

Musterlösung zur Aufgabe A4.1

a) Für das Kupferkabel gilt mit $R' = 130 \text{ } \Omega/\text{km}$, $L' = 0.6 \text{ mH/km}$, $G' = 1 \text{ } \mu\text{s/km}$ und $C' = 35 \text{ nF/km}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(f) &= \frac{1 \text{ Np/km}}{2} \cdot \left[130 \text{ } \Omega \cdot \sqrt{\frac{35 \cdot 10^{-9} \text{ s/}\Omega}{0.6 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega\text{s}}} + 10^{-6} \text{ } \Omega^{-1} \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega\text{s}}{35 \cdot 10^{-9} \text{ s/}\Omega}} \right] = \\ &= \frac{1 \text{ Np/km}}{2} \cdot [130 \cdot 7.638 \cdot 10^{-3} + 10^{-6} \cdot 0.131 \cdot 10^3] = \\ &= \frac{1 \text{ Np/km}}{2} \cdot [0.992 + 0.131 \cdot 10^{-3}] = 0.496 \frac{\text{Np}}{\text{km}}. \end{aligned}$$

Für die Bronzeleitung ergibt sich mit $R' = 2.2 \text{ } \Omega/\text{km}$, $L' = 1.8 \text{ mH/km}$, $G' = 0.5 \text{ } \mu\text{s/km}$, $C' = 6.7 \text{ nF/km}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(f) &= \frac{1 \text{ Np/km}}{2} \cdot \left[2.2 \cdot \sqrt{\frac{6.7 \cdot 10^{-9}}{1.8 \cdot 10^{-3}}} + 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{\frac{1.8 \cdot 10^{-3}}{6.7 \cdot 10^{-9}}} \right] = \\ &= \frac{1 \text{ Np/km}}{2} \cdot [4.244 \cdot 10^{-3} + 0.259 \cdot 10^{-3}] = 2.25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Np}}{\text{km}}. \end{aligned}$$

b) Die unter a) berechnete Schranke $\alpha_1(f)$ gilt nur für $f \gg f_*$, während die Schranke $\alpha_{II}(f)$ für $f \ll f_*$ gültig ist. Die charakteristische Frequenz ergibt sich als der Schnittpunkt der beiden Näherungen:

$$\alpha_{II}(f = f_*) = \sqrt{\omega_* \cdot \frac{R' C'}{2}} \Big|_{\omega_* = 2\pi f_*} = \alpha_1(f = f_*)$$

Für das Kupferkabel mit 0.6 mm Durchmesser gilt folgende Bestimmungsgleichung:

$$f_* = \frac{\alpha_1^2(f = f_*)}{\pi \cdot R' \cdot C'} = \frac{0.496^2 \text{ 1/km}^2}{\pi \cdot 130 \text{ } \Omega/\text{km} \cdot 35 \cdot 10^{-9} \text{ s/}(\Omega \cdot \text{km})} = 17.2 \text{ kHz}.$$

Dagegen erhält man für die Bronzeleitung mit 5 mm Durchmesser:

$$f_* = \frac{(2.25 \cdot 10^{-3})^2}{\pi \cdot 2.2 \cdot 6.7 \cdot 10^{-9}} \text{ kHz} = 0.109 \text{ kHz}.$$

c) Für das Kupferkabel gilt $f_0 \ll f_*$. Deshalb ist hier die Näherung $\alpha_{II}(f)$ günstiger:

$$\alpha(f = f_0) \approx \sqrt{\pi \cdot f_0 \cdot R' \cdot C'} = \sqrt{\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 130 \cdot 35 \cdot 10^{-9}} \frac{\text{Np}}{\text{km}} = 0.17 \frac{\text{Np}}{\text{km}}.$$

Dagegen ist für die Bronzeleitung wegen $f_0 \gg f_*$ die Näherung $\alpha_1(f)$ – die so genannte „schwache Dämpfung“ – besser geeignet (siehe Teilaufgabe a)):

$$\alpha(f = f_0) = 2.25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Np}}{\text{km}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.1

a) Setzt man in die gegebenen Gleichungen die Frequenz $f = 0$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\alpha(f = 0) &= [1 \text{ Np}] \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot R' \cdot G' + \frac{1}{2} \cdot R' \cdot G'} = [1 \text{ Np}] \cdot \sqrt{R' \cdot G'} = \\ &= [1 \text{ Np}] \cdot \sqrt{100 \text{ } \Omega/\text{km} \cdot 10^{-6} (\text{ } \Omega \cdot \text{km})^{-1}} = 0.01 \frac{\text{Np}}{\text{km}},\end{aligned}$$

$$\beta(f = 0) = [1 \text{ rad}] \cdot \sqrt{-\frac{1}{2} \cdot R' \cdot G' + \frac{1}{2} \cdot R' \cdot G'} = 0,$$

$$Z_W(f = 0) = \sqrt{\frac{R'}{G'}} = \sqrt{\frac{100 \text{ } \Omega/\text{km}}{1/(\text{ } \Omega \cdot \text{km})}} = 10 \text{ k} \Omega.$$

Die Gleichsignaldämpfung wird relevant, wenn das Nutzsignal im Basisband übertragen wird und einen Gleichanteil besitzt oder wenn der Netzabschluss beim Teilnehmer von der Ortsvermittlungsstelle aus mit Leistung versorgt werden muss (Fernspeisung).

b) Mit $f = 10^5$ Hz und den angegebenen Werten gilt

$$\begin{aligned}f \cdot 2\pi L' &= 10^5 \frac{1}{\text{s}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{ } \Omega \cdot \text{s}}{\text{km}} = 200 \frac{\text{ } \Omega}{\text{km}}, \\ f \cdot 2\pi C' &= 10^5 \frac{1}{\text{s}} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{s}}{\text{ } \Omega \cdot \text{km}} = 0.02 \frac{1}{\text{ } \Omega \cdot \text{km}}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Dämpfungsmaß in Np/km:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(f = 100 \text{ kHz})}{\text{Np/km}} &= \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (100 \cdot 10^{-6} - 200 \cdot 0.02) + \frac{1}{2} \sqrt{(100^2 + 200^2) \cdot (10^{-12} + 0.02^2)}} = \\ &\approx \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (10^{-4} - 4) + \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}} \approx \sqrt{-2 + \frac{\sqrt{20}}{2}} \approx 0.486.\end{aligned}$$

c) Der Grenzübergang bezüglich des Wellenwiderstands für $f \rightarrow \infty$ ergibt sich, wenn man im Zähler R' und im Nenner G' gegenüber den jeweils zweiten Term vernachlässigt:

$$\lim_{f \rightarrow \infty} Z_W(f) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{R' + j \cdot \omega L'}{G' + j \cdot \omega C'}} = \sqrt{\frac{2\pi L'}{2\pi C'}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega \cdot \text{s}}{2 \cdot 10^{-7} \text{ s}/\text{ } \Omega}} = 100 \text{ } \Omega.$$

Die Näherung für die Dämpfungsfunktion ist schwieriger herzuleiten. Ausgehend von

$$\alpha(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (R'G' - \omega^2 \cdot L'C') + \frac{1}{2} \sqrt{(R'^2 + \omega^2 \cdot L'^2) \cdot (G'^2 + \omega^2 \cdot C'^2)}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \cdot \alpha^2(\omega) &= R'G' + \omega^2 \cdot L'C' \cdot \left[-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{R'^2}{\omega^2 \cdot L'^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{G'^2}{\omega^2 \cdot C'^2}\right)} \right] \approx \\ &\approx R'G' + \omega^2 \cdot L'C' \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{R'^2}{\omega^2 \cdot L'^2} + \frac{G'^2}{\omega^2 \cdot C'^2}} \right] \end{aligned}$$

kommt man über die für kleine x gültige Näherung $(1+x)^{0.5} \approx 1+x/2$ zum Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \alpha^2(\omega \rightarrow \infty) &= R'G' + \omega^2 \cdot L'C' \cdot \left[-1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R'^2}{\omega^2 \cdot L'^2} + \frac{G'^2}{\omega^2 \cdot C'^2} \right) \right] = \\ &= \frac{2 \cdot R'G'C'L' + R'^2C'^2 + G'^2L'^2}{2 \cdot C'L'} = \frac{(R'C' + G'L')^2}{2 \cdot C'L'} \\ \Rightarrow \alpha(\omega \rightarrow \infty) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{R'C' + G'L'}{\sqrt{C'L'}} = \frac{1}{2} \cdot \left[R' \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}} + G' \cdot \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right]. \end{aligned}$$

Mit den eingesetzten Zahlenwerten ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha(f \rightarrow \infty) &= \alpha(\omega \rightarrow \infty) = \\ &= \frac{1 \text{ Np/km}}{2} \cdot \left[100 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-3}}} + 10^{-6} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-7}}} \right] \approx 0.5 \frac{\text{Np}}{\text{km}}. \end{aligned}$$

d) Für kleine Frequenzen gilt $\omega L' \ll R'$ und $G' \ll \omega C'$. Damit erhält man für das Dämpfungsmaß unter Vernachlässigung des ω^2 -Anteils

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (R'G' - \omega^2 \cdot L'C') + \frac{1}{2} \sqrt{(R'^2 + \omega^2 \cdot L'^2) \cdot (G'^2 + \omega^2 \cdot C'^2)}} \Big|_{\omega=2\pi f} \\ &\approx \sqrt{\frac{R'G'}{2} + \frac{R' \cdot \omega C'}{2}} \Big|_{\omega=2\pi f} \approx \sqrt{\frac{1}{2} \cdot f \cdot R' \cdot 2\pi C'}. \end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass der erste Anteil außer bei der Frequenz $f = 0$ direkt (siehe Teilaufgabe a)) vernachlässigt werden kann. Für die Frequenz $f = 1$ kHz ergibt sich die Näherung

$$\alpha(f = 1 \text{ kHz}) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 100 \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{s}}{\Omega \cdot \text{km}}} = 0.1 \frac{\text{Np}}{\text{km}}.$$

Für die Frequenz $f = 4$ kHz ist das Dämpfungsmaß doppelt so groß:

$$\alpha(f = 4 \text{ kHz}) = 0.2 \frac{\text{Np}}{\text{km}}.$$

e) Für den Wellenwiderstand gilt bei niedrigen Frequenzen näherungsweise

$$Z_W(f) = \sqrt{\frac{R' + j \cdot f \cdot 2\pi L'}{G' + j \cdot f \cdot 2\pi C'}} \approx \sqrt{\frac{1}{j}} \cdot \sqrt{\frac{R'}{f \cdot 2\pi C'}} = (1 - j) \cdot \sqrt{\frac{R'}{2 \cdot f \cdot 2\pi C'}}.$$

Mit den angegebenen Leitungsbeschlägen erhält man

$$\begin{aligned} \text{Re}\{Z_W(f = 1 \text{ kHz})\} &= \sqrt{\frac{100 \Omega/\text{km}}{2 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}/(\Omega \cdot \text{km})}} = 500 \Omega, \\ \text{Im}\{Z_W(f = 1 \text{ kHz})\} &= -\text{Re}\{Z_W(f = 1 \text{ kHz})\} = -500 \Omega. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.2

a) Der Wellenwiderstand Z_W ist definiert als der Quotient von Spannung und Strom der sich entlang der Leitung ausbreitenden Welle und ist unabhängig vom Ort. Deshalb ist Z_W auch unabhängig von der Leitungslänge und wird allein durch die Leitungsbeläge R' , L' , G' und C' bestimmt.

Die im Theorieteil angegebene Gleichung

$$Z_W(f) = \sqrt{\frac{R' + j \cdot \omega L'}{G' + j \cdot \omega C'}} \Big|_{\omega = 2\pi f}$$

macht deutlich, dass der Wellenwiderstand durchaus von der Frequenz abhängt und im allgemeinen auch komplexwertig ist. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 2 und 3.

Besonders anzumerken ist, dass der Wellenwiderstand keinen Widerstand im Sinne eines Verbrauchers darstellt. Er charakterisiert die Leitung nicht als verlustbehaftetes Element. Auch eine verlustlose Leitung besitzt einen Wellenwiderstand und ebenso ist bei der Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle stets ein Wellenwiderstand definiert.

b) Mit dem Abschlusswiderstand $Z_2(f) = Z_W(f)$ ist auch der an den Leitungsanfang transformierte Widerstandswert gleich dem Wellenwiderstand, und zwar unabhängig von der Leitungslänge:

$$\begin{aligned} Z_E(f) &= Z_W(f) \cdot \frac{Z_2(f) + Z_W(f) \cdot \tanh(\gamma(f) \cdot l)}{Z_W(f) + Z_2(f) \cdot \tanh(\gamma(f) \cdot l)} = \\ &= Z_W(f) \cdot \frac{Z_W(f) + Z_W(f) \cdot \tanh(\gamma(f) \cdot l)}{Z_W(f) + Z_W(f) \cdot \tanh(\gamma(f) \cdot l)} = Z_W(f). \end{aligned}$$

Da in der Aufgabenstellung $Z_W(f) = Z_W$ als frequenzunabhängig vorausgesetzt wurde, ist hier auch der Eingangswiderstand frequenzunabhängig. Dagegen können bei frequenzabhängigem Wellenwiderstand mit einem reellen Abschluss Reflexionen nicht für alle Frequenzen vermieden werden. Die Beschaltung $R_1 = R_2 = Z_W \Rightarrow R_1 = Z_E$ ist natürlich stets anzustreben, da dann von der Quelle die maximale Leistung abgegeben wird. Richtig sind also hier die Lösungsvorschläge 1, 2 und 4.

c) Mit dem Abschlusswiderstand $R_2 = 0$ folgt aus der angegebenen Gleichung mit reellem $\gamma(f) \cdot l = x$:

$$\begin{aligned} \frac{Z_E(f)}{Z_W} = \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ \frac{Z_E(f)}{Z_W} = 0.99 &\Rightarrow e^{2x} = 199 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \ln(199) \approx 2.65 \text{ Np}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_U = 10 \text{ MHz} : \alpha(f_U) = 0.5 \text{ Np/km} &\Rightarrow l_{\min} = \frac{2.65 \text{ Np}}{0.5 \text{ Np/km}} = 5.3 \text{ km}, \\ f_O = 40 \text{ MHz} : \alpha(f_O) = 1.0 \text{ Np/km} &\Rightarrow l_{\min} = 2.65 \text{ km}. \end{aligned}$$

Das heißt: Für die Frequenz $f_O = 40$ MHz genügt bereits eine Leitung der Länge $l = 2.65$ km, um Reflexionen weitgehend zu unterdrücken. Bei der niedrigeren Frequenz $f_U = 10$ MHz ist wegen des geringeren Dämpfungsmaßes dafür eine größere Kabellänge erforderlich.

Diese Aussagen beziehen sich natürlich nur auf das Vermeiden von Reflexionen. Insgesamt ist natürlich

die niedrigere Signalfrequenz günstiger als die höhere.

d) In gleicher Weise erhält man für $R_2 \rightarrow \infty$ (Leerlauf) die Gleichung

$$\frac{Z_E(f)}{Z_W} = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Im Gegensatz zum Kurzschluss-Fall ergibt sich für den Quotienten Z_E/Z_W nun stets ein Wert größer 1:

$$\frac{Z_E(f)}{Z_W} = 1.01 \Rightarrow e^{2x} = 201 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \ln(201) \approx 2.65 \text{ Np}.$$

Näherungsweise erhält man hier das gleiche Ergebnis wie bei Teilaufgabe c): Die minimale Kabellänge beträgt etwa 5.3 km ($f_U = 10$ MHz) bzw. 2.65 km ($f_O = 40$ MHz).

Musterlösung zur Aufgabe A4.3

a) Bei Widerstandsanpassung ($R_1 = R_2 = Z_W$) verbleibt von den vier Summanden nur der erste:

$$a_B = \alpha \cdot l = 0.1 \text{ Np/km} \cdot 2 \text{ km} = 0.2 \text{ Np}.$$

b) Entsprechend den angegebenen Gleichungen ergibt sich:

$$q_1 = \frac{R_1 + Z_W}{2 \cdot \sqrt{R_1 \cdot Z_W}} = \frac{200 + 100}{2 \cdot \sqrt{200 \cdot 100}} = 1.061 \Rightarrow \ln |q_1| = 0.059 \text{ Np},$$

$$q_2 = \frac{R_2 + Z_W}{2 \cdot \sqrt{R_2 \cdot Z_W}} = \frac{1000 + 100}{2 \cdot \sqrt{1000 \cdot 100}} = 1.739 \Rightarrow \ln |q_2| = 0.553 \text{ Np}.$$

c) Mit den vorgegebenen Beschaltungswiderständen erhält man

$$r_1 = \frac{200 \Omega - 100 \Omega}{200 \Omega + 100 \Omega} = 0.333, \quad \frac{1000 \Omega - 100 \Omega}{1000 \Omega + 100 \Omega} = 0.818$$

$$\Rightarrow r_\alpha = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot l} = 0.333 \cdot 0.818 \cdot e^{-4} = 0.183.$$

d) Beide Aussagen sind richtig: Bei konstruktiver Überlagerung ist $a_{WWD} = \ln A$ negativ $\Rightarrow A < 1$ und minimal. Im Gegensatz dazu bewirkt der maximale Wert von A (für den $A > 1$ gilt) eine positive Wechselwirkungsämpfung, also eine zusätzliche Dämpfung des Nutzsymbols aufgrund der destruktiven Überlagerung von hin- und rücklaufender Welle.

e) In der letzten Teilaufgabe wurde gezeigt, dass konstruktive Überlagerung gleichbedeutend ist mit der Minimierung von

$$A = |1 - r_\alpha \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \beta \cdot l}| = |1 - r_\alpha \cdot \cos(2\beta l) + j \cdot \sin(2\beta l)| =$$

$$= \sqrt{1 - 2 \cdot r_\alpha \cdot \cos(2\beta l) + r_\alpha^2 \cdot \cos^2(2\beta l) + r_\alpha^2 \cdot \sin^2(2\beta l)} =$$

$$= \sqrt{1 + r_\alpha^2 - 2 \cdot r_\alpha \cdot \cos(2\beta l)}.$$

Das Minimum ergibt sich für

$$\cos(2\beta l) = +1 \Rightarrow 2\beta l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \Rightarrow \beta_{\min} = \frac{\pi}{2l} = 0.785 \text{ rad/km}.$$

Dagegen kommt es zu destruktiver Überlagerung, falls das Phasenmaß folgende Bedingung erfüllt:

$$\cos(2\beta l) = -1 \Rightarrow 2\beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

f) Das Argument

$$A = \sqrt{1 + r_\alpha^2 - 2 \cdot r_\alpha \cdot \cos(2\beta l)}$$

kann maximal $A = 2 \Rightarrow a_{WWD} = 0.693 \text{ Np}$ werden unter folgenden Voraussetzungen:

- nicht abgeschlossene Leitung ($r_1 = r_2 = 1$),
- kurze Kabellänge, so dass der Term $\alpha \cdot l$ nicht wirksam ist ($r_\alpha = 1$),
- Phasenverlauf entsprechend Teilaufgabe e).

Musterlösung zur Aufgabe A4.4

a) Der α_0 -Term bewirkt nur eine frequenzunabhängige Dämpfung und der β_1 -Term (lineare Phase) eine frequenzunabhängige Laufzeit. Alle anderen Terme tragen zu den (linearen) Verzerrungen bei.

b) Mit $a_0 = \alpha_0 \cdot l$ muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$e^{-a_0} \geq 0.99 \Rightarrow a_0 < \ln \frac{1}{0.99} \approx 0.01 \text{ (Np)} .$$

Damit erhält man für die maximale Kabellänge

$$l_{\max} = \frac{a_0}{\alpha_0} = \frac{0.01 \text{ Np}}{0.00162 \text{ Np/km}} \approx 6.173 \text{ km} .$$

c) Für den Dämpfungsverlauf gilt bei Berücksichtigung aller Terme:

$$\begin{aligned} a_K(f) &= [\alpha_0 + \alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot \sqrt{f}] \cdot l = \\ &= [0.00162 + 0.000435 \cdot 70 + 0.2722 \cdot \sqrt{70}] \frac{\text{Np}}{\text{km}} \cdot 2 \text{ km} = \\ &= [0.003 + 0.061 + 4.555] \text{ Np} = 4.619 \text{ Np} . \end{aligned}$$

d) Entsprechend der Berechnung bei Punkt c) erhält man hier den Dämpfungswert 4.555 Np.

e) Für eine jede positive Größe x gilt:

$$\begin{aligned} x_{\text{Np}} = \ln x &= \frac{\lg x}{\lg e} = \frac{1}{20 \cdot \lg e} \cdot (20 \cdot \lg x) = 0.1151 \cdot x_{\text{dB}} \\ \Rightarrow x_{\text{dB}} &= 8.6859 \cdot x_{\text{Np}} . \end{aligned}$$

Der Dämpfungswert 4.555 Np ist somit identisch mit 39.56 dB.

f) Mit der Beschränkung auf den Dämpfungsterm mit α_2 gilt für den Frequenzgang:

$$H_K(f) = e^{-\alpha_2 \cdot l \cdot \sqrt{f}} \cdot e^{-j \cdot \beta_1 \cdot l \cdot f} \cdot e^{-j \cdot \beta_2 \cdot l \cdot \sqrt{f}} .$$

Verzichtet man auf den β_1 -Phasenterm, so ändert sich bezüglich den Verzerrungen nichts. Lediglich die Phasen- und die Gruppenlaufzeit würden (beide gleich) um den Wert $\tau_1 = (\beta_1 \cdot l)/2\pi$ kleiner.

Verzichtet man auf den β_2 -Term, so ergeben sich dagegen völlig andere Verhältnisse:

- Der Frequenzgang $H_K(f)$ erfüllt nun nicht mehr die Voraussetzung eines kausalen Systems; bei einem solchen muss $H_K(f)$ minimalphasig sein.
- Die Impulsantwort $h_K(t)$ ist bei reellem Frequenzgang symmetrisch um $t = 0$, was nicht den Gegebenheiten entspricht.

Deshalb ist als eine Näherung für den Koaxialkabelfrequenzgang erlaubt:

$$a_K(f) = \alpha_2 \cdot l \cdot \sqrt{f}, \quad b_K(f) = a_K(f) \cdot \frac{\text{rad}}{\text{Np}} .$$

Das heißt: $a_K(f)$ und $b_K(f)$ eines Koaxialkabels sind in erster Näherung formgleich und unterscheiden sich

lediglich in ihren Einheiten.

Bei einem Digitalsystem mit der Bitrate $R = 140 \text{ Mbit/s} \Rightarrow R/2 = 70 \text{ Mbit/s}$ und Kabellänge $l = 2 \text{ km}$ gilt tatsächlich $a_{*} \approx 40 \text{ dB}$ (siehe Musterlösung zur letzten Teilaufgabe). Ein System mit vierfacher Bitrate ($R/2 = 280 \text{ Mbit/s}$) und halber Länge ($l = 1 \text{ km}$) führt zur gleichen charakteristischen Kabeldämpfung. Dagegen gilt für ein System mit $R/2 = 35 \text{ Mbit/s}$ und $l = 2 \text{ km}$:

$$a_{\text{dB}} = 0.2722 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}} \cdot 2 \text{ km} \cdot \sqrt{35 \text{ MHz}} \cdot 8.6859 \frac{\text{dB}}{\text{Np}} \approx 28 \text{ dB}.$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1, 4 und 5.

Musterlösung zur Aufgabe A4.5

a) Die charakteristische Kabeldämpfung $a_* = 60$ dB entspricht in etwa 6.9 Np. Deshalb muss gelten:

$$\alpha_2 \cdot l \cdot \frac{R}{2} = 6.9 \text{ Np} \Rightarrow l = \frac{6.9 \text{ Np}}{0.2722 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}} \cdot \sqrt{70 \text{ MHz}}} \approx 3 \text{ km}.$$

b) Mit den Substitutionen

$$x = \frac{t}{T}, \quad K_1 = \frac{a_*/T}{\sqrt{2\pi^2}}, \quad K_2 = \frac{a_*^2}{2\pi}$$

kann die Impulsantwort wie folgt beschrieben werden:

$$h_K(x) = K_1 \cdot x^{-3/2} \cdot e^{-K_2/x}.$$

Durch Nullsetzen der Ableitung folgt daraus:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \cdot K_1 \cdot x^{-5/2} \cdot e^{-K_2/x} + K_1 \cdot x^{-3/2} \cdot e^{-K_2/x} \cdot (-K_2) \cdot (-x^{-2}) &= 0. \\ \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot x^{-5/2} &= K_2 \cdot x^{-7/2} \Rightarrow x_{\max} = \frac{2}{3} \cdot K_2 = \frac{a_*^2}{3\pi}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für 60 dB Kabeldämpfung ($a_* \approx 6.9$ Np):

$$x_{\max} = \frac{t_{\max}}{T} : \frac{t_{\max}}{T} = \frac{6.9^2}{3\pi} \approx 5.$$

c) Setzt man das Ergebnis von b) in die vorgegebene Gleichung ein, so erhält man (zur Vereinfachung verwenden wir a anstelle von a_*):

$$\begin{aligned} h_K(t_{\max}) &= \frac{1}{T} \cdot \frac{a}{\sqrt{2\pi^2 \cdot \frac{a^6}{(3\pi)^3}}} \cdot \exp \left[-\frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{3\pi}{a^2} \right] \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{27\pi}{2}} \cdot e^{-3/2} \approx \frac{1}{T} \cdot \frac{1.453}{a^2}. \end{aligned}$$

Mit $a = 6.9$ kommt man somit zum Endergebnis:

$$\text{Max}[h_K(t)] = \frac{1.453}{6.9^2} \cdot \frac{1}{T} \approx 0.03 \cdot \frac{1}{T}.$$

d) Mit dem Ergebnis aus c) lautet die Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{a/T}{\sqrt{2\pi^2 \cdot (t_{5\%}/T)^3}} &= 0.05 \cdot 0.03 \cdot \frac{1}{T} = 0.0015 \cdot \frac{1}{T} \\ \Rightarrow (t_{5\%}/T)^{3/2} &= \frac{a}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 0.0015}} \approx 1036 \Rightarrow t_{5\%}/T \approx 103.5. \end{aligned}$$

Dieser Wert ist etwas zu groß, da der zweite Term $e^{-0.05} \approx 0.95$ vernachlässigt wurde. Die exakte Berechnung liefert $t_{5\%}/T \approx 97$.

e) Richtig ist der zweite Lösungsvorschlag. Allgemein gilt:

$$g_r(t) = g_s(t) \star h_K(t) = s_0 \cdot \int_{t-T/2}^{t+T/2} h_K(\tau) d\tau.$$

Da sich die Kanalimpulsantwort $h_K(t)$ innerhalb einer Symboldauer nur unwesentlich ändert, kann hierfür auch geschrieben werden:

$$g_r(t) = h_K(t) \cdot s_0 \cdot T.$$

Musterlösung zur Aufgabe Z4.5

a) Die Spektraldarstellung eines Laufzeitgliedes lautet $e^{-j2\pi ft}$. Ein Vergleich mit der Angabenseite zeigt, dass $H_1(f)$ genau diesem Ansatz genügt.

b) Entsprechend dem Angabenblatt gilt:

$$2\pi \cdot f \cdot \tau = \beta_1 \cdot f \cdot l \Rightarrow \tau = \frac{\beta_1 \cdot l}{2\pi} = \frac{21.78 \frac{\text{rad}}{\text{km} \cdot \text{MHz}} \cdot 10 \text{ km}}{2\pi} = 34.7 \mu\text{s}$$
$$\Rightarrow \tau' = \frac{\tau}{T} = 694 \Rightarrow T = \frac{34.7 \mu\text{s}}{700} \approx 0.05 \mu\text{s}.$$

Die Bitrate ist gleich dem Kehrwert der Symboldauer: $R = 20 \text{ Mbit/s}$.

c) Für die charakteristische Kabeldämpfung erhält man somit:

$$a_* = \alpha_2 \cdot \sqrt{R/2} \cdot l = 0.2722 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}} \cdot \sqrt{10 \text{ MHz}} \cdot 10 \text{ km} \approx 8.6 \text{ Np}.$$

Der entsprechende dB-Wert ist 75 dB.

d) Mit der angegebenen Gleichung und dem Ergebnis aus c) ergibt sich:

$$\text{Max}[T \cdot h_K(t)] \approx \frac{1.453}{a_*^2} = \frac{1.453}{8.6^2} \approx 0.02.$$

e) Richtig ist nur Aussage 1. $H_1(f)$ beschreibt die frequenzunabhängige Laufzeit, die keine Verzerrung zur Folge hat. Dagegen sollte man zur Berechnung der Impulsantwort auf keinen Fall auf $H_2(f)$ oder $H_3(f)$ verzichten, da es sonst es zu gravierenden Fehlern kommen würde:

- Die Impulsantwort $h_2(t)$ als die Fourierrücktransformierte von $H_2(f)$ ist eine gerade Funktion mit dem Maximum bei $t = 0$ und erstreckt sich in beide Richtungen über Hunderte von Symbolen.
- Dagegen ist die Fourierrücktransformierte von $H_3(f)$ eine ungerade Funktion mit einer Sprungstelle bei $t = 0$. Für $t > 0$ fällt $h_3(t)$ ähnlich – aber nicht exakt – wie eine Exponentialfunktion ab. Für negative Zeiten gilt $h_3(t) = -h_3(|t|)$.
- Erst die Faltung $h_2(t) * h_3(t)$ liefert die kausale Impulsantwort. Die Phasenlaufzeit τ ist hierbei noch nicht berücksichtigt.

Musterlösung zur Aufgabe A4.6

a) Die Ableitung des angegebenen Erwartungswertes nach α_1 ergibt:

$$\frac{dE[\varepsilon^2(f)]}{d\alpha_1} = \frac{2}{3} \cdot B^3 \cdot \alpha_1 + \frac{4}{5} \cdot B^{2.5} \cdot \alpha_2 - \frac{2k_2}{k_3 + 2} \cdot \frac{B^{k_3+2}}{f_0^{k_3}} = 0.$$

Durch Nullsetzen und Division durch $2B^2/3$ erhält man daraus:

$$\alpha_1 + \frac{6}{5} \cdot B^{-0.5} \cdot \alpha_2 - \frac{3k_2}{k_3 + 2} \cdot \frac{B^{k_3-1}}{f_0^{k_3}} = 0.$$

Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 1 und 6.

b) Bei gleicher Vorgehensweise wie in der Teilaufgabe a) zeigt sich, dass nun die Lösungsvorschläge 2 und 5 richtig sind:

$$\begin{aligned} \frac{dE[\varepsilon^2(f)]}{d\alpha_2} &= \frac{4}{5} \cdot B^{2.5} \cdot \alpha_1 + B^2 \cdot \alpha_2 - \frac{2k_2}{k_3 + 1.5} \cdot \frac{B^{k_3+1.5}}{f_0^{k_3}} = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 + \frac{5}{4} \cdot B^{-0.5} \cdot \alpha_2 - \frac{2.5 \cdot k_2}{k_3 + 1.5} \cdot \frac{B^{k_3-1}}{f_0^{k_3}} &= 0. \end{aligned}$$

c) Aus $C_1 \cdot \alpha_2 + C_2 = D_1 \cdot \alpha_2 + D_2$ ergibt sich eine lineare Gleichung für α_2 . Mit dem Ergebnis aus b) kann hierfür geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{D_2 - C_2}{C_1 - D_1} = \frac{-\frac{2.5 \cdot k_2}{k_3 + 1.5} \cdot \frac{B^{k_3-1}}{f_0^{k_3}} + \frac{3k_2}{k_3 + 2} \cdot \frac{B^{k_3-1}}{f_0^{k_3}}}{\frac{6}{5} \cdot B^{-0.5} - \frac{5}{4} \cdot B^{-0.5}} = \\ &= \frac{-2.5 \cdot k_2 \cdot (k_3 + 2) + 3k_2 \cdot (k_3 + 1.5)}{\left(\frac{6}{5} - \frac{5}{4}\right)(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{B^{k_3-0.5}}{f_0^{k_3}} = \\ &= 10 \cdot (B/f_0)^{k_3-0.5} \cdot \frac{1 - k_3}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{f_0}}. \end{aligned}$$

Für den Parameter α_1 gilt dann:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -C_1 \cdot \alpha_2 - C_2 = \\ &= -\frac{6}{5} \cdot B^{-0.5} \cdot 10 \cdot (B/f_0)^{k_3-0.5} \cdot \frac{1 - k_3}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{f_0}} + \frac{3k_2}{k_3 + 2} \cdot \frac{B^{k_3-1}}{f_0^{k_3}} = \\ &= (B/f_0)^{k_3-1} \cdot \frac{-12 \cdot (1 - k_3) + 3 \cdot (k_3 + 1.5)}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{f_0} = \\ &= 15 \cdot (B/f_0)^{k_3-1} \cdot \frac{k_3 - 0.5}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{f_0}. \end{aligned}$$

Die beiden Lösungsvorschläge sind richtig. Unabhängig von der Bandbreite erhält man für $k_3 = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (B/f_0)^{k_3-1} \cdot \frac{15 \cdot (k_3 - 0.5)}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{f_0} = \frac{15 \cdot 0.5}{2.5 \cdot 3} \cdot \frac{k_2}{f_0} = \frac{k_2}{f_0}, \\ \alpha_2 &= (B/f_0)^{k_3-0.5} \cdot \frac{10 \cdot (1 - k_3)}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{f_0}} = 0. \end{aligned}$$

und für $k_3 = 0.5$:

$$\alpha_1 = (B/f_0)^{k_3-1} \cdot \frac{15 \cdot (k_3 - 0.5)}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{f_0} = 0,$$

$$\alpha_2 = (B/f_0)^{k_3-0.5} \cdot \frac{10 \cdot (1 - k_3)}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{f_0}} = \frac{10 \cdot 0.5}{2 \cdot 2.5} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{f_0}} = \frac{k_2}{\sqrt{f_0}}.$$

d) Für die beiden Koeffizienten gilt mit $k_2 = 10.8 \text{ dB/km}$, $k_3 = 0.6 \text{ dB/km}$ und $B/f_0 = 30$.

$$\alpha_1 = (B/f_0)^{k_3-1} \cdot \frac{15 \cdot (k_3 - 0.5)}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{f_0} =$$

$$= 30^{-0.4} \cdot \frac{15 \cdot 0.1}{2.1 \cdot 2.6} \cdot \frac{10.8 \text{ dB/km}}{1 \text{ MHz}} \approx 0.761 \frac{\text{dB}}{\text{km} \cdot \text{MHz}},$$

$$\alpha_2 = (B/f_0)^{k_3-0.5} \cdot \frac{10 \cdot (1 - k_3)}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{f_0}} = \frac{10 \cdot 0.5}{2 \cdot 2.5} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{f_0}} = \frac{k_2}{\sqrt{f_0}} =$$

$$= 30^{0.1} \cdot \frac{10 \cdot 0.4}{2.1 \cdot 2.6} \cdot \frac{10.8 \text{ dB/km}}{1 \text{ MHz}^{0.5}} \approx 11.1 \frac{\text{dB}}{\text{km} \cdot \text{MHz}^{0.5}}.$$

e) Entsprechend der angegebenen Gleichung $\alpha_{\text{II}}(f)$ gilt:

$$\alpha_{\text{II}}(f = 30 \text{ MHz}) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot \sqrt{f} =$$

$$= \left[4.4 + 0.761 \cdot 30 + 11.1 \cdot \sqrt{30} \right] \frac{\text{dB}}{\text{km}} \approx 88.1 \frac{\text{dB}}{\text{km}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.6

a) Im Anschlussbereich wird eine Zweidrahtübertragung verwendet. Die möglichen Anschlüsse sind somit gleich der Anzahl der Doppeladern im Hauptkabel: $N = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$.

b) Bei Zweidrahtübertragung ist ein Richtungstrennungsverfahren erforderlich, nämlich die so genannte **Gabelschaltung**. Diese hat die Aufgabe, dass beim Empfänger **A** nur das Sendesignal von Teilnehmer **B** ankommt, nicht jedoch das eigene Sendesignal. Dies gelingt bei schmalbandigen Signalen – zum Beispiel Sprache – im allgemeinen recht gut, jedoch nicht vollständig.

Der Lösungsvorschlag 2 ist ebenfalls zutreffend. Aufgrund von induktiven und kapazitiven Kopplungen kann es zu Übersprechen von der im gleichen Sternvierer befindlichen Doppelader kommen, wobei Nahnebensprechen (das heißt: der störende Sender und der gestörte Empfänger liegen örtlich zusammen) zu größeren Beeinträchtigungen führt als Fernnebensprechen.

Nicht zutreffend ist dagegen der letzte Lösungsvorschlag. Impulsinterferenzen – also die gegenseitige störende Beeinflussung benachbarter Symbole – können zwar durchaus auftreten, hängen aber nicht mit der Zweidrahtübertragung zusammen. Der Grund für solche Impulsinterferenzen sind vielmehr lineare Verzerrungen, bedingt durch nichtidealen Dämpfungs- und Phasenverlauf.

c) Die Gleichsignal-Dämpfung um den Faktor 4 kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$a_K(f = 0) = 20 \cdot \lg(4) = 12.04 \text{ dB}.$$

Mit dem angegebenen Koeffizienten 5.1 dB/km ergibt sich somit die Leitungslänge $12.04/5.1 = 2.36 \text{ km}$.

d) Mit den angegebenen Gleichungen und $l = 2.36 \text{ km}$ erhält man:

$$\begin{aligned} a_K(f = 120 \text{ kHz}) &= (5.1 + 14.3 \cdot 0.12^{0.59}) \cdot 2.36 \text{ dB} \approx 21.7 \text{ dB}, \\ b_K(f = 120 \text{ kHz}) &= (32.9 \cdot 0.12 + 2.26 \cdot 0.12^{0.5}) \cdot 2.36 \text{ rad} \approx 11.2 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.7

a) Mit $a_0 = \alpha_0 \cdot l \approx 0.76$ Np erhält man für die Konstante K , die den Einfluss des Koeffizienten α_0 auf die Impulsantwort angibt:

$$K = e^{-a_0} = 0.468.$$

b) Für die Phasenlaufzeit gilt mit der angegebenen Gleichung:

$$\tau_P = \frac{\beta_1 \cdot l}{2\pi} = \frac{30.6 \cdot 1.5}{2\pi} \mu\text{s} \approx 7.31 \mu\text{s},$$

und bezogen auf die Symboldauer $T = 0.1 \mu\text{s}$:

$$\frac{\tau_P}{T} \approx 73.$$

c) Die Impulsantwort eines Koaxialkabels ist näherungsweise gleich $h_2(t)$, wenn dieses Koaxialkabel folgende charakteristische Kabeldämpfung aufweist:

$$\begin{aligned} a_* = a_2 &= \alpha_2 \cdot l \cdot \sqrt{\frac{R}{2}} = 1.1467 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \text{MHz}^{0.5}} \cdot 1.5 \text{ km} \cdot \sqrt{\frac{10 \text{ MHz}}{2}} = \\ &= 2.93 \text{ Np} = 25.5 \text{ dB}. \end{aligned}$$

d) Richtig sind die Aussagen 1 und 2. Die Fouriertransformierte $H_1(f) = e^{-A \cdot |f|}$ mit $A = 2a_1/R$ ist reell und gerade, so dass $h(t)$ ebenfalls reell und gerade ist. Aufgrund der Tiefpass-Charakteristik von $H_1(f)$ liegt das Maximum bei $t = 0$. Dagegen ist die letzte Aussage falsch: Das Integral über $h_1(t)$ im Bereich von $\pm \infty$ ist gleich $H_1(f=0)$, also 1.

e) Richtig ist nur der Lösungsvorschlag 1: Die Teilimpulsantwort $h_1(t) * h_2(t)$ berücksichtigt den Einfluss von α_1 , α_2 und β_2 und damit alle Terme, die zu Verzerrungen führen. Dagegen führt α_0 nur zu einer frequenzunabhängigen Dämpfung und β_1 zu einer für alle Frequenzen konstanten Laufzeit.

Der Lösungsvorschlag 2 trifft dagegen nicht zu. Zunächst (bei kleinen t -Werten) ist $h_1(t) * h_2(t)$ kleiner als $h_2(t)$. Bei großen t -Werten liegt dann die blaue Kurve oberhalb der roten. Das bedeutet: a_1 und damit auch $h_1(t)$ bewirken tatsächlich nicht zu vernachlässigende Verzerrungen.

Musterlösung zur Aufgabe A4.8

a) Nebensprechen entsteht durch Kopplungen der übertragenen Signale auf benachbarte Doppeladern. Bei Nahnebensprechen (NEXT) befinden sich der störende Sender und der gestörte Empfänger am selben Ende der Leitung, bei Fernnebensprechen (FEXT) an unterschiedlichen Enden. Da aber auch die Störsignale auf der Kupferdoppelader sehr stark gedämpft werden, ist NEXT gegenüber FEXT stets der bei Weitem dominante Störeffekt.

Richtig sind hier die Lösungsvorschläge 2 und 4. Der Empfänger E_2 wird hier besonders durch seinen eigenen Sender S_2 , also durch Nahnebensprechen gestört. Die Beeinträchtigung von E_2 durch S_3 ist Fernnebensprechen, während S_1 für E_2 das Nutzsinal bereitstellt.

b) Die Sendeleistung ist gleich dem Integral über das Leistungsdichtespektrum:

$$P_S = \Phi_0 \cdot 2f_0 = 5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{Hz}} \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ Hz} = 10^{-3} \text{ W}.$$

c) Für die Empfangsleistung gilt (ohne den Anteil durch Nahnebensprechen):

$$\begin{aligned} P_E &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f) \cdot |H_K(f)|^2 df = 2\Phi_0 \cdot \int_0^{f_0} \left[0.9 - 0.04 \cdot \frac{f}{f_0} \right] df = \\ &= 2\Phi_0 \cdot \left[0.9 \cdot f_0 - 0.04 \cdot \frac{f_0^2}{f_0} \right] = 1.76 \cdot \Phi_0 \cdot f_0 = 1.76 \cdot P_S = 0.88 \cdot 10^{-3} \text{ W}. \end{aligned}$$

d) Für diesen störenden Leistungsanteil erhält man

$$\begin{aligned} P_{\text{NEXT}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f) \cdot |H_{\text{NEXT}}(f)|^2 df = 2\Phi_0 \cdot K_{\text{NEXT}}^{3/2} \cdot \int_0^{f_0} f^{3/2} df = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \Phi_0 \cdot K_{\text{NEXT}}^{3/2} \cdot f_0^{5/2} = 0.8 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{Hz}} \cdot (6 \cdot 10^{-10} \text{ s})^{3/2} \cdot (10^5 \text{ Hz})^{5/2} = \\ &= 0.186 \cdot 10^{-9} \text{ W}. \end{aligned}$$

e) Das Verhältnis P_E/P_{NEXT} ist ca. $4.73 \cdot 10^6$. Daraus ergibt sich der logarithmische Wert zu 66.7 dB.