

### A3.5: Schaltung mit $R$ , $L$ und $C$

Wir betrachten einen Vierpol mit dem Widerstand  $R = 100 \Omega$  im Längszweig, während im Querzweig eine Induktivität  $L$  und eine Kapazität  $C$  in Serie geschaltet sind. Darunter gezeichnet ist das Pol-Nullstellen-Diagramm.

Beachten Sie die Normierung der komplexen Frequenz  $p = j2\pi f$  auf den Wert  $1/T$  mit  $T = 1 \mu\text{s}$ . Dies hat zur Folge, dass zum Beispiel der Pol bei  $-1$  in der Realität bei  $-10^6 \cdot 1/\text{s}$  liegt.

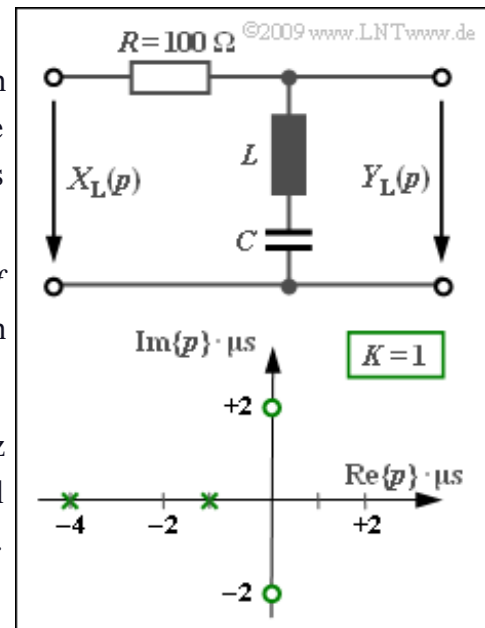
Zur Berechnung von Zeitfunktionen kann man den Residuensatz anwenden. Bei  $N$  einfachen Polen setzt sich das Ausgangssignal  $y(t)$  aus  $N$  Eigenschwingungen (den sog. *Residuen*) zusammen. Bei einem einfachen Pol bei  $p_{xi}$  gilt für das Residuum:

$$\text{Res} \left. \{ Y_L(p) \cdot e^{pt} \} \right|_{p=p_{xi}} = Y_L(p) \cdot (p - p_{xi}) \cdot e^{pt} \Big|_{p=p_{xi}} .$$

Dieser Ansatz funktioniert aber nur dann, wenn die Anzahl  $Z$  der Nullstellen kleiner ist als  $N$ , in dieser Aufgabe beispielsweise dann, wenn die Sprungantwort  $y(t)$  berechnet wird. In diesem Fall ist  $Z = 2$  und  $N = 3$ , da zusätzlich die Sprungantwort am Eingang durch  $X_L(p) = 1/p$  berücksichtigt werden muss.

Für die Berechnung der Impulsantwort  $h(t)$  funktioniert diese Vorgehensweise wegen  $Z = N = 2$  nicht. Hier kann aber die Tatsache berücksichtigt werden, dass das Integral über die Impulsantwort  $h(t)$  die Sprungantwort  $y(t)$  ergibt.

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themenkomplex von **Kapitel 3.3**.



### Fragebogen zu "A3.5: Schaltung mit R, L und C"

a) Welche Funktion hat dieser Vierpol? Handelt es sich um

- einen Tiefpass,
- einen Hochpass,
- einen Bandpass,
- eine Bandsperre?

b) Ermitteln Sie  $L$  und  $C$  für die vorgegebene Pol-Nullstellen-Konfiguration. Berücksichtigen Sie den Normierungswert  $1/T$  und den Widerstand  $R = 100 \Omega$ .

$$L = \quad \mu\text{H}$$

$$C = \quad \text{nF}$$

c) Berechnen Sie das Ausgangssignal  $y(t)$ , wenn am Eingang eine Sprungfunktion anliegt, insbesondere die Signalwerte

$$y(t = 0) =$$

$$y(t = 0.5 \mu\text{s}) =$$

$$y(t = 2 \mu\text{s}) =$$

$$y(t = 5 \mu\text{s}) =$$

d) Berechnen Sie die Impulsantwort  $h(t)$ , insbesondere für die Zeitpunkte  $t = 0$  und  $t = 1 \mu\text{s}$ . Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- $h(t)$  beinhaltet eine Diracfunktion bei  $t = 0$ .
- Der kontinuierliche Anteil von  $h(t)$  ist im gesamten Bereich negativ.
- Der kontinuierliche Anteil von  $h(t)$  besitzt ein Maximum.

### Z3.5: Anwendung des Residuensatzes

Die Spektralfunktion  $Y_L(p)$  sei in Pol-Nullstellen-Form gegeben, gekennzeichnet durch  $Z$  Nullstellen  $p_{oi}$ ,  $N$  Pole  $p_{xi}$  sowie die Konstante  $K$ . Betrachtet werden in dieser Aufgabe die in der Grafik dargestellten Konfigurationen, wobei stets  $K = 2$  gilt.

Für den Fall, dass die Anzahl  $Z$  der Nullstellen kleiner als die Anzahl  $N$  der Pole ist, kann das zugehörige Zeitsignal  $y(t)$  durch Anwendung des Residuensatzes direkt ermittelt werden. In diesem Fall gilt

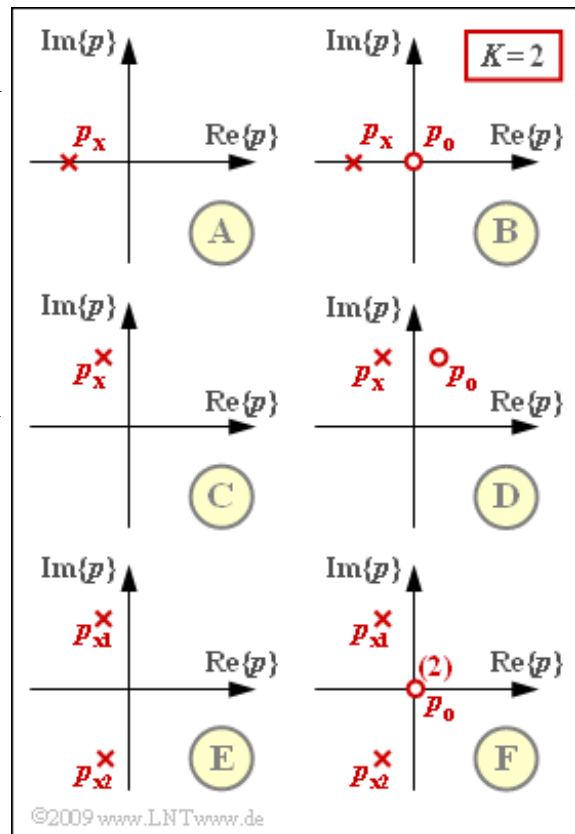
$$y(t) = \sum_{i=1}^I \left\{ Y_L(p) \cdot (p - p_{xi}) \cdot e^{pt} \Big|_{p=p_{xi}} \right\},$$

wobei  $I$  die Anzahl der unterscheidbaren Pole angibt. Bei allen hier vorgegebenen Konstellationen gilt stets  $I = N$ .

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 3.3**. Ist das Zeitsignal  $y(t)$  komplex, so kann  $Y_L(p)$  nicht als Schaltung

realisiert werden. Die Anwendung des Residuensatzes ist aber auch in diesem Fall möglich.

Die komplexe Frequenz  $p$ , die Nullstellen  $p_{oi}$  sowie die Pole  $p_{xi}$  beschreiben in dieser Aufgabe jeweils normierte Größen ohne Einheit. Damit ist auch die Zeit  $t$  dimensionslos.



### Fragebogen zu "Z3.5: Anwendung des Residuensatzes"

a) Bei welchen Konfigurationen lässt sich der Residuensatz nicht direkt anwenden?

- Konfiguration A,
- Konfiguration B,
- Konfiguration C,
- Konfiguration D,
- Konfiguration E,
- Konfiguration F.

b) Berechnen Sie  $y(t)$  für die Konfiguration A mit  $K = 2$  und  $p_x = -1$ . Welcher Zahlenwert ergibt sich für den Zeitpunkt  $t = 1$ ?

$$\text{Konfiguration A: } \operatorname{Re}\{y(t=1)\} =$$
$$\operatorname{Im}\{y(t=1)\} =$$

c) Berechnen Sie  $y(t)$  für die Konfiguration C mit  $K = 2$  und  $p_x = -0.2 + j \cdot 1.5\pi$ . Welcher Zahlenwert ergibt sich für den Zeitpunkt  $t = 1$ ?

$$\text{Konfiguration C: } \operatorname{Re}\{y(t=1)\} =$$
$$\operatorname{Im}\{y(t=1)\} =$$

d) Welcher Signalwert  $y(t = 1)$  ergibt sich bei der Konstellation E mit  $K = 2$  und zwei Polstellen bei  $p_x = -0.2 \pm j \cdot 1.5\pi$ ?

$$\text{Konfiguration E: } \operatorname{Re}\{y(t=1)\} =$$
$$\operatorname{Im}\{y(t=1)\} =$$

### A3.6: Einschwingverhalten

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein Cosinussignal mit der Amplitude 1 und der Periodendauer  $T = 1 \mu\text{s}$ , das für alle Zeiten  $t$  (im Bereich  $\pm\infty$ ) definiert ist:

$$c(t) = \cos(2\pi \cdot \frac{t}{T}).$$

Dagegen beginnt das kausale Cosinussignal (rote Kurve) erst zum Einschaltzeitpunkt  $t = 0$ :

$$c_K(t) = \begin{cases} c(t) & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Für das beidseitig unbegrenzte Signal  $c(t)$  kann man nur das Fourierspektrum

$$C(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_0) \quad \text{mit} \quad f_0 = \frac{1}{T} = 1 \text{ MHz}$$

angeben. Dagegen ist für das kausale Cosinussignal  $c_K(t)$  auch die Laplace-Transformierte angebar:

$$C_L(p) = \frac{p}{(p - j \cdot 2\pi/T) \cdot (p + j \cdot 2\pi/T)}.$$

Entsprechend gilt für die Laplace-Transformierte der kausalen Sinusfunktion  $s_K(t)$ :

$$S_L(p) = \frac{2\pi/T}{(p - j \cdot 2\pi/T) \cdot (p + j \cdot 2\pi/T)}.$$

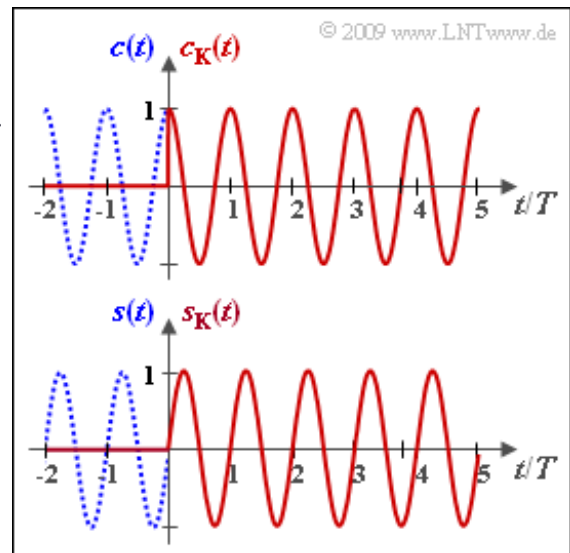
Die beidseitig unbegrenzte Sinusfunktion wird mit  $s(t)$  bezeichnet und ist als blau-gepunktete Kurve im unteren Diagramm dargestellt.

Die Signale  $c(t)$ ,  $c_K(t)$ ,  $s(t)$  und  $s_K(t)$  werden nun an den Eingang eines Tiefpasses erster Ordnung mit der Übertragungsfunktion (bzw. der Impulsantwort)

$$H_L(p) = \frac{2/T}{p + 2/T} \quad \bullet \xrightarrow{\text{L}} \circ \quad h(t) = \frac{2}{T} \cdot e^{-2t/T}$$

angelegt. Die entsprechenden Ausgangssignale werden mit  $y_C(t)$ ,  $y_{CK}(t)$ ,  $y_S(t)$  bzw.  $y_{SK}(t)$  bezeichnet. Diese Signale sollen in dieser Aufgabe berechnet und zueinander in Bezug gesetzt werden.

**Hinweis:** Zur Berechnung der Signale  $y_{CK}(t)$  und  $y_{SK}(t)$  bietet sich zum Beispiel der Residuensatz an, der im **Kapitel 3.3** ausführlich beschrieben ist. Die Berechnungen bei Teilaufgabe f) sind umfangreich.



### Fragebogen zu "A3.6: Einschwingverhalten"

a) Berechnen Sie den Frequenzgang  $H(f)$  nach Betrag und Phase. Welche Werte ergeben sich für die Frequenz  $f_0 = 1/T = 1$  MHz?

$$|H(f=f_0)| =$$

$$a(f=f_0) = \text{Np}$$

$$\text{arc } H(f=f_0) = \text{Grad}$$

$$b(f=f_0) = \text{Grad}$$

b) Berechnen Sie das Signal  $y_C(t)$  am Filterausgang, wenn am Eingang des Filters das Cosinussignal  $c(t)$  anliegt. Welcher Wert ergibt sich für  $t = 0$ ?

$$y_C(t=0) =$$

c) Berechnen Sie das Ausgangssignal  $y_S(t)$ , wenn am Eingang das Sinussignal  $s(t)$  anliegt. Welcher Wert ergibt sich für  $t = 0$ ?

$$y_S(t=0) =$$

d) Bestimmen Sie die Einflusslänge  $T_h$  der Filterimpulsantwort, bei der  $h(t)$  auf 1% des Maximalwertes abgeklungen ist.

$$T_h/T =$$

e) Welche Aussagen sind für die Signale  $y_{CK}(t)$  und  $y_{SK}(t)$  zutreffend?

Es gilt  $y_{CK}(t) = 0$  und  $y_{SK}(t) = 0$  für  $t < 0$ .

Das Signal  $y_{CK}(t)$  ist für  $t > T_h$  annähernd gleich  $y_C(t)$ .

Das kausale Signal  $y_{SK}(t)$  ist für  $t < T_h$  annähernd gleich  $y_S(t)$ .

f) Berechnen Sie mittels Residuensatz das Signal  $y_{CK}(t)$  nach dem Filter, wenn am Eingang  $c_K(t)$  anliegt. Welcher Signalwert tritt zum Zeitpunkt  $t = T/5$  auf?

$$y_{CK}(t = T/5) =$$

### Z3.6: Zwei imaginäre Pole

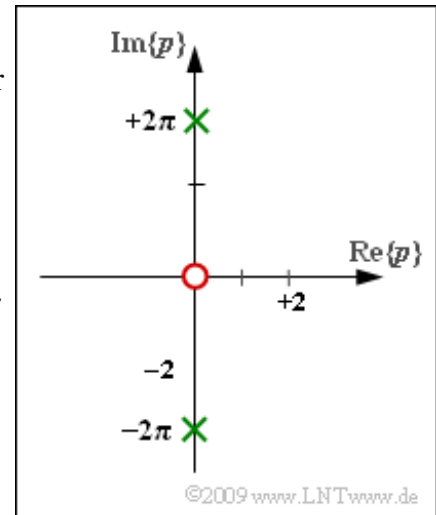
In dieser Aufgabe betrachten wir ein kausales Signal  $x(t)$  mit der Laplace-Transformierten

$$X_L(p) = \frac{p}{p^2 + 4\pi^2} = \frac{p}{(p - j \cdot 2\pi)(p + j \cdot 2\pi)}$$

entsprechend der Grafik (eine rote Nullstelle und zwei grüne Pole). Das Signal  $y(t)$  besitze dagegen die Laplace-Spektralfunktion

$$Y_L(p) = \frac{1}{p^2 + 4\pi^2}.$$

Die rote Nullstelle gehört somit nicht zu  $Y_L(p)$ .



Abschließend wird noch das Signal  $z(t)$  mit der Laplace-Transformierten

$$Z_L(p) = \frac{p}{(p - j \cdot \beta)(p + j \cdot \beta)}$$

betrachtet, insbesondere der Grenzfall für  $\beta \rightarrow 0$ .

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 3.3**. Die Frequenzvariable  $p$  ist so normiert, dass nach Anwendung des Residuensatzes die Zeit  $t$  in Mikrosekunden angegeben ist. Ein Ergebnis  $t = 1$  ist somit als  $t/T = 1$  mit  $T = 1 \mu\text{s}$  zu interpretieren. Der Residuensatz lautet am Beispiel der Funktion  $X_L(p)$  mit zwei einfachen Polstellen bei  $\pm j\beta$ :

$$x(t) = X_L(p) \cdot (p - j \cdot \beta) \cdot e^{pt} \Big|_{p=j\beta} + X_L(p) \cdot (p + j \cdot \beta) \cdot e^{pt} \Big|_{p=-j\beta}.$$

### Fragebogen zu "Z3.6: Zwei imaginäre Pole"

a) Berechnen Sie das Signal  $x(t)$  für Zeiten  $t \geq 0$ . Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig?

- $x(t)$  ist ein kausales Cosinussignal.
- $x(t)$  ist ein kausales Sinussignal.
- Die Amplitude von  $x(t)$  ist 1.
- Die Periodendauer von  $x(t)$  ist  $T = 1 \mu\text{s}$ .

b) Berechnen Sie das Signal  $y(t)$  für Zeiten  $t \geq 0$ . Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig?

- $y(t)$  ist ein kausales Cosinussignal.
- $y(t)$  ist ein kausales Sinussignal.
- Die Amplitude von  $y(t)$  ist 1.
- Die Periodendauer von  $y(t)$  ist  $T = 1 \mu\text{s}$ .

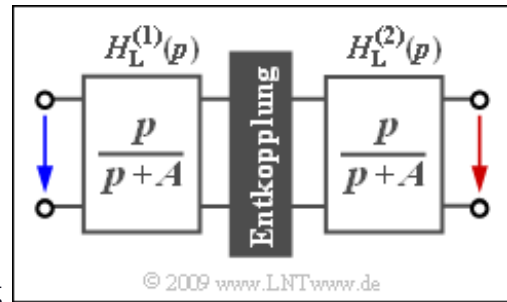
c) Welche Aussagen treffen für das Signal  $z(t)$  zu?

- Für  $\beta > 0$  verläuft  $z(t)$  cosinusförmig.
- Für  $\beta > 0$  verläuft  $z(t)$  sinusförmig.
- Der Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  führt zur Sprungfunktion.

### A3.7: Hochpass-Impulsantwort

Wir gehen von der nebenstehend skizzierten Anordnung aus. Die Übertragungsfunktionen der beiden Hochpässe lauten:

$$H_L^{(1)}(p) = H_L^{(2)}(p) = \frac{p}{p + A}.$$



Da die Vierpole durch einen Trennverstärker widerstandsmäßig entkoppelt sind, lässt sich für die Gesamtübertragungsfunktion schreiben:

$$H_L(p) = H_L^{(1)}(p) \cdot H_L^{(2)}(p).$$

Gleichzeitig ist bekannt, dass folgende Gleichung gültig ist:

$$H_L(p) = \frac{4}{1/p^2 + 4/p + 4}.$$

Stellt man diese Funktion in Pol-Nullstellen-Form dar, so wird sich herausstellen, dass hier die Anzahl der Nullstellen ( $Z$ ) gleich der Anzahl der Pole ( $N$ ) ist. Eine direkte Anwendung des Residuensatzes ist hier deshalb nicht möglich.

Um die Zeitfunktion  $h(t)$  berechnen zu können, muss eine Partialbruchzerlegung entsprechend

$$H_L(p) = 1 - H_L'(p)$$

vorgenommen werden. Damit gilt für die Impulsantwort:

$$h(t) = \delta(t) - h'(t).$$

Bezüglich  $H_L'(p)$  gilt  $Z' < N'$ . Somit kann der kontinuierliche Anteil  $h'(t)$  der Impulsantwort wieder mit dem Residuensatz ermittelt werden.

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 3.3**. Das Residuum eines  $l$ -fachen Pols  $p_x$  innerhalb der Funktion  $H_L(p)$  lautet:

$$\text{Res} \Big|_{p=p_x} \{ H_L(p) \cdot e^{pt} \} = \frac{1}{(l-1)!} \cdot \frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}} \{ H_L(p) \cdot (p - p_x)^l \cdot e^{pt} \} \Big|_{p=p_x}.$$

Die Ableitung des Produkts  $y(x) = f(x) \cdot g(x)$  ist wie folgt gegeben:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \cdot f(x).$$

### Fragebogen zu "A3.7: Hochpass-Impulsantwort"

a) Stellen Sie  $H_L(p)$  in Pol-Nullstellen-Form dar. Wieviele Nullstellen ( $Z$ ) und Pole ( $N$ ) gibt es? Wie groß ist der konstante Faktor  $K$ ?

$$Z =$$

$$N =$$

$$K =$$

b) Wie groß ist der Parameter  $A$  bei beiden Teilvierpolen?

$$A =$$

c) Wandeln Sie  $H_L(p)$  in  $1 - H_L'(p)$  um. Welches Ergebnis erhält man für  $H_L'(p)$ ?

$H_L'(p) = p^2/(p + 0.5)^2,$

$H_L'(p) = p/(p + 0.5)^2,$

$H_L'(p) = (p + 0.25)/(p + 0.5)^2.$

d) Berechnen Sie die Zeitfunktion  $h'(t)$ . Welche Zahlenwerte ergeben sich zu den angegebenen Zeitpunkten?

$$h'(t = 0) =$$

$$h'(t = 1) =$$

$$h'(t \rightarrow \infty) =$$

### Z3.7: Partialbruchzerlegung

In der Grafik sind durch ihre Pol-Nullstellen-Diagramme  $H_L(p)$  vier verschiedene Vierpole gegeben. Sie alle haben gemein, dass die Anzahl  $Z$  der Nullstellen gleich der Anzahl  $N$  der Polstellen ist. Der konstante Faktor ist jeweils  $K = 1$ .

Im Fall  $Z = N$  kann zur Berechnung der Impulsantwort  $h(t)$  der Residuensatz nicht direkt angewendet werden. Vielmehr muss vorher eine Partialbruchzerlegung entsprechend

$$H_L(p) = 1 - H_L'(p)$$

vorgenommen werden. Für die Impulsantwort gilt dann

$$h(t) = \delta(t) - h'(t),$$

wobei  $h'(t)$  die Laplace-Transformierte von  $H_L(p)$  angibt, bei der die Bedingung  $Z' < N'$  erfüllt ist.

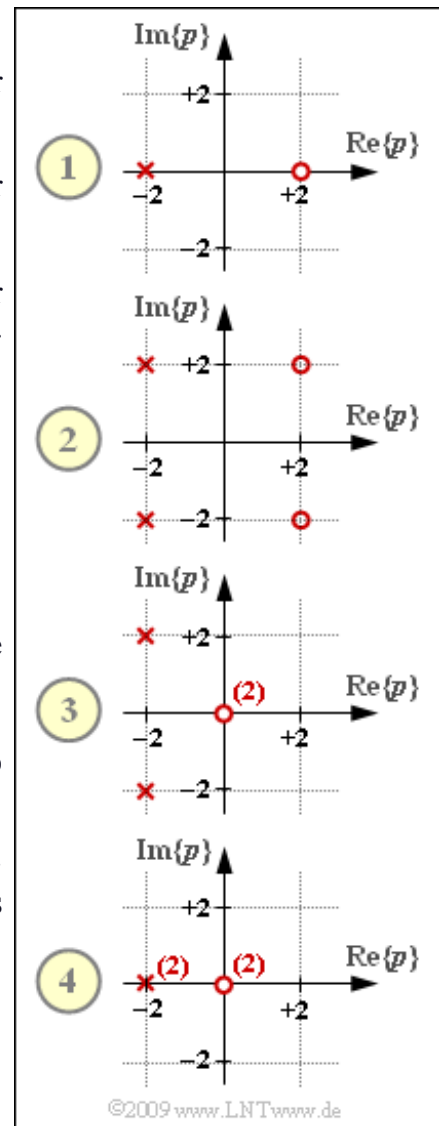
Bei zwei der vier angegebenen Konfigurationen handelt es sich um so genannte *Allpässe*. Darunter versteht man Vierpole, bei denen die Fourier-Spektralfunktion die Bedingung  $|H(f)| = 1 \Rightarrow a(f) = 0$  erfüllt. In der **Aufgabe Z3.4** ist angegeben, wie die Pole und Nullstelle eines solchen Allpasses angeordnet sein müssen.

Weiterhin soll in dieser Aufgabe die  $p$ -Übertragungsfunktion

$$H_L^{(5)}(p) = \frac{p/A}{\left(\sqrt{p/A} + \sqrt{A/p}\right)^2}$$

näher untersucht werden, die bei richtiger Wahl des Parameters  $A$  durch eines der vier in der Grafik vorgegebenen Pol-Nullstellen-Diagramme dargestellt werden kann.

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 3.3**.



### Fragebogen zu "Z3.7: Partialbruchzerlegung"

a) Bei welchen der skizzierten Vierpole handelt es sich um Allpässe?

- Konfiguration (1),
- Konfiguration (2),
- Konfiguration (3),
- Konfiguration (4).

b) Welcher Vierpol hat die Übertragungsfunktion  $H_L^{(5)}(p)$ ?

- Konfiguration (1),
- Konfiguration (2),
- Konfiguration (3),
- Konfiguration (4).

c) Berechnen Sie die Funktion  $H_L'(p)$  nach einer Partialbruchzerlegung für die Konfiguration (1). Geben Sie den Funktionswert für  $p = 0$  ein.

**Diagramm (1):  $H_L'(p = 0) =$**

d) Berechnen Sie  $H_L'(p)$  für Konfiguration (2). Welche Aussagen treffen hier zu?

- $H_L'(p)$  besitzt die gleichen Nullstellen wie  $H_L(p)$ .
- $H_L'(p)$  besitzt die gleichen Polstellen wie  $H_L(p)$ .
- Der konstante Faktor von  $H_L'(p)$  ist  $K' = 8$ .

e) Berechnen Sie  $H_L'(p)$  für Konfiguration (3). Welche Aussagen treffen hier zu?

- $H_L'(p)$  besitzt die gleichen Nullstellen wie  $H_L(p)$ .
- $H_L'(p)$  besitzt die gleichen Polstellen wie  $H_L(p)$ .
- Der konstante Faktor von  $H_L'(p)$  ist  $K' = 8$ .

f) Berechnen Sie  $H_L'(p)$  für Konfiguration (4). Welche Aussagen treffen hier zu?

- $H_L'(p)$  besitzt die gleichen Nullstellen wie  $H_L(p)$ .
- $H_L'(p)$  besitzt die gleichen Polstellen wie  $H_L(p)$ .
- Der konstante Faktor von  $H_L'(p)$  ist  $K' = 8$ .

