

Zu Kapitel 1.1: Entwicklung der analogen Modulationsverfahren

Meilensteine für die Entwicklung der analogen Modulationsverfahren auf Trägerfrequenzbasis waren:

- Einführung des regulären Rundfunkdienstes (1923)
- Beginn der Trägerfrequenztelefonie (1923)
- Einführung des regulären Fernsehdienstes (1935)
- Erste Satellitenübertragung (1945)
- Einführung des NTSC-Farbf Fernsehens (1953)
- Einführung des PAL-Farbf Fernsehens (1967)

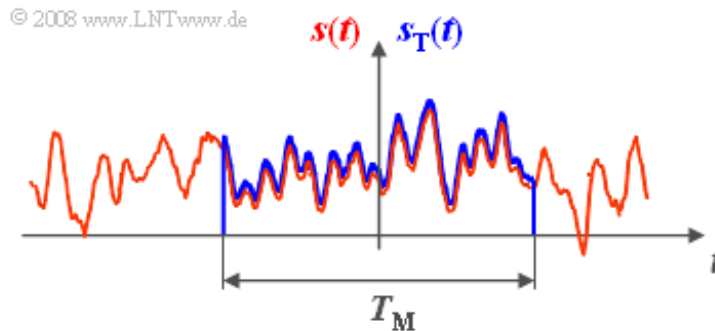
Voraussetzungen für diese Entwicklungen waren u. A. folgende Erfindungen in der Vergangenheit:

- Elektrische Übertragung von Sprache – **Philip Reis** – 1861
- Erstes kommerziell nutzbares Telefon – **Alexander Graham Bell** – 1876
- Entwicklung des Zeilenabtastverfahrens – **Paul Nipkow** – 1884
- Entdeckung der elektromagnetischen Wellen – **Heinrich Hertz** – 1887
- Erfindung der Elektronenröhre – **Robert von Lieben** und **Lee de Forest** – 1906
- Erfindung des Transistors – **William Shockley** , **Walter Brattain** und **John Bardeen** – 1948

Zu Kapitel 1.2: Leistungsberechnung von Nachrichtensignalen

Bei den Untersuchungen von Nachrichtensystemen spielen Leistungsbetrachtungen eine wichtige Rolle. Beschreibt $s(t)$ ein stochastisches Sendesignal, so existiert für dieses kein Fourierspektrum $S(f)$. Wie auf der Seite **Zusammenhang zwischen $X(f)$ und $\Phi_x(f)$** im Buch „Stochastische Signaltheorie“ ausführlich dargelegt, muss dann wie folgt vorgegangen werden:

- Man betrachtet anstelle von $s(t)$ nur einen zeitbegrenzten Ausschnitt $s_T(t)$ der Dauer T_M , für den das Fourierspektrum $S_T(f)$ angegeben werden kann.



- Damit lässt sich das Leistungsdichtespektrum (LSD) wie folgt berechnen:

$$\Phi_s(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |S_T(f)|^2.$$

- Dieses Leistungsdichtespektrum ist zweiseitig zu verstehen, das heißt, es existiert für positive und negative Frequenzen. Das einseitige Leistungsdichtespektrum erhält man, indem man die negativen Anteile abschneidet und die positiven verdoppelt:

$$\Phi_{s+}(f) = (1 + \text{sign}(f)) \cdot \Phi_s(f).$$

- Die Sendeleistung kann dann als Integral über diese Funktionen berechnet werden:

$$P_S = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f) \, df = \int_0^{\infty} \Phi_{s+}(f) \, df.$$

Zu Kapitel 2.2: Berechnung der Störleistung nach dem Demodulator

Das Fehlersignal $\varepsilon(t)$ erhält man aus dem Störsignal $n(t)$ am Eingang durch

- Multiplikation mit $z_E(t) = 2 \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \phi_T)$ und
- eine anschließende Tiefpassfilterung auf den Bereich $\pm B_{NF}$.

Für das Leistungsdichtespektrum $\Phi_\varepsilon'(f)$ ohne Berücksichtigung des Tiefpasses gilt mit $\Phi_n(f) = N_0/2$:

$$\Phi_\varepsilon'(f) = \Phi_n(f) \star \Phi_{z_E}(f).$$

In den Büchern „Signaldarstellung“ und „Stochastische Signaltheorie“ wurde gezeigt, dass das Spektrum und das Leistungsdichtespektrum eines Cosinussignals $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_T t)$ wie folgt gegeben sind:

$$X(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f + f_T) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f - f_T),$$
$$\Phi_x(f) = \frac{A^2}{4} \cdot \delta(f + f_T) + \frac{A^2}{4} \cdot \delta(f - f_T).$$

Angewandt auf das empfangsseitige Trägersignal $z_E(t)$ lautet die zweite Gleichung mit $A = 2$, und zwar unabhängig von der Phase (da im LDS alle Phasenbeziehungen verloren gehen):

$$\Phi_{z_E}(f) = \delta(f + f_T) + \delta(f - f_T).$$

Unter Berücksichtigung, dass $\Phi_n(f)$ für alle Frequenzen konstant ist, ergibt sich:

$$\Phi_\varepsilon'(f) = \Phi_n(f + f_T) + \Phi_n(f - f_T) = 2\Phi_n(f) = N_0.$$

Das LDS nach dem Tiefpassfilter ist für $|f| < B_{NF}$ genau so groß und außerhalb 0:

$$\Phi_\varepsilon(f) = \begin{cases} N_0 & \text{für } |f| < B_{NF}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Integration erhält man die Leistung $P_\varepsilon = 2N_0 \cdot B_{NF}$.

q.e.d.

Zu Kapitel 2.2: Leistungen von $q(t)$ und $s(t)$ bei ZSBAM

Ausgegangen wird jeweils von Cosinusschwingungen, also den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}q(t) &= A_N \cdot \cos(\omega_N \cdot t), \\s(t) &= (q(t) + A_T) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) = \\&= A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t) + \frac{A_N}{2} \cdot \cos((\omega_T + \omega_N) \cdot t) + \frac{A_N}{2} \cdot \cos((\omega_T - \omega_N) \cdot t).\end{aligned}$$

Die Leistung des Quellensignals, bezogen auf den Widerstand 1Ω , beträgt mit der Periodendauer T_N :

$$P_q = \frac{1}{T_N} \cdot \int_0^{T_N} q^2(t) dt = \frac{A_N^2}{T_N} \cdot \int_0^{T_N} \cos^2\left(2\pi \frac{t}{T_N}\right) dt = \frac{A_N^2}{2}.$$

Entsprechend erhält man für die Leistung des Sendesignals:

$$\begin{aligned}P_s &= \frac{A_T^2}{2} + \frac{(A_N/2)^2}{2} + \frac{(A_N/2)^2}{2} = \frac{A_T^2}{2} + \frac{A_N^2}{4} \\ \Rightarrow P_s &= \frac{1}{2} \cdot (P_q + A_T^2).\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt sowohl für ZSB-AM ohne Träger ($A_T = 0$) als auch für ZSB-AM mit Träger. Da $q(t)$ als eine harmonische Schwingung vorausgesetzt wurde, kann mit dem Modulationsgrad $m = A_N/A_T$ hierfür auch geschrieben werden:

$$P_s = \frac{A_N^2}{4} \cdot \left(1 + \frac{2A_T^2}{A_N^2}\right) = P_q \cdot \left(1 + \frac{2}{m^2}\right).$$

Es ist anzumerken, dass diese Gleichung nicht bei einem anderen Quellensignal als einer harmonischen Schwingung anwendbar ist.

q.e.d.

Zu Kapitel 3.1: Äquivalentes TP-Signals bei Winkelmodulation

1. Zur Vereinfachung setzen wir $A_T = 1$. Damit ist

$$s_{TP}(t) = e^{j \cdot \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)}.$$

2. Mit $x = j \cdot \eta \cdot \sin(\gamma)$ und $\gamma = \omega_N \cdot t$ lautet die Potenzreihenentwicklung obiger Gleichung:

$$\begin{aligned} s_{TP}(t) &= e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots = \\ &= 1 + j \cdot \eta \cdot \sin(\gamma) + \frac{1}{2!} \cdot j^2 \cdot \eta^2 \cdot \sin^2(\gamma) + \frac{1}{3!} \cdot j^3 \cdot \eta^3 \cdot \sin^3(\gamma) + \dots \end{aligned}$$

3. Die einzelnen trigonometrischen Ausdrücke können wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \cdot j^2 \cdot \eta^2 \cdot \sin^2(\gamma) &= \frac{-\eta^2}{2 \cdot 2!} \cdot [1 - \cos(2\gamma)], \\ \frac{1}{3!} \cdot j^3 \cdot \eta^3 \cdot \sin^3(\gamma) &= \frac{-j \cdot \eta^3}{4 \cdot 3!} \cdot [3 \cdot \sin(\gamma) - \sin(3\gamma)], \\ \frac{1}{4!} \cdot j^4 \cdot \eta^4 \cdot \sin^4(\gamma) &= \frac{\eta^4}{8 \cdot 4!} \cdot [3 + 4 \cdot \cos(2\gamma) + \cos(4\gamma)], \\ &\dots \end{aligned}$$

4. Durch geeignetes Umordnen erhält man mit $J_n(\eta)$, den **Besselfunktionen** 1. Art und n -ter Ordnung:

$$\begin{aligned} s_{TP}(t) &= 1 \cdot J_0(\eta) + 2 \cdot j \cdot J_1(\eta) \cdot \sin(\gamma) + 2 \cdot J_2(\eta) \cdot \cos(2\gamma) + \\ &+ 2 \cdot j \cdot J_3(\eta) \cdot \sin(3\gamma) + 2 \cdot J_4(\eta) \cdot \cos(4\gamma) + \dots \end{aligned}$$

5. Mit dem Satz von Euler kann hierfür auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} s_{TP}(t) &= J_0(\eta) + [e^{j \cdot \gamma} - e^{-j \cdot \gamma}] \cdot J_1(\eta) + [e^{j \cdot 2\gamma} + e^{-j \cdot 2\gamma}] \cdot J_2(\eta) + \\ &+ [e^{j \cdot 3\gamma} - e^{-j \cdot 3\gamma}] \cdot J_3(\eta) + [e^{j \cdot 4\gamma} + e^{-j \cdot 4\gamma}] \cdot J_4(\eta) + \dots \end{aligned}$$

6. Die Besselfunktionen zeigen folgende Symmetrieeigenschaften:

$$\begin{aligned} J_{-n}(\eta) &= (-1)^n \cdot J_n(\eta) \\ \Rightarrow J_{-1}(\eta) &= -J_1(\eta), \quad J_{-2}(\eta) = J_2(\eta), \quad J_{-3}(\eta) = -J_3(\eta), \quad J_{-4}(\eta) = J_4(\eta). \end{aligned}$$

7. Berücksichtigt man diesen Sachverhalt und den bisher weggelassenen Faktor A_T , so erhält man

$$s_{TP}(t) = A_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_N \cdot t}.$$

q.e.d.

Zu Kapitel 3.1: Besselfunktionen erster Art und n -ter Ordnung

Diese von dem Astronomen **Friedrich Wilhelm Bessel** 1844 eingeführten mathematischen Funktionen sind wie folgt definiert:

$$J_n(\eta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j \cdot (\eta \cdot \sin(\alpha) - n \cdot \alpha)} d\alpha.$$

Für die Berechnung einer Besselfunktion ist allerdings die Reihendarstellung besser geeignet:

$$J_n(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (\eta/2)^{n+2 \cdot k}}{k! \cdot (n+k)!}.$$

Sind die Funktionswerte für $n = 0$ und $n = 1$ bekannt, so können daraus die Besselfunktionen für $n \geq 2$ iterativ ermittelt werden:

$$J_n(\eta) = \frac{2 \cdot (n-1)}{\eta} \cdot J_{n-1} - J_{n-2}(\eta).$$

Die nachfolgende Grafik zeigt die jeweils ersten drei Summanden ($k = 0, 1, 2$) dieser Reihen.

$J_0(\eta) =$	1	- $(\eta/2)^2$	+ $\frac{1}{4} (\eta/2)^4$	- ...
$J_1(\eta) =$	$(\eta/2)$	- $\frac{1}{2} \cdot (\eta/2)^3$	+ $\frac{1}{24} \cdot (\eta/2)^5$	- ...
$J_2(\eta) =$	$\frac{1}{2} \cdot (\eta/2)^2$	- $\frac{1}{6} \cdot (\eta/2)^4$	+ $\frac{1}{48} \cdot (\eta/2)^6$	- ...
$J_3(\eta) =$	$\frac{1}{6} \cdot (\eta/2)^3$	- $\frac{1}{24} \cdot (\eta/2)^5$	+ $\frac{1}{240} \cdot (\eta/2)^7$	- ...
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	

© 2008 www.LNTwww.de

Der grau hinterlegte Term – gültig für $n = 3$ und $k = 2$ – lautet beispielsweise in ausgeschriebener Form:

$$\frac{(-1)^2 \cdot (\eta/2)^{3+2 \cdot 2}}{2! \cdot (3+2)!} = \frac{1}{240} \cdot (\eta/2)^7.$$

Die Werte der Besselfunktionen findet man in Formelsammlungen wie **[BS01]** in tabellarischer Form. Sie können auch mit dem nachfolgenden Berechnungsmodul ermittelt werden:

Werte der Besselfunktion erster Art (zu Kapitel 3.1 – 53 kB)

Zu Kapitel 5.5: Beweis der Orthogonalitätseigenschaften

Für die Orthogonalität an den Frequenzstützstellen $\mu \cdot f_0$ muss gelten:

$$S(\mu \cdot f_0) = S_0(\mu \cdot f_0) + \dots + S_\mu(\mu \cdot f_0) + \dots + S_{N-1}(\mu \cdot f_0) = S_\mu(\mu \cdot f_0).$$

Hier und im Folgenden wird auf den Index k der Rahmennummer verzichtet. Aus

$$s_\mu(t) = s_0 \cdot a_\mu \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot f_0 \cdot t} \cdot \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \quad \text{und} \quad S_\mu(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_\mu(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

ergibt sich das Spektrum $S(f)$ allgemein zu:

$$\begin{aligned} S(f) &= \left(s_0 \cdot a_0 \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{T}{2} \cdot f} \right) * \int_{-\infty}^{+\infty} e^0 \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt + \dots \\ &+ \left(s_0 \cdot a_\mu \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{T}{2} \cdot f} \right) * \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt + \dots \\ &+ \left(s_0 \cdot a_{N-1} \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{T}{2} \cdot f} \right) * \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot 2\pi \cdot (N-1) \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt. \end{aligned}$$

Mit Distributionen lässt sich diese Gleichung wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} S(f) &= \left(s_0 \cdot a_0 \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot T \cdot f} \right) * \delta(f) + \dots \\ &+ \left(s_0 \cdot a_\mu \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot T \cdot f} \right) * \delta(f - \mu \cdot f_0) + \dots \\ &+ \left(s_0 \cdot a_{N-1} \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot T \cdot f} \right) * \delta(f - (N-1) \cdot f_0). \\ \Rightarrow S(f) &= s_0 \cdot a_0 \cdot T \cdot \text{si}(\pi \cdot T \cdot f) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot T \cdot f} + \dots \\ &+ s_0 \cdot a_\mu \cdot T \cdot \text{si}(\pi \cdot T \cdot (f - \mu \cdot f_0)) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot T \cdot (f - \mu \cdot f_0)} + \dots \\ &+ s_0 \cdot a_{N-1} \cdot T \cdot \text{si}(\pi \cdot T \cdot (f - (N-1) \cdot f_0)) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot T \cdot (f - (N-1) \cdot f_0)}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $f = \mu \cdot f_0$, so erhält man:

$$S(\mu \cdot f_0) = 0 + \dots + s_0 \cdot a_\mu \cdot T \cdot \text{si}(0) \cdot e^0 + \dots + 0 = s_0 \cdot a_\mu \cdot T = S_\mu(\mu \cdot f_0).$$

Das Spektrum bei $f = \mu \cdot f_0$ setzt sich also nur aus Anteilen des μ -ten Trägers zusammen, wobei alle anderen Träger identisch Null werden. Die Orthogonalität ist gewährleistet.