A1.5: Küpfmüller-Tiefpass

x	$\mathrm{si}(\pi \cdot x)$	$\frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{Si}(\pi \cdot x)$
0.0	1.0000	0.0000
0.2	0.9355	0.1957
0.4	0.7568	0.3665
0.6	0.5046	0.4935
0.8	0.2339	0.5671
1.0	0.0000	0.5895
1.2	-0.1559	0.5724
1.4	-0.2162	0.5336
1.6	-0.1892	0.4918
1.8	-0.1040	0.4618
2.0	0.0000	0.4514
2.2	0.0850	0.4605
2.4	0.1261	0.4825
2.6	0.1164	0.5075
2.8	0.0668	0.5263
3.0	0.0000	0.5331

© 2008 www.LNTwww.de

Wir betrachten einen idealen, rechteckförmigen Tiefpass – manchmal auch als Küpfmüller–Tiefpass bezeichnet – der alle Frequenzen f < 5 kHz unverfälscht durchlässt ($H(f) = 1$) und alle Spektralanteile über 5 kHz vollständig unterdrückt ($H(f) = 0$). Exakt bei der Grenzfrequenz f_G = 5 kHz ist der Wert der Übertragungsfunktion gleich 1/2.

An den Eingang des Tiefpasses werden verschiedene Signale angelegt:

- ein schmaler Rechteckimpuls entsprechender Höhe, der durch einen Diracimpuls angenähert werden kann:

$$x_1(t) = 10^{-3}\ \mathrm{Vs} \cdot \delta(t),$$

- ein Diracpuls im Zeitabstand T_A:

$$x_2(t) = 10^{-3}\ \mathrm{Vs} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \nu \cdot T_{\rm A}),$$

wobei das zugehörige Spektrum mit $f_A = 1/T_A$ lautet:

$$X_2(f) = \frac{10^{-3}\ \mathrm{Vs}}{T_{\rm A}} \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_{\rm A}),$$

- eine Sprungfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$x_3(t) = 10\ \mathrm{V} \cdot \gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0, \\ 5\ \mathrm{V} & \text{für} \quad t = 0, \\ 10\ \mathrm{V} & \text{für} \quad t > 0, \end{cases}$$

- ein si–förmiger Impuls mit der äquivalenten Dauer T:

$$x_4(t) = 10\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{si}(\pi \frac{t}{T}).$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die Beschreibungen von **Kapitel 1.3.** In der Tabelle sind die Funktionswerte der so genannten Spaltfunktion si($\pi \cdot x$) und der Integralsinusfunktion aufgelistet:

$$\mathrm{Si}(\pi x) = \int_0^x \mathrm{si}(\pi \xi)\, \mathrm{d}\xi .$$

Fragebogen zu "A1.5: Küpfmüller-Tiefpass"

a) Welches Ausgangssignal $y_1(t)$ ergibt sich als Antwort auf den Diracimpuls $x_1(t)$, insbesondere zu den Zeitpunkten t = 0 und t = 50 µs?

$\boldsymbol{y_1(t = 0)}$ = V

$\boldsymbol{y_1(t = 50\ \mu s)}$ = V

b) Wie lautet das Ausgangssignal $y_2(t)$, wenn am Filtereingang der Diracpuls $x_2(t)$ anliegt und T_A = 200 µs gilt. Welcher Signalwert tritt bei t = 0 auf?

$\boldsymbol{T_A = 200\ \mu s : y_2(t = 0)}$ = V

c) Welche Ausgangssignale $y_2(t)$ ergeben sich mit T_A = 199 bzw. T_A = 201 µs?

$\boldsymbol{T_A = 199\ \mu s: y_2(t = 0)}$ = V

$\boldsymbol{T_A = 201\ \mu s: y_2(t = 0)}$ = V

d) Geben Sie das Ausgangssignal $y_3(t)$ für die Sprungfunktion $x_3(t)$ mit Endwert 10 V an. Welcher Signalwert tritt zum Zeitpunkt t = 0 auf?

$\boldsymbol{y_3(t = 0)}$ = V

e) Zu welchem Zeitpunkt t_{max} ist $y_3(t)$ maximal? Wie groß ist der Maximalwert?

$\boldsymbol{t_{max}}$ = µs

$\boldsymbol{y_3(t_{max})}$ = V

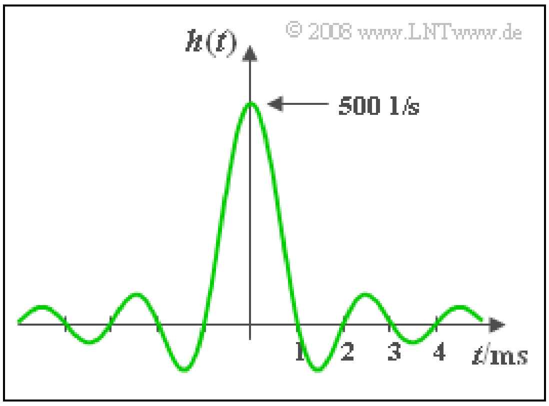
f) Wie lautet das Ausgangssignal $y_4(t)$, wenn am Eingang das si–förmige Signal $y_4(t)$ mit T = 200 µs anliegt? Welcher Wert ergibt sich für t = 0?

$\boldsymbol{T = 200\ \mu s: y_4(t = 0)}$ = V

g) Wie lautet das Signal $y_4(t)$ für T = 50 µs? Welcher Wert ergibt sich bei t = 0?

$\boldsymbol{T = 50\ \mu s: y_4(t = 0)}$ = V

Z1.5: si-förmige Impulsantwort



Die Impulsantwort eines linearen zeitinvarianten Systems wurde wie folgt ermittelt (siehe Grafik):

$$h(t) = 500\,\frac{1}{\rm s}\cdot {\rm si}(\pi \frac{t}{1\,{\rm ms}}).$$

Im Folgenden sollen die zu erwartenden Ausgangssignale $y(t)$ berechnet werden, wenn man am Eingang verschiedene Cosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz f_0 anlegt:

$$x(t) = 4\,{\rm V}\cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t).$$

Die Lösung kann entweder im Zeitbereich oder auch im Frequenzbereich gefunden werden. In der Musterlösung werden beide Lösungswege angegeben.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 1.3.** Gegeben ist dazu das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(u)\cdot\cos(a\cdot u)}{u}\,{\rm d}u = \left\{ \begin{array}{c} \pi/2 \\ \pi/4 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} {\rm f\ddot{u}r} \\ {\rm f\ddot{u}r} \\ {\rm f\ddot{u}r} \end{array} \begin{array}{l} |a| < 1, \\ |a| = 1, \\ |a| > 1. \end{array}$$

Fragebogen zu "Z1.5: si-förmige Impulsantwort"

a) Berechnen Sie den Frequenzgang $H(f)$ des LZI-Systems. Wie groß sind die äquivalente Bandbreite und der Gleichsignalübertragungsfaktor?

Δf = kHz

$H(f = 0)$ =

b) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y(t)$ bei cosinusförmigem Eingangssignal mit der Frequenz f_0 = 1 kHz. Wie groß ist der Signalwert zur Zeit t = 0?

f_0 = 1 kHz : $y(t = 0)$ = V

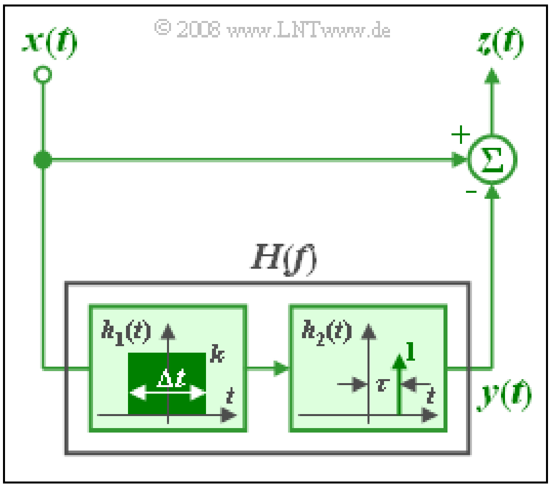
c) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y(t)$ bei cosinusförmigem Eingangssignal mit der Frequenz f_0 = 0.1 kHz. Wie groß ist der Signalwert zur Zeit t = 0?

f_0 = 0.1 kHz : $y(t = 0)$ = V

d) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y(t)$ bei cosinusförmigem Eingangssignal mit der Frequenz f_0 = 0.5 kHz. Wie groß ist der Signalwert zur Zeit t = 0?

f_0 = 0.5 kHz: $y(t = 0)$ = V

A1.6: Rechteckige Impulsantwort



Wir betrachten im Folgenden die in der Grafik gezeigte Konstellation. Der Frequenzgang $H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$ im unteren Zweig ist durch die Impulsantworten seiner beiden Teilkomponenten festgelegt. Hierbei ist $h_1(t)$ im Bereich von –1 ms bis 1 ms konstant gleich k und außerhalb 0; an den Bereichsgrenzen gilt jeweils der halbe Wert. Die im Bild eingezeichnete Zeitvariable ist somit Δt = 2 ms.

Die Impulsantwort der zweiten Systemfunktion $H_2(f)$ lautet:

$$h_2(t) = \delta(t - \tau).$$

Der Frequenzgang zwischen den Signalen $x(t)$ und $z(t)$ hat Hochpass–Charakter und lautet allgemein:

$$H_{\rm HP}(f) = 1 - H_1(f) \cdot {\rm e}^{-{\rm j}2\pi f \tau}.$$

Für die Teilaufgaben a) bis d) gelte $\tau = 0$ und damit $H(f) = H_1(f)$. Mit dem Parameter $\tau = 0$ kann hierfür auch geschrieben werden (Δt = 2 ms):

$$H_{\rm HP}(f) = 1 - {\rm si}(\pi \cdot \Delta t \cdot f).$$

Ohne Auswirkung auf diese Aufgabe ist anzumerken, dass diese Gleichung für $\tau \neq 0$ nicht anwendbar ist:

$$|H_{\rm HP}(f)| \neq 1 - |H_1(f)|.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.3.**

Fragebogen zu "A1.6: Rechteckige Impulsantwort"

a) Berechnen Sie Höhe k der Impulsantwort $h_1(t)$ unter der Nebenbedingung, dass $H_1(f = 0) = 1$ gelten soll.

$\boldsymbol{k}$ = 1/s

b) Das Eingangssignal $x(t)$ sei ein um $t = 0$ symmetrisches Rechteck mit Breite T = 2 ms und Höhe 1 V. Es gelte $\tau = 0$. Welche der Aussagen sind zutreffend?

- ☐ $y(t)$ ist rechteckförmig.
- ☐ $y(t)$ ist dreieckförmig.
- ☐ $y(t)$ ist trapezförmig.
- ☐ Der Maximalwert von $y(t)$ ist 1 V.

c) Welche Aussagen treffen zu, wenn $x(t)$ die Rechteckbreite $T = 1$ ms besitzt?

- ☐ $y(t)$ ist rechteckförmig.
- ☐ $y(t)$ ist dreieckförmig.
- ☐ $y(t)$ ist trapezförmig.
- ☐ Der Maximalwert von $y(t)$ ist 1 V.

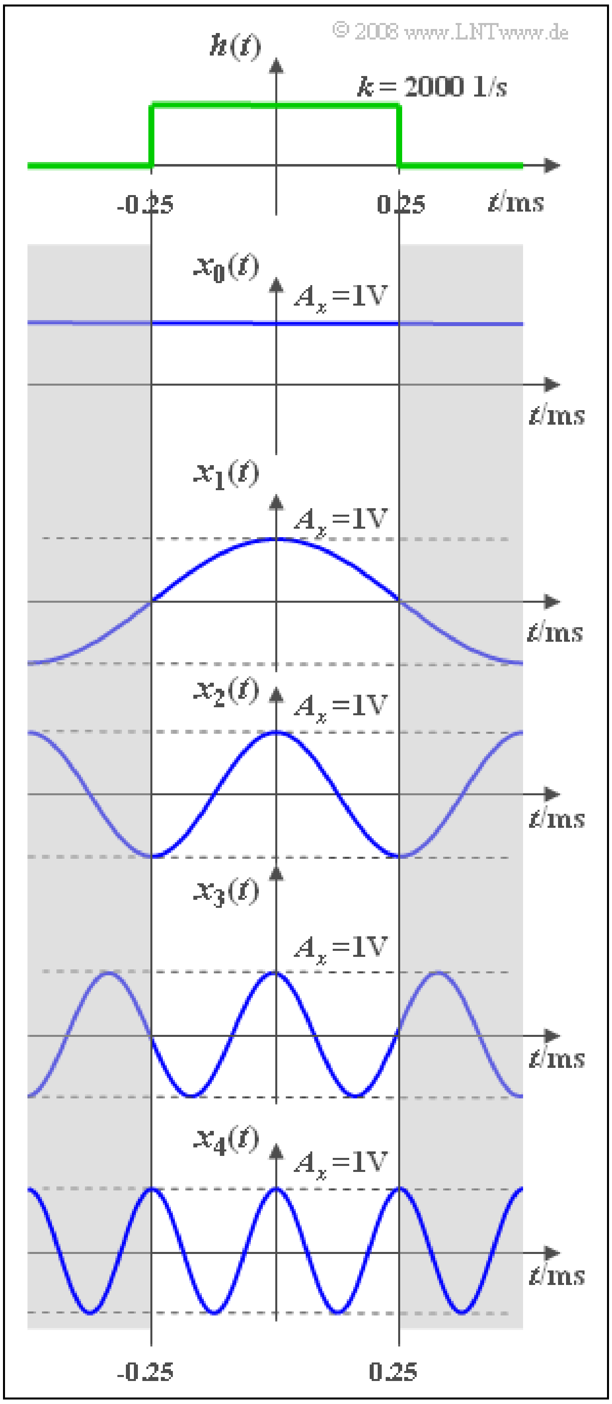
d) Es gelte weiter $\tau = 0$. Berechnen Sie das Ausgangssignal $z(t)$, wenn $x(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ von 0 auf 1 V springt. Welche Aussagen treffen zu?

- ☐ $z(t)$ ist eine gerade Funktion der Zeit.
- ☐ $z(t)$ weist bei $t = 0$ eine Sprungstelle auf.
- ☐ Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $z(t) = 0$.
- ☐ Für $t > 1$ ms ist $z(t) = 0$.

e) Welchen Verlauf hat $z(t)$ als Antwort auf das sprungförmige Eingangssignal $x(t)$, wenn die Laufzeit $\tau = 1$ ms ist? Welcher Signalwert tritt bei $t = 1$ ms auf?

$\boldsymbol{z(t = 1\ \mathrm{ms})}$ = V

Z1.6: Interpretation von *H*(*f*)



Mit dieser Aufgabe soll der Einfluss eines Tiefpasses *H*(*f*) auf cosinusförmige Signale der Form

$$x_i(t) = A_x \cdot \cos(2\pi f_i t)$$

veranschaulicht werden. In der Grafik sehen Sie die Signale $x_i(t)$, wobei der Index i die Frequenz in kHz angibt. So beschreibt $x_2(t)$ ein 2 kHz–Signal.

Die Signalamplitude beträgt jeweils A_x = 1 V. Das Gleichsignal $x_0(t)$ ist als Grenzfall eines Cosinussignals mit der Frequenz $f_0 = 0$ zu interpretieren.

Die obere Skizze zeigt die rechteckige Impulsantwort $h(t)$ des Tiefpasses. Der dazugehörige Frequenzgang lautet:

$$H(f) = \mathrm{si}(\pi \frac{f}{\Delta f}).$$

Aufgrund der Linearität und der Tatsache, dass *H*(*f*) reell und gerade ist, sind die Ausgangssignale ebenfalls cosinusförmig:

$$y_i(t) = A_i \cdot \cos(2\pi f_i t).$$

Gesucht werden die Signalamplituden A_i am Ausgang für die verschiedenen Eingangsfrequenzen f_i, wobei die Lösung ausschließlich im Zeitbereich gefunden werden soll. Dieser etwas umständliche Lösungsweg soll dazu dienen, den Zusammenhang zwischen Zeit– und Frquenzbereich deutlich zu machen.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 1.3.** Entgegen der sonst üblichen Definition einer Amplitude können die „A_i” durchaus negativ sein. Dies entspricht dann der Funktion „Minus-Cosinus”.

Fragebogen zu "Z1.6: Interpretation von *H*(*f*)"

a) Welcher Tiefpass liegt hier vor?

- [ ] Idealer Tiefpass.
- [ ] Spalttiefpass.
- [ ] Gaußtiefpass.

b) Geben Sie die äquivalente Bandbreite von $H(f)$ an.

Δf = ___ kHz

c) Berechnen Sie allgemein die Amplitude A_i in Abhängigkeit von $x_i(t)$ und $h(t)$. Welche der nachfolgenden Punkte sind bei der Berechnung zu berücksichtigen?

- [ ] Beim Cosinussignal gilt $A_i = y_i(t = 0)$.
- [ ] Es gilt $y_i(t) = x_i(t) \cdot h(t)$.
- [ ] Es gilt $y_i(t) = x_i(t) * h(t)$.

d) Welche der nachfolgenden Ergebnisse treffen für A_0, A_2 und A_4 zu?

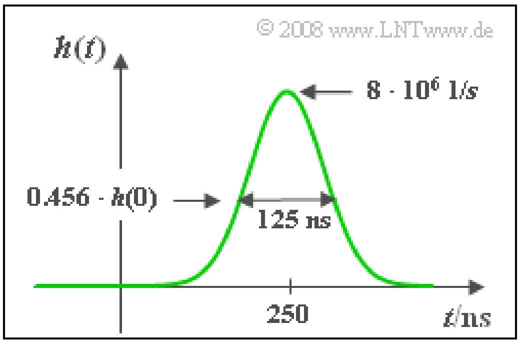
- [ ] $A_0 = 0$.
- [ ] $A_0 = 1$ V.
- [ ] $A_2 = 0$.
- [ ] $A_2 = 1$ V.
- [ ] $A_4 = 0$.
- [ ] $A_4 = 1$ V.

e) Berechnen Sie die Amplituden A_1 und A_3 für ein 1 kHz- bzw. 3 kHz-Signal. Interpretieren Sie die Ergebnisse anhand der Spektralfunktion.

A_1 = ___ V

A_3 = ___ V

A1.7: Nahezu kausaler Gaußtiefpass



Messungen haben ergeben, dass ein LZI–System mit guter Näherung durch einen Gaußtiefpass angenähert werden kann, wenn man eine zusätzliche Laufzeit τ berücksichtigt. Somit lautet der Frequenzgang:

$$H(f) = \mathrm{e}^{-\pi (f/\Delta f)^2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau}.$$

Die beiden Systemparameter $\Delta t = 1/\Delta f$ und τ können der in der Grafik dargestellten Impulsantwort $h(t)$ entnommen werden.

Es ist offensichtlich, dass dieses Modell nicht exakt der Wirklichkeit entspricht, da die Impulsantwort $h(t)$ auch für $t < 0$ nicht vollkommen verschwindet. In der Teilaufgabe c) wird deshalb nach dem maximalen relativen Fehler gefragt, der wie folgt definiert ist:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\max_{t<0} |h(t)|}{h(t = \tau)}.$$

In Worten: Der maximale relative Fehler $\varepsilon_{\max}$ ist gleich dem Maximalwert der Impulsantwort $h(t)$ bei negativen Zeiten, bezogen auf den maximalen Wert $h(t = \tau)$ der Impulsantwort.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Gaußtiefpass** im Kapitel 1.3. Zur Berechnung von Sprung– und Rechteckantwort können Sie das Gaußsche Fehlerintegral verwenden:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\phi(x)$	0.500	0.691	0.841	0.933	0.977	0.993	0.999

© 2008 www.LNTwww.de

Fragebogen zu "A1.7: Nahezu kausaler Gaußtiefpass"

a) Wie groß sind die äquivalente Bandbreite und die Laufzeit?

Δf = MHz

τ = ns

b) Es gelte $x(t)$ = 1 V · cos(2π · 6 MHz · t). Wie lautet das Ausgangssignal $y(t)$? Welcher Signalwert ergibt sich zur Zeit t = 0?

$y(t = 0)$ = V

c) Eigentlich sollte bei Kausalität $h(t < 0) = 0$ gelten. Wie groß ist der maximale relative Fehler des betrachteten Modells? Definition siehe Angabenseite.

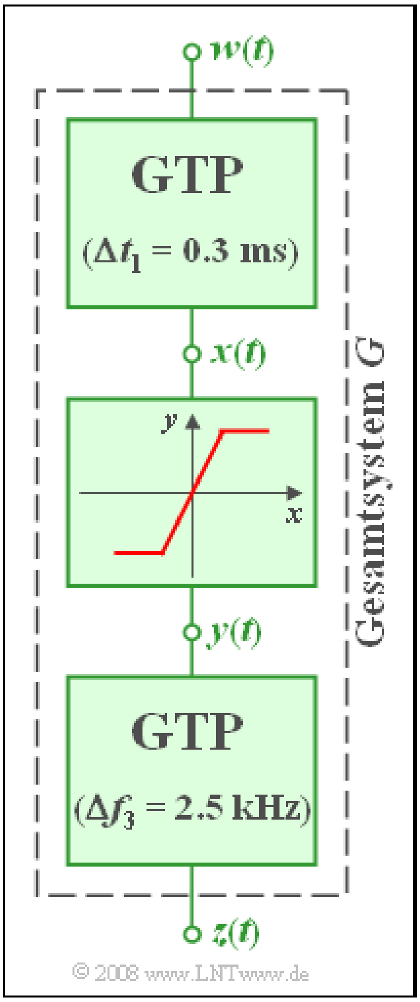
ε_{max} =

d) Berechnen Sie die (dimensionslose) Sprungantwort $\sigma(t)$. Welche Werte ergeben sich zu den Zeiten t = 250 ns und t = 300 ns?

$\sigma(t = 250\ \text{ns})$ =

$\sigma(t = 300\ \text{ns})$ =

Z1.7: Systemanalyse



Ein Gesamtsystem G mit Eingang $w(t)$ und Ausgang $z(t)$ besteht aus drei Komponenten:

- Die erste Komponente ist ein Gaußtiefpass mit Impulsantwort

$$h_1(t) = \frac{1}{\Delta t_1} \cdot e^{-\pi (t/\Delta t_1)^2}, \qquad \Delta t_1 = 0.3\,\text{ms}.$$

- Danach folgt eine Nichtlinearität mit Kennlinie

$$y(t) = \begin{cases} 8\,\text{V} & \text{für} \quad x(t) \ge 4\,\text{V}, \\ 2 \cdot x(t) & \text{für} \quad -4\,\text{V} < x(t) < 4\,\text{V}, \\ -8\,\text{V} & \text{für} \quad x(t) \le -4\,\text{V}. \end{cases}$$

  Deren Eingangssignal $x(t)$ wird um den Faktor 2 verstärkt und – falls nötig – auf den Amplitudenbereich ±8V begrenzt.

- Am Ende der Kette folgt wieder ein Gaußtiefpass, der durch seinen Frequenzgang gegeben ist:

$$H_3(f) = e^{-\pi (f/\Delta f_3)^2}, \qquad \Delta f_3 = 2.5\,\text{kHz}.$$

Das Eingangssignal $w(t)$ ist ein Gaußimpuls mit konstanter Amplitude 5 V, aber variabler Breite T:

$$w(t) = 5\,\text{V} \cdot e^{-\pi (t/T)^2}.$$

Zu untersuchen ist, in welchem Bereich die äquivalente Impulsdauer T dieses Gaußimpulses variieren kann, damit das Gesamtsystem durch den Frequenzgang

$$H_G(f) = K \cdot e^{-\pi (f/\Delta f_G)^2}$$

vollständig beschrieben wird.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Gaußtiefpass** im Kapitel 1.3.

Fragebogen zu "Z1.7: Systemanalyse"

a) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit das Gesamtsystem durch einen einzigen Frequenzgang beschreibbar ist?

- ☐ Der Zusammenhang zwischen $w(t)$ und $z(t)$ ist linear.
- ☐ $H_3(f)$ muss schmalbandiger sein als $H_1(f)$.
- ☐ Das Signal $x(t)$ darf betragsmäßig nicht größer sein als 4 V.

b) Berechnen Sie den Maximalwert für die äquivalente Impulsdauer T, damit die unter a) genannten Bedingungen erfüllbar sind.

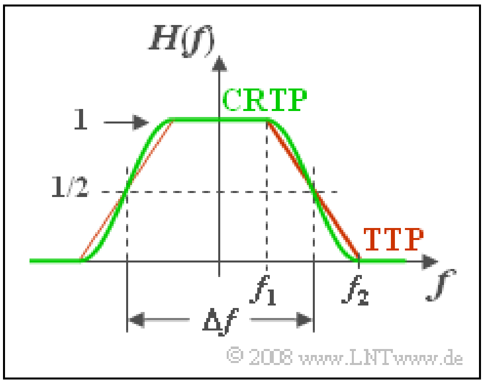
T_{max} = ms

c) Geben Sie die Parameter des Gesamtfrequenzgangs $H_G(f)$ an.

K =

Δf_G = kHz

A1.8: Variable Flankensteilheit



Zwei Tiefpässe mit variabler Flankensteilheit sollen miteinander verglichen werden. Für Frequenzen $|f| \le f_1$ gilt in beiden Fällen $H(f) = 1$. Dagegen werden alle Frequenzen $|f| \ge f_2$ vollständig unterdrückt.

Im mittleren Bereich $f_1 \le |f| \le f_2$ sind die Frequenzgänge durch die nachfolgenden Gleichungen festgelegt:

- Trapeztiefpass (TTP):

$$H(f) = \frac{f_2 - |f|}{f_2 - f_1},$$

- Cosinus–Rolloff–Tiefpass (CRTP):

$$H(f) = \cos^2\left(\frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1} \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Alternative Systemparameter sind für beide Tiefpässe die über das flächengleiche Rechteck definierte äquivalente Bandbreite Δf sowie der Rolloff–Faktor (im Frequenzbereich):

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}.$$

In der gesamten Aufgabe gelte Δf = 10 kHz und r = 0.2. Die Impulsantworten lauten mit der äquivalenten Impulsdauer $\Delta t = 1/\Delta f = 0.1$ ms:

$$h_{\rm TTP}(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot {\rm si}(\pi \cdot \frac{t}{\Delta t}) \cdot {\rm si}(\pi \cdot r \cdot \frac{t}{\Delta t}),$$

$$h_{\rm CRTP}(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot {\rm si}(\pi \cdot \frac{t}{\Delta t}) \cdot \frac{\cos(\pi \cdot r \cdot t/\Delta t)}{1 - (2 \cdot r \cdot t/\Delta t)^2}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.3.** Sie können Ihre Ergebnisse mit folgendem Interaktionsmodul überprüfen:

Tiefpässe im Frequenz- und Zeitbereich (Dateigröße 160 kB)

Fragebogen zu "A1.8: Variable Flankensteilheit"

a) Wie lautet die Gleichung für die äquivalente Bandbreite Δf?

- [ ] Es gilt $\Delta f = f_2 - f_1$.
- [ ] Es gilt $\Delta f = f_2 + f_1$.
- [ ] Es gilt $\Delta f = (f_2 + f_1)/2$.

b) Bestimmen Sie die Tiefpass-Parameter f_1 und f_2 für Δf = 10 kHz und r = 0.2.

f_1 = kHz

f_2 = kHz

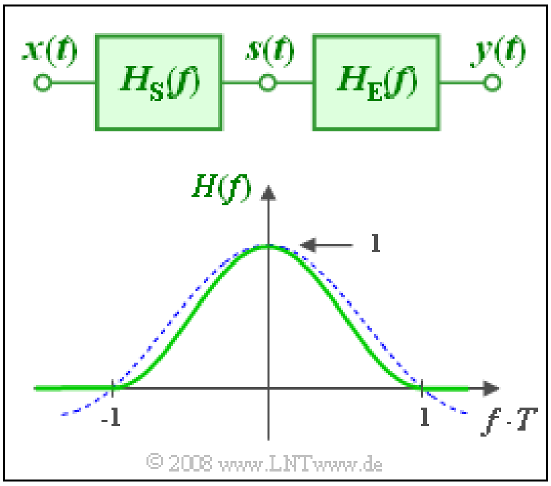
c) Welche Aussagen sind für die Impulsantwort des Trapeztiefpasses zutreffend, wenn r = 0.2 vorausgesetzt wird?

- [ ] $h(t)$ besitzt Nullstellen bei $\pm n \cdot \Delta t$ (n = 1, 2, ...).
- [ ] $h(t)$ besitzt zusätzliche Nullstellen zu anderen Zeiten.
- [ ] Mit r = 0 würde $h(t)$ schneller abklingen.
- [ ] Mit r = 1 würde $h(t)$ schneller abklingen.

d) Welche Aussagen treffen für die Impulantwort des Cosinus–Rolloff–Tiefpasses zu, wenn r = 0.2 vorausgesetzt wird?

- [ ] $h(t)$ besitzt Nullstellen bei $\pm n \cdot \Delta t$ (n = 1, 2, ...).
- [ ] $h(t)$ besitzt zusätzliche Nullstellen zu anderen Zeiten.
- [ ] Mit r = 0 würde $h(t)$ schneller abklingen.
- [ ] Mit r = 1 würde $h(t)$ schneller abklingen.

Z1.8: Cosinus-Quadrat-Tiefpass



Bei der Untersuchung von Digitalsystemen geht man häufig von einem diracförmigen Eingangssignal $x(t) = T \cdot \delta(t)$ aus, so dass $X(f) = T$ gilt. Das Ausgangsspektrum $Y(f)$ ist dann formgleich mit dem Gesamtfrequenzgang von Sende– und Empfangsfilter:

$$H(f) = H_{\rm S}(f) \cdot H_{\rm E}(f).$$

Dieser wird häufig $\cos^2$–förmig angenommen (siehe Grafik). Für $|f \cdot T| > 1$ ist $H(f) = 0$. Im inneren Bereich gilt:

$$H(f) = \cos^2(f \cdot T \cdot \frac{\pi}{2}).$$

Anzumerken ist, dass die äquivalente Bandbreite $\Delta f = 1/T$ betragen soll. Damit ist die äquivalente Dauer Δt der Impulsantwort ebenfalls T und man erhält:

$$y(t) = T \cdot h(t) = {\rm si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) \cdot \frac{\cos(\pi \cdot t/T)}{1-(2 \cdot t/T)^2}.$$

Zu beachten ist, dass das Ausgangssignal $y(t)$ im Gegensatz zur Impulsantwort $h(t)$ ohne Einheit ist. Durch Anwendung trigonomischer Umformungen kann dieses Signal auch wie folgt dargestellt werden:

$$y(t) = \frac{\pi}{4} \cdot {\rm si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) \cdot \left[{\rm si}\left(\pi \cdot (t/T + 0.5)\right) + {\rm si}\left(\pi \cdot (t/T - 0.5)\right)\right].$$

Wählen Sie bei den nachfolgenden Aufgaben die jeweils einfacher handhabbare Gleichung aus.

Für die Teilaufgabe c) soll vorausgesetzt werden, dass das Signal $s(t)$ in der Mitte zwischen den beiden Frequenzgängen $H_S(f)$ und $H_E(f)$ ein Rechteckimpuls ist. Demzufolge muss gelten:

$$H_{\rm S}(f) = {\rm si}(\pi f T).$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.3.** Sie können Ihre Ergebnisse mit folgendem Interaktionsmodul überprüfen:

Tiefpässe im Frequenz- und Zeitbereich (Dateigröße 160 kB)

Fragebogen zu "Z1.8: Cosinus-Quadrat-Tiefpass"

a) Berechnen Sie das Ausgangssignal zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = T$.

$\boldsymbol{y(t = 0)}$ =

$\boldsymbol{y(t = T)}$ =

b) Berechnen Sie das Ausgangssignal zu den Zeitpunkten $t = T/2$ und $t = 3/2 \cdot T$.

$\boldsymbol{y(t = 0.5\ T)}$ =

$\boldsymbol{y(t = 1.5\ T)}$ =

c) Berechnen Sie $y(t)$ für große t–Werte. Geeignete Näherungen sind erlaubt und erwünscht. Wie groß ist der Signalwert bei $t = 10.75\ T$?

$\boldsymbol{y(t = 10.75\ T)}$ =

d) Geben Sie den erforderlichen Empfängerfrequenzgang $H_E(f)$ für $H_S(f) = \mathrm{si}(\pi f T)$ an. Welche Werte ergeben sich für $f \cdot T = 0$, $f \cdot T = 0.5$ und $f \cdot T = 1$?

$\boldsymbol{H_E(f = 0)}$ =

$\boldsymbol{H_E(f = 1/2T)}$ =

$\boldsymbol{H_E(f = 1/T)}$ =