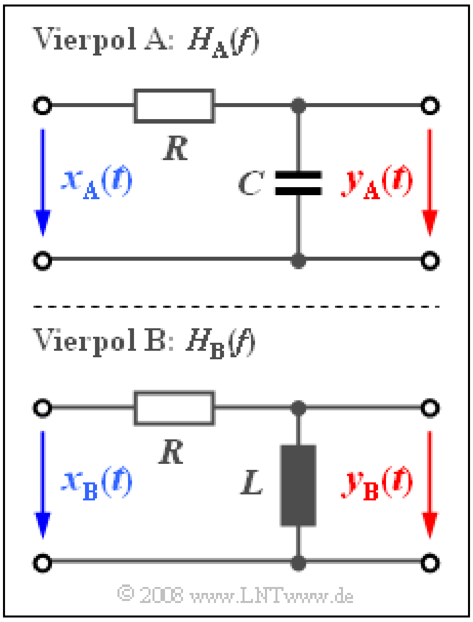
A1.1: Einfache Filterfunktionen



Man bezeichnet ein Filter mit dem Frequenzgang

$$H_{\rm TP}(f) = \frac{1}{1+{\rm j}\cdot f/f_0}$$

als Tiefpass erster Ordnung. Daraus lässt sich ein Hochpass erster Ordnung nach folgender Vorschrift gestalten:

$$H_{\rm HP}(f) = 1 - H_{\rm TP}(f).$$

In beiden Fällen gibt f_0 die so genannte 3dB–Grenzfrequenz an.

Die Abbildung zeigt zwei Vierpole *A* und *B*. In der Aufgabe ist zu klären, welcher der beiden Vierpole eine Tiefpass– und welcher eine Hochpasscharakteristik aufweist.

Die Bauelemente von Schaltung A sind wie folgt gegeben:

$$R = 50\ \Omega;\ C = 0.637\ \mu{\rm F}.$$

Die Induktivität L ist in der Teilaufgabe f) zu berechnen.

Für die Teilaufgabe d) wird vorausgesetzt, dass die Eingangssignale cosinusförmig seien. Die Frequenz f_x ist variabel, die Leistung beträgt jeweils P_x = 10 mW.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.1.**

Fragebogen zu "A1.1: Einfache Filterfunktionen"

a) Berechnen Sie den Frequenzgang $H_\text{A}(f)$ des Vierpols A und beantworten Sie folgende Fragen.

- [ ] Vierpol A ist ein Tiefpass.
- [ ] Vierpol A ist ein Hochpass.

b) Berechnen Sie die Bezugsfrequenz f_0 aus den Bauelementen R und C.

$\boldsymbol{f_0}$ = kHz

c) Berechnen Sie den Amplitudengang $|H_\text{A}(f)|$. Welche Zahlenwerte ergeben sich für $f = f_0$ und $f = 2f_0$?

$|\boldsymbol{H_\text{A}(f = f_0)}|$ =

$|\boldsymbol{H_\text{A}(f = 2f_0)}|$ =

d) Wie groß ist die Leistung P_y des Ausgangssignals $y(t)$, wenn am Eingang ein Cosinussignal mit den Frequenzen f_x = 5 kHz bzw. f_x = 10 kHz anliegt?

$\boldsymbol{P_y(f_x = 5\ \text{kHz})}$ = mW

$\boldsymbol{P_y(f_x = 10\ \text{kHz})}$ = mW

e) Berechnen Sie den Amplitudengang $|H_\text{B}(f)|$ des Vierpols mit den Elementen R und L unter Verwendung der Bezugsfrequenz $f_0 = R/(2\pi L)$. Welche Werte ergeben sich bei $f = 0$, $f = f_0$ und $f = 2f_0$ sowie für $f \to \infty$?

$|\boldsymbol{H_\text{B}(f = 0)}|$ =

$|\boldsymbol{H_\text{B}(f = f_0)}|$ =

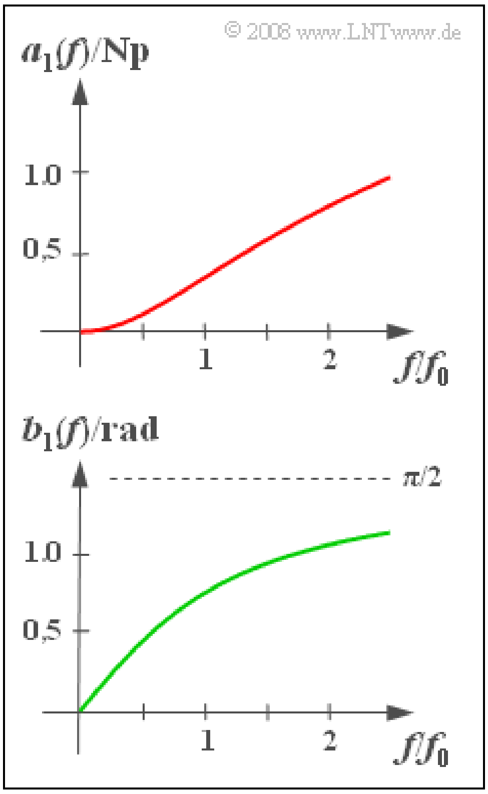
$|\boldsymbol{H_\text{B}(f = 2f_0)}|$ =

$|\boldsymbol{H_\text{B}(f \to \infty)}|$ =

f) Welche Induktivität führt zu der Bezugsfrequenz f_0 = 5 kHz?

$\boldsymbol{L}$ = mH

Z1.1: Tiefpass 1. und 2. Ordnung



Die einfachste Form eines Tiefpasses – z.B. realisierbar als der RC–Tiefpass entsprechend Aufgabe A1.1 – hat folgenden Frequenzgang:

$$H_1(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot f/f_0}.$$

Man spricht in diesem Fall von einem Tiefpass erster Ordnung. Der Dämpfungsverlauf $a_1(f)$ und der Phasenverlauf $b_1(f)$ dieses Filters sind in der Grafik dargestellt.

Entsprechend gilt für einen Tiefpass n–ter Ordnung die folgende Definitionsgleichung:

$$H_n(f) = H_1(f)^n.$$

In dieser Aufgabe sollen – ausgehend von den Funktionen $a_1(f)$ und $b_1(f)$ eines Tiefpasses erster Ordnung – der Dämpfungs– und Phasenverlauf eines solchen Tiefpasses höherer Ordnung analysiert werden. Allgemein gilt:

$$H(f) = \mathrm{e}^{-a(f) - \mathrm{j} \cdot b(f)}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 1.1.** Zwischen dem Np– und dem dB–Wert eines Amplitudenwertes $|H| = 1/x$ besteht folgender Zusammenhang:

$$a_{\rm Np} = \ln(x) = \ln(10) \cdot \lg(x) = \frac{\ln(10)}{20} \cdot a_{\rm dB} \approx 0.115 \cdot a_{\rm dB}.$$

Berücksichtigen Sie weiter, dass für zwei komplexe Größen z_1 und z_2 folgende Gleichungen gelten:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \mathrm{arc}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{arc}\,(z_1) + \mathrm{arc}\,(z_2).$$

Fragebogen zu "Z1.1: Tiefpass 1. und 2. Ordnung"

a) Berechnen Sie den Dämpfungsverlauf $a_1(f)$ eines Tiefpasses erster Ordnung. Welche dB–Werte ergeben sich bei $f = f_0$ und $f = 2f_0$?

$a_1(f = f_0)$ = dB

$a_1(f = 2f_0)$ = dB

b) Berechnen Sie den Phasenverlauf $b_1(f)$. Welche Werte in Radian (rad) erhält man bei $f = f_0$ und $f = 2f_0$?

$b_1(f = f_0)$ = rad

$b_1(f = 2f_0)$ = rad

c) Welchen Dämpfungsverlauf $a_n(f)$ hat ein Tiefpass n–ter Ordnung allgemein? Welche dB–Werte erhält man mit $n = 2$ für $f = f_0$ bzw. $f = -2f_0$?

$a_2(f = f_0)$ = dB

$a_2(f = -2f_0)$ = dB

d) Berechnen Sie die Phasenfunktion $b_2(f)$ eines Tiefpasses zweiter Ordnung. Welche Werte (in Radian) erhält man für $f = f_0$ und $f = -2f_0$?

$b_2(f = f_0)$ = rad

$b_2(f = -2f_0)$ = rad

A1.2: Koaxialkabel

Der Frequenzgang eines Normalkoaxialkabels (Durchmesser des Innenleiters: 2.6 mm, Außendurchmesser: 9.5 mm) der Länge l lautet für Frequenzen $f > 0$:

$$H(f) = \mathrm{e}^{-\alpha_0 \cdot l} \cdot \mathrm{e}^{-(\alpha_1 + \mathrm{j} \cdot \beta_1) \cdot f \cdot l} \cdot \mathrm{e}^{-(\alpha_2 + \mathrm{j} \cdot \beta_2) \cdot \sqrt{f} \cdot l}.$$

Der erste, von den Ohmschen Verlusten herrührende Term in dieser Gleichung wird durch die sog. kilometrische Dämpfung α_0 = 0.00162 Np/km beschrieben.

Der auf die Querverluste zurückzuführende frequenzproportionale Dämpfungsanteil $\alpha_1 \cdot f \cdot l$ mit α_1 = 0.000435 Np/(km · MHz) macht sich erst bei sehr hohen Frequenzen bemerkbar und wird im Folgenden vernachlässigt. Ebenso kann die frequenzproportionale Phase $\beta_1 \cdot f \cdot l$ mit β_1 = 21.78 rad/(km · MHz) außer Acht gelassen werden, da diese nur eine für alle Frequenzen gleiche Laufzeit zur Folge hat.

Der Frequenzgang des Koaxialkabels wird deshalb für Frequenzen zwischen 200 kHz und 400 MHz im Wesentlichen durch den Einfluss der Dämpfungskonstanten α_2 = 0.2722 Np/(km · MHz$^{0.5}$) und der Phasenkonstanten β_2 = 0.2722 rad/(km · MHz$^{0.5}$) bestimmt, die auf den so genannten Skineffekt zurückzuführen sind:

$$H(f) = K \cdot \mathrm{e}^{-(\alpha_2 + \mathrm{j} \cdot \beta_2) \cdot \sqrt{f} \cdot l} \quad (f > 0).$$

Aufgrund der gleichen Zahlenwerte von α_2 und β_2 kann für den Frequenzgang auch geschrieben werden:

$$H(f) = K \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{2\mathrm{j} \cdot f/f_0}},$$

wobei der Parameter f_0 die Konstanten α_2 und β_2 sowie die Kabellänge l berücksichtigt.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.1.**

Fragebogen zu "A1.2: Koaxialkabel"

a) Berechnen Sie die Frequenzgang–Konstante K für die Kabellänge $l = 5$ km.

$\boldsymbol{K}$ =

b) Welche Länge l_{max} könnte ein solches Kabel besitzen, damit ein Gleichsignal um nicht mehr als 3% gedämpft wird?

$\boldsymbol{l_{\text{max}}}$ = km

c) Berechnen Sie die charakteristische Frequenz f_0 für die Kabellänge $l = 5$ km. Berücksichtigen Sie die Beziehung $(2\text{j})^{0.5} = 1 + \text{j}$.

$\boldsymbol{f_0}$ = MHz

d) Wie groß ist die Signalleistung P_y am Ausgang, wenn man am Kabeleingang ein Cosinussignal der Frequenz f_0 und der Leistung $P_x = 1$ W angelegt wird?

$\boldsymbol{P_y(f = f_0)}$ = mW

e) Welche Ausgangsleistung erhält man mit der Signalfrequenz $f_x = 10$ MHz?

$\boldsymbol{P_y(f = 10\ \text{MHz})}$ = mW

Z1.2: Messung von *H*(*f*)

f_0 in kHz	$A_y(f_0)$ in Volt	$\varphi_y(f_0)$ in Grad
0	0.00	0
1	0.25	40
2	0.80	70
3	1.00	90
5	0.90	118
10	0.30	145
20	0.05	170

Zur messtechnischen Bestimmung des Frequenzgangs von Filtern wird jeweils ein sinusförmiges Eingangssignal mit der Amplitude 2 V und vorgegebener Frequenz f_0 angelegt. Das Ausgangssignal $y(t)$ bzw. dessen Spektrum $Y(f)$ werden dann nach Betrag und Phase ermittelt.

Das Betragsspektrum am Ausgang des Filters A lautet mit der Frequenz f_0 = 1 kHz:

$$|Y_\mathrm{A}(f)| = 1.6\,\mathrm{V} \cdot \delta(f \pm f_0) + 0.4\,\mathrm{V} \cdot \delta(f \pm 3 f_0).$$

Bei einem anderen Filter B ist das Ausgangssignal dagegen stets eine harmonische Schwingung mit der (einzigen) Frequenz f_0. Bei den in der Tabelle angegebenen Frequenzen f_0 werden die Amplituden $A_y(f_0)$ und die Phasen $\varphi_y(f_0)$ gemessen. Hierbei gilt:

$$Y_\mathrm{B}(f) = \frac{A_y}{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_y} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{A_y}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_y} \cdot \delta(f - f_0).$$

Das Filter B soll in der Aufgabe in der Form

$$H_\mathrm{B}(f) = \mathrm{e}^{-a_\mathrm{B}(f)} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot b_\mathrm{B}(f)}$$

dargestellt werden, wobei $a_\mathrm{B}(f)$ als Dämpfungsverlauf und $b_\mathrm{B}(f)$ als Phasenverlauf bezeichnet wird.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.1.**

Fragebogen zu "Z1.2: Messung von $H(f)$"

a) Welche der Aussagen sind hinsichtlich des Filters A zutreffend?

- [ ] Es gilt $|H(f)| = 0.8$.
- [ ] Das Filter A stellt kein LZI–System dar.
- [ ] Die Angabe eines Frequenzgangs ist nicht möglich.

b) Welche Aussagen sind hinsichtlich des Filters B zutreffend?

- [ ] Filter B ist ein Tiefpass.
- [ ] Filter B ist ein Hochpass.
- [ ] Filter B ist ein Bandpass.
- [ ] Filter B ist eine Bandsperre.

c) Ermitteln Sie den Dämpfungswert und die Phase für f_0 = 3 kHz.

$\boldsymbol{a_B(f_0 = 3\ \text{kHz})}$ = Np

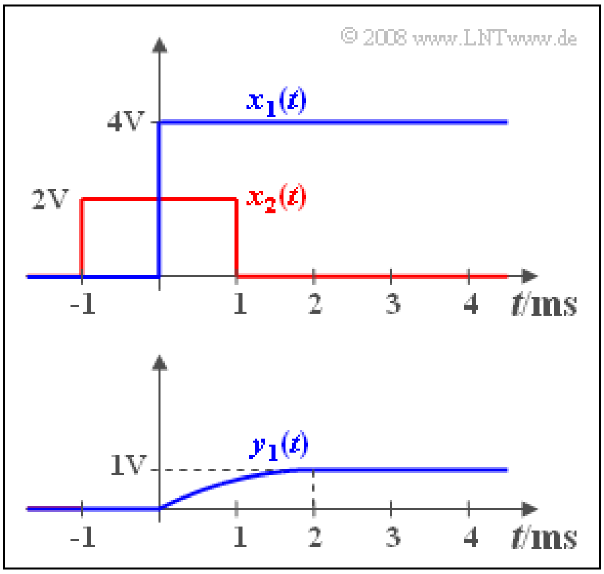
$\boldsymbol{b_B(f_0 = 3\ \text{kHz})}$ = Grad

d) Welcher Dämpfungs– und Phasenwert ergibt sich für f_0 = 2 kHz?

$\boldsymbol{a_B(f_0 = 2\ \text{kHz})}$ = Np

$\boldsymbol{b_B(f_0 = 2\ \text{kHz})}$ = Grad

A1.3: Gemessene Sprungantwort



An den Eingang eines linearen zeitinvarianten (LZI–) Übertragungssystems mit dem Frequenzgang $H(f)$ und der Impulsantwort $h(t)$ wird ein sprungförmiges Signal angelegt (blaue Kurve):

$$x_1(t) = 4\,\mathrm{V} \cdot \gamma(t).$$

Das gemessene Ausgangssignal $y_1(t)$ hat dann den in der unteren Grafik dargestellten Verlauf. Mit T = 2 ms kann dieses Signal im Bereich von 0 bis T wie folgt beschrieben werden:

$$y_1(t) = 2\,\mathrm{V} \cdot \left(\frac{t}{T} - 0.5 \cdot (\frac{t}{T})^2\right).$$

Ab $t = T$ = 2 ms ist $y_1(t)$ konstant gleich 1 V.

In der Teilaufgabe e) wird nach dem Ausgangssignal $y_2(t)$ gefragt, wenn am Eingang ein symmetrischer Rechteckimpuls $x_2(t)$ der Dauer T = 2 ms anliegt (siehe roter Kurvenzug in der oberen Grafik).

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.2.** Für den Rechteckimpuls $x_2(t)$ kann mit A = 2 V auch geschrieben werden:

$$x_2(t) = A \cdot \left[\gamma(t + \frac{T}{2}) - \gamma(t - \frac{T}{2})\right].$$

Der Frequenzgang $H(f)$ des hier betrachteten LZI–Systems kann dem Angabenblatt zu Aufgabe A3.8 im Buch „Signaldarstellung" entnommen werden. Allerdings sind die Abszissen– und Ordinatenparameter entsprechend anzupassen. Zur Lösung dieser Aufgabe A1.3 wird $H(f)$ jedoch nicht explizit benötigt.

Fragebogen zu "A1.3: Gemessene Sprungantwort"

a) Welche Aussagen kann man anhand der Grafik über das LZI–System machen?

- ☐ $H(f)$ beschreibt ein akausales System.
- ☐ $H(f)$ beschreibt ein kausales System.
- ☐ $H(f)$ beschreibt einen Tiefpass.
- ☐ $H(f)$ beschreibt einen Hochpass.

b) Wie groß ist der Gleichsignalübertragungsfaktor?

$\boldsymbol{H(f = 0)}$ =

c) Wie lautet die Sprungantwort $\sigma(t)$? Welcher Wert tritt bei $t = T/2$ auf?

$\boldsymbol{\sigma(t = 1\ \text{ms})}$ =

d) Berechnen Sie die Impulsantwort $h(t)$ des Systems. Welche Werte besitzt diese zu den Zeitpunkten $t = T/2$ und $t = T$?

$\boldsymbol{h(t = 1\ \text{ms})}$ = 1/s

$\boldsymbol{h(t = 2\ \text{ms})}$ = 1/s

e) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y_2(t)$, wenn am Eingang der Rechteckimpuls $x_2(t)$ anliegt. Welche Werte erhält man bei t = –1 ms, t = 0, t = 1 ms, t = 2 ms?

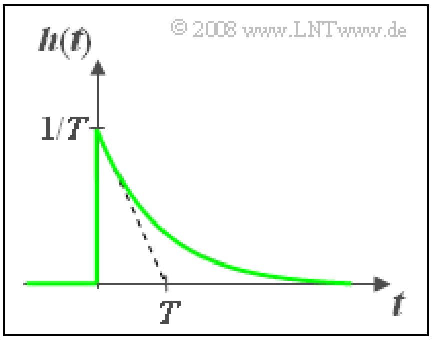
$\boldsymbol{y_2(t = -1\ \text{ms})}$ = V

$\boldsymbol{y_2(t = 0)}$ = V

$\boldsymbol{y_2(t = 1\ \text{ms})}$ = V

$\boldsymbol{y_2(t = 2\ \text{ms})}$ = V

Z1.3: Exponentiell abfallende Impulsantwort



Gemessen wurde die Impulsantwort $h(t)$ eines LZI–Systems, die für alle Zeiten $t < 0$ identisch 0 ist und für $t > 0$ entsprechend einer Exponentialfunktion abfällt:

$$h(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{e}^{-t/T}.$$

Der Funktionsparameter sei T = 1 ms. In der Teilaufgabe c) ist nach der 3dB–Grenzfrequenz f_G gefragt, die wie folgt implizit definiert ist:

$$|H(f = f_{\rm G})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |H(f = 0)|.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 1.2.** Gegeben ist das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Fragebogen zu "Z1.3: Exponentiell abfallende Impulsantwort"

a) Berechnen Sie den Frequenzgang $H(f)$. Welcher Wert ergibt sich bei $f = 0$?

$\boldsymbol{H(f = 0)}$ =

b) Welchen Wert besitzt die Impulsantwort zur Zeit $t = 0$?

$\boldsymbol{h(t = 0)}$ = 1/s

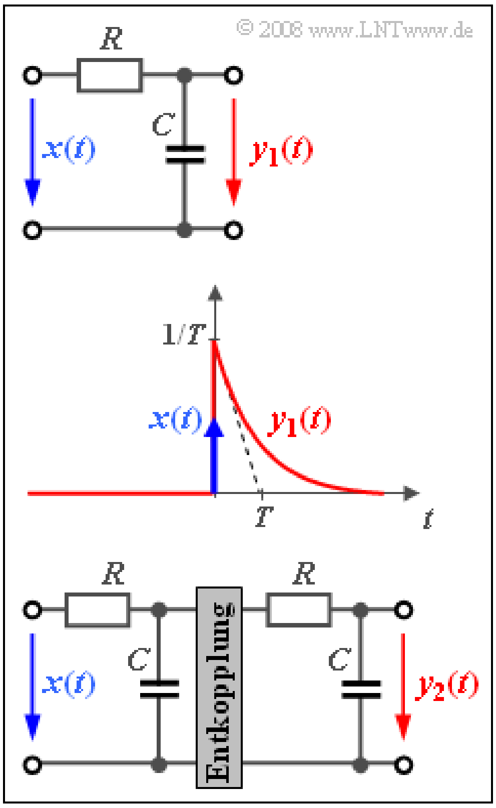
c) Berechnen Sie die 3dB–Grenzfrequenz f_G (Definition auf der Angabenseite).

$\boldsymbol{f_G}$ = Hz

d) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Das betrachtete System ist kausal.
- ☐ Das betrachtete System hat Hochpass–Charakter.
- ☐ Legt man an den Systemeingang ein Cosinussignal der Frequenz f_G, so ist das Ausgangssignal ebenfalls cosinusförmig.

A1.4: Tiefpass 2. Ordnung im Zeitbereich



In den Aufgaben A1.1 und Z1.1 zu Kapitel 1.1 wurden die so genannten RC–Tiefpässe im Frequenzbereich beschrieben. Hier soll nun eine Zeitbereichsdarstellung erfolgen.

Die oben skizzierte Schaltung mit dem Eingangssignal $x(t)$ und dem Ausgangssignal $y_1(t)$ ist ein Tiefpass erster Ordnung mit dem Frequenzgang

$$H_1(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot f/f_0}.$$

Hierbei gibt $f_0 = 1/(2\pi RC)$ gleichzeitig die 3dB–Grenzfrequenz an. Legt man am Eingang ein diracförmiges Signal $x(t) = \delta(t)$ an, so erscheint am Ausgang das Signal $y_1(t)$ gemäß der mittleren Skizze. Der Zusammenhang zwischen den Systemparametern R, C und T lautet (siehe auch Aufgabe Z1.3):

$$T = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi f_0} = RC.$$

Für numerische Berechnungen soll im Folgenden T = 1ms verwendet werden.

Die untere Schaltung mit Eingang $x(t)$ und Ausgang $y_2(t)$ beschreibt einen Tiefpass zweiter Ordnung:

$$H_2(f) = H_1^2(f) = \frac{1}{(1 + \mathrm{j} \cdot f/f_0)^2}.$$

Die zu $H_2(f)$ gehörende Impulsantwort ist $h_2(t)$.

Anzumerken ist, dass der Systemparameter f_0 bei einem Tiefpass zweiter oder höherer Ordnung nicht mehr dessen 3 dB–Grenzfrequenz angibt. Weiterhin ist noch zu beachten, dass die beiden RC-Glieder entkoppelt werden müssen, um Widerstandsanpassung zu erreichen. Hierzu eignet sich zum Beispiel ein Operationsverstärker. Dies ist jedoch für die Lösung dieser Aufgabe nicht relevant.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.2.** Zur Lösung dieser Aufgabe können Sie das folgende unbestimmte Integral verwenden:

$$\int u \cdot \mathrm{e}^{a \cdot u} \, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{a \cdot u}}{a^2} \cdot (a \cdot u - 1).$$

Fragebogen zu "A1.4: Tiefpass 2. Ordnung im Zeitbereich"

a) Geben Sie die Impulsantwort $h_1(t)$ an. Zu welcher Zeit t_1 ist $h_1(t)$ auf die Hälfte seines Maximalwertes abgefallen?

$\boldsymbol{t_1}$ = ms

b) Wie lautet das Ausgangssignal $y_1(t)$ für $x(t) = T \cdot h_1(t)$? Welche Signalwerte treten zu den Zeiten $t = 0$ und $t = T$ auf?

$\boldsymbol{y_1(t = 0)}$ =

$\boldsymbol{y_1(t = T)}$ =

c) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_2(t)$ unter Berücksichtigung des Ergebnisses von b). Zu welcher Zeit t_2 ist $h_2(t)$ maximal?

$\boldsymbol{t_2}$ = ms

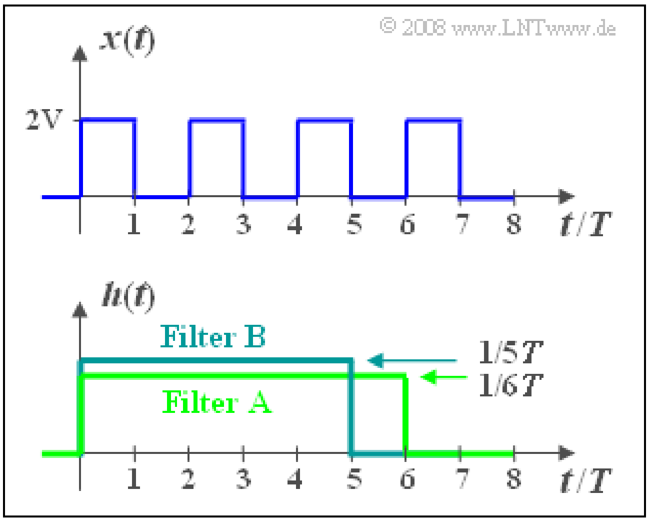
$\boldsymbol{h_2(t = t_2)}$ = 1/s

d) Wie lautet das Ausgangssignal $y_2(t)$, wenn man am Eingang eine Sprungfunktion $x(t) = 2\text{V} \cdot \gamma(t)$ anlegt? Welche Signalwerte treten bei $t = T$ und $t = 5T$ auf?

$\boldsymbol{y_2(t = T)}$ = V

$\boldsymbol{y_2(t = 5T)}$ = V

Z1.4: Alles rechteckförmig



Wir betrachten das periodische Rechtecksignal $x(t)$ entsprechend obiger Skizze, dessen Periodendauer $T_0 = 2T$ ist. Dieses Signal besitzt Spektralanteile bei der Grundfrequenz $f_0 = 1/T_0 = 1/(2T)$ und allen ungeradzahligen Vielfachen davon, d.h. bei $3f_0$, $5f_0$, usw. Zusätzlich gibt es einen Gleichanteil.

Dazu betrachten wir zwei Filter A und B mit jeweils rechteckförmiger Impulsantwort $h_A(t)$ mit Dauer $6T$ bzw. $h_B(t)$ mit Dauer $5T$. Die Höhen beider Impulsantworten sind so gewählt, dass die Flächen der Rechtecke jeweils 1 ergeben.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.2.**
Informationen zur Faltung finden Sie im **Kapitel 3.4** des Buches „Signaldarstellung".

Fragebogen zu "Z1.4: Alles rechteckförmig"

a) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y_\text{A}(t)$ von Filter A, insbesondere die Werte bei $t = 0$ und $t = T$.

$\boldsymbol{y_\text{A}(t = 0)}$ = V

$\boldsymbol{y_\text{A}(t = T)}$ = V

b) Geben Sie die Betragsfunktion $|H_\text{A}(f)|$ an. Welcher Wert ergibt sich bei der Frequenz $f = f_0$? Interpretieren Sie das Ergebnis von a).

$\boldsymbol{|H_\text{A}(f = f_0)|}$ =

c) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y_\text{B}(t)$ von Filter B, insbesondere die Werte bei $t = 0$ und $t = T$.

$\boldsymbol{y_\text{B}(t = 0)}$ = V

$\boldsymbol{y_\text{B}(t = T)}$ = V

d) Wie lautet die Betragsfunktion $|H_\text{B}(f)|$, insbesondere bei $f = f_0$ und $f = 3 \cdot f_0$? Interpretieren Sie damit das Ergebnis von c).

$\boldsymbol{|H_\text{B}(f = f_0)|}$ =

$\boldsymbol{|H_\text{B}(f = 3f_0)|}$ =

A1.5: Küpfmüller-Tiefpass

x	$\mathrm{si}(\pi \cdot x)$	$\frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{Si}(\pi \cdot x)$
0.0	1.0000	0.0000
0.2	0.9355	0.1957
0.4	0.7568	0.3665
0.6	0.5046	0.4935
0.8	0.2339	0.5671
1.0	0.0000	0.5895
1.2	-0.1559	0.5724
1.4	-0.2162	0.5336
1.6	-0.1892	0.4918
1.8	-0.1040	0.4618
2.0	0.0000	0.4514
2.2	0.0850	0.4605
2.4	0.1261	0.4825
2.6	0.1164	0.5075
2.8	0.0668	0.5263
3.0	0.0000	0.5331

Wir betrachten einen idealen, rechteckförmigen Tiefpass – manchmal auch als Küpfmüller–Tiefpass bezeichnet – der alle Frequenzen f < 5 kHz unverfälscht durchlässt ($H(f)$ = 1) und alle Spektralanteile über 5 kHz vollständig unterdrückt ($H(f)$ = 0). Exakt bei der Grenzfrequenz f_G = 5 kHz ist der Wert der Übertragungsfunktion gleich 1/2.

An den Eingang des Tiefpasses werden verschiedene Signale angelegt:

- ein schmaler Rechteckimpuls entsprechender Höhe, der durch einen Diracimpuls angenähert werden kann:

$$x_1(t) = 10^{-3}\ \mathrm{Vs} \cdot \delta(t),$$

- ein Diracpuls im Zeitabstand T_A:

$$x_2(t) = 10^{-3}\ \mathrm{Vs} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \nu \cdot T_{\rm A}),$$

wobei das zugehörige Spektrum mit $f_A = 1/T_A$ lautet:

$$X_2(f) = \frac{10^{-3}\ \mathrm{Vs}}{T_{\rm A}} \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_{\rm A}),$$

- eine Sprungfunktion zum Zeitpunkt t = 0:

$$x_3(t) = 10\ \mathrm{V} \cdot \gamma(t) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 5\ \mathrm{V} \\ 10\ \mathrm{V} \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{für} \\ \text{für} \\ \text{für} \end{array} \begin{array}{c} t < 0, \\ t = 0, \\ t > 0, \end{array}$$

- ein si–förmiger Impuls mit der äquivalenten Dauer T:

$$x_4(t) = 10\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{si}(\pi \frac{t}{T}).$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die Beschreibungen von **Kapitel 1.3.** In der Tabelle sind die Funktionswerte der so genannten Spaltfunktion $\mathrm{si}(\pi \cdot x)$ und der Integralsinusfunktion aufgelistet:

$$\mathrm{Si}(\pi x) = \int_0^x \mathrm{si}(\pi \xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Fragebogen zu "A1.5: Küpfmüller-Tiefpass"

a) Welches Ausgangssignal $y_1(t)$ ergibt sich als Antwort auf den Diracimpuls $x_1(t)$, insbesondere zu den Zeitpunkten t = 0 und t = 50 µs?

$\boldsymbol{y_1(t = 0)}$ = V

$\boldsymbol{y_1(t = 50\ \mu s)}$ = V

b) Wie lautet das Ausgangssignal $y_2(t)$, wenn am Filtereingang der Diracpuls $x_2(t)$ anliegt und T_A = 200 µs gilt. Welcher Signalwert tritt bei t = 0 auf?

$\boldsymbol{T_A = 200\ \mu s : y_2(t = 0)}$ = V

c) Welche Ausgangssignale $y_2(t)$ ergeben sich mit T_A = 199 bzw. T_A = 201 µs?

$\boldsymbol{T_A = 199\ \mu s: y_2(t = 0)}$ = V

$\boldsymbol{T_A = 201\ \mu s: y_2(t = 0)}$ = V

d) Geben Sie das Ausgangssignal $y_3(t)$ für die Sprungfunktion $x_3(t)$ mit Endwert 10 V an. Welcher Signalwert tritt zum Zeitpunkt t = 0 auf?

$\boldsymbol{y_3(t = 0)}$ = V

e) Zu welchem Zeitpunkt t_{max} ist $y_3(t)$ maximal? Wie groß ist der Maximalwert?

$\boldsymbol{t_{max}}$ = µs

$\boldsymbol{y_3(t_{max})}$ = V

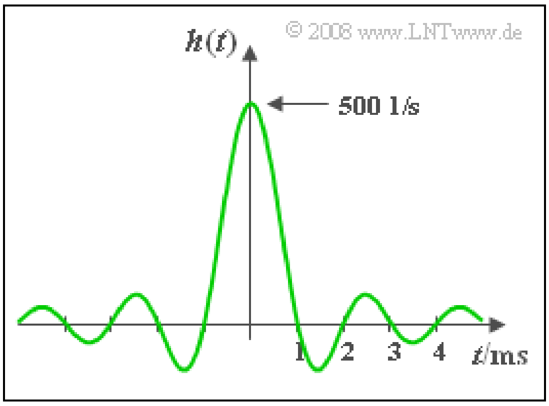
f) Wie lautet das Ausgangssignal $y_4(t)$, wenn am Eingang das si–förmige Signal $y_4(t)$ mit T = 200 µs anliegt? Welcher Wert ergibt sich für t = 0?

$\boldsymbol{T = 200\ \mu s: y_4(t = 0)}$ = V

g) Wie lautet das Signal $y_4(t)$ für T = 50 µs? Welcher Wert ergibt sich bei t = 0?

$\boldsymbol{T = 50\ \mu s: y_4(t = 0)}$ = V

Z1.5: si-förmige Impulsantwort



Die Impulsantwort eines linearen zeitinvarianten Systems wurde wie folgt ermittelt (siehe Grafik):

$$h(t) = 500\,\frac{1}{\rm s} \cdot {\rm si}(\pi \frac{t}{1\,{\rm ms}}).$$

Im Folgenden sollen die zu erwartenden Ausgangssignale $y(t)$ berechnet werden, wenn man am Eingang verschiedene Cosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz f_0 anlegt:

$$x(t) = 4\,{\rm V} \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t).$$

Die Lösung kann entweder im Zeitbereich oder auch im Frequenzbereich gefunden werden. In der Musterlösung werden beide Lösungswege angegeben.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 1.3.** Gegeben ist dazu das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(u) \cdot \cos(a \cdot u)}{u}\,{\rm d}u = \left\{ \begin{array}{c} \pi/2 \\ \pi/4 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} {\rm{f\ddot{u}r}} \\ {\rm{f\ddot{u}r}} \\ {\rm{f\ddot{u}r}} \end{array} \begin{array}{*{20}c} |a| < 1, \\ |a| = 1, \\ |a| > 1. \end{array}$$

Fragebogen zu "Z1.5: si-förmige Impulsantwort"

a) Berechnen Sie den Frequenzgang $H(f)$ des LZI-Systems. Wie groß sind die äquivalente Bandbreite und der Gleichsignalübertragungsfaktor?

$\boldsymbol{\Delta f}$ = kHz

$\boldsymbol{H(f = 0)}$ =

b) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y(t)$ bei cosinusförmigem Eingangssignal mit der Frequenz f_0 = 1 kHz. Wie groß ist der Signalwert zur Zeit t = 0?

$\boldsymbol{f_0}$ **= 1 kHz :** $\boldsymbol{y(t = 0)}$ = V

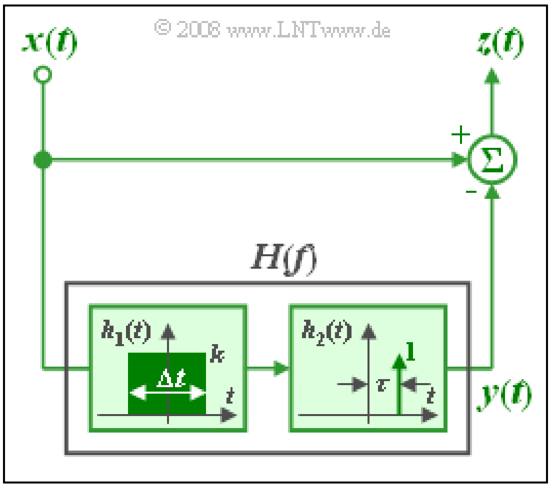
c) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y(t)$ bei cosinusförmigem Eingangssignal mit der Frequenz f_0 = 0.1 kHz. Wie groß ist der Signalwert zur Zeit t = 0?

$\boldsymbol{f_0}$ **= 0.1 kHz :** $\boldsymbol{y(t = 0)}$ = V

d) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y(t)$ bei cosinusförmigem Eingangssignal mit der Frequenz f_0 = 0.5 kHz. Wie groß ist der Signalwert zur Zeit t = 0?

$\boldsymbol{f_0}$ **= 0.5 kHz:** $\boldsymbol{y(t = 0)}$ = V

A1.6: Rechteckige Impulsantwort



Wir betrachten im Folgenden die in der Grafik gezeigte Konstellation. Der Frequenzgang $H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$ im unteren Zweig ist durch die Impulsantworten seiner beiden Teilkomponenten festgelegt. Hierbei ist $h_1(t)$ im Bereich von –1 ms bis 1 ms konstant gleich k und außerhalb 0; an den Bereichsgrenzen gilt jeweils der halbe Wert. Die im Bild eingezeichnete Zeitvariable ist somit Δt = 2 ms.

Die Impulsantwort der zweiten Systemfunktion $H_2(f)$ lautet:

$$h_2(t) = \delta(t-\tau).$$

Der Frequenzgang zwischen den Signalen $x(t)$ und $z(t)$ hat Hochpass–Charakter und lautet allgemein:

$$H_{\rm HP}(f) = 1 - H_1(f)\cdot {\rm e}^{-{\rm j}2\pi f\tau}.$$

Für die Teilaufgaben a) bis d) gelte τ = 0 und damit $H(f) = H_1(f)$. Mit dem Parameter τ = 0 kann hierfür auch geschrieben werden (Δt = 2 ms):

$$H_{\rm HP}(f) = 1 - {\rm si}(\pi\cdot\Delta t\cdot f).$$

Ohne Auswirkung auf diese Aufgabe ist anzumerken, dass diese Gleichung für $\tau \neq 0$ nicht anwendbar ist:

$$|H_{\rm HP}(f)| \;\neq\; 1 - |H_1(f)|.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.3.**

Fragebogen zu "A1.6: Rechteckige Impulsantwort"

a) Berechnen Sie Höhe k der Impulsantwort $h_1(t)$ unter der Nebenbedingung, dass $H_1(f = 0) = 1$ gelten soll.

k = 1/s

b) Das Eingangssignal $x(t)$ sei ein um $t = 0$ symmetrisches Rechteck mit Breite T = 2 ms und Höhe 1 V. Es gelte $\tau = 0$. Welche der Aussagen sind zutreffend?

- ☐ $y(t)$ ist rechteckförmig.
- ☐ $y(t)$ ist dreieckförmig.
- ☐ $y(t)$ ist trapezförmig.
- ☐ Der Maximalwert von $y(t)$ ist 1 V.

c) Welche Aussagen treffen zu, wenn $x(t)$ die Rechteckbreite T = 1 ms besitzt?

- ☐ $y(t)$ ist rechteckförmig.
- ☐ $y(t)$ ist dreieckförmig.
- ☐ $y(t)$ ist trapezförmig.
- ☐ Der Maximalwert von $y(t)$ ist 1 V.

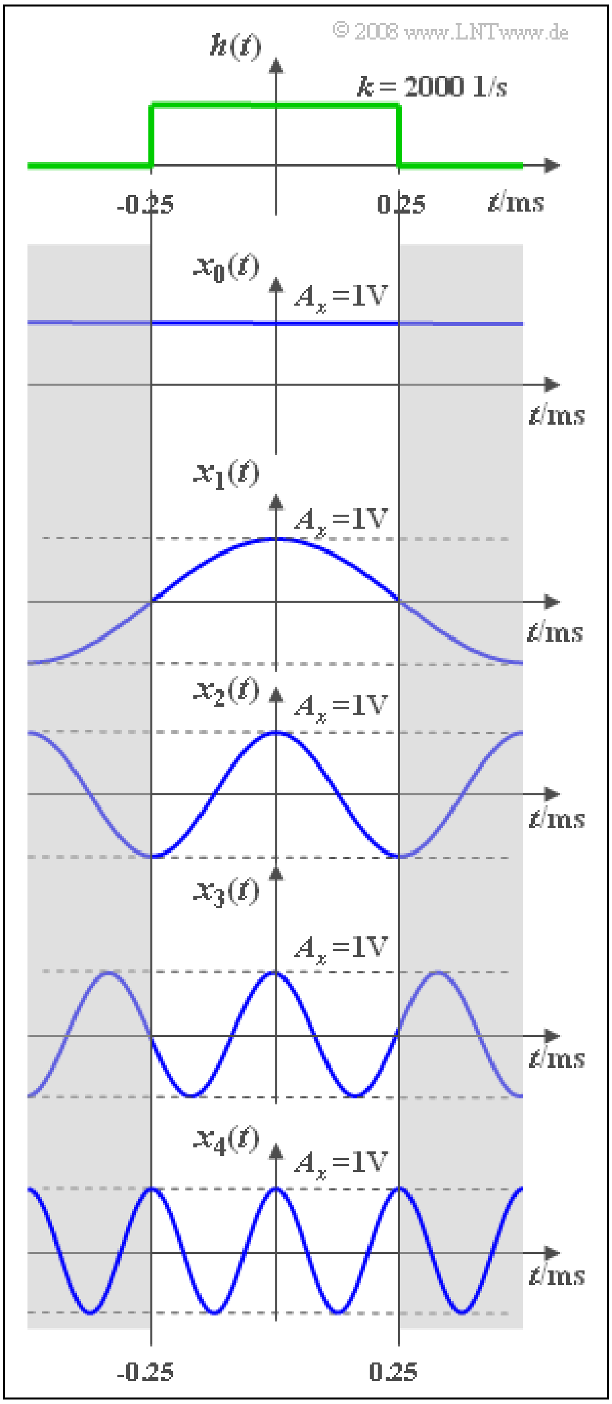
d) Es gelte weiter $\tau = 0$. Berechnen Sie das Ausgangssignal $z(t)$, wenn $x(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ von 0 auf 1 V springt. Welche Aussagen treffen zu?

- ☐ $z(t)$ ist eine gerade Funktion der Zeit.
- ☐ $z(t)$ weist bei $t = 0$ eine Sprungstelle auf.
- ☐ Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $z(t) = 0$.
- ☐ Für $t > 1$ ms ist $z(t) = 0$.

e) Welchen Verlauf hat $z(t)$ als Antwort auf das sprungförmige Eingangssignal $x(t)$, wenn die Laufzeit τ = 1 ms ist? Welcher Signalwert tritt bei t = 1 ms auf?

***z*(*t* = 1 ms)** = V

Z1.6: Interpretation von *H*(*f*)



Mit dieser Aufgabe soll der Einfluss eines Tiefpasses *H*(*f*) auf cosinusförmige Signale der Form

$$x_i(t) = A_x \cdot \cos(2\pi f_i t)$$

veranschaulicht werden. In der Grafik sehen Sie die Signale $x_i(t)$, wobei der Index i die Frequenz in kHz angibt. So beschreibt $x_2(t)$ ein 2 kHz–Signal.

Die Signalamplitude beträgt jeweils A_x = 1 V. Das Gleichsignal $x_0(t)$ ist als Grenzfall eines Cosinussignals mit der Frequenz f_0 = 0 zu interpretieren.

Die obere Skizze zeigt die rechteckige Impulsantwort $h(t)$ des Tiefpasses. Der dazugehörige Frequenzgang lautet:

$$H(f) = \mathrm{si}(\pi \frac{f}{\Delta f}).$$

Aufgrund der Linearität und der Tatsache, dass *H*(*f*) reell und gerade ist, sind die Ausgangssignale ebenfalls cosinusförmig:

$$y_i(t) = A_i \cdot \cos(2\pi f_i t).$$

Gesucht werden die Signalamplituden A_i am Ausgang für die verschiedenen Eingangsfrequenzen f_i, wobei die Lösung ausschließlich im Zeitbereich gefunden werden soll. Dieser etwas umständliche Lösungsweg soll dazu dienen, den Zusammenhang zwischen Zeit– und Frquenzbereich deutlich zu machen.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 1.3.** Entgegen der sonst üblichen Definition einer Amplitude können die „A_i” durchaus negativ sein. Dies entspricht dann der Funktion „Minus-Cosinus”.

Fragebogen zu "Z1.6: Interpretation von *H*(*f*)"

a) Welcher Tiefpass liegt hier vor?

- ☐ Idealer Tiefpass.
- ☐ Spalttiefpass.
- ☐ Gaußtiefpass.

b) Geben Sie die äquivalente Bandbreite von $H(f)$ an.

Δf = kHz

c) Berechnen Sie allgemein die Amplitude A_i in Abhängigkeit von $x_i(t)$ und $h(t)$. Welche der nachfolgenden Punkte sind bei der Berechnung zu berücksichtigen?

- ☐ Beim Cosinussignal gilt $A_i = y_i(t = 0)$.
- ☐ Es gilt $y_i(t) = x_i(t) \cdot h(t)$.
- ☐ Es gilt $y_i(t) = x_i(t) * h(t)$.

d) Welche der nachfolgenden Ergebnisse treffen für A_0, A_2 und A_4 zu?

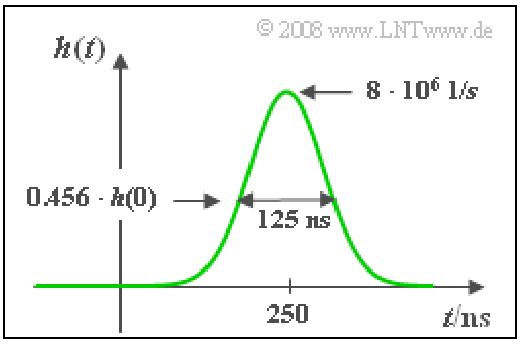
- ☐ $A_0 = 0$.
- ☐ $A_0 = 1$ V.
- ☐ $A_2 = 0$.
- ☐ $A_2 = 1$ V.
- ☐ $A_4 = 0$.
- ☐ $A_4 = 1$ V.

e) Berechnen Sie die Amplituden A_1 und A_3 für ein 1 kHz- bzw. 3 kHz-Signal. Interpretieren Sie die Ergebnisse anhand der Spektralfunktion.

A_1 = V

A_3 = V

A1.7: Nahezu kausaler Gaußtiefpass



Messungen haben ergeben, dass ein LZI–System mit guter Näherung durch einen Gaußtiefpass angenähert werden kann, wenn man eine zusätzliche Laufzeit τ berücksichtigt. Somit lautet der Frequenzgang:

$$H(f) = \mathrm{e}^{-\pi (f/\Delta f)^2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau}.$$

Die beiden Systemparameter $\Delta t = 1/\Delta f$ und τ können der in der Grafik dargestellten Impulsantwort $h(t)$ entnommen werden.

Es ist offensichtlich, dass dieses Modell nicht exakt der Wirklichkeit entspricht, da die Impulsantwort $h(t)$ auch für $t < 0$ nicht vollkommen verschwindet. In der Teilaufgabe c) wird deshalb nach dem maximalen relativen Fehler gefragt, der wie folgt definiert ist:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\max_{t<0} |h(t)|}{h(t=\tau)}.$$

In Worten: Der maximale relative Fehler $\varepsilon_{\max}$ ist gleich dem Maximalwert der Impulsantwort $h(t)$ bei negativen Zeiten, bezogen auf den maximalen Wert $h(t = \tau)$ der Impulsantwort.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Gaußtiefpass** im Kapitel 1.3. Zur Berechnung von Sprung– und Rechteckantwort können Sie das Gaußsche Fehlerintegral verwenden:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\phi(x)$	0.500	0.691	0.841	0.933	0.977	0.993	0.999

Fragebogen zu "A1.7: Nahezu kausaler Gaußtiefpass"

a) Wie groß sind die äquivalente Bandbreite und die Laufzeit?

Δf = MHz

τ = ns

b) Es gelte $x(t)$ = 1 V · cos(2π · 6 MHz · t). Wie lautet das Ausgangssignal $y(t)$? Welcher Signalwert ergibt sich zur Zeit t = 0?

$y(t = 0)$ = V

c) Eigentlich sollte bei Kausalität $h(t < 0)$ = 0 gelten. Wie groß ist der maximale relative Fehler des betrachteten Modells? Definition siehe Angabenseite.

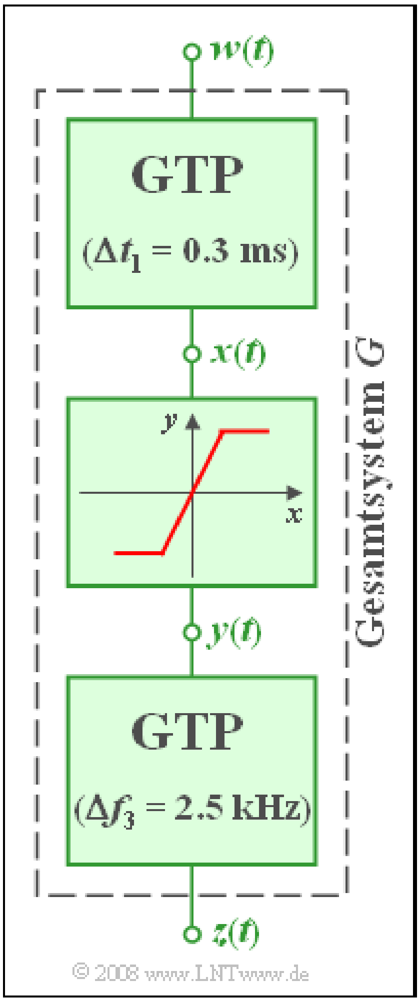
ε_{max} =

d) Berechnen Sie die (dimensionslose) Sprungantwort $\sigma(t)$. Welche Werte ergeben sich zu den Zeiten t = 250 ns und t = 300 ns?

$\sigma(t = 250\text{ ns})$ =

$\sigma(t = 300\text{ ns})$ =

Z1.7: Systemanalyse



Ein Gesamtsystem G mit Eingang $w(t)$ und Ausgang $z(t)$ besteht aus drei Komponenten:

- Die erste Komponente ist ein Gaußtiefpass mit Impulsantwort

$$h_1(t) = \frac{1}{\Delta t_1} \cdot \mathrm{e}^{-\pi (t/\Delta t_1)^2}, \qquad \Delta t_1 = 0.3\,\mathrm{ms}.$$

- Danach folgt eine Nichtlinearität mit Kennlinie

$$y(t) = \begin{cases} 8\,\mathrm{V} & \text{für} \quad x(t) \ge 4\,\mathrm{V}, \\ 2 \cdot x(t) & \text{für} \quad -4\,\mathrm{V} < x(t) < 4\,\mathrm{V}, \\ -8\,\mathrm{V} & \text{für} \quad x(t) \le -4\,\mathrm{V}. \end{cases}$$

  Deren Eingangssignal $x(t)$ wird um den Faktor 2 verstärkt und – falls nötig – auf den Amplitudenbereich ±8V begrenzt.

- Am Ende der Kette folgt wieder ein Gaußtiefpass, der durch seinen Frequenzgang gegeben ist:

$$H_3(f) = \mathrm{e}^{-\pi (f/\Delta f_3)^2}, \qquad \Delta f_3 = 2.5\,\mathrm{kHz}.$$

Das Eingangssignal $w(t)$ ist ein Gaußimpuls mit konstanter Amplitude 5 V, aber variabler Breite T:

$$w(t) = 5\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-\pi (t/T)^2}.$$

Zu untersuchen ist, in welchem Bereich die äquivalente Impulsdauer T dieses Gaußimpulses variieren kann, damit das Gesamtsystem durch den Frequenzgang

$$H_\mathrm{G}(f) = K \cdot \mathrm{e}^{-\pi (f/\Delta f_\mathrm{G})^2}$$

vollständig beschrieben wird.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Gaußtiefpass** im Kapitel 1.3.

Fragebogen zu "Z1.7: Systemanalyse"

a) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit das Gesamtsystem durch einen einzigen Frequenzgang beschreibbar ist?

- ☐ Der Zusammenhang zwischen $w(t)$ und $z(t)$ ist linear.
- ☐ $H_3(f)$ muss schmalbandiger sein als $H_1(f)$.
- ☐ Das Signal $x(t)$ darf betragsmäßig nicht größer sein als 4 V.

b) Berechnen Sie den Maximalwert für die äquivalente Impulsdauer T, damit die unter a) genannten Bedingungen erfüllbar sind.

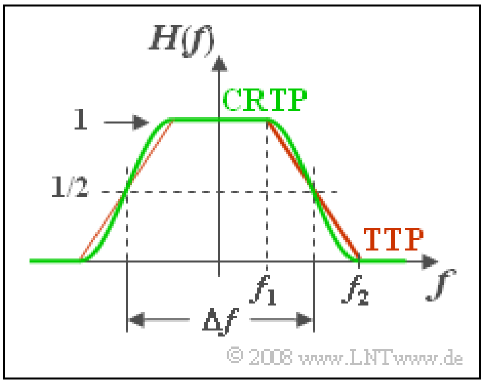
T_{max} = ms

c) Geben Sie die Parameter des Gesamtfrequenzgangs $H_G(f)$ an.

K =

Δf_G = kHz

A1.8: Variable Flankensteilheit



Zwei Tiefpässe mit variabler Flankensteilheit sollen miteinander verglichen werden. Für Frequenzen $|f| \le f_1$ gilt in beiden Fällen $H(f) = 1$. Dagegen werden alle Frequenzen $|f| \ge f_2$ vollständig unterdrückt.

Im mittleren Bereich $f_1 \le |f| \le f_2$ sind die Frequenzgänge durch die nachfolgenden Gleichungen festgelegt:

- Trapeztiefpass (TTP):

$$H(f) = \frac{f_2 - |f|}{f_2 - f_1},$$

- Cosinus–Rolloff–Tiefpass (CRTP):

$$H(f) = \cos^2\left(\frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1} \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Alternative Systemparameter sind für beide Tiefpässe die über das flächengleiche Rechteck definierte äquivalente Bandbreite Δf sowie der Rolloff–Faktor (im Frequenzbereich):

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}.$$

In der gesamten Aufgabe gelte Δf = 10 kHz und r = 0.2. Die Impulsantworten lauten mit der äquivalenten Impulsdauer $\Delta t = 1/\Delta f = 0.1$ ms:

$$h_{\rm TTP}(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot {\rm si}(\pi \cdot \frac{t}{\Delta t}) \cdot {\rm si}(\pi \cdot r \cdot \frac{t}{\Delta t}),$$

$$h_{\rm CRTP}(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot {\rm si}(\pi \cdot \frac{t}{\Delta t}) \cdot \frac{\cos(\pi \cdot r \cdot t/\Delta t)}{1 - (2 \cdot r \cdot t/\Delta t)^2}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.3.** Sie können Ihre Ergebnisse mit folgendem Interaktionsmodul überprüfen:

Tiefpässe im Frequenz- und Zeitbereich (Dateigröße 160 kB)

Fragebogen zu "A1.8: Variable Flankensteilheit"

a) Wie lautet die Gleichung für die äquivalente Bandbreite Δf?

- ☐ Es gilt $\Delta f = f_2 - f_1$.
- ☐ Es gilt $\Delta f = f_2 + f_1$.
- ☐ Es gilt $\Delta f = (f_2 + f_1)/2$.

b) Bestimmen Sie die Tiefpass-Parameter f_1 und f_2 für Δf = 10 kHz und r = 0.2.

f_1 = kHz

f_2 = kHz

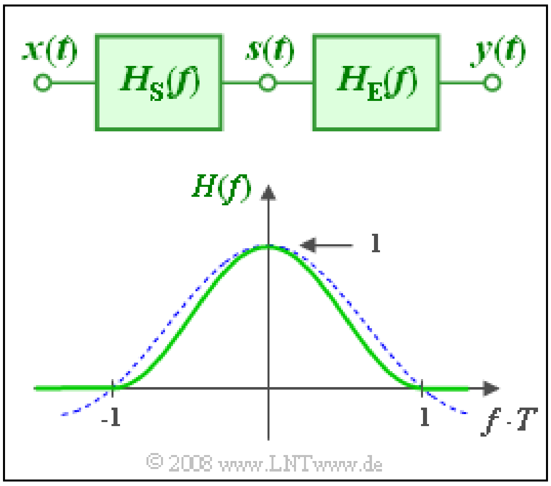
c) Welche Aussagen sind für die Impulsantwort des Trapeztiefpasses zutreffend, wenn r = 0.2 vorausgesetzt wird?

- ☐ $h(t)$ besitzt Nullstellen bei $\pm n \cdot \Delta t$ (n = 1, 2, ...).
- ☐ $h(t)$ besitzt zusätzliche Nullstellen zu anderen Zeiten.
- ☐ Mit r = 0 würde $h(t)$ schneller abklingen.
- ☐ Mit r = 1 würde $h(t)$ schneller abklingen.

d) Welche Aussagen treffen für die Impulantwort des Cosinus–Rolloff–Tiefpasses zu, wenn r = 0.2 vorausgesetzt wird?

- ☐ $h(t)$ besitzt Nullstellen bei $\pm n \cdot \Delta t$ (n = 1, 2, ...).
- ☐ $h(t)$ besitzt zusätzliche Nullstellen zu anderen Zeiten.
- ☐ Mit r = 0 würde $h(t)$ schneller abklingen.
- ☐ Mit r = 1 würde $h(t)$ schneller abklingen.

Z1.8: Cosinus-Quadrat-Tiefpass



Bei der Untersuchung von Digitalsystemen geht man häufig von einem diracförmigen Eingangssignal $x(t) = T \cdot \delta(t)$ aus, so dass $X(f) = T$ gilt. Das Ausgangsspektrum $Y(f)$ ist dann formgleich mit dem Gesamtfrequenzgang von Sende– und Empfangsfilter:

$$H(f) = H_{\rm S}(f) \cdot H_{\rm E}(f).$$

Dieser wird häufig $\cos^2$–förmig angenommen (siehe Grafik). Für $|f \cdot T| > 1$ ist $H(f) = 0$. Im inneren Bereich gilt:

$$H(f) = \cos^2(f \cdot T \cdot \frac{\pi}{2}).$$

Anzumerken ist, dass die äquivalente Bandbreite $\Delta f = 1/T$ betragen soll. Damit ist die äquivalente Dauer Δt der Impulsantwort ebenfalls T und man erhält:

$$y(t) = T \cdot h(t) = {\rm si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) \cdot \frac{\cos(\pi \cdot t/T)}{1 - (2 \cdot t/T)^2}.$$

Zu beachten ist, dass das Ausgangssignal $y(t)$ im Gegensatz zur Impulsantwort $h(t)$ ohne Einheit ist. Durch Anwendung trigonomischer Umformungen kann dieses Signal auch wie folgt dargestellt werden:

$$y(t) = \frac{\pi}{4} \cdot {\rm si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) \cdot \left[{\rm si}\left(\pi \cdot (t/T + 0.5)\right) + {\rm si}\left(\pi \cdot (t/T - 0.5)\right)\right].$$

Wählen Sie bei den nachfolgenden Aufgaben die jeweils einfacher handhabbare Gleichung aus.

Für die Teilaufgabe c) soll vorausgesetzt werden, dass das Signal $s(t)$ in der Mitte zwischen den beiden Frequenzgängen $H_{\rm S}(f)$ und $H_{\rm E}(f)$ ein Rechteckimpuls ist. Demzufolge muss gelten:

$$H_{\rm S}(f) = {\rm si}(\pi f T).$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.3.** Sie können Ihre Ergebnisse mit folgendem Interaktionsmodul überprüfen:

Tiefpässe im Frequenz- und Zeitbereich (Dateigröße 160 kB)

Fragebogen zu "Z1.8: Cosinus-Quadrat-Tiefpass"

a) Berechnen Sie das Ausgangssignal zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = T$.

$\boldsymbol{y(t = 0)}$ =

$\boldsymbol{y(t = T)}$ =

b) Berechnen Sie das Ausgangssignal zu den Zeitpunkten $t = T/2$ und $t = 3/2 \cdot T$.

$\boldsymbol{y(t = 0.5\ T)}$ =

$\boldsymbol{y(t = 1.5\ T)}$ =

c) Berechnen Sie $y(t)$ für große t–Werte. Geeignete Näherungen sind erlaubt und erwünscht. Wie groß ist der Signalwert bei $t = 10.75\ T$?

$\boldsymbol{y(t = 10.75\ T)}$ =

d) Geben Sie den erforderlichen Empfängerfrequenzgang $H_E(f)$ für $H_S(f) = \mathrm{si}(\pi f T)$ an. Welche Werte ergeben sich für $f \cdot T = 0$, $f \cdot T = 0.5$ und $f \cdot T = 1$?

$\boldsymbol{H_E(f = 0)}$ =

$\boldsymbol{H_E(f = 1/2T)}$ =

$\boldsymbol{H_E(f = 1/T)}$ =