

A2.5: Verzerrung und Entzerrung

Betrachtet wird ein Nachrichtensystem mit Eingang $x(t)$ und Ausgang $y(t)$, das durch den trapezförmigen Frequenzgang $H(f)$ gemäß der oberen Grafik vollständig beschrieben wird. Mit dem Rolloff-Faktor $r = 0.5$ sowie der äquivalenten Bandbreite $\Delta f = 16$ kHz lautet die dazugehörige, über die Fourierücktransformation berechenbare Impulsantwort:

$$h(t) = \Delta f \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \cdot \text{si}(\pi \cdot r \cdot \Delta f \cdot t).$$

Als Eingangssignale stehen zur Verfügung:

- Die Summe zweier harmonischer Schwingungen:

$$x_1(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + 1 \text{ V} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t).$$

Hierbei gelte für $\omega_1 = 2\pi \cdot 2000$ 1/s und $\omega_2 > \omega_1$.

- Ein periodisches Dreieckssignal:

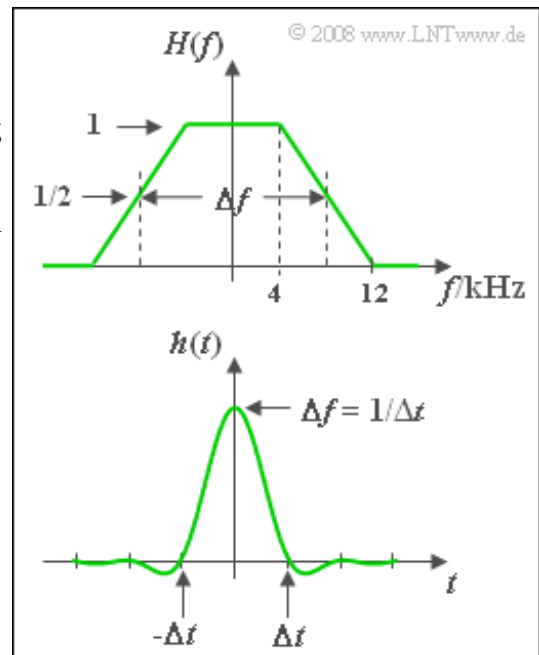
$$x_2(t) = \frac{8 \text{ V}}{\pi^2} \cdot \left[\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{25} \cdot \cos(5\omega_0 t) + \dots \right].$$

Es ist anzumerken, dass die Grundfrequenz $f_0 = 3$ kHz bzw. 2 kHz beträgt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Signalwert in beiden Fällen 1 V.

- Ein Rechteckimpuls $x_3(t)$ mit der Amplitude $A = 1$ V und der Dauer $T = 1$ ms. Da dessen Spektrum $X_3(f)$ bis ins Unendliche reicht, führt $H(f)$ hier immer zu linearen Verzerrungen.

Ab Teilaufgabe f) soll versucht werden, durch einen nachgeschalteten Entzerrer mit Frequenzgang $H_E(f)$, Eingangssignal $y(t)$ und Ausgangssignal $z(t)$ die eventuell von $H(f)$ erzeugten Verzerrungen zu eliminieren. Der im Fragenkatalog verwendete Begriff „Gesamtverzerrung“ bezieht sich auf das Eingangssignal $x(t)$ und das Ausgangssignal $z(t)$.

Hinweis: Diese Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 2.3**.



Fragebogen zu "A2.5: Verzerrung und Entzerrung"

a) Welche Verzerrungsarten können bei diesem System ausgeschlossen werden?

- Nichtlineare Verzerrungen.
- Dämpfungsverzerrungen.
- Phasenverzerrungen.

b) Welche Eigenschaften zeigt das System beim Testsignal $x_1(t)$ mit $f_2 = 4$ kHz?

- Es wirkt wie ein ideales System.
- Es wirkt wie ein verzerrungsfreies System.
- Man erkennt, dass ein verzerrendes System vorliegt.

c) Welche Eigenschaften zeigt das System beim Testsignal $x_1(t)$ mit $f_2 = 10$ kHz?

- Es wirkt wie ein ideales System.
- Es wirkt wie ein verzerrungsfreies System.
- Man erkennt, dass ein verzerrendes System vorliegt.

d) Wie groß ist die die Maximalabweichung $\epsilon_{\max} = |y_2(t) - x_2(t)|$ beim Signal $x_2(t)$ mit $f_0 = 3$ kHz? An welcher Stelle t_0 tritt diese Abweichung auf?

$$f_0 = 3 \text{ kHz: } \epsilon_{\max} = \quad \text{V}$$
$$t_0 = \quad \text{ms}$$

e) Wie groß ist die maximale Abweichung mit $f_0 = 2$ kHz?

$$f_0 = 2 \text{ kHz: } \epsilon_{\max} = \quad \text{V}$$

f) Welchen Verlauf sollte der Entzerrer $H_E(f)$ besitzen, um alle Verzerrungen von $H(f)$ bestmöglich zu kompensieren. Welcher Wert ergibt sich bei $f = 10$ kHz?

$$|H_E(f = 10 \text{ kHz})| =$$

g) Bei welchen der nachfolgenden Signale ist eine vollständige Entzerrung möglich? Unter vollständiger Entzerrung soll dabei $z(t) = x(t)$ verstanden werden.

- Beim Signal $x_1(t)$ mit $f_2 = 10$ kHz.
- Beim Signal $x_2(t)$.
- Beim Signal $x_3(t)$.

Z2.5: Nyquistentzerrung

Ein digitales Basisbandübertragungssystem kann durch das dargestellte Blockschaltbild modelliert werden. Die drei Frequenzgänge $H_S(f)$, $H_K(f)$ und $H_E(f)$ beschreiben die Komponenten „Sender“, „Kanal“ und „Empfänger“ im Frequenzbereich. Fordert man zum Beispiel, dass der Gesamtfrequenzgang $H(f) = H_S(f) \cdot H_K(f) \cdot H_E(f)$ den \cos^2 -förmigen Verlauf

$$H(f) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot f \cdot T\right) & \text{für } |f| < 1/T, \\ 0 & \text{für } |f| \geq 1/T. \end{cases}$$

besitzt, so weist das Signal $y(t)$ vor dem (Schwellenwert-)Entscheider äquidistante Nulldurchgänge im Abstand T auf. Vorausgesetzt wird dabei, dass das Ausgangssignal $x(t)$ der Diracquelle ein Diracimpuls mit dem jeweiligen Gewicht T ist (siehe Grafik).

Es wird darauf hingewiesen, dass es sich hierbei um ein so genanntes *Nyquistsystem* handelt. Wie im Buch „Digitalsignalübertragung“ noch ausführlich diskutiert werden wird, stellen diese Nyquistsysteme eine wichtige Klasse digitaler Übertragungssysteme dar, da sich bei diesen die sequenziell übertragenen Symbole nicht gegenseitig beeinflussen.

Für die Lösung dieser Aufgabe werden diese weiterreichenden Aspekte jedoch nicht benötigt. Es wird hier lediglich vorausgesetzt, dass

- der Sendeimpuls $s(t)$ rechteckförmig sei mit Impulsdauer T :

$$H_S(f) = \text{si}(\pi fT),$$

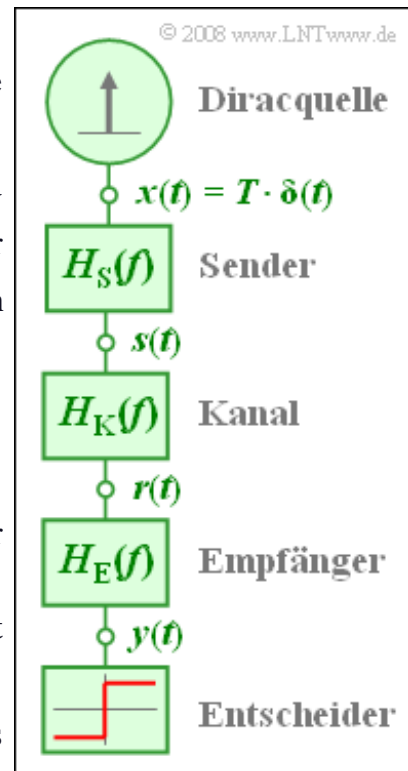
- der Kanal bis einschließlich Teilaufgabe b) als ideal vorausgesetzt wird, während für die letzte Teilaufgabe gelte:

$$H_K(f) = e^{-\pi(f \cdot T)^2}.$$

Gesucht ist für beide Kanäle der Empfänger- und gleichzeitig Entzerrerfrequenzgang $H_E(f)$, damit der Gesamtfrequenzgang die gewünschte Nyquistform aufweist.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 2.3**. Als bekannt vorausgesetzt wird die folgende trigonometrische Beziehung:

$$\frac{\cos^2(\alpha/2)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{2} \cdot \cot(\alpha/2).$$



Fragebogen zu "Z2.5: Nyquistentzerrung"

a) Berechnen Sie den Ausgangssignalwert zum Zeitpunkt $t = 0$.

$$y(t = 0) =$$

b) Zunächst sei $H_K(f) = 1$. Berechnen Sie für diesen Fall den Frequenzgang $H_E(f)$.
Welche Werte ergeben sich bei den nachfolgend genannten Frequenzen?

$$\text{idealer Kanal: } |H_E(f \cdot T = 0)| =$$

$$|H_E(f \cdot T = 0.25)| =$$

$$|H_E(f \cdot T = 0.5)| =$$

$$|H_E(f \cdot T = 0.75)| =$$

$$|H_E(f \cdot T = 1)| =$$

c) Berechnen Sie $H_E(f)$ für den gaußförmigen Kanal entsprechend der Angabe.

$$\text{Gaußkanal: } |H_E(f \cdot T = 0)| =$$

$$|H_E(f \cdot T = 0.25)| =$$

$$|H_E(f \cdot T = 0.5)| =$$

$$|H_E(f \cdot T = 0.75)| =$$

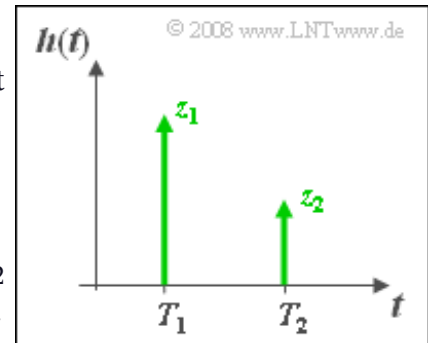
$$|H_E(f \cdot T = 1)| =$$

A2.6: Zweiwegekanal

Der so genannte Zweiwegekanal wird durch folgende Impulsantwort charakterisiert (mit $T_1 < T_2$):

$$h(t) = z_1 \cdot \delta(t - T_1) + z_2 \cdot \delta(t - T_2).$$

Bis auf wenige Kombinationen der Systemparameter z_1 , T_1 , z_2 und T_2 wird dieser Kanal zu linearen Verzerrungen führen. Man spricht nur dann von einem verzerrungsfreien Kanal, wenn durch ihn kein einziges Eingangssignal verzerrt wird. Das bedeutet: Auch bei einem verzerrenden Kanal kann es Sonderfälle geben, bei denen tatsächlich $y(t) = \alpha \cdot x(t - \tau)$ gilt.



Als Testsignale werden an den Systemeingang angelegt:

- ein Diracpuls $x_1(t)$ im Zeitabstand $T_0 = 1$ ms gemäß

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T_0),$$

dessen Spektralfunktion ebenfalls ein Diracpuls ist, und zwar mit Abstand $f_0 = 1/T_0 = 1$ kHz:

$$X_1(f) = T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot f_0),$$

- ein Cosinussignal mit der Frequenz $f_2 = 250$ Hz:

$$x_2(t) = \cos(2\pi \cdot f_2 \cdot t),$$

- die Summe zweier Cosinussignale mit den Frequenzen $f_2 = 250$ Hz und $f_3 = 1250$ Hz:

$$x_3(t) = x_2(t) + \cos(2\pi \cdot f_3 \cdot t).$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 2.3**. Um Ihnen einige Rechnungen zu ersparen, wird folgendes Ergebnis für den Parametersatz $z_1 = 1$, $T_1 = 0$, $z_2 = 0.5$ und $T_2 = 1$ ms vorweggenommen:

$$\begin{aligned} |H(f = f_2)| &= |H(f = f_3)| = \sqrt{1.25} \approx 1.118, \\ b(f = f_2) &= b(f = f_3) = \arctan(0.5) \approx 0.464. \end{aligned}$$

Fragebogen zu "A2.6: Zweivegekanal"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- Der Parametersatz „ $z_1 = 1, T_1 = 0, z_2 = 0$ “ ist der einzig mögliche zur Beschreibung des idealen Kanals.
- Jeder verzerrungsfreie Kanal wird durch die beiden Kombinationen „ $z_1 \neq 0, z_2 = 0$ “ bzw. „ $z_1 = 0, z_2 \neq 0$ “ erfasst.“
- Die Werte „ $z_1 \neq 0$ “ und „ $z_2 \neq 0$ “ führen zu einem verzerrungsfreien Kanal, wenn T_1 und T_2 bestmöglich angepasst sind.

b) Es gelte $z_1 = 1, T_1 = 0, z_2 = 0.5, T_2 = 1$ ms. Berechnen Sie den Frequenzgang $H(f)$ dieses Kanals. Welche Werte gibt es bei Vielfachen von 1 kHz?

$$\text{Re}[H(f = n \cdot 1 \text{ kHz})] =$$

$$\text{Im}[H(f = n \cdot 1 \text{ kHz})] =$$

c) Am Eingang des Systems liegt nun der Diracpuls $x_1(t)$ an. Welche Aussagen treffen für das Ausgangssignal $y_1(t)$ zu?

- $y_1(t)$ ist gegenüber $x_1(t)$ um eine Konstante gedämpft/verstärkt.
- $y_1(t)$ ist gegenüber $x_1(t)$ verschoben.
- $y_1(t)$ weist gegenüber $x_1(t)$ Verzerrungen auf.

d) Berechnen Sie das Signal $y_2(t)$ als Antwort auf das Cosinussignal $x_2(t)$. Welcher Signalwert tritt zum Zeitpunkt $t = 0$ auf?

$$y_2(t = 0) =$$

e) Welche Aussagen treffen bezüglich der Signale $x_3(t)$ und $y_3(t)$ zu?

- $y_3(t)$ weist gegenüber $x_3(t)$ keine Verzerrungen auf.
- $y_3(t)$ weist gegenüber $x_3(t)$ Dämpfungsverzerrungen auf.
- $y_3(t)$ weist gegenüber $x_3(t)$ Phasenverzerrungen auf.

Z2.6: Synchrondemodulator

Das dargestellte Blockschaltbild zeigt ein Übertragungssystem mit Amplitudenmodulation (AM) und Synchrondemodulator (SD). Das Quellensignal bestehe aus zwei harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen $f_2 = 2 \text{ kHz}$ und $f_5 = 5 \text{ kHz}$:

$$q(t) = 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_2 t) + 1 \text{ V} \cdot \sin(\omega_5 t).$$

Dieses Signal wird bei AM mit dem dimensionslosen Trägersignal $z(t) = \cos(\omega_T \cdot t)$ der Trägerfrequenz $f_T = 50 \text{ kHz}$ multipliziert. Bei Zweiseitenbandmodulation (ZSB-AM) entfällt der gestrichelt eingezeichnete Block, so dass für das Sendesignal gilt:

$$s(t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T t).$$

Im Synchrondemodulator wird das Empfängersignal $r(t)$, das bei idealem Kanal identisch mit $s(t)$ ist, mit dem empfangsseitigem Trägersignal $z_E(t)$ multipliziert, wobei gilt:

$$z_E(t) = K \cdot \cos(\omega_T t - \Delta\varphi).$$

Dieses Signal sollte nicht nur frequenzsynchron mit $z(t)$ sein, sondern auch phasensynchron – daher der Name „Synchrondemodulator“. Der obige Ansatz berücksichtigt einen Phasenversatz $\Delta\varphi$ zwischen $z(t)$ und $z_E(t)$, der idealerweise 0 sein sollte, sich bei realen Systemen aber oft nicht vermeiden lässt.

Das Ausgangssignal $b(t)$ des zweiten Multiplizierers beinhaltet neben dem gewünschten NF-Anteil auch Anteile um die doppelte Trägerfrequenz. Durch einen idealen Tiefpass – z.B. mit der Grenzfrequenz f_T – lässt sich das Sinkensignal $v(t)$ gewinnen, das im Idealfall gleich dem Quellensignal $q(t)$ sein sollte.

Die Multiplikation beim Sender mit dem Trägersignal $z(t)$ führt im Allgemeinen zu zwei Seitenbändern. Bei der Einseitenbandmodulation (ESB-AM) wird nur eines der beiden Bänder übertragen, zum Beispiel das untere Seitenband (USB). Damit erhält man bei idealem Kanal:

$$r(t) = s(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos((\omega_T - \omega_2)t) - 0.5 \text{ V} \cdot \sin((\omega_T - \omega_5)t).$$

Hier führt die Synchrondemodulation unter Berücksichtigung eines Phasenversatzes $\Delta\varphi$, der Konstante $K = 4$ sowie des nachgeschalteten Tiefpasses zu folgendem verfälschten Sinkensignal:

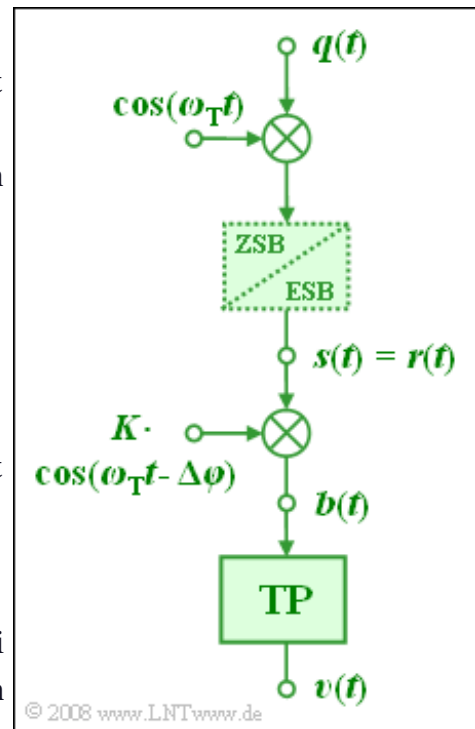
$$v(t) = 1 \text{ V} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \cos(\omega_2 t - \Delta\varphi) + 0.5 \text{ V} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sin(\omega_5 t - \Delta\varphi)$$

$$\Rightarrow v(t) = 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_2 t - \Delta\varphi) + 1 \text{ V} \cdot \sin(\omega_5 t - \Delta\varphi)$$

Im Idealfall phasensynchroner Demodulation ($\Delta\varphi = 0$) gilt wieder

$$v(t) = q(t).$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 2.3** in diesem Buch. Die Thematik „Amplitudenmodulation/Synchrondemodulator“ wird im Buch „Modulationsverfahren“ noch ausführlich diskutiert werden.



© 2008 www.LNTwww.de

Gegeben sind die folgenden trigonometrischen Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2\alpha)] , \\ \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] .\end{aligned}$$

Fragebogen zu "Z2.6: Synchrondemodulator"

a) Wie lautet das Sinkensignal $v(t)$ bei phasensynchroner Synchrondemodulation ($\Delta\varphi = 0$) und ZSB-AM? Wie ist K zu wählen, damit $v(t) = q(t)$ gilt?

$$K =$$

b) Es gelte $K = 2$. Berechnen Sie das Sinkensignal $v(t)$ unter Berücksichtigung eines Phasenversatzes $\Delta\varphi$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- Unabhängig von $\Delta\varphi$ gilt $v(t) = q(t)$.
- $\Delta\varphi \neq 0$ führt zu einer frequenzunabhängigen Dämpfung.
- Ein Phasenversatz $\Delta\varphi \neq 0$ führt zu Dämpfungsverzerrungen.
- Ein Phasenversatz $\Delta\varphi \neq 0$ führt zu Phasenverzerrungen.
- Mit $\Delta\varphi = -60^\circ$ gilt $v(t) = q(t)/2$.

c) Welche Aussagen gelten bei Synchrondemodulation des ESB-Signals (siehe Angabenseite), wenn ein Phasenversatz um $\Delta\varphi$ berücksichtigt wird?

- Unabhängig von $\Delta\varphi$ gilt $v(t) = q(t)$.
- $\Delta\varphi \neq 0$ führt zu einer frequenzunabhängigen Dämpfung.
- Ein Phasenversatz $\Delta\varphi \neq 0$ führt zu Dämpfungsverzerrungen.
- Ein Phasenversatz $\Delta\varphi \neq 0$ führt zu Phasenverzerrungen.
- Mit $\Delta\varphi = -60^\circ$ gilt $v(t) = q(t)/2$.

A2.7: Nochmals Zweiwegekanal

Wie in der Aufgabe A2.6 wird ein Zweiwegekanal betrachtet, für dessen Impulsantwort gelte:

$$h(t) = \delta(t - T_1) + \delta(t - T_2).$$

Entgegen der allgemeinen Darstellung in A2.6 sind hier die beiden Dämpfungsfaktoren z_1 und z_2 jeweils zu 1 gesetzt. Dies entspricht zum Beispiel beim Mobilfunk einem Echo im Abstand $T_2 - T_1$ in gleicher Stärke wie das Signal auf dem Hauptpfad. Für dieses wird die Laufzeit T_1 vorausgesetzt.

Mit den zunächst (a, b, c, d) betrachteten Laufzeiten

$T_1 = 0$ und $T_2 = T$ erhält man für den Frequenzgang des Zweiwegekanals (Betrag siehe obere Grafik):

$$H(f) = 1 + e^{-j2\pi fT} = 1 + \cos(2\pi fT) - j \cdot \sin(2\pi fT)$$

$$\Rightarrow |H(f)| = \sqrt{2(1 + \cos(2\pi fT))} = 2 \cdot |\cos(\pi fT)|.$$

Die untere Grafik zeigt die Phasenfunktion:

$$b(f) = -\arg H(f) = \arctan \frac{\sin(2\pi fT)}{1 + \cos(2\pi fT)} = \arctan(\tan(\pi fT)).$$

Hierbei wurde folgende trigonometrische Umformung benutzt:

$$\frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \tan(\alpha).$$

Im Frequenzbereich $|f| < 1/(2T)$ steigt $b(f)$ linear an: $b(f) = \pi \cdot f \cdot T_1$. Auch in den weiteren Abschnitten der Phasenfunktion nimmt die Phase stets von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ linear zu.

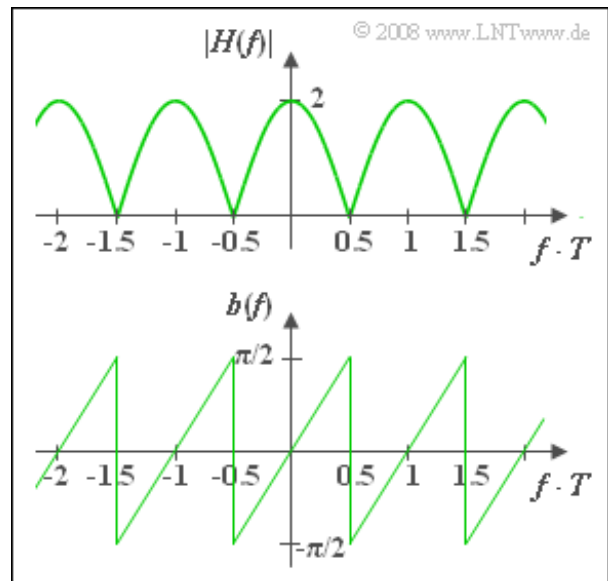
Für die Teilaufgaben a) bis d) gelte $T_1 = 0$ und $T_2 = T = 4$ ms. Dagegen wird in der Teilaufgabe e) der Fall $T_1 = 1$ ms, $T_2 = 5$ ms betrachtet. Als Eingangssignale werden untersucht:

- ein Rechteckimpuls $x_1(t)$ mit der Höhe 1 zwischen 0 und T . Das bedeutet, dass für $t < 0$ und für $t > T$ jeweils $x_1(t) = 0$ gilt. An den beiden Sprungstellen tritt jeweils der Wert 0.5 auf.
- ein Rechteckimpuls $x_2(t)$ mit der Höhe 1 im Bereich von 0 bis $2T$,
- ein periodisches Rechtecksignal $x_3(t)$ mit der Periodendauer $T_0 = T$:

$$x_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t < T/2, \\ 0 & \text{für } T/2 < t < T, \end{cases}$$

- ein periodisches Rechtecksignal $x_4(t)$ mit der Periodendauer $T_0 = 2T$:

$$x_4(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t < T, \\ 0 & \text{für } T < t < 2T. \end{cases}$$



Im Fragenkatalog bezeichnet $y_i(t)$ das Signal am Ausgang des Zweivegekanals, wenn am Eingang das Signal $x_i(t)$ anliegt ($i = 1, 2, 3, 4$).

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 2.3**.

Fragebogen zu "A2.7: Nochmals Zweivegekanal"

a) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y_1(t)$. Welche der Aussagen sind zutreffend?

- $y_1(t)$ ist ebenfalls rechteckförmig.
- $y_1(t)$ ist dreieckförmig.
- Die absolute Impulsdauer ist $2T$.
- $y_1(t)$ weist gegenüber $x_1(t)$ Dämpfungsverzerrungen auf.
- $y_1(t)$ weist gegenüber $x_1(t)$ Phasenverzerrungen auf.

b) Berechnen Sie das Signal $y_2(t)$. Welche Werte ergeben sich zu den Zeitpunkten $t = 0.5T$, $1.5T$ und $2.5T$?

$$y_2(t = 0.5T) =$$

$$y_2(t = 1.5T) =$$

$$y_2(t = 2.5T) =$$

c) Berechnen Sie das Signal $y_3(t)$ und überprüfen Sie, welche Aussagen zutreffen.

- $y_3(t)$ ist gegenüber $x_3(t)$ unverzerrt.
- $y_3(t)$ weist gegenüber $x_3(t)$ Dämpfungsverzerrungen auf.
- $y_3(t)$ weist gegenüber $x_3(t)$ Phasenverzerrungen auf.

d) Welche Aussagen treffen für das Ausgangssignal $y_4(t)$ zu?

- $y_4(t)$ ist gegenüber $x_4(t)$ unverzerrt.
- $y_4(t)$ weist gegenüber $x_4(t)$ Dämpfungsverzerrungen auf.
- $y_4(t)$ weist gegenüber $x_4(t)$ Phasenverzerrungen auf.

e) Es gelten nun die Kanalparameterwerte $T_1 = 1$ ms und $T_2 = 5$ ms. Welche Veränderungen ergeben sich gegenüber den bisherigen Ergebnissen?

- Obige Aussagen hinsichtlich der Verzerrungen sind weiterhin gültig.
- Fundierte Aussagen sind erst nach einer Neuberechnung möglich.
- $T_1 = 1$ ms und $T_2 = 5$ ms führt bei allen Signalen zu Verzerrungen.