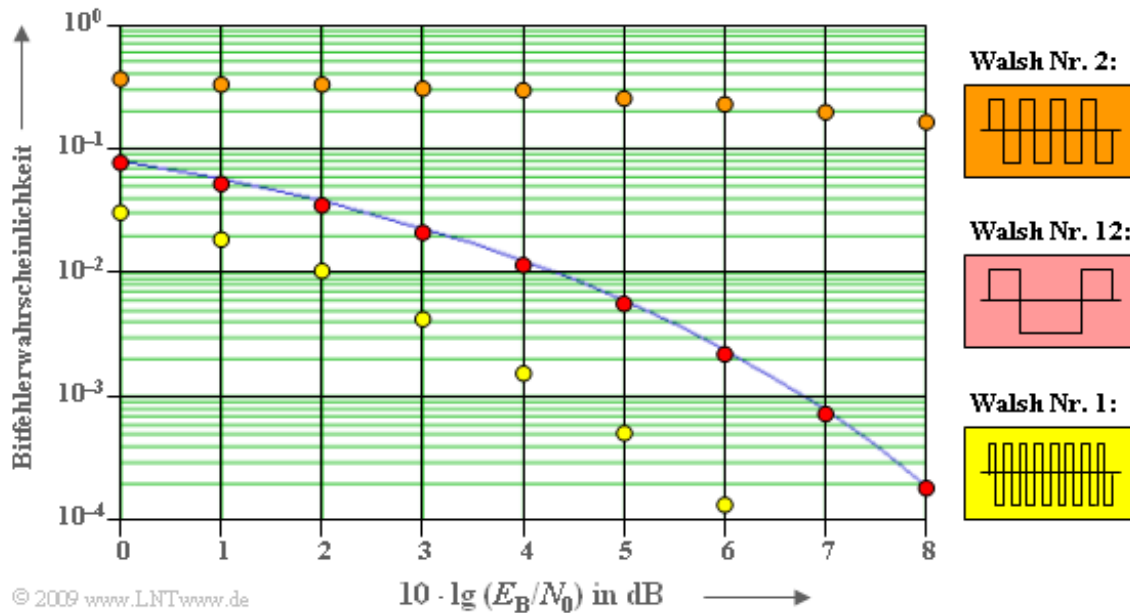
- Benutzt der störende Teilnehmer die Walsh-Funktion Nr. 1, so macht sich ein Phasenversatz nicht negativ bemerkbar, da die PKKF $\phi_{1,15}(\lambda \cdot T_c)$ für alle λ -Werte gleich 0 ist.
- Verwendet dagegen der zweite Teilnehmer die Walsh-Funktion Nr. 14 (oder eine andere ≥ 8), so ergibt sich durch einen Phasenversatz um eine Chipdauer eine enorme Verschlechterung. Es gilt zwar $\phi_{14,15}(0) = 0$, aber für $\lambda = 1$ hat diese PKKF mit $\phi_{14,15}(T_c) = 3/4$ einen sehr großen Wert.

Fehlerwahrscheinlichkeit bei Zweivegekanal (1)

Für den Rest von Kapitel 5.4 setzen wir voraus, dass der Kanal neben dem AWGN-Rauschen noch eine Mehrwegekomponente enthält. Die **Kanalimpulsantwort** lautet:

$$h_K(t) = 0.8 \cdot \delta(t) + 0.6 \cdot \delta(t - 2T_c)$$

Das heißt: Der Hauptpfad wird um den Faktor 0.8 gedämpft. Daneben gibt es ein Echo im Abstand $2T_c$ mit dem Gewicht 0.6. Die Grafik zeigt die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve, wobei eine Bandspreizung mit $J = 16$ durch Walsh-Funktionen vorausgesetzt wird. Interferenzen durch andere Nutzer treten nicht auf.



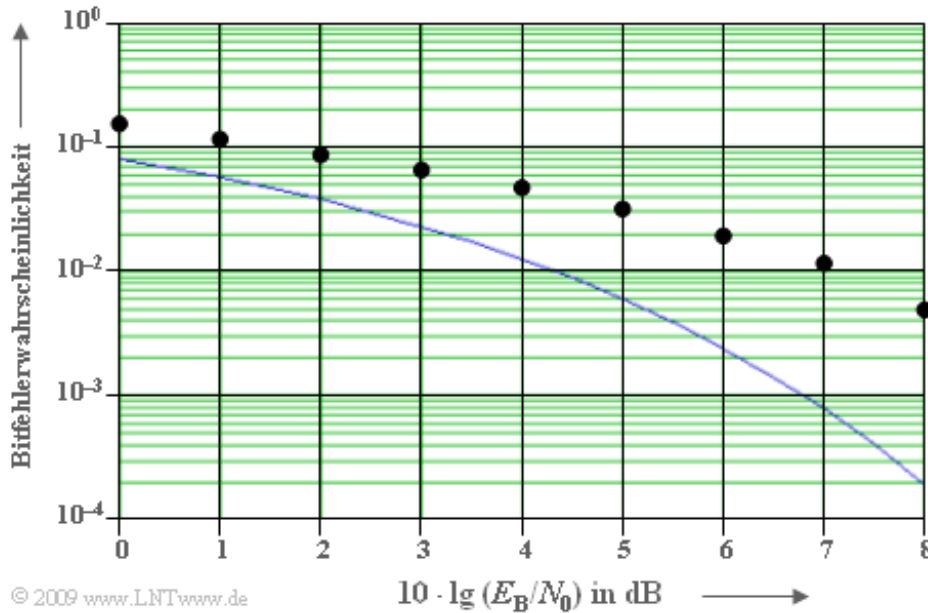
Die Kurven zeigen folgende Sachverhalte:

- Die Walsh-Funktion Nr. 2 (+ + - - + + - - ...) ist für den oben definierten Zweivegekanal denkbar ungeeignet, da sich hier das bandgespreizte Signal $b(t)$ aufgrund des Echos im Abstand $2T_c$ nahezu auslöscht. Dies erkennt man auch am PAKF-Wert $\varphi_{22}(\tau = 2T_c) = -1$.
- Die Walsh-Funktion Nr. 1 (+ - + - + - + - ...) ist dagegen bei diesem Kanal sehr gut geeignet. Das Echosignal überlagert sich dem Signal auf dem Hauptfeld konstruktiv und $b(t)$ wird fast verdoppelt. Das sehr gute Ergebnis lässt sich durch den PAKF-Wert $\varphi_{11}(\tau = 2T_c) = +1$ erklären.
- Für die Walsh-Funktion Nr. 12 gleichen sich die konstruktiven und destruktiven Überlagerungen nahezu aus, so dass die Fehlerwahrscheinlichkeit in etwa auf der BPSK-Kurve zu liegen kommt. Auch alle anderen Walsh-Funktionen liegen zwischen den braunen und gelben Grenzkurven.

Da aber ein Netzbetreiber für alle Teilnehmer gleiche Bedingungen bereitstellen muss und sich die Grafik ausschließlich auf den oben angegebenen Kanal bezieht (zum Beispiel ist bei einer Echoverzögerung um T_c die Walsh-Funktion Nr. 2 deutlich besser als Nr. 1), ist die hier betrachtete Konfiguration für den praktischen Betrieb ungeeignet. Die nächste Seite wird zeigen, wie man für alle Teilnehmer annähernd gleiche Bedingungen schaffen kann.

Fehlerwahrscheinlichkeit bei Zweivegekanal (2)

Eine Möglichkeit, die Qualität für die einzelnen Benutzer (unterschiedliche Walsh-Funktionen, hier alle mit Spreizfaktor $J = 16$) auch beim Zweivegekanal zu egalisieren, bietet die zusätzliche Verwürfelung mit $w(t)$ entsprechend dem vorne gezeigten **Blockschaltbild**. Für die folgende Grafik ist für jeden Benutzer eine zusätzliche M-Sequenz der Periodenlänge $P = 63$ (Grad $G = 6$) vorausgesetzt.

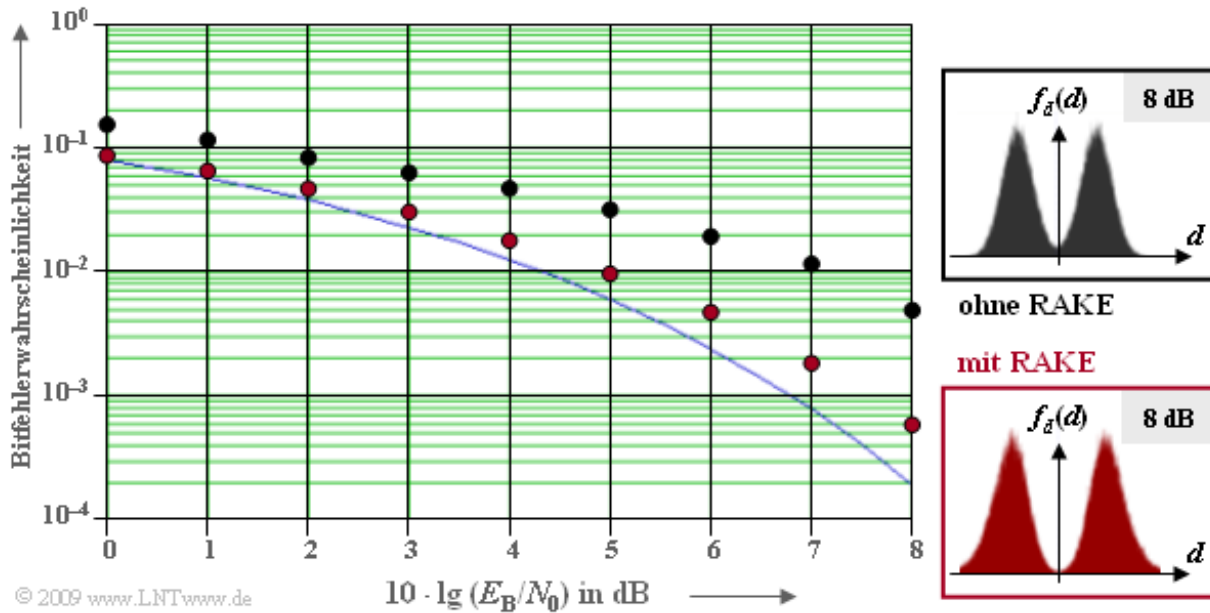


Zu dieser Darstellung ist anzumerken:

- Die eingezeichneten Punkte gelten für die Walsh-Funktion Nr. 12 als Spreizsignal $c(t)$ und eine zusätzliche Verwürfelung $w(t)$ durch die M-Sequenz mit Oktalkennung (163).
- Die Ergebnisse für andere Walsh-Funktionen, zum Beispiel Nr. 1 oder Nr. 2 unterscheiden sich demgegenüber innerhalb der Zeichengenauigkeit nur unwesentlich.
- Gegenüber dem reinen AWGN-Kanal (blaue Vergleichskurve) ergibt sich beim betrachteten Zweivegekanal mit den Koeffizienten 0.8 und 0.6 eine Degradation von etwa 2 bis 3 dB.

Untersuchungen zum RAKE Empfänger (1)

Betrachten wir abschließend die Verbesserung durch die Verwendung eines RAKE-Empfängers, die durch die nachfolgende Grafik verdeutlicht wird. Damit wird beispielsweise für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 8 \text{ dB}$ die Bitfehlerwahrscheinlichkeit von $6 \cdot 10^{-3}$ auf $5 \cdot 10^{-4}$ herabgesetzt.



Der Grund für diese Verbesserung ist die kleinere Varianz σ_d^2 der Detektionsnutzabstastwerte, wie aus den rechts skizzierten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_d(d)$ hervorgeht (gültig für $E_B/N_0 = 8 \text{ dB}$). Das kleinere σ_d ist allein darauf zurückzuführen, dass der RAKE-Empfänger die Impulsinterferenzen bekämpft. Der Anteil des AWGN-Rauschens $n(t)$ an der Gesamtvarianz σ_d^2 (der zweite Anteil ist auf die Impulsinterferenzen zurückzuführen) hängt allein von der Abszisse (E_B/N_0) ab und ist mit und ohne RAKE gleich groß.

Anzumerken ist, dass für dieses Diagramm die genau gleichen Voraussetzungen gelten wie für die Grafik auf der letzten Seite:

- Bandspreizung mit $J = 16$ und Walsh-Funktion Nr. 12,
- zusätzliche Verwürfelung durch die M-Sequenz $(163)_{\text{oktal}}$,
- Zweivegekanal mit $h_K(t) = 0.8 \cdot \delta(t) + 0.6 \cdot \delta(t - 2T_c)$.

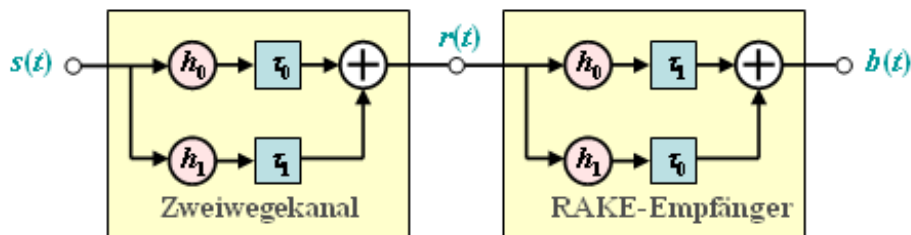
Das Prinzip des RAKE-Empfängers wird auf der nächsten Seite verdeutlicht.

Untersuchungen zum RAKE–Empfänger (2)

Das RAKE–Prinzip wird durch die nachfolgende Grafik verdeutlicht. Der Zweivegekanal besteht aus

- dem direkten Pfad mit Verzögerungszeit τ_0 und Gewicht h_0 ,
- einem Echo mit Verzögerung $\tau_1 > \tau_0$ und Gewicht h_1 .

Beide Amplitudenkoeffizienten seien reell. Als Normierungsbedingung gelte $h_0^2 + h_1^2 = 1$.



© 2009 www.LNTwww.de

Aufgabe des RAKE–Empfängers ist es, die Signalenergien der beiden Pfade (im allgemeinen: aller Pfade) auf einen einzigen Zeitpunkt zu konzentrieren. Er arbeitet demnach wie eine *Harke* für den Garten, was auch die deutsche Übersetzung für „RAKE“ ist.

Legt man einen Diracimpuls zur Zeit $t = 0$ an den Kanaleingang an $\Rightarrow s(t) = \delta(t)$, so gibt es am Ausgang des RAKE–Empfängers drei Diracimpulse entsprechend der Gleichung

$$b(t) = h_0 \cdot h_1 \cdot \delta(t - 2\tau_0) + (h_0^2 + h_1^2) \cdot \delta(t - \tau_0 - \tau_1) + h_0 \cdot h_1 \cdot \delta(t - 2\tau_1).$$

Die Signalenergie konzentriert sich im Ausgangssignal auf den Zeitpunkt $\tau_0 + \tau_1$. Von den insgesamt vier Wegen tragen zwei dazu bei. Die Diracfunktionen bei $2\tau_0$ und $2\tau_1$ bewirken zwar Impulsinterferenzen. Ihre Gewichte ($h_0 \cdot h_1$) sind aber deutlich kleiner als das Gewicht des Hauptpfades ($h_0^2 + h_1^2$).

Beispiel: Mit den Kanalparametern $h_0 = 0.8$ und $h_1 = 0.6$ beinhaltet der Hauptpfad des Kanals (mit Gewicht h_0) nur $0.8^2/(0.8^2 + 0.6^2) = 64\%$ der gesamten Signalenergie. Mit RAKE–Empfänger und den gleichen Gewichten lautet die obige Gleichung

$$b(t) = 0.48 \cdot \delta(t - 2\tau_0) + 1.0 \cdot \delta(t - \tau_0 - \tau_1) + 0.48 \cdot \delta(t - 2\tau_1).$$

Der Anteil des Hauptpfades an der Gesamtenergie beträgt nun $1^2/(1^2 + 0.48^2 + 0.48^2) \approx 68\%$.

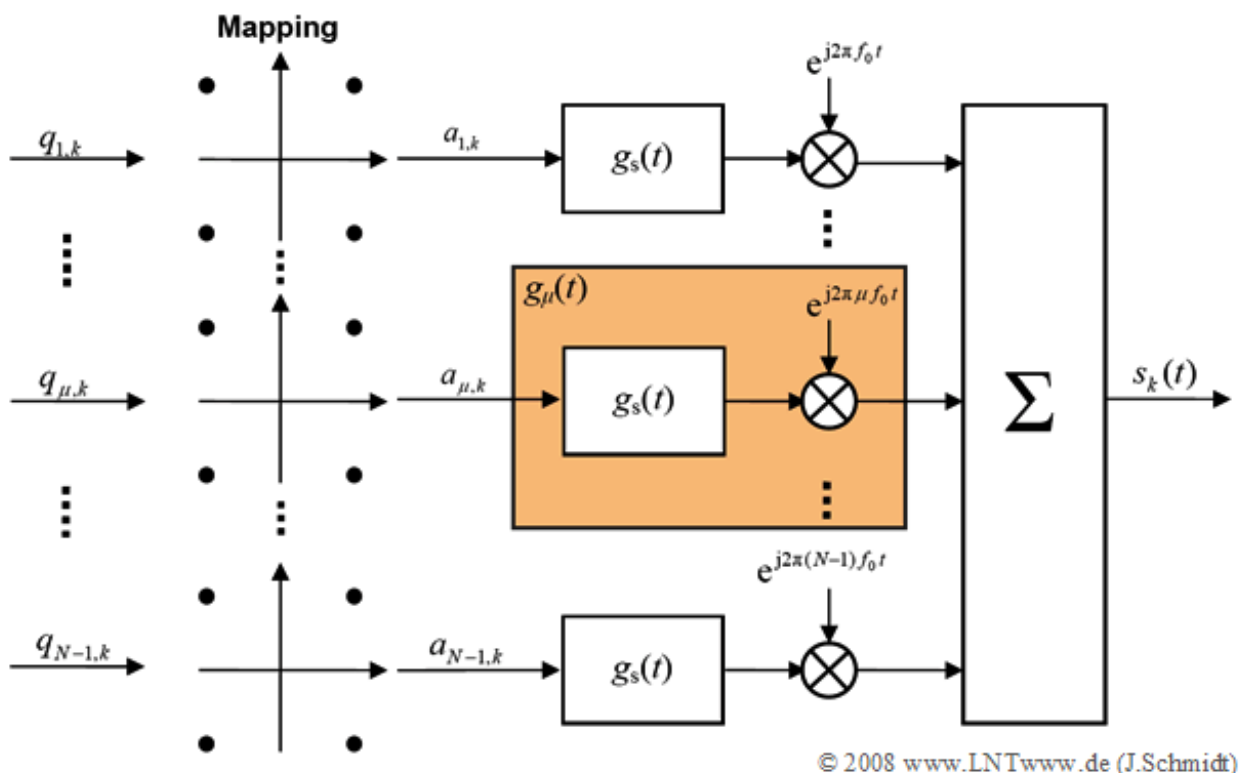
RAKE–Empfänger werden zur Implementierung in mobilen Geräten bevorzugt, haben aber bei vielen aktiven Teilnehmern nur eine begrenzte Leistungsfähigkeit. Bei einem Mehrwegekanal mit vielen (M) Pfaden hat auch der RAKE M Finger. Der Hauptfinger (*Main Finger*) – auch *Searcher* genannt – ist bei den meisten Mobilfunksystemen dafür verantwortlich, die individuellen Pfade der Mehrfachausbreitung zu identifizieren und einzuordnen.

Das Prinzip von OFDM – Systembetrachtung im Zeitbereich (1)

Orthogonal Frequency Division Multiplex (OFDM) ist ein digitales Mehrträger-Modulationsverfahren mit folgenden Eigenschaften:

- Statt eines breitbandigen, stark modulierten Signals werden zur Datenübertragung eine Vielzahl schmalbandiger, zueinander orthogonaler Unterträger verwendet. Dies ermöglicht unter anderem die Anpassung an einen frequenzselektiven Kanal.
- Die Modulation der Unterträger selbst erfolgt bei OFDM üblicherweise durch eine herkömmliche **Quadratur-Amplitudenmodulation** (QAM) oder durch **binäre Phasenmodulation** (BPSK), wobei sich die einzelnen Träger hinsichtlich der Modulationsart durchaus unterscheiden können.
- Unterschiede im Modulationsgrad führen dabei zu verschiedenen hohen Datenraten der Unterträger. Das heißt also, dass ein hochratiges Quellensignal zur Übertragung in mehrere Signale von deutlich niedrigerer Symbolrate aufgespaltet werden muss.

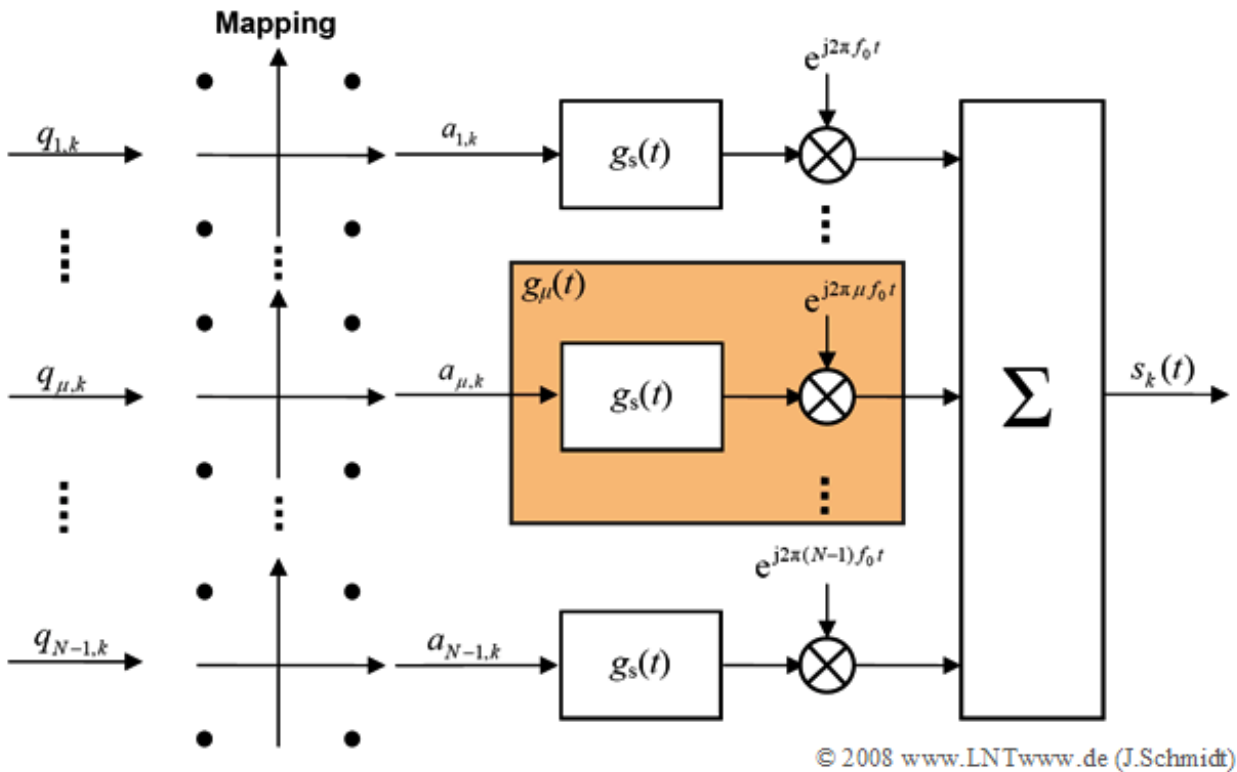
Die Möglichkeit, für verschiedene Teilbänder unterschiedlich robuste Modulationsverfahren einzusetzen, ist einer der großen Vorteile von OFDM. Hierauf wird in den Abschnitten **OFDM für 4G-Netze** und **Digital Subscriber Line** (DSL) noch näher eingegangen.



Die Grafik zeigt das Grundprinzip eines OFDM-Senders. Die Beschreibung folgt auf der nächsten Seite.

Das Prinzip von OFDM Systembetrachtung im Zeitbereich (2)

Die $N-1$ Teile des segmentierten Datenstroms $\langle q_{\mu,k} \rangle$ werden in diesem durch die Grafik verdeutlichten Beispiel 4-QAM-codiert. Anschließend wird die im Allgemeinen komplexe Amplitude $a_{\mu,k}$ (mit der Laufvariablen $\mu = 1, \dots, N-1$) impulsgeformt und mit dem μ -ten Vielfachen der Grundfrequenz f_0 moduliert. Die Darstellung des „nullten“ Zweiges ($\mu = 0$), der den Gleichanteil darstellt, wurde bewusst weggelassen, da dieser häufig zu Null gesetzt wird ($a_{0,k} = 0$).



Das Sendesignal ist nun die additive Überlagerung der einzelnen Teilsignale. Die Betrachtung erfolgt hier und auch im Folgenden im **äquivalenten Tiefpassbereich**, wobei auf den Index „TP“ verzichtet wird.

Als Impulsformfilter wird ein auf die Symboldauer T begrenztes Rechteck verwendet:

$$g_s(t) = \begin{cases} s_0 & 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Den Kehrwert $f_0 = 1/T$ bezeichnen wir als die **Grundfrequenz**.

Fasst man dieses Filter nun mit der jeweiligen Modulation zu

$$g_\mu(t) = \begin{cases} s_0 \cdot e^{j2\pi\mu f_0 t} & 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\mu \in \{0, \dots, N-1\}$ zusammen, so ergibt sich das OFDM-Sendesignal $s_k(t)$ im k -ten Zeitintervall:

$$s_k(t) = \sum_{\mu=0}^{N-1} a_{\mu,k} \cdot g_\mu(t - k \cdot T_R).$$

Für die Rahmendauer gelte zunächst $T_R = T$. Das gesamte **OFDM-Sendesignal** unter Berücksichtigung

aller Zeitintervalle lautet dann:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=0}^{N-1} a_{\mu,k} \cdot g_{\mu}(t - k \cdot T_R).$$

Das Prinzip von OFDM Systembetrachtung im Zeitbereich (3)

Die Symboldauer T ergibt sich bei einem Mehrträgersystem mit der Anzahl M der Signalraumpunkte und der Bitdauer T_B zu

$$T = N \cdot \text{ld}(M) \cdot T_B.$$

N gibt dabei wieder die Anzahl der Unterträger an.

Beispiel: Wir gehen von einem Einträgersystem mit der Datenrate 768 kbit/s und einem Mapping mit $M = 4$ Signalraumpunkten (4-QAM) aus. Die Symboldauer im Einträgerfall (*Single Carrier, SC*) beträgt dann:

$$T_{\text{SC}} = 1 \cdot \text{ld}(4) \cdot \frac{1}{7.68 \cdot 10^5} \text{s} \approx 2.6 \mu\text{s}.$$

Unter der Annahme, dass für ein Mehrträgersystem (*Multi Carrier, MC*) mit $N = 32$ Trägern das Modulationsverfahren 16-QAM verwendet wird, ergibt sich dagegen die Symboldauer zu

$$T_{\text{MC}} = 32 \cdot \text{ld}(16) \cdot \frac{1}{7.68 \cdot 10^5} \text{s} \approx 0.17 \text{ms}.$$

Die Symboldauer ist in diesem Fall um den Faktor 64 größer.

Fazit: Die Dauer eines Symbols erhöht sich bei einem Mehrträgersystem im Vergleich zu einem Einzelträgersystem deutlich, wodurch der störende Einfluss der Kanalimpulsantwort verringert wird und die Impulsinterferenzen abnehmen.

Systembetrachtung im Frequenzbereich (1)

Betrachten wir nun erneut das OFDM-Sendesignal im k -ten Zeitintervall mit $T_R = T$:

$$s_k(t) = \sum_{\mu=0}^{N-1} a_{\mu,k} \cdot g_{\mu}(t - k \cdot T),$$

wobei wir zunächst den Grundimpuls $g_{\mu}(t)$ symmetrisch um $t = 0$ ansetzen:

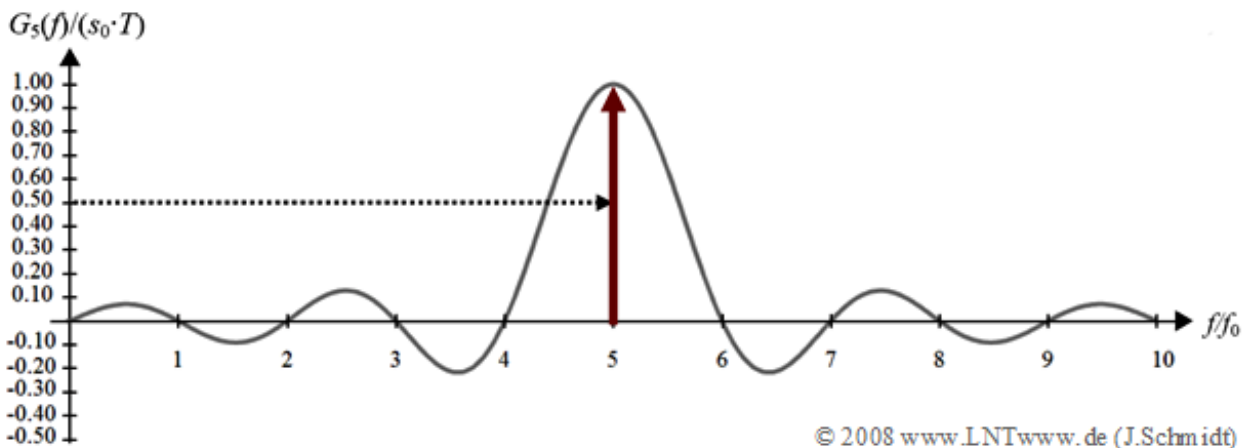
$$g_{\mu}(t) = \begin{cases} s_0 \cdot e^{j2\pi\mu f_0 t} & -T/2 < t < T/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei soll wieder $f_0 = 1/T$ gelten.

Im Spektralbereich korrespondiert eine solche akausale und mit einer (komplexen) Exponentialfunktion der Frequenz $\mu \cdot f_0$ modulierte Rechteckfunktion mit einer um $\mu \cdot f_0$ verschobenen si-Funktion:

$$G_{\mu}(f) = s_0 \cdot T \cdot \text{si}(\pi T(f - \mu f_0)).$$

Die Grafik zeigt diese Spektralfunktion (normiert auf den Maximalwert $s_0 \cdot T$) für $\mu = 5$.



Der rote Pfeil soll andeuten, dass im Falle eines zeitlich nicht beschränkten Grundimpulses die dargestellte si-Funktion durch einen Dirac-Impuls an der Stelle $\mu \cdot f_0$ ersetzt würde.

Fazit: Sind alle Amplitudenkoeffizienten $a_{\mu,k} \neq 0$, so setzt sich das Spektrum $S_k(f)$ des Sendesignals im k -ten Zeitbereichsintervall aus N um jeweils ein Vielfaches der Grundfrequenz f_0 verschobenen **si-Funktionen** zusammen. Die Funktion $\text{si}(x) = \sin(x)/x$ wird oft als *Spaltfunktion* bezeichnet.

Systembetrachtung im Frequenzbereich (2)

Berücksichtigt man weiter, dass wir hier von einem kausalen Grundimpuls

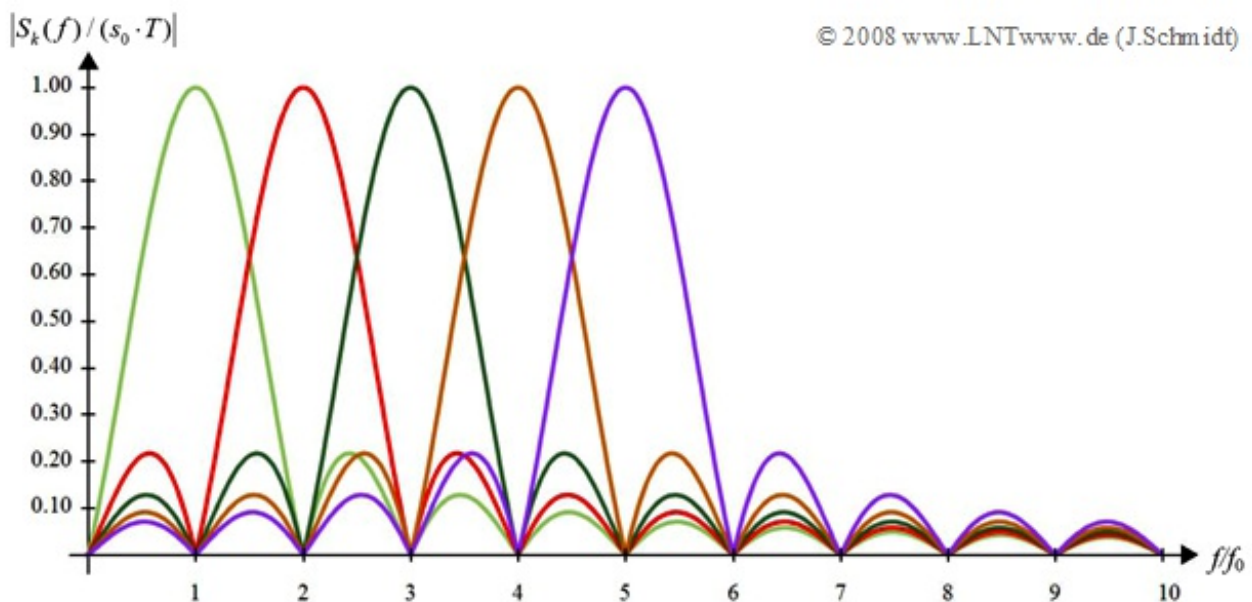
$$g_{\mu}(t) = \begin{cases} s_0 \cdot e^{j2\pi\mu f_0 t} & 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ausgehen, so ergibt sich das Spektrum zu

$$S_k(f) = s_0 \cdot T \cdot \sum_{\mu=0}^{N-1} a_{\mu,k} \cdot \text{si}(\pi \cdot T(f - \mu \cdot f_0)) \cdot e^{-j2\pi \frac{T}{2}(f - \mu \cdot f_0)}.$$

Die komplexe Exponentialfunktion kommt durch die Grenzen des hier zur Impulsformung verwendeten Rechtecks im Zeitbereich ($0 \dots T \Rightarrow$ Verschiebung um $T/2$) zustande. Die vorher gezeigte rein reelle si-Funktion würde hingegen dem nichtkausalen Rechteck von $-T/2$ bis $+T/2$ entsprechen.

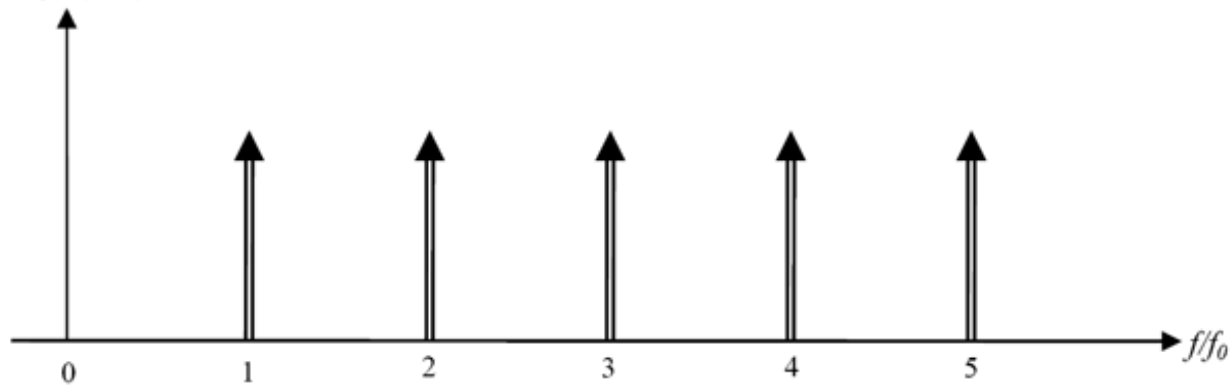
Die Grafik zeigt exemplarisch das Betragsspektrum eines OFDM-Signals mit fünf Trägern.



Auffallend ist, dass das Maximum eines jeden Subträgers mit den Nullstellen aller anderen Träger zusammenfällt. Dies entspricht der ersten Nyquistbedingung im Frequenzbereich. Diese Eigenschaft ermöglicht eine ICI-freie Abtastung (das heißt: ohne *Inter-carrier-Interferenz*) des Spektrums bei Vielfachen von f_0 . Die Orthogonalität ist also gewährleistet.

Fazit: Ein OFDM-Signal unter der Voraussetzung einer rechteckförmigen Impulsformung und eines Unterträgerabstandes von f_0 erfüllt die **erste Nyquistbedingung** im Zeit- und Frequenzbereich.

Würde man auf die Zeitbegrenzung bei der Impulsformung verzichten, so würden aus den dargestellten si-Funktionen im Abstand f_0 jeweils Diraclinien. Diese idealisierende und praktisch nicht umsetzbare Vereinfachung führt dann zu dem in der nachfolgenden Grafik gezeigten Spektrum.



Orthogonalitätseigenschaften der Träger

Die Zeitbegrenzung des Grundimpulses ermöglicht die separate Betrachtung der beiden Summen in der Gleichung des OFDM-Sendesignals:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k(t) \quad \text{mit} \quad s_k(t) = \sum_{\mu=0}^{N-1} a_{\mu,k} \cdot g_{\mu}(t - k \cdot T).$$

Der k -te Sendeimpuls ist dabei die Summe der um $k \cdot T$ verschobenen Grundimpulse $g_{\mu}(t)$, die jeweils mit den μ -ten Amplitudenkoeffizienten des QAM-Coders zum Zeitpunkt k gewichtet werden. Damit ergibt sich für das Spektrum $S_{\mu,k}(f)$ des μ -ten Trägers im k -ten Intervall:

$$S_{\mu,k}(f) = s_0 \cdot a_{\mu,k} \cdot T \cdot \text{si}(\pi \cdot T(f - \mu \cdot f_0)) \cdot e^{-j\pi T(f - \mu \cdot f_0)}.$$

Es gilt:

- Die Sendeimpulse $s_k(t)$ sind zueinander **orthogonal in der Zeit** (Laufvariable k), da sie sich durch die Zeitbegrenzung des Impulsformfilters $g_s(t)$ zeitlich nicht überlappen.
- Die zeitliche Begrenzung der Impulse führt zwar zu einer spektralen Überlappung, aber dennoch besteht auch **Orthogonalität bezüglich der Träger** (Laufvariable μ) wegen:

$$S_k(\mu \cdot f_0) = S_{\mu,k}(\mu \cdot f_0) = s_0 \cdot a_{\mu,k} \cdot T \quad \Rightarrow \quad \text{Beweis}$$

Fazit: Die **Orthogonalität des OFDM-Signals** $s(t)$ ist sowohl für die Laufvariable k (Zeit) als auch für die Laufvariable μ (Trägerfrequenzen) gegeben. Diese Orthogonalitätseigenschaften wurden bereits auf den vorhergehenden Seiten anhand von Grafiken verdeutlicht.

OFDM mittels diskreter Fouriertransformation

Betrachten wir nun erneut die sich zeitlich nicht überlappenden Sendesignalrahmen

$$s_k(t) = \sum_{\mu=0}^{N-1} a_{\mu,k} \cdot g_{\mu}(t - k \cdot T_R),$$

wobei k die Rahmennummer angibt. Diese besitzen zu den Abtastzeiten $k \cdot T_R + \nu \cdot T_A$ mit $0 \leq \nu < N$ und $T_A = T/N$ die Abtastwerte

$$s_{\nu,k} = \sum_{\mu=0}^{N-1} a_{\mu,k} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot \mu / N}.$$

Mit der Nomenklaturanpassung $s_{\nu,k} = d_{\nu,k}$ und $a_{\mu,k} = D_{\mu,k}$ entspricht diese Gleichung exakt der **Inversen Diskreten Fouriertransformation** – abgekürzt **IDFT** – im jeweils k -ten Intervall:

$$d_{\nu,k} = \sum_{\mu=0}^{N-1} D_{\mu,k} \cdot w^{-\nu \cdot \mu} \quad \text{mit} \quad w = e^{-j \cdot 2\pi / N}.$$

Hierbei sind $d_{\nu,k}$ die Zeitabtastwerte und $D_{\mu,k}$ die diskreten Spektralkoeffizienten. Die Gleichung für den Übergang von der diskreten Zeit- zur diskreten Spektralfunktion – also die **DFT** – lautet:

$$D_{\mu,k} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} d_{\nu,k} \cdot w^{\nu \cdot \mu}.$$

Weiterhin gilt:

- Die Koeffizienten $d_{\nu,k}$ und $D_{\mu,k}$ sind immer mit der Stützstellenanzahl N periodisch und im Allgemeinen komplexwertig.
- DFT und IDFT sind prinzipiell gleich aufgebaut und unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen im Exponenten des komplexen Drehfaktors w sowie den Normierungsfaktor $1/N$ bei der DFT.

Mit Hilfe der **Schnellen Fouriertransformation** (*Fast Fourier Transform*, FFT) ergibt sich die Möglichkeit einer sehr effizienten Realisierung des Mehrträgersystems.

Anmerkung: Für die Verwendung von FFT/IFFT muss die Anzahl der Stützstellen (bzw. Abtastwerte) im Zeit- und Frequenzbereich jeweils eine Zweierpotenz sein. Unter dieser Voraussetzung ist mit den verschiedenen bekannten Algorithmen zur Umsetzung der FFT eine Berechnung mit der Komplexität $O(N \cdot \text{ld}(N))$ möglich.

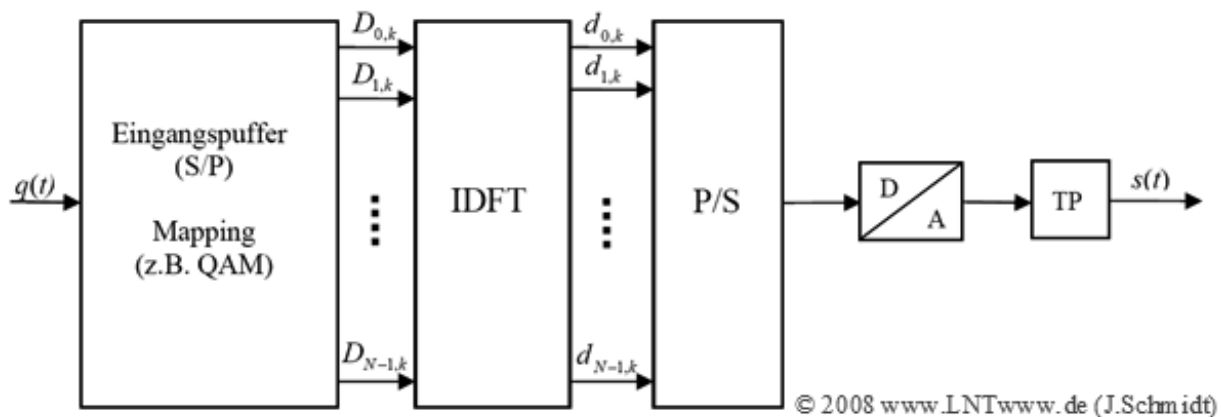
Hinweis: Die Eigenschaften der DFT werden in dem folgenden Interaktionsmodul verdeutlicht

Diskrete Fouriertransformation (279 kB)

OFDM-Sender

Die Grafik zeigt das Blockschaltbild eines OFDM-Senders mittels IDFT. Der Index k kennzeichnet wieder den Zeitrahmen. Man erkennt aus dieser Darstellung:

- Im Eingangspuffer wird das Quellensignal $q(t)$ implizit seriell/parallel (S/P) gewandelt und danach eine Signalraumzuordnung auf die N Spektralkoeffizienten $D_{\mu,k}$ vorgenommen.
- Bei einem 4-QAM-Mapping ergeben jeweils zwei Quellsymbole zusammen einen komplexen Koeffizienten $D_{\mu,k}$, der vier verschiedene Werte annehmen kann.
- Die so erzeugten Spektralkoeffizienten $D_{\mu,k}$ werden anschließend dem IDFT-Block zugeführt, der daraus die Zeitbereichswerte $d_{\nu,k}$ generiert.
- Diese werden wieder parallel/seriell gewandelt. Nach der darauf folgenden D/A-Wandlung und einer Tiefpassfilterung erhält man schließlich das Sendesignal $s(t)$ im äquivalenten Tiefpassbereich.

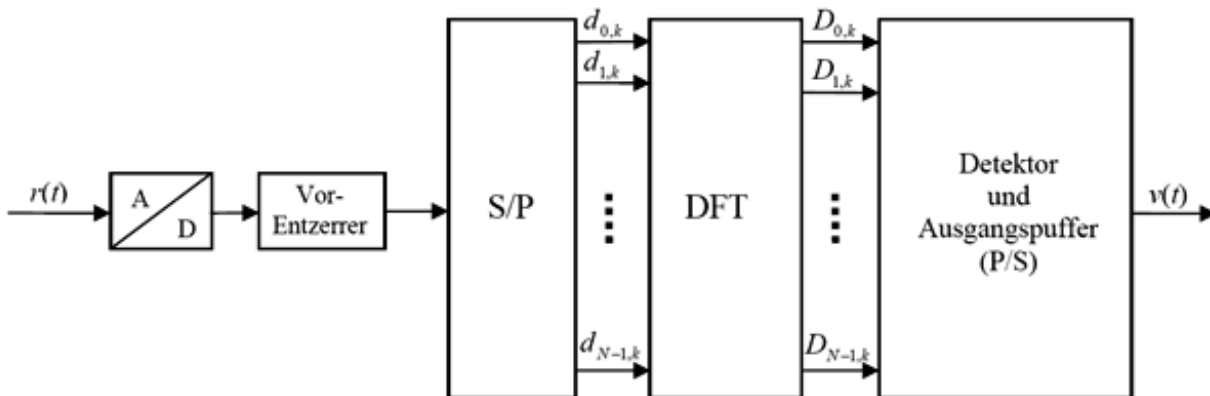


Fazit: Die **Inverse Diskrete Fouriertransformation** (IDFT) ersetzt beim OFDM-Sender die sehr aufwändige parallele Modulation der N orthogonalen Träger. Durch die Realisierung als IFFT ergibt sich eine weitere Aufwandsreduktion.

OFDM-Empfänger

Die Grafik am Ende dieser Seite zeigt das Blockschaltbild eines OFDM-Empfängers mittels DFT. Die wesentlichen Schritte dabei sind:

- Das Eingangssignal $r(t)$ des Empfängers wird zunächst digitalisiert (A/D-Wandlung). Darauf folgt eine Vorentzerrung im Zeitbereich (optional), zum Beispiel mittels **Entscheidungsrückkopplung** (*Decision Feedback Equalization*, DFE) oder **Viterbi-Algorithmus**.
- Anzumerken ist, dass die entscheidende Entzerrung jedoch im Frequenzbereich erfolgt. Diese wird im Abschnitt **OFDM-Entzerrung** exemplarisch erläutert und ist in der unteren Grafik nicht berücksichtigt.
- Nach der Seriell/Parallel-Wandlung (S/P) werden die diskreten Zeitwerte $d_{v,k}$ dem DFT-Block zugeführt. Die erzeugten Spektralabtastwerte $D_{\mu,k}$ werden durch den QAM-Detektor decodiert und im Ausgangspuffer implizit parallel/seriell gewandelt, woraus das Sinkensignal $v(t)$ hervorgeht.
- Zu beachten ist allerdings, dass sich die empfängerseitigen Koeffizienten $d_{v,k}$ und $D_{\mu,k}$ aufgrund von Kanalverzerrungen und Rauschen von den entsprechenden Größen des OFDM-Senders unterscheiden, was in der hier gewählten Nomenklatur nicht zum Ausdruck kommt.
- Die Koeffizienten $\hat{a}_{\mu,k}$ des Sinkensignals $v(t)$ sind nur bei fehlerfreier Detektion identisch mit den Koeffizienten $a_{\mu,k}$ des Quellsignals $q(t)$. Im Allgemeinen unterscheiden sich diese, was durch die *Symbolfehlerrate* erfasst wird.

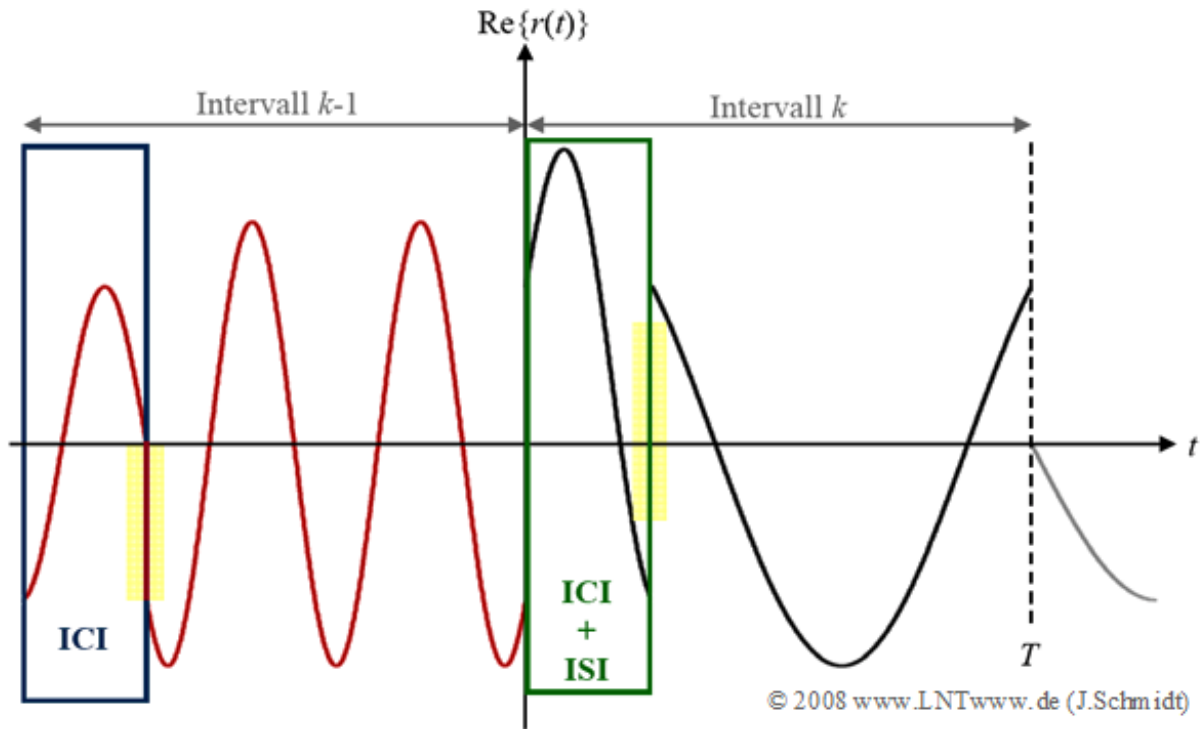


© 2008 www.LNTwww.de (J.Schmidt)

Fazit: In der Praxis ersetzt die **Diskrete Fouriertransformation** (DFT) die sehr aufwändige parallele Demodulation der N orthogonalen Träger. Durch die Realisierung als FFT ergibt sich eine weitere Aufwandsreduktion.

Guard-Lücke zur Verminderung der Impulsinterferenzen (1)

Die **Orthogonalität** der OFDM-Träger geht bei der Übertragung über einen frequenzselektiven Kanal verloren. Die daraus resultierende Interferenz zwischen den einzelnen Trägern bezeichnet man als **Intercarrier-Interferenz** (ICI). Die Übertragung über einen solchen Mehrwegekanal bewirkt letztlich aber auch eine Überlagerung aufeinander folgender Symbole und damit **Impulsinterferenzen** (engl. *Intersymbol Interference*, ISI).



Die Grafik zeigt den Realteil eines OFDM-Empfangssignals im äquivalenten Tiefpassbereich nach der Übertragung über einen rauschfreien Mehrwegekanal mit den Parametern

- für den Pfad 0: Dämpfung $h_0 = 0.5$; Verzögerung $\tau_0/T = 0$,
- für den Pfad 1: Dämpfung $h_1 = 0.5$; Verzögerung $\tau_1/T = 0.25$.

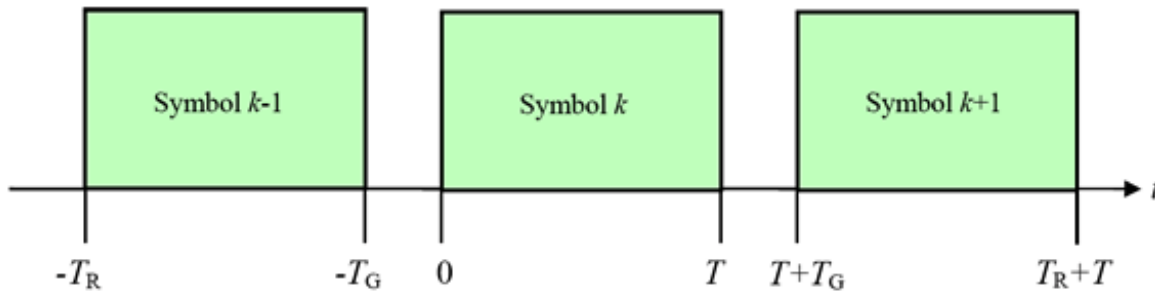
Schwarz gezeichnet ist der mit „Plus-Eins“ belegte Träger der Frequenz $1 \cdot f_0$ des Intervalls k . Der mit „Minus-Eins“ gewichtete Träger mit der Frequenz $3 \cdot f_0$ im vorherigen Intervall $(k-1)$ ist rot dargestellt. Andere Intervalle und Träger werden nicht berücksichtigt. Man erkennt aus dieser Skizze:

- Die Einschwingvorgänge zu Symbolbeginn führen zu *Intercarrier-Interferenz* (ICI) im Spektrum. Im Zeitbereich erkennt man ICI an den auftretenden Sprüngen (in der Grafik gelb markiert). Dadurch geht die Orthogonalität bezüglich der Frequenzstützstellen verloren.
- Weiter erkennt man *Impulsinterferenzen* (ISI) im grün markierten Zeitintervall $0 \leq t < \tau_1$: Das Vorgängersymbol $k-1$ (Frequenz $3 \cdot f_0$) stört das Symbol k (Frequenz $1 \cdot f_0$).

Guard-Lücke zur Verminderung der Impulsinterferenzen (2)

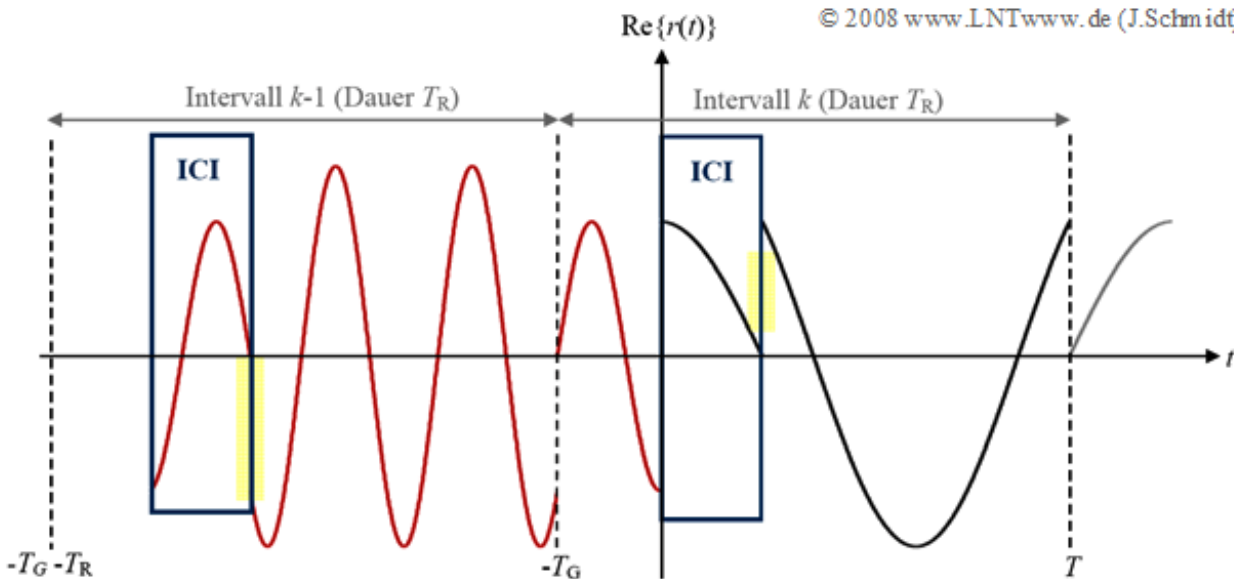
Ein erster möglicher Lösungsansatz für das zweite Problem (ISI) ist die Einführung einer **Guard-Lücke** der Länge T_G . Dabei wird das Signal zwischen zwei Symbolen für die Dauer der Schutzzeit T_G zu Null gesetzt. Mögliche Impulsnachläufer des Symbols $k-1$ reichen dadurch nicht mehr in das darauffolgende Symbol (k) hinein, sofern die Guard-Lücke „breiter“ als die maximale Kanalverzögerung gewählt wird. Die neue Rahmendauer T_R – also der Abstand der Sendesymbole – ergibt sich damit zu $T_R = T + T_G$.

© 2008 www.LNTwww.de (J.Schmidt)



Die untere Grafik zeigt wieder den Realteil des OFDM-Empfangssignals, aber nun mit Guard-Lücke. Die Systemparameter der letzten Seite wurden beibehalten und zusätzlich $T_G = T/4$ gesetzt, was bei dem gewählten Parametersatz dem Grenzfall $T_G = \tau_{\max}$ entspricht.

© 2008 www.LNTwww.de (J.Schmidt)

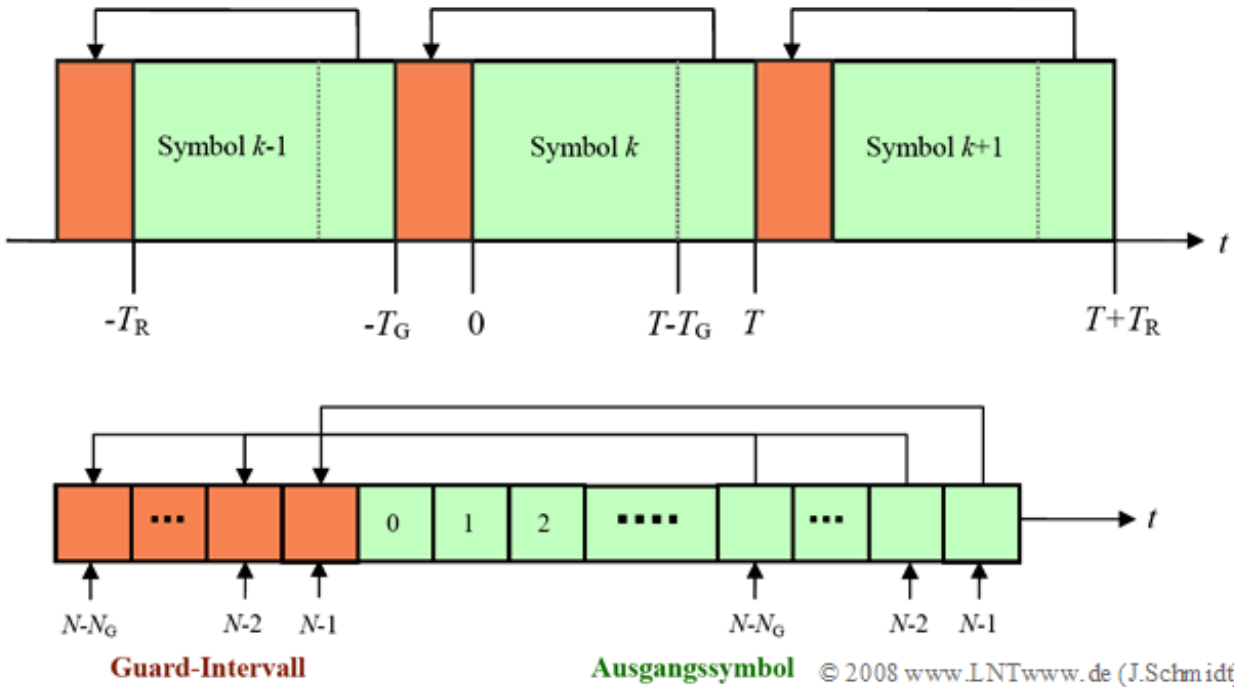


Diese Grafik zeigt: Durch die Verwendung einer Guard-Lücke entsprechender Breite können zwar Impulsinterferenzen (ISI) vermieden werden, Intercarrier-Interferenz (ICI) lässt sich dadurch jedoch nicht verhindern, da die Symbole weiterhin eine Einschwingphase und damit Sprünge aufweisen.

Aus diesem Grund soll im Folgenden der Ansatz „Guard-Lücke“ nicht mehr weiter betrachtet werden. Vielmehr wird nachfolgend eine bessere Alternative vorgestellt.

Zyklisches Präfix (1)

Eine besser geeignete Lösung für das beschriebene Problem ist die Einführung einer zyklischen Erweiterung der Sendesymbole im so genannten *Guard-Intervall* der Länge T_G . Dafür wird das Ende eines Symbols im Zeitabschnitt $T - T_G \leq t < T$ dem eigentlichen Symbol erneut vorangestellt. Dieses Verfahren erzeugt somit ein **zyklisches Präfix**.



Die Intervalldauer steigt dabei wie bei der Guard-Lücke von der ursprünglichen Symboldauer T auf die neue Rahmendauer $T_R = T + T_G$. Die neue Anzahl der Abtastwerte des erweiterten zeitdiskreten Signals im k -ten Intervall beträgt dann:

$$N_{\text{gesamt}} = N + N_G = N \cdot (1 + T_G/T).$$

Die Anzahl der Träger und die Anzahl der Nutz-IDFT-Werte ist weiterhin N . Die Erweiterung wird hier lediglich durch eine Wiederholung von Werten als Guard-Intervall erzielt.

Zyklisches Präfix (2)

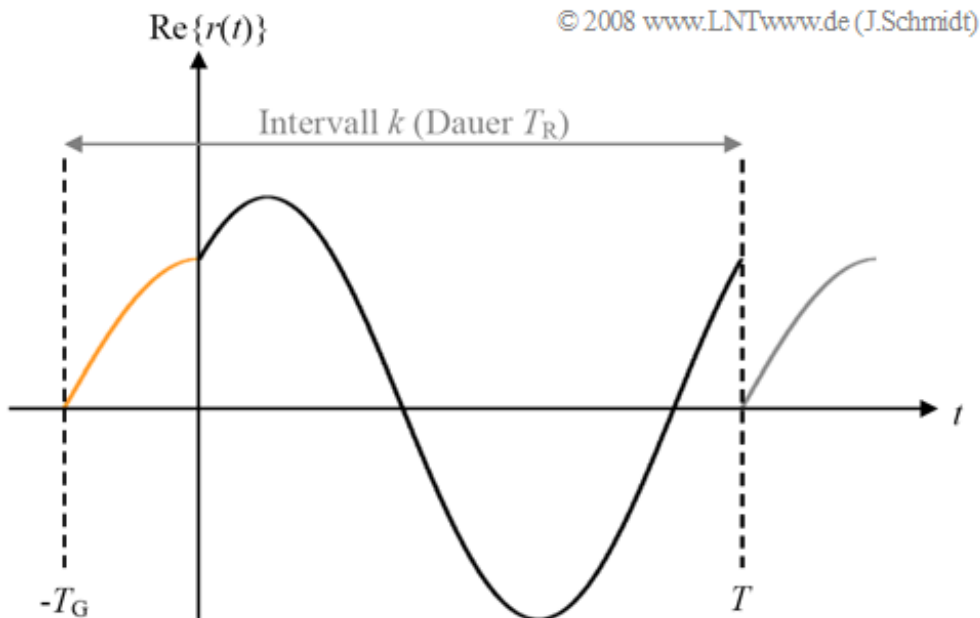
Der Einsatz des zyklischen Präfixes erscheint dann besonders sinnvoll, wenn die Impulsinterferenzen vor allem durch Nachläufer hervorgerufen werden. Dies trifft auch auf die bei DSL-Systemen verwendeten Kupfer-Doppeladern zu.

Die Grafik zeigt die Funktionsweise des Guard-Intervalls im zeitkontinuierlichen Fall. Es gelten weiterhin die Systemparameter aus der Betrachtung der Guard-Lücke, wobei allerdings nur noch ein Symbol (mit der Frequenz f_0) betrachtet wird. Die weiteren Systemparameter sind wiederum $T_G = T/4$ sowie

- für den Pfad 0: Dämpfung $h_0 = 0.5$; Verzögerung $\tau_0/T = 0$,
- für den Pfad 1: Dämpfung $h_1 = 0.5$; Verzögerung $\tau_1/T = 0.25$.

Interferenzen werden verhindert, wenn

- die Vorgängersymbole während des Guard-Intervalls vollständig abklingen (ISI) und
- die jeweiligen Einschwingvorgänge (ICI) nicht in die Nutzsymbole hineinreichen.

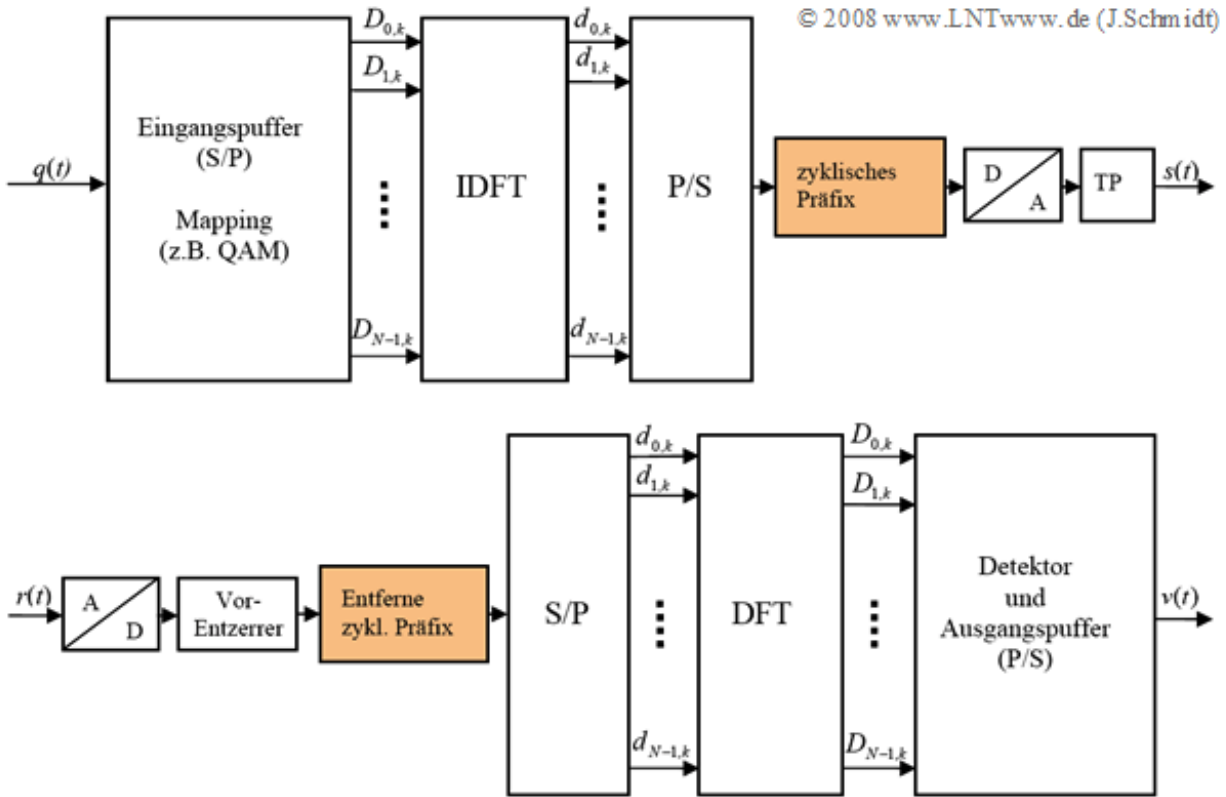


Fazit: Durch ein **Zyklisches Präfix** lassen sich sowohl ICI als auch ISI vollständig vermeiden. Voraussetzung dafür ist, dass die Länge des Guard-Intervalls (T_G) mindestens gleich der maximalen Dauer der Kanalimpulsantwort (τ_{\max} hier gleich τ_1) ist: $T_G \geq \tau_{\max}$. Im hier betrachteten Beispiel gilt das Gleichheitszeichen.

Die Länge der Kanalimpulsantwort (τ_{\max}) begrenzt dabei den ISI- und ICI-freien Abschnitt innerhalb des Guard-Intervalls auf den Bereich $-T_G + \tau_{\max} \leq t < 0$.

OFDM-System mit zyklischem Präfix (1)

Die bereits vorne gezeigte **Senderstruktur** muss also noch um den Block „Zyklisches Präfix“ ergänzt werden. Beim **Empfänger** muss dieses Präfix wieder entfernt werden.



Die Festlegung eines geeigneten Guard-Intervalls ist ein wichtiges Designkriterium bei OFDM-basierten Übertragungssystemen. Eine mögliche Vorgehensweise dazu wird im Abschnitt **OFDM für 4G-Netze** exemplarisch vorgestellt.

Das zu diesem Kapitel gehörende Interaktionsmodul verdeutlicht die Funktionsweise eines zyklischen Präfixes im zeitkontinuierlichen Fall im Bezug auf Intercarrier-Interferenz (ICI):

OFDM-Spektrum und -Signale (Dateigröße: 1.3 MB).

OFDM-System mit zyklischem Präfix (2)

Der Einsatz eines zyklischen Präfixes vermindert jedoch die **Bandbreiteneffizienz**. Die Degradation steigt dabei mit wachsender Dauer T_G des Guard-Intervalls – nachfolgend abgekürzt mit GI. Unter der vereinfachenden Annahme eines hart auf N/T begrenzten Sendespektrums $S(f)$ ergibt sich für die Bandbreiteneffizienz – siehe **[Kam04]**:

$$\beta = \frac{1}{1 + T_G/T} = \frac{\text{Symbolrate}}{\text{Bandbreite}}.$$

Bei einem System, das dem so genannten **Matched-Filter-Ansatz** genügt, führt eine Vergrößerung der Rahmendauer von T auf $T_G + T$ allerdings zu einer Verringerung des Signal-Rausch-Verhältnisses, wenn die Impulsantworten $g_S(t)$ und $g_E(t)$ von Sende- und Empfangsfilter an die Symboldauer T angepasst sind. Das resultierende SNR (in dB) berechnet sich zu

$$\text{SNR}_{\text{mit GI}} = \text{SNR}_{\text{ohne GI}} + 10 \cdot \lg(\beta), \quad \text{wobei}$$
$$\beta = \frac{\left[\int_0^T g_S(\tau) \cdot g_E(-\tau) d\tau \right]^2}{\int_{-T_G}^T g_S^2(\tau) d\tau \cdot \int_0^T g_E^2(\tau) d\tau} = \frac{T^2}{(T + T_G) \cdot T} = \frac{1}{1 + T_G/T}.$$

Beispiel: Gehen wir von einem Guard-Intervall der Länge $T_G = T/3$ aus, dann ergibt sich für die Bandbreiteneffizienz:

$$\beta = \frac{1}{1 + 1/3} = 0.75.$$

Der Anteil des zyklischen Präfixes an der Rahmendauer T_R beträgt 25% und der (logarithmische) SNR-Verlust ist dann $10 \cdot \lg(0.75) \approx -1.25$ dB.

OFDM–Entzerrung im Frequenzbereich

Wir betrachten das OFDM–System weiterhin im rauschfreien Fall und gehen von einer zeitinvarianten Kanalimpulsantwort aus, deren Länge geringer als die Dauer T_G des sendeseitig hinzugefügten zyklischen Präfixes ist. Die Betrachtung erfolgt im k -ten Intervall, wobei auf die Indizierung verzichtet wird. Die zeitdiskrete Kanalimpulsantwort lässt sich mit der Abkürzung $T_A = T/N$ als $h_\nu = h(\nu \cdot T_A)$ schreiben.

Das zeitdiskrete Empfangssignal ergibt sich damit durch **lineare Faltung** zu:

$$r_\nu = s_\nu * h_\nu = d_\nu * h_\nu.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass die Zeitabstastwerte s_ν des Sendesignals mit den IDFT–Koeffizienten d_ν übereinstimmen.

Zu beachten ist: Im Allgemeinen gilt für die herkömmliche lineare Faltung:

$$\text{DFT}\{d_\nu * h_\nu\} \neq \text{DFT}\{d_\nu\} \cdot \text{DFT}\{h_\nu\}.$$

Um dennoch das diskrete Empfangsspektrum durch die diskrete Fouriertransformation (DFT) angeben zu können, benötigt man die **zirkulare Faltung**:

$$r_\nu = d_\nu *_{\text{circ}} h_\nu \quad \circ \text{---} \bullet \quad R_\mu = \text{DFT}\{d_\nu *_{\text{circ}} h_\nu\}.$$

Mit dem **Faltungssatz** für lineare zeitinvariante Systeme (LZI–Systeme) kann man dann das Spektrum auch als Produkt zweier diskreter Fouriertransformierter schreiben:

$$R_\mu = \text{DFT}\{d_\nu\} \cdot \text{DFT}\{h_\nu\} = D_\mu \cdot H_\mu.$$

Um den Einfluss des Kanals auf die Empfangsfolge auszugleichen, bietet sich also die Multiplikation des Spektrums mit der inversen Übertragungsfunktion $1/H_\mu$ an. Dieser „Zero Forcing“–Ansatz führt im rauschfreien Fall zur idealen Signalrekonstruktion. Die Entzerrung kann dabei **punktweise** erfolgen:

$$\hat{D}_\mu = \frac{1}{H_\mu} \cdot R_\mu.$$

Fazit: Bei einem OFDM–System kann die **Kanalentzerrung** mit nur einer einzigen Multiplikation je Unterträger realisiert werden, sofern der Frequenzgang des Kanals bekannt ist. Bei einem klassischen Einträger–System müsste man demgegenüber den gesamten genutzten Frequenzbereich entzerren.

OFDM-Entzerrung in Matrix-Vektor-Notation (1)

Im Folgenden soll eine erneute, tiefer gehende Betrachtung der OFDM-Entzerrung erfolgen, wobei wir die **Matrix-Vektor-Notation** verwenden. Die Betrachtung erfolgt weiterhin im k -ten Intervall:

- Der Vektor eines Kanals mit L Echos ist $\mathbf{h} = (h_0, \dots, h_L)$. Die Übertragungsmatrix mit N Zeilen und $N + L$ Spalten lautet:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_L & & & \\ & h_0 & h_1 & \dots & h_L & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & h_0 & h_1 & \dots & h_L \end{pmatrix}.$$

- Hierbei gibt N wieder die Anzahl der Träger und damit auch der Zeitabstastwerte der IDFT an. Mit dem Sendevektor $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{N-1})$ ergibt sich der Empfangsvektor zu $\mathbf{r} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{H}$.

- Unter Berücksichtigung des zyklischen Präfixes erhält man den erweiterten Sendevektor:

$$\mathbf{d}_{\text{ext}} = (d_{N-N_G}, \dots, d_{N-1}, d_0, \dots, d_{N-1}).$$

- Nun könnte man die obige Übertragungsmatrix \mathbf{H} ebenfalls entsprechend auf $(N + N_G)$ Zeilen und $(N + L + N_G)$ Spalten erweitern sowie das Präfix am Empfänger wieder entfernen.

- Alternativ kann jedoch auch die **zyklische Matrix** \mathbf{H}_c mit N Zeilen und N Spalten verwendet werden:

$$\mathbf{H}_c = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & \dots & h_L & & & \\ & h_0 & h_1 & \dots & \dots & h_L & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ & & & h_0 & h_1 & \dots & \dots & h_L \\ \hline h_L & & & h_0 & h_1 & \dots & \dots & h_{L-1} \\ \vdots & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ h_1 & \dots & \dots & h_L & & & & h_0 \end{pmatrix}.$$

OFDM-Entzerrung in Matrix-Vektor-Notation (2)

Für das Weitere wird auch die Fouriertransformation in Matrix-Vektor-Notation benötigt:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & e^{-j \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot \mu / N} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Diskrete Fouriertransformation (DFT) mit $1/N \cdot \mathbf{F}$ und deren Inverse (IDFT) mit \mathbf{F}^* , so dass sich der Sendevektor als $\mathbf{d} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^*$ darstellen lässt. Die N Spektralkoeffizienten werden durch den Vektor $\mathbf{D} = 1/N \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}$ beschrieben und der Empfangsvektor ist $\mathbf{r} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{H}_C = \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{H}_C$.

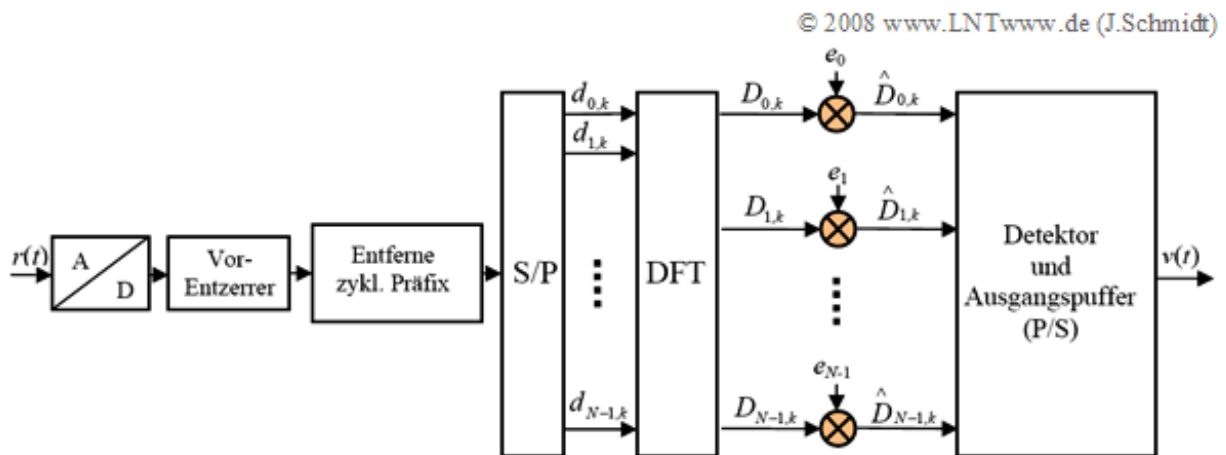
Die (diskrete) Fourier-Transformierte des Empfangsvektors berechnet sich dann zu:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} H_0 & & & \\ & H_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & H_{N-1} \end{pmatrix}, \text{ mit } H_\mu = \sum_{l=0}^L h_l \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot l \cdot \mu / N}.$$

Das Empfangssymbol auf dem μ -ten Träger ist somit $R_\mu = D_\mu \cdot H_\mu$, das sich somit wiederum mit dem *Zero Forcing*-Ansatz entzerren lässt:

$$\hat{D}_\mu = \frac{1}{H_\mu} \cdot R_\mu = e_\mu \cdot R_\mu.$$

Die vorgeschlagene Entzerrung mit den Entzerrerkoeffizienten $e_\mu = 1/H_\mu$ mit $\mu = 0, \dots, N-1$ führt schließlich zum nachfolgenden Blockschaltbild des **OFDM-Empfängers**:



OFDM-Entzerrung in Matrix-Vektor-Notation (3)

Beispiel: Wir gehen von einem System mit $N = 4$ Trägern und einem Kanal mit $L = 2$ Echos aus, so dass für den Sendevektor $\mathbf{d} = (d_0, d_1, d_2, d_3)$ und für die Kanalimpulsantwort $\mathbf{h} = (h_0, h_1, h_2)$ gilt.

Zur Repräsentation des zyklischen Präfixes verwenden wir statt des erweiterten Sendevektors mit der zugehörigen Übertragungsmatrix die zyklische Übertragungsmatrix

$$\mathbf{H}_C = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \\ & h_0 & h_1 & h_2 \\ h_2 & & h_0 & h_1 \\ h_1 & h_2 & & h_0 \end{pmatrix}.$$

Der Empfangsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{H}_C$ ergibt sich damit zu

$$\mathbf{r} = (r_0, r_1, r_2, r_3) = (d_0, d_1, d_2, d_3) \cdot \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \\ & h_0 & h_1 & h_2 \\ h_2 & & h_0 & h_1 \\ h_1 & h_2 & & h_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r_0 = d_0 \cdot h_0 + d_2 \cdot h_2 + d_3 \cdot h_1, \quad r_1 = d_0 \cdot h_1 + d_1 \cdot h_0 + d_3 \cdot h_2,$$

$$\Rightarrow r_2 = d_0 \cdot h_2 + d_1 \cdot h_1 + d_2 \cdot h_0, \quad r_3 = d_1 \cdot h_2 + d_2 \cdot h_1 + d_3 \cdot h_0.$$

Die (diskrete) Fourier-Transformierte des Empfangsvektors berechnet sich zu

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} H_0 & & & \\ & H_1 & & \\ & & H_2 & \\ & & & H_3 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } H_\mu = \sum_{l=0}^2 h_l \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot l \cdot \mu / 4}.$$

Für die numerische Berechnung gehen wir nun von einer bekannten, BPSK-codierten Sendefolge \mathbf{D} (im Frequenzbereich) und der folgenden Kanalimpulsantwort \mathbf{h} aus:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} = (D_0, D_1, D_2, D_3) = (+1, -1, +1, -1),$$

$$\mathbf{h} = (h_0, h_1, h_2) = (0.5, 0.3, 0.2).$$

Das Beispiel wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

OFDMentzerrung in MatrixVektorNotation (4)

Fortsetzung des Beispiels: Zunächst bestimmen wir die Elemente H_μ der Diagonalmatrix:

$$H_0 = \sum_{l=0}^2 h_l \cdot e^0 = 0.5 + 0.3 + 0.2 = 1,$$

$$H_1 = \sum_{l=0}^2 h_l \cdot e^{-j2\pi l \cdot 1/4} = 0.5 \cdot e^0 + 0.3 \cdot e^{-j\pi/2} + 0.2 \cdot e^{-j\pi} = 0.3 - j \cdot 0.3,$$

$$H_2 = \sum_{l=0}^2 h_l \cdot e^{-j2\pi l \cdot 2/4} = 0.5 \cdot e^0 + 0.3 \cdot e^{-j\pi} + 0.2 \cdot e^{-j2\pi} = 0.4,$$

$$H_3 = \sum_{l=0}^2 h_l \cdot e^{-j2\pi l \cdot 3/4} = 0.5 \cdot e^0 + 0.3 \cdot e^{-j\frac{3}{2}\pi} + 0.2 \cdot e^{-j3\pi} = 0.3 + j \cdot 0.3.$$

Damit ergibt sich der Vektor der Frequenzstützstellen am Empfänger zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (1, -1, 1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0.3 - j \cdot 0.3 & & \\ & & 0.4 & \\ & & & 0.3 + j \cdot 0.3 \end{pmatrix} = \\ &= (1, -0.3 + j \cdot 0.3, 0.4, -0.3 - j \cdot 0.3). \end{aligned}$$

Die Entzerrerkoeffizienten wählt man nun entsprechend $e_\mu = 1/H_\mu$, wobei $\mu = 0, \dots, 3$ gilt, zu

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \frac{1}{0.3 - j \cdot 0.3}, \quad e_2 = \frac{1}{0.4}, \quad e_3 = \frac{1}{0.3 + j \cdot 0.3}.$$

Die entzerrte Symbolfolge ergibt sich mit $\mathbf{e} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ schließlich zu

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}^T = (R_0, R_1, R_2, R_3) \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = (1, -1, 1, -1).$$

Dies entspricht exakt der Sendesymbolfolge \mathbf{D} . Das heißt: Bei Kenntnis des Kanals lässt sich das Signal ideal entzerren, wobei man pro Symbol (Träger) nur eine einzige Multiplikation benötigt.

Vor- und Nachteile von OFDM

Wesentliche Vorteile von OFDM gegenüber Einträger- oder anderen Mehrträgersystemen sind:

- flexibel hinsichtlich Anpassung an schlechte Kanalzustände,
- einfache Kanalorganisation,
- sehr einfach zu realisierende Entzerrung,
- durch Guard-Intervall-Technik sehr robust gegen Mehrwegeausbreitung,
- hohe spektrale Effizienz,
- einfache Implementierung mit Hilfe der IFFT/FFT (Schnelle Fouriertransformation),
- relativ unempfindlich für ungenaue Zeitsynchronisation.

Wesentliche Nachteile von OFDM sind:

- anfällig für Doppler-Spreizungen durch eine relativ lange Symboldauer,
- empfindlich gegenüber Oszillatorschwankungen,
- ein schlechter Crest-Faktor (Scheitelfaktor).

Anmerkung: Der so genannte *Crest-Faktor* beschreibt das Verhältnis von Spitzenwert zu Effektivwert einer Wechselgröße. Bei einem OFDM-System kann dieser sehr groß sein. Dadurch sind die daraus resultierenden Anforderungen an die verwendeten Verstärkerschaltungen sehr hoch (Linearität über einen weiten Bereich), wenn dabei die Effizienz (Energieverbrauch, Abwärme) nicht außer Acht gelassen werden soll.

Fazit: Die Vorteile von OFDM überwiegen die Nachteile bei weitem. Obwohl das grundsätzliche Verfahren mindestens seit [Wei71] bekannt ist, finden die OFDM-Systeme allerdings erst seit den 1990-Jahren Verwendung. Die Hauptursache dafür ist wohl unter anderem darin zu suchen, dass die für die IFFT bzw. FFT benötigten Signalprozessoren erst seit einigen Jahren den Anforderungen entsprechend verfügbar sind.

Multiplexverfahren vs. Vielfachzugriffsverfahren

Als erstes Systembeispiel wollen wir nun einen Blick auf die Mobilfunknetze der nächsten, der vierten Generation (4G) werfen, die als Nachfolger die derzeitigen

- auf TDMA/FDMA (siehe **GSM**, *Global System for Mobile Communications*) und
- CDMA (siehe **UMTS**, *Universal Mobile Telecommunications System*)

basierenden Mobilfunknetze ablösen werden.

Ein weiterer Name, der häufig synonym zu „4G“ verwendet wird, ist **Long Term Evolution** (LTE). Ebenso wie **WiMAX** (*Worldwide Interoperability for Microwave Access*) sollen diese Netze als Vielfachzugriffsverfahren **OFDMA** (*Orthogonal Frequency Division Multiple Access*) verwenden.

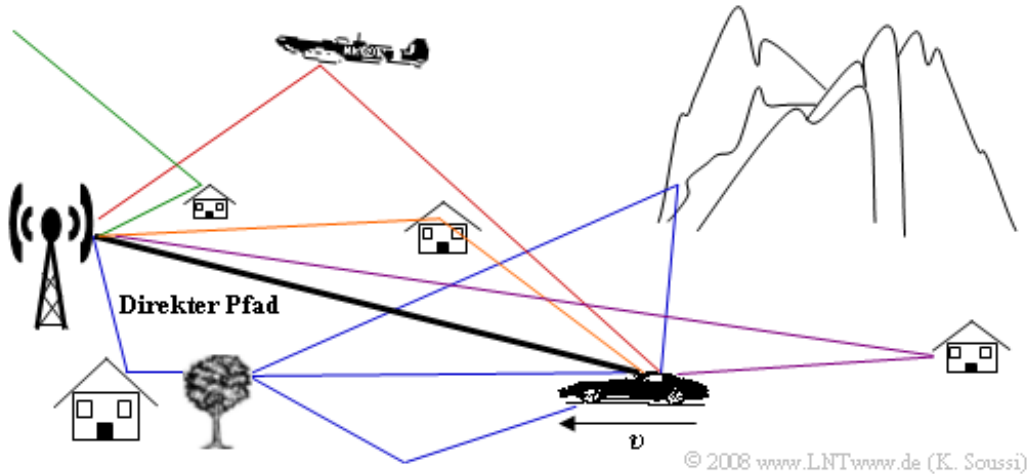
Der wesentliche Unterschied zwischen einem reinen *Multiplexverfahren* (TDM, FDM, CDM, OFDM) und einem *Vielfachzugriffsverfahren* (TDMA, FDMA, CDMA, OFDMA) besteht in der durch Ressourcenzuweisung realisierten Benutzertrennung. Im Fall von OFDMA bedeutet dies, dass nicht nur Zeitschlitze (TDMA) oder Spreizcodes (CDMA) einzelnen Teilnehmern zugewiesen werden, sondern verschiedene und „möglichst“ orthogonale Unterträger.

Die Realisierung eines geeigneten Zuteilungsmechanismus stellt jedoch ein nicht triviales Problem dar, auf das hier nur sehr oberflächlich eingegangen werden kann. Sinnvollerweise beschränkt sich ein solches Verfahren nicht auf eine, nämlich die physikalische Schicht, sondern arbeitet schichtenübergreifend. Der Begriff „Schicht“ ist hier im Sinne des *OSI-Referenzmodells* zu verstehen.

Notwendig wird dies auch durch die sich verändernden Anforderungen an ein Mobilfunknetz. Standen in den Anfangsjahren der Mobilkommunikation *verbindungsorientierte* Dienste wie Sprachtelefonie im Vordergrund, stellen heute *paketorientierte* Anwendungen wie *Voice over IP* (VoIP), *Videotelefonie* oder *mobile Datendienste* die hauptsächliche Verkehrslast dar und sind die Ursache für den gestiegenen Anspruch an die zur Verfügung stehenden Datenraten.

Einige Eigenschaften von Mobilfunksystemen

Zuerst soll in aller Kürze auf die Besonderheiten des Mobilfunkkanals eingegangen werden. Die folgende Abbildung zeigt ein typisches Mobilfunkszenario. Genauere Informationen zu dieser Thematik finden Sie im Buch „Mobile Kommunikation“.



Wesentliche Eigenschaften des Mobilfunkkanals sind:

- die entfernungsabhängige Dämpfung (Path Loss),
- Brechungs-, Streuungs- und Reflexionseffekte und damit Mehrwegeausbreitung,
- mögliche Abschattungen durch Berge, Bäume und Häuser,
- der Dopplereffekt durch die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger.

Dabei kann in Bezug auf die Dämpfung folgende Unterscheidung getroffen werden:

Zeitabhängige Dämpfung (<i>Time Selective Fading</i>)	Frequenzabhängige Dämpfung (<i>Frequency Selective Fading</i>)
Entsteht aufgrund verschiedener Doppler-Frequenzen auf den Pfaden.	Entsteht aufgrund verschiedener Pfadlaufzeiten.
<u>Doppler Spread:</u> $f_{DS} = 2 \cdot f_{Träger} \cdot \frac{v}{c}$	<u>Delay Spread:</u> $T_D = \tau_{max} - \tau_{min}$
<u>Kohärenzzeit:</u> $T_{coh} = \frac{1}{f_{DS}}$	<u>Kohärenzbandbreite:</u> $f_{coh} = \frac{1}{T_D}$

Bitte beachten Sie: Die Kohärenzbandbreite f_{coh} ist nicht der Kehrwert der Kohärenzzeit T_{coh} , obwohl man das aufgrund der gleichen Indizierung vermuten könnte.

Bestimmung einiger OFDM-Parameter

Es soll nun versucht werden, das OFDM-System derart an den Kanal anzupassen, dass weder zeit- noch frequenzabhängiges Fading auftritt. Dafür muss gelten:

- Das **zeitabhängige Fading** wird vermieden (das heißt, der Kanal ist zeitinvariant), wenn die Rahmendauer (*Time of Interest*) deutlich kleiner als die Kohärenzzeit ist:

$$T + T_G \ll T_{\text{coh}}.$$

- Das **frequenzselektive Fading** (innerhalb eines Subträgers) vermeidet man, wenn die Bandbreite eines jeden Trägers ($\approx f_0$) deutlich kleiner als die Kohärenzbandbreite ist:

$$f_0 = \frac{1}{T} \ll f_{\text{coh}} = \frac{1}{T_D} \approx \frac{1}{T_G}.$$

Diese Gleichung ergibt sich aus der Tabelle auf der letzten Seite für $\tau_{\text{min}} \approx 0$ und $\tau_{\text{max}} = T_G$. Beide Forderungen lassen sich durch folgende Ungleichung zusammenfassen:

$$T_G \ll T \ll T_{\text{coh}} - T_G.$$

Die beiden Bedingungen sind jedoch nicht unabhängig von einander zu betrachten, da eine Erhöhung der Symboldauer T zwar die Frequenzselektivität verringert, aber gleichzeitig auch die Übertragung anfälliger für Doppler-Spreizungen (kleineres Verhältnis T_{coh}/T) macht.

Beispiel: Unter der Annahme einer gegebenen Kohärenzzeit T_{coh} und einer gemessenen maximalen Verzögerung τ_{max} durch den Kanal könnte man wie folgt vorgehen:

- Festlegung des vorläufigen Guard-Intervalls zu $T_G \geq \tau_{\text{max}}$
- Berechnung der oberen und unteren Grenze: $T_G \ll T \ll T_{\text{coh}} - T_G$
- Berechnung der optimalen Symboldauer als geometrisches Mittel:

$$T_{\text{opt}} = \sqrt{T'_G \cdot (T_{\text{coh}} - T'_G)}.$$

Die notwendige Anzahl N_{Nutz} an Unterträgern – und damit auch die minimale FFT-Stützstellenzahl – ergibt sich aus der Datenrate R und der Anzahl M der Signalraumpunkte des verwendeten Mappings nach Aufrundung:

$$N_{\text{Nutz}} = \left\lceil \frac{R \cdot (T + T'_G)}{\text{ld}(M)} \right\rceil \Rightarrow N_{\text{FFT}} = 2^{\lceil \text{ld}(N_{\text{Nutz}}) \rceil}.$$

Der Wert N_{FFT} berücksichtigt dabei, dass die Stützstellenzahl der FFT eine Zweierpotenz sein muss. Die wegen der FFT-Anpassung ungenutzten Träger verwendet man an den Rändern des Spektrums als zusätzliches Schutzband.

Das resultierende Guard-Intervall muss nun an die neuen Parameter angeglichen werden:

$$T_G = N_G \cdot \frac{T_{\text{opt}}}{N_{\text{FFT}}} \quad \text{mit} \quad N_G = \left\lceil \frac{T'_G}{T_{\text{opt}}} \cdot N_{\text{FFT}} \right\rceil.$$

Die Rahmendauer ergibt sich zu $T_R = T + T_G$ und die Gesamtzahl der Abtastwerte eines Rahmens zu

$N_{\text{gesamt}} = N_{\text{FFT}} + N_{\text{G}}$. Abschließend muss noch mit obiger Gleichung die Anzahl N_{Nutz} der Nutzträger erneut berechnet werden.

Ressourcenverwaltung in 4G-Netzen (1)

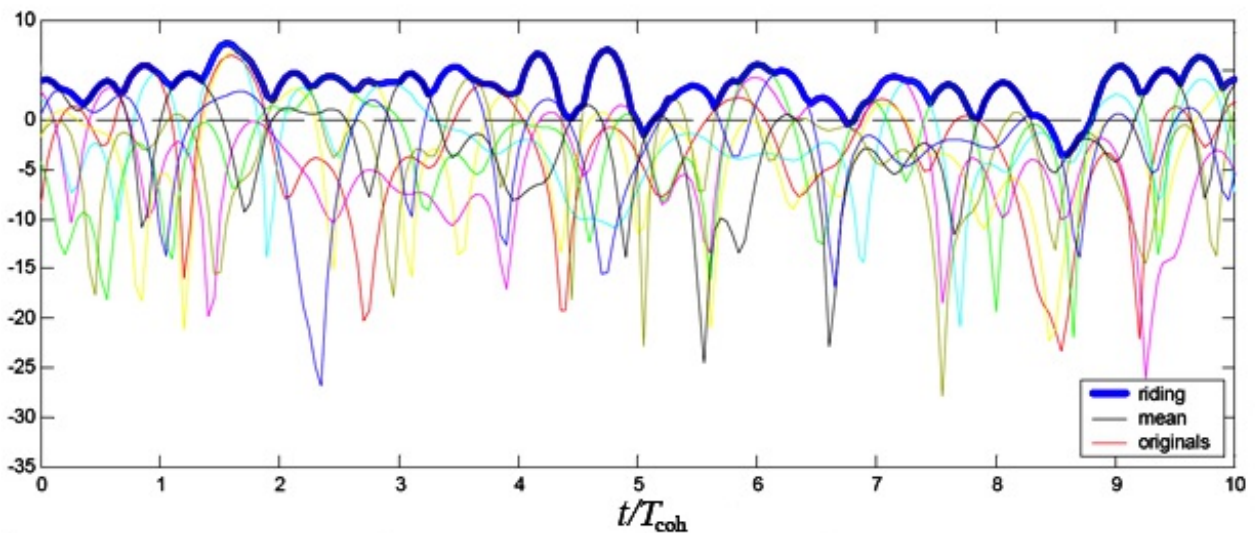
Ein bisher noch nicht betrachteter Design-Parameter ist die Wahl des jeweiligen Modulationsverfahrens der einzelnen Unterträger. Dieser hat jedoch entscheidenden Einfluss auf die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Übertragung. Prinzipiell kann man sagen, dass die Robustheit mit steigendem Modulationsgrad $\log_2(M)$ abnimmt, da dadurch der Abstand der möglichen Signalraumpunkte verringert wird.

Ein großer Symbolumfang M ist jedoch die Voraussetzung für die gewünschten hohen Datenraten, was aber nur in guten Kanalzuständen möglich ist. Die Eigenschaften des Kanals unterscheiden sich dabei für die Teilnehmer oft sehr stark und ändern sich über der Zeit.

Ziel eines geeigneten **Scheduling-Verfahrens** ist es nun,

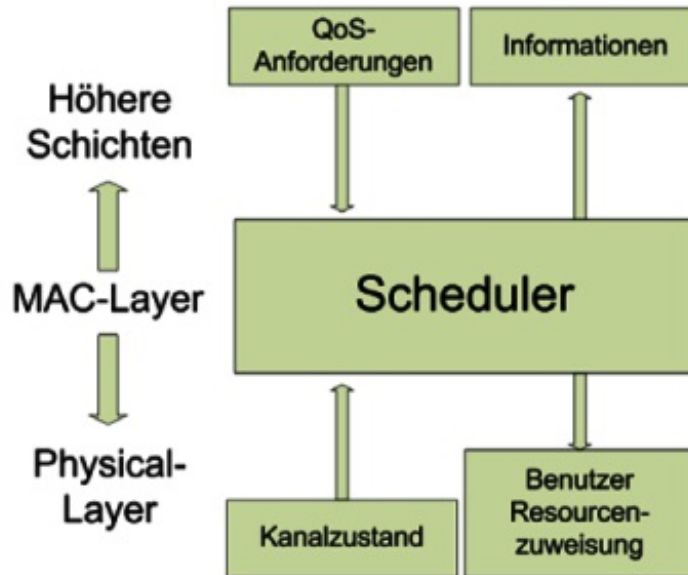
- möglichst nur bei gutem Kanal zu senden und
- in den Dämpfungseinbrüchen andere Teilnehmer zu bedienen.

Den damit erzielbaren Gewinn an Systemdurchsatz bezeichnet man oft als **Multi-User Diversity Gain**. Die folgende Grafik aus [Vie08] zeigt das prinzipielle Vorgehen, wobei die blaue Linie das gewünschte *Riding on the Peaks* für den Fall von 8 Teilnehmern und dadurch 8 Fading-Prozessen darstellt.



Ressourcenverwaltung in 4G-Netzen (2)

Bei der Realisierung eines kanaladaptiven Schedulers sollten aber auch Informationen aus höheren Schichten mit einbezogen werden, da je nach Verkehrsart und *Quality of Service* (QoS)-Anforderung eine lange Wartezeit und damit eine hohe Verzögerung unzulässig sein kann. In der Grafik ist ein solcher schichtenübergreifender Ansatz (*Cross-Layer Approach*) schematisch dargestellt.



© 2008 www.LNTwww.de (J.Schmidt)

Der Scheduler ist dabei im MAC-Layer (*Medium Access Control Layer*) angesiedelt und kommuniziert mit den anderen (nicht notwendigerweise benachbarten) Schichten. An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Vorgehensweise dem im OSI-Modell vorgesehenen Modularitätsprinzip widerspricht.

Ein ähnlicher Ansatz wurde bereits im Rahmen der Erweiterung des UMTS-Netzes um den Standard **HSDPA** (*High Speed Downlink Packet Access*) umgesetzt, wodurch die maximale Datenrate im 3G-Netz (Downstream) von 384 kbit/s auf theoretisch 14.4 Mbit/s gesteigert werden konnte.

Dieser Abschnitt sollte nur einen groben Ausblick über mögliche zukünftige Mobilfunknetze darstellen. Festzuhalten bleibt, dass gerade die für noch höhere Datenraten benötigte verbesserte Adaptivität erst durch den Einsatz eines Mehrträgersystems wie OFDM/OFDMA ermöglicht wird.

OFDM bei DVB-T

DVB-T (*Digital Video Broadcasting Terrestrial*) ist eine von mehreren aus dem DVB-Standard von 1997 abgeleitete Variante für die Verbreitung von Fernsehsignalen in digitaler Form. Andere damit verwandte Standards sind:

- DVB-S \Rightarrow für die Übertragung über Satellit,
- DVB-C \Rightarrow für die Übertragung über das Kabelnetz (Cable),
- DVB-H \Rightarrow für mobile Geräte (Handhelds).

In Deutschland konnten Ende 2008 schon mehr als 90% der Bevölkerung zumindest eine Auswahl öffentlich-rechtlicher Sender über DVB-T empfangen, so dass der analoge Fernsehempfang über Antenne in Kürze de facto abgelöst sein wird. Die durch die Abschaltung der Analogübertragung freigebliebenen Frequenzbänder wurden durch DVB-T direkt wiederverwendet, so dass ein Parallelbetrieb und damit ein „sanfter“ Übergang nicht möglich war.

Bei DVB-T kommt das Modulationsverfahren *Coded Orthogonal Frequency Division Multiplex* – abgekürzt **COFDM** – zum Einsatz. Die Erweiterung um eine Vorwärtsfehlerkorrektur (*Forward Error Correction*, FEC) in Verbindung mit der bereits eingeführten Guard-Intervall-Technik ist notwendig, um den durch Echos (Mehrwegeempfang) und die Empfängerbewegung (Doppler-Effekt) entstandenen Störungen entgegenzuwirken.

Grundsätzlich handelt es sich bei DVB-T um ein *Gleichwellennetz*. Im Gegensatz zu klassischen Mobilfunknetzen – zum Beispiel dem GSM-Netz – werden hierbei selbst von direkt benachbarten Sendestationen die gleichen Frequenzen wiederverwendet. Dies führt an den Zellgrenzen zu Interferenzen zwischen ähnlich starken Signalen, die jedoch erhebliche Laufzeitunterschiede aufweisen können.

Den Auswirkungen eines solchen frequenzselektiven Kanals kann zwar durch eine Verlängerung des Guard-Intervalls entgegengewirkt werden. Jedoch wird dadurch zum einen die Bandbreiteneffizienz verringert, zum anderen auch die Anfälligkeit gegenüber zeitvarianten Effekten erhöht.

Systemparameter von DVB-T (1)

Die alten, analog genutzten Fernsehkanäle hatten jeweils eine Bandbreite von 7 MHz (VHF, *Very High Frequency* ⇒ Ultrakurzwellen) bzw. von 8 MHz (UHF, *Ultra High Frequency* ⇒ Dezimeterwellen). Ein jeder dieser Kanäle wird bei DVB-T meist mit vier Programmen belegt. Dafür wird das zur Verfügung stehende Spektrum auf die OFDM-Unterträger aufgeteilt.

Die nachfolgende Tabelle zeigt mögliche Parameterkonstellationen eines DVB-T-Systems. Als „Modus“ wird die Anzahl der für die FFT/IFFT verwendeten Stützstellen bezeichnet, also 2048 (2K) bzw. 8192 (8K). Es werden aber nicht alle Träger tatsächlich genutzt.

Modus (FFT/IFFT)	Bandbreite	Subträgeranzahl	Subträger-Abstand f_0	Kernsymbol-dauer T	Guard-Dauer T_G
2K	7 MHz	1705	3.91 kHz	256 μ s	64 μ s
2K	8 MHz	1705	4.46 kHz	224 μ s	56 μ s
8K	7 MHz	6817	977 Hz	1.024 ms	256 μ s
8K	8 MHz	6817	1.116 kHz	0.896 ms	224 μ s

Ein Vergleich der beiden Modi zeigt, dass

- der 2K-Betrieb wegen der geringeren Kernsymboldauer T für zeitvariante Einsatzbedingungen zwar gut geeignet ist,
- aber aufgrund der recht kurzen Guard-Intervalldauer T_G der tolerierbaren Kanalimpulsantwort enge Grenzen gesetzt sind.

Im 8K-Modus ist dies genau umgekehrt. Wegen der Forderung eines Gleichwellennetzes ist demnach der 8K- dem 2K-Betrieb vorzuziehen, wobei jedoch der Nachteil einer aufwändigeren Implementierung der FFT/IFFT in Kauf genommen werden muss.

Für die Modulation der Unterträger stehen bei DVB-T drei QAM-Varianten zur Verfügung:

- 4-QAM (dieses Verfahren kann auch als eine 4-PSK aufgefasst werden),
- 16-QAM (optional mit asymmetrischer Signalraumkonstellation),
- 64-QAM (optional mit asymmetrischer Signalraumkonstellation).

Eine asymmetrische Signalraumkonstellation erlaubt eine hierarchische Quellencodierung. Bei schlechten Übertragungsbedingungen kann statt dem exakten Signalraumpunkt lediglich der Quadrant detektiert werden. Damit ist der Empfang weiterhin möglich, wenn auch bei (stark) verminderter Bildqualität.

Systemparameter von DVB-T (2)

In der nachfolgenden Tabelle – **Quelle** – sind einige resultierende Datenraten für DVB-T abhängig von der Kanalcodierungsrate R_C und der Dauer T_G des Guard-Intervalls angegeben. Die relative Redundanz des Codes ist dann gleich $1 - R_C$. Das heißt: Je größer die Coderate, desto weniger Redundanz wird hinzugefügt.

Nettobitraten (Mbit/s) für ein DVB-T System – 8 MHz Kanal					
Modulation	Coderate R_C	Guard-Intervall T_G			
		1/4	1/8	1/16	1/32
QPSK	1/2	4.976	5.529	5.855	6.032
	2/3	6.635	7.373	7.806	8.043
	3/4	7.465	8.294	8.782	9.048
16-QAM	1/2	9.953	11.059	11.709	12.064
	2/3	13.271	14.745	15.612	16.086
	3/4	14.929	16.588	17.564	18.096
64-QAM	1/2	14.929	16.588	17.564	18.096
	2/3	19.906	22.118	23.419	24.128
	3/4	22.394	24.882	26.346	27.144

Die angegebenen Zahlenwerte können wie folgt interpretiert werden:

- Die effektiven Nettobitraten variieren zwischen den einzelnen Sendegebietern stark, da je nach Region unterschiedliche Systemparameter verwendet werden müssen. Im Mittel werden in etwa 12 ... 20 Mbit/s erreicht. Damit wird nun ein MPEG-2-Transportstrom übertragen, der in der Regel vier Programme enthält.
- Deren Videodatenströme sind in Deutschland ebenfalls MPEG-2 codiert und erreichen jeweils eine Datenrate von ca. 3.5 Mbit/s. Im Vergleich dazu würde ein digitalisiertes PAL-Signal bereits einer Datenrate von 3 ... 5 Mbit/s entsprechen. Eine DVD käme immerhin schon auf ca. 9.8 Mbit/s.
- Um auch beim digitalen DVB-T eine bessere Bildqualität zu erzielen, müsste man ein moderneres Codierungsverfahren – zum Beispiel MPEG-4 anstatt MPEG-2 – verwenden. Dahin gehende Bestrebungen gibt es bereits heute (2008). Mit DVB-T2 als neuem Standard ist jedoch frühestens 2009/2010 zu rechnen.

Eine Kurzbeschreibung von DSL – Digital Subscriber Line (1)

Als ein weiteres Beispiel für den Einsatz von OFDM soll nun ein kurzer Überblick über **DSL** (*Digital Subscriber Line*) gegeben werden. Die DSL-Technik ermöglicht eine erhebliche Erhöhung der Datenübertragungsrate im Vergleich zu herkömmlichen Telefonanschlüssen wie POTS (*Plain Old Telephone Service*) oder ISDN (*Integrated Services Digital Network*), ohne dass für diese neue Technologie die Kupfer-Doppeladern der Teilnehmeranschlussleitung ausgetauscht werden mussten. POTS oder ISDN können auch ohne Einschränkungen parallel zu DSL betrieben werden, da sich die verwendeten Frequenzbänder bei entsprechender Anpassung nicht überschneiden (siehe Grafik).

Es existieren folgende wesentliche xDSL-Varianten („x“ ist hierbei als Platzhalter zu verstehen):

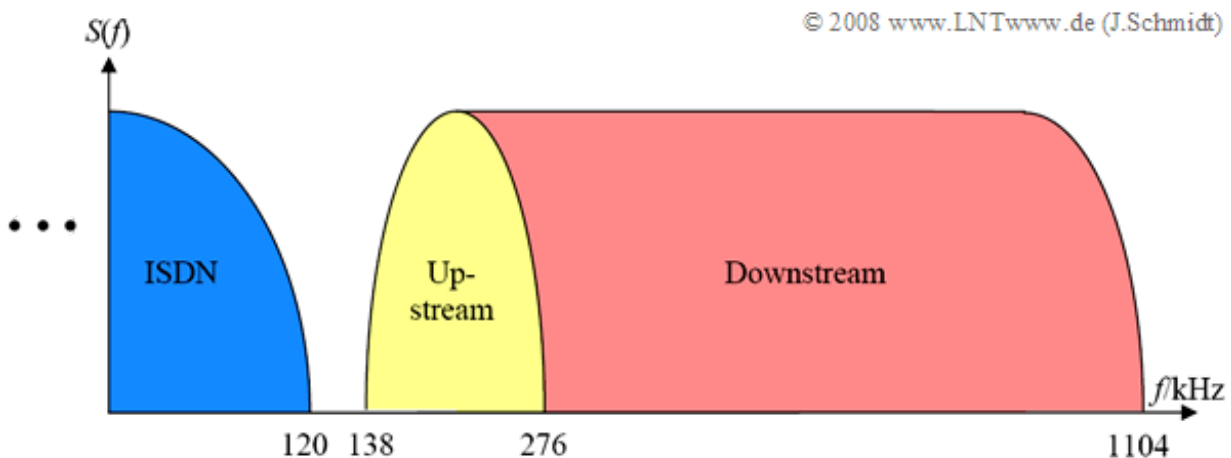
- ADSL (*Asymmetric Digital Subscriber Line*),
- ADSL2+, eine Erweiterung zu ADSL,
- VDSL/VDSL2 (*Very High Data Rate Digital Subscriber Line*).

VDSL2 ist auf maximale symmetrische Datenraten (jeweils 210 Mbit/s im Up- und Downstream) ausgelegt, aber nur über kurze Leitungen realisierbar.

Als Modulationsverfahren wird bei allen diesen xDSL-Varianten stets OFDM verwendet, das in diesem Zusammenhang häufig auch den Namen **DMT** (*Discrete Multitone Transmission*) trägt. Betrachten wir beispielsweise die DMT bei ADSL mit folgenden Kenngrößen:

- Grundfrequenz $f_0 = 4.3125$ kHz,
- maximale Nutzträgerzahl: $N = 255$,
- gleichsignalfrei, da $S(f = 0) = 0$ ist,
- der Nyquist-Tone ($S(256 \cdot f_0)$) wird ebenfalls zu Null gesetzt,
- maximale Frequenz: $256 \cdot 4.3125$ kHz = 1104 kHz.

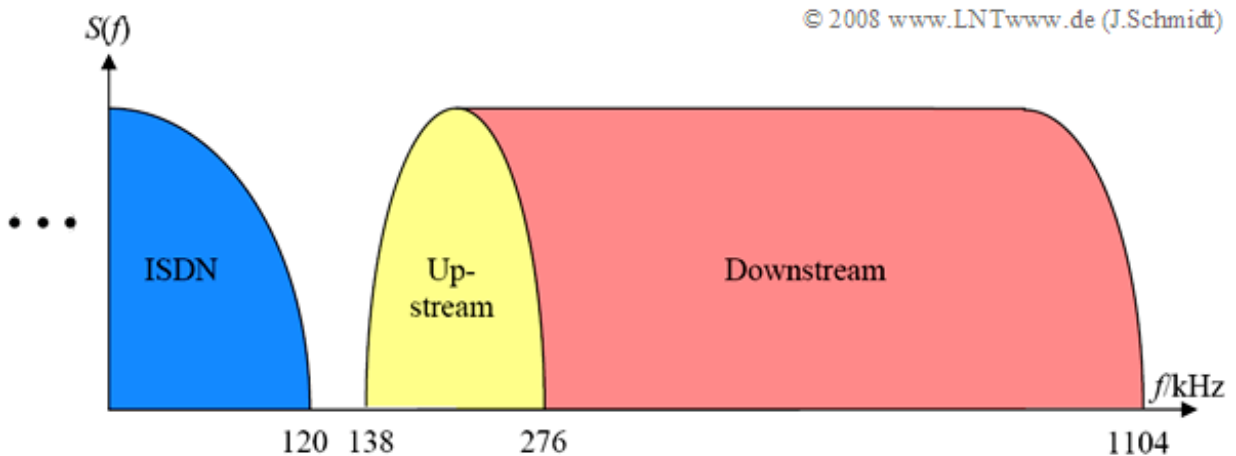
Es ergibt sich die in der Abbildung gezeigte Belegung des Spektrums. Die Bildbeschreibung folgt auf der nächsten Seite.



Eine Kurzbeschreibung von DSL – Digital Subscriber Line (2)

Eine genaue Systembeschreibung findet man im Kapitel **DSL** von *Beispiele von Nachrichtensystemen*. Das dargestellte Sendespektrum von DSL lässt sich in aller Kürze wie folgt beschreiben:

- Die 224 für DMT verfügbaren Träger – diese bezeichnet man im Zusammenhang mit der DMT oft auch als **Bins** – werden entweder für den *Upstream* (Übertragung ins Netz, 32 Bins, 138 kHz) oder den *Downstream* (Übertragung aus dem Netz, 192 Bins, 828 kHz) verwendet.
- Alle ADSL-Anschlüsse der Deutschen Telekom sind nach dem Standard *ADSL-over-ISDN* geschaltet, so dass ein Parallelbetrieb zu ISDN möglich ist. Dafür wird der Frequenzbereich bis 138 kHz nicht für ADSL verwendet und die entsprechenden Bins zu Null gesetzt.
- Auch bei den analogen Anschlüssen wird *ADSL-over-ISDN* und nicht *ADSL-over-POTS* eingesetzt, obwohl dadurch gerade jener Frequenzbereich verschwendet wird, der eine besonders günstige Dämpfung aufweist.



Der wesentliche Vorteil von DSL bzw. DMT liegt wieder in der Anpassungsfähigkeit an den Kanal. Die im Zugangsnetz verwendeten Kupfer-Doppeladern haben unter anderem wegen des Skin-Effekts keinen idealen Dämpfungs- und Phasengang. Die DMT bietet wieder je nach Güte des Frequenzbereichs der Bins die Möglichkeit, das jeweilige Modulationsverfahren anzupassen oder sogar auf die Nutzung eines Trägers ganz zu verzichten.

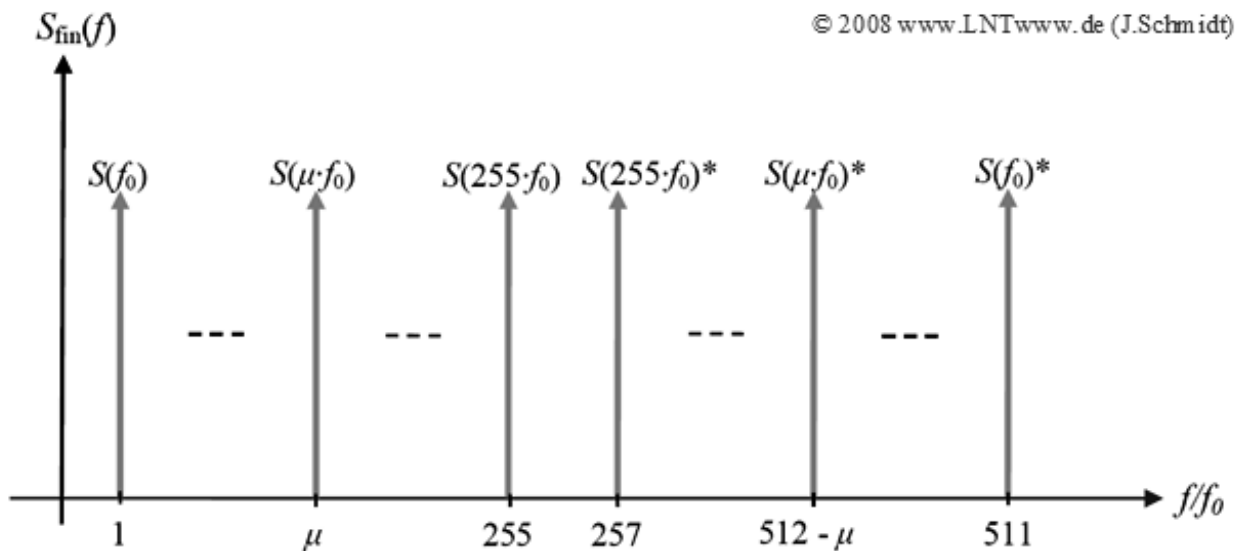
Auch bei DSL kommt die Guard-Intervall-Technik in Form des **zyklischen Präfixes** zum Einsatz. Zur Fehlervermeidung kann zusätzlich *Interleaving* verwendet werden, wodurch jedoch die Übertragung verzögert wird. Der Verzicht auf diese Technik wird mit dem Begriff *Fast-Path* bezeichnet.

Fazit: Auch im Bereich der leitungsgebundenen Übertragungstechnik ermöglichte erst der Übergang vom Einträgersystem hin zu einem Mehrträgersystem die heute üblichen hohen Übertragungsraten.

Unterschiede zwischen DMT und dem beschriebenen OFDM (1)

Die OFDM-Systembeschreibungen in **Kapitel 5.5** und **Kapitel 5.6** gelten nur für Bandpass-Systeme, die hier stets im äquivalenten Tiefpassbereich betrachtet wurden. Durch die Tiefpass-Transformation werden alle Anteile bei negativen Frequenzen entfernt, was zu einer *unsymmetrischen Spektralfunktion* und damit zu einem *komplexwertigen Zeitsignal* führt. Bei DSL ist diese Tiefpass-Transformation nicht nötig, da es im Gegensatz zu Mobilfunksystemen im Basisband betrieben wird.

Dies führt zu einer abweichenden Formelrepräsentation. Für eine klare Abgrenzung zwischen den beiden Betrachtungsweisen verwenden wir im Folgenden OFDM nur für ein Bandpass-System, während sich die Bezeichnung DMT stets auf ein Basisband-System bezieht.



Die Grafik zeigt das diskrete Spektrum eines DMT-Signals mit 255 verwendeten Trägern (Bins). Das Spektrum der Nutzträger von 1 bis 255 wird um die auch bei den entsprechenden negativen Frequenzen anliegenden Anteile nach der unten stehenden Gleichung ergänzt, um eine Periode des für die IDFT benötigten „finiten Spektrums“ zu erhalten. Für dieses Spektrum gilt nach **[Han08]**:

$$S(-\mu \cdot f_0) = S((N - \mu) \cdot f_0) = S(\mu \cdot f_0)^*,$$

wobei hier $0 < \mu < N/2$ und für die Grafik $N = 512$ gilt.

Das somit **rein reelle Zeitsignal** ergibt sich nach der inversen diskreten Fouriertransformation an den Abtastzeitpunkten $v \cdot T_A$ mit $0 \leq v < N$ und $T_A = T/N$ zu:

$$s_v = \sum_{\mu=0}^{N-1} S(\mu \cdot f_0) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot v \cdot \mu / N}.$$

Fazit: Die benötigte Anzahl der Frequenzstützstellen und Abtastwerte der IDFT/DFT entspricht beim DMT-Verfahren dem Zweifachen der nutzbaren Träger, wenn der Gleichanteil sowie der *Nyquistton* vernachlässigt werden, und ist damit auch doppelt so groß wie bei einem OFDM-Bandpass-System.

Unterschiede zwischen DMT und dem beschriebenen OFDM (2)

Beispiel: Es gelte $N = 512$ und $S(64 \cdot f_0) = (a + j \cdot b)/2$ und $S(448 \cdot f_0) = S^*(64 \cdot f_0) = (a - j \cdot b)/2$. Alle anderen Spektralkoeffizienten seien 0. Wir berechnen nun nach der angegebenen Formel mittels IDFT die Zeitbereichskoeffizienten:

$$\begin{aligned} s_\nu &= \sum_{\mu=0}^{N-1} S(\mu \cdot f_0) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot \mu / N} = \\ &= S(64 \cdot f_0) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot 64 / 512} + S(448 \cdot f_0) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot 448 / 512} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a + j \cdot b) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot 64 / 512} + \frac{1}{2} \cdot (a - j \cdot b) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot 448 / 512}. \end{aligned}$$

Wendet man den Satz von **Euler** an, so erhält man:

$$\begin{aligned} s_\nu &= \frac{1}{2} \cdot (a + j \cdot b) \cdot \left[\cos\left(2\pi \cdot \frac{64}{512} \cdot \nu\right) + j \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{64}{512} \cdot \nu\right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (a - j \cdot b) \cdot \left[\cos\left(2\pi \cdot \frac{448}{512} \cdot \nu\right) + j \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{448}{512} \cdot \nu\right) \right]. \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\cos\left(2\pi \cdot \frac{448}{512} \cdot \nu\right) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{64}{512} \cdot \nu\right), \quad \sin\left(2\pi \cdot \frac{448}{512} \cdot \nu\right) = -\sin\left(2\pi \cdot \frac{64}{512} \cdot \nu\right).$$

Durch Zusammenfassen ergeben sich hier rein reelle Zeitsignalkoeffizienten:

$$s_\nu = a \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{64}{512} \cdot \nu\right) - b \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{64}{512} \cdot \nu\right).$$

Der Parameter a stellt dabei die *Inphase-Komponente* der QAM-Modulation des jeweiligen Trägers (Bins) dar, während b die *Quadratur-Komponente* angibt. In gleicher Weise kann für die anderen „Trägerpaare“ vorgegangen werden.