

Rayleigh- und Riceverteilung (1)

Die für eine kohärente Demodulation erforderliche Schätzung des Phasenwinkels aus dem ankommenden Signal ist bei vielen Anwendungen nicht oder nur eingeschränkt möglich. So führt die Bewegung eines Mobilteilnehmers mit hoher Geschwindigkeit zu sehr schnellen zeitlichen Änderungen des Phasenwinkels ϕ , was dessen ausreichend genaue Bestimmung erschwert oder gar verhindert.

Diese Tatsache führt zu den sogenannten **nichtkohärenten Demodulationsverfahren** mit dem Vorteil reduzierter Komplexität, aber stattdessen mit erhöhter Verfälschungswahrscheinlichkeit.

Bei der Herleitung der Gleichungen stößt man stets auf zwei Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, die hier vorneweg angegeben werden sollen:

- Die **Rayleighverteilung** erhält man für die WDF der Zufallsgröße y mit Realisierung η , die sich aus den beiden gaußverteilten und statistisch unabhängigen Komponenten u und v (beide mit der gleichen Streuung σ_n) wie folgt ergibt:

$$y = \sqrt{u^2 + v^2} \Rightarrow p_y(\eta) = \frac{\eta}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

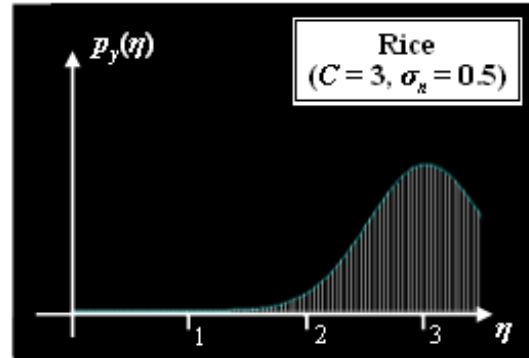
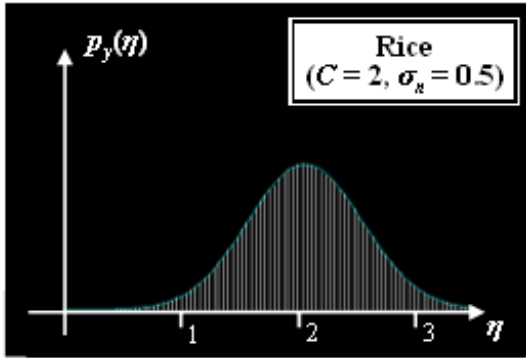
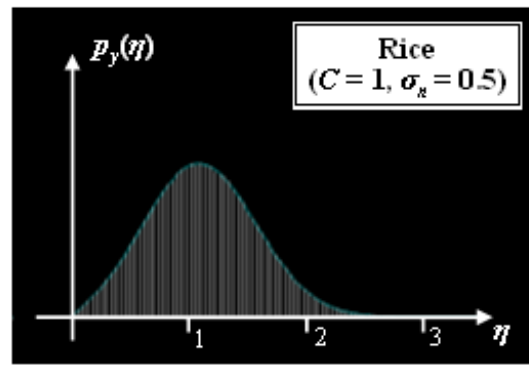
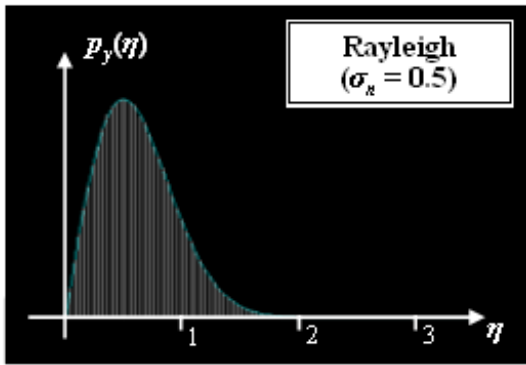
- Die **Riceverteilung** erhält man unter sonst gleichen Randbedingungen für den Fall, dass bei einer der Komponenten (entweder u oder v) noch eine Konstante C addiert wird:

$$y = \sqrt{(u + C)^2 + v^2} \Rightarrow p_y(\eta) = \frac{\eta}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2 + C^2}{2\sigma_n^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{\eta \cdot C}{\sigma_n^2}\right].$$

Für die Riceverteilung benötigt man die *modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung*, deren Definition und Reihenentwicklung wie folgt lauten:

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-x \cdot \cos(\alpha)} d\alpha \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k! \cdot \Gamma(k+1)}.$$

Die Grafik zeigt Rayleigh- und Rice-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Die Bildbeschreibung folgt auf der nächsten Seite.



© 2010 www.LNTwww.de

Rayleigh- und Riceverteilung (2)

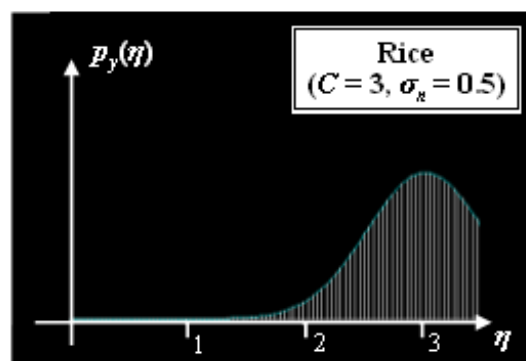
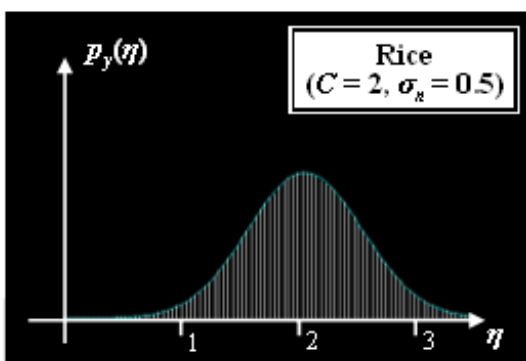
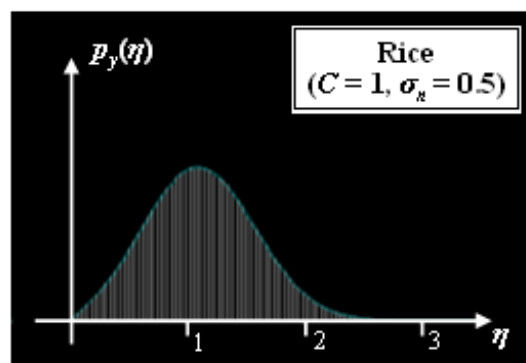
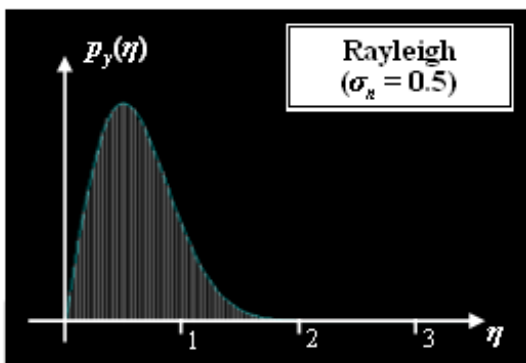
Die Grafik am Seitenende zeigt nochmals die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen von Rayleigh- und Riceverteilung. Zu dieser Darstellung ist anzumerken:

- Die **Riceverteilung** ist durch die beiden Parameter C und σ_n bestimmt. Mit $C = 0$ ist die Rice-WDF identisch mit der **Rayleigh-WDF**.
- Die Rayleigh-WDF mit größerem σ_n ist formgleich mit der gezeichneten Kurve ($\sigma_n = 0.5$), jedoch im Verhältnis der Streuungen breiter und niedriger.
- σ_n gibt die Streuungen der beiden gaußverteilten Zufallsgrößen u und v an (beide haben gleiche Streuung) und nicht die Streuung der rayleighverteilten Zufallsgröße y . Für diese gilt vielmehr:

$$\sigma_y = \sigma_n \cdot \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} \approx 0.655 \cdot \sigma_n .$$

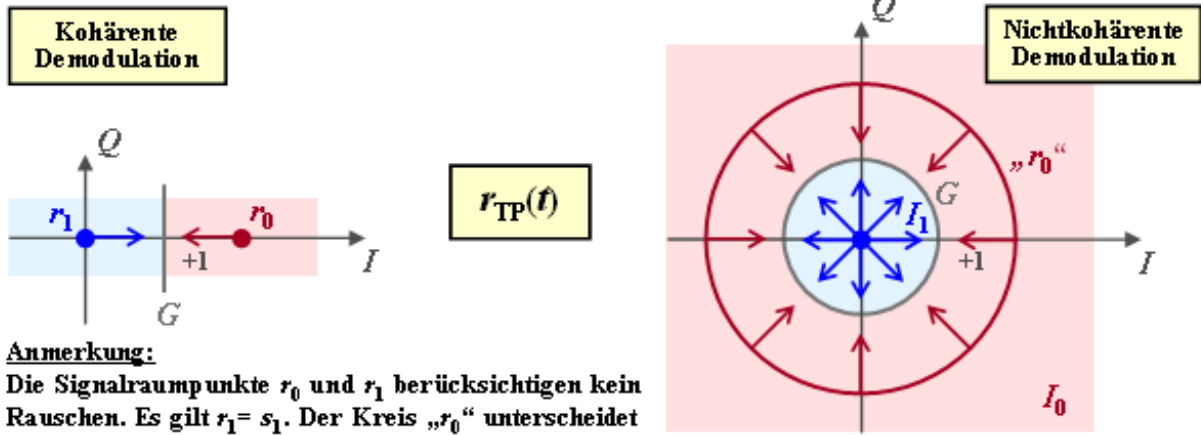
- Die Rayleighverteilung ist extrem unsymmetrisch, erkennbar am (relativ) großen Wert für das **Zentralmoment 3. Ordnung**: $\mu_3/\sigma_y^3 \approx 0.27$.
- Die Riceverteilung ist um so symmetrischer, je größer das Verhältnis C/σ_n von deterministischer und stochastischer Komponente ist. Für $C/\sigma_n \geq 4$ ist μ_3 nahezu 0.
- Weiterhin ist zu erkennen, dass sich die Riceverteilung (mit den Parametern C und σ_n) immer mehr einer Gaußverteilung mit Mittelwert C und Streuung σ_n annähert, je größer der Quotient C/σ_n ist:

$$p_y(\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_n} \cdot \exp \left[-\frac{(\eta - C)^2}{2\sigma_n^2} \right] \Rightarrow m_y = C, \sigma_y = \sigma_n .$$



Nichtkohärente Demodulation von On-Off-Keying (1)

Wir betrachten **On-Off-Keying** im äquivalenten Tiefpassbereich. Bei kohärenter Demodulation (linke Grafik) ist die Signalraumkonstellation des Empfangssignals gleich der des Sendesignals und besteht aus zwei Punkten. Die Entscheidungsgrenze G liegt in der Mitte zwischen diesen Punkten r_0 und r_1 . Die Pfeile markieren Rauschvektoren, die eventuell zu Übertragungsfehlern führen.



Anmerkung:
 Die Signalraumpunkte r_0 und r_1 berücksichtigen kein Rauschen. Es gilt $r_1 = s_1$. Der Kreis „ r_0 “ unterscheidet sich von s_0 durch den komplexen Phasendrehfaktor.

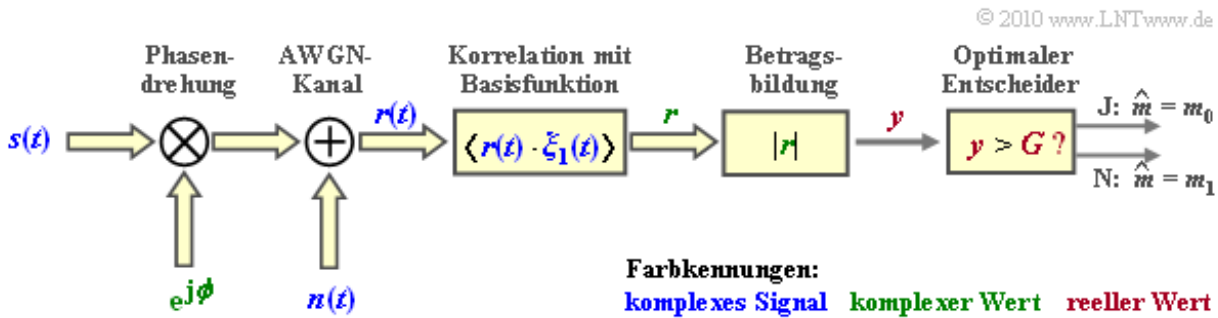
© 2010 www.LNTwww.de

Dagegen gilt bei nichtkohärenter Demodulation:

- Der Punkt $r_1 = s_1 = 0$ bleibt weiter erhalten.
- Dagegen kann $r_0 = s_0 \cdot \exp(j\phi)$ auf jeden Punkt des Kreises um s_0 liegen, da ϕ unbekannt ist.
- Der Entscheidungsprozess unter Berücksichtigung des AWGN-Rauschens ist nun 2-dimensional zu interpretieren, wie es durch die Pfeile in der rechten Grafik angedeutet ist.
- Das Entscheidungsgebiet I_1 ist nun ein Kreis, dessen Radius G ein optimierbarer Parameter ist. Das Entscheidungsgebiet I_0 liegt außerhalb dieses Kreises.

Nichtkohärente Demodulation von On–Off–Keying (2)

Mit den Ergebnissen der letzten Seite liegt die Struktur des optimalen OOK–Empfängers (im äquivalenten Tiefpassbereich) fest.



Entsprechend obiger Grafik gilt:

- Das Eingangssignal $r(t) = s(t) \cdot \exp(j\phi) + n(t)$ ist aufgrund des Phasenwinkels ϕ und wegen des komplexen Rauschterms im allgemeinen komplex. Alle komplexen Signale sind blau beschriftet.
- Erforderlich ist demzufolge nun die Korrelation zwischen dem komplexen Empfangssignal $r(t)$ und einer komplexen Basisfunktion $\xi_1(t)$.
- Das Ergebnis ist der (komplexe) Detektorwert r , woraus als reelle Entscheidungseingangsgröße der Betrag $y = |r|$ gebildet wird.
- Ist der Entscheidungswert $y > G$, so wird als Schätzwert m_0 ausgegeben, andernfalls m_1 . Somit ergibt sich für die Fehlerwahrscheinlichkeit bei gleichwahrscheinlichen Symbolen:

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^G p_{y|m}(\eta|m_0) d\eta + \frac{1}{2} \cdot \int_G^\infty p_{y|m}(\eta|m_1) d\eta.$$

- Aufgrund der Rice–WDF $p_{y|m}(\eta|m_0)$ und der Rayleigh–WDF $p_{y|m}(\eta|m_1)$ kann allerdings diese Wahrscheinlichkeit nur numerisch berechnet werden. Die optimale Entscheidungsgrenze G ist vorher als die Lösung der folgenden Gleichung zu bestimmen:

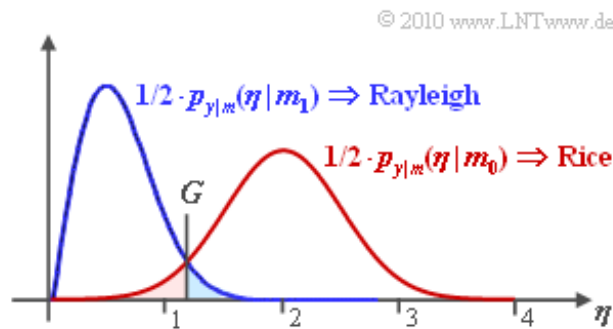
$$p_{y|m}(G|m_0) = p_{y|m}(G|m_1).$$

Nichtkohärente Demodulation von On–Off–Keying (3)

Die Grafik zeigt das Ergebnis der Gleichung

$$p_{y|m}(G|m_0) = p_{y|m}(G|m_1)$$

für $\sigma_n = 0.5$ und $C = 2$, wobei die (rote) Rice–WDF durch eine Gauß–WDF mit Mittelwert C und Streuung σ_n approximiert ist. Die optimale Entscheidungsgrenze (hier: $G \approx 1.25$) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der beiden Kurven und die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $p_S \approx 5\%$ als die Summe der beiden farblich markierten Flächen.



Die Fehlerwahrscheinlichkeit für andere Werte von C und σ_n sowie die optimale Entscheidungsgrenze G können Sie mit dem folgenden Berechnungstool bestimmen:

Nichtkohärentes On–Off–Keying (Dateigröße: 2.18 MB)

Nichtkohärente Demodulation von binärer FSK (1)

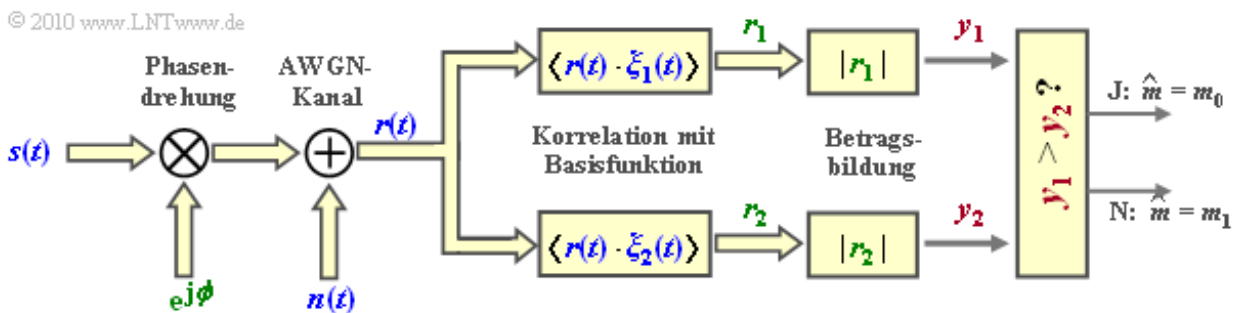
Wie schon im **Kapitel 4.4** gezeigt, lässt sich *binäres Frequency Shift Keying* (BFSK) im äquivalenten Tiefpassbereich durch die Basisfunktionen

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \sqrt{1/T} \cdot e^{+j \cdot \pi \cdot h \cdot t/T}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \xi_2(t) &= \sqrt{1/T} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot h \cdot t/T}, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

darstellen. Um Orthogonalität zwischen diesen beiden komplexen Basisfunktionen zu erreichen, muss der **Modulationsindex** h ganzzahlig sein:

$$\langle \xi_1(t) \cdot \xi_2(t) \rangle = 0 \Rightarrow h = 2 \cdot \Delta f_A \cdot T = 1, 2, 3, \dots$$

Die Grafik zeigt die Struktur zur nichtkohärenten orthogonalen Demodulation der binären FSK.



Farbkennungen: komplexes Signal komplexer Wert reeller Wert

Im rauschfreien Fall $\Rightarrow n(t) = 0$ gilt für die beiden Ausgänge der Korrelatoren:

$$\begin{aligned} r_1 &= \langle r(t) \cdot \xi_1(t) \rangle = 0, \quad \text{falls } m = m_1, \\ r_2 &= \langle r(t) \cdot \xi_2(t) \rangle = 0, \quad \text{falls } m = m_0. \end{aligned}$$

Deshalb kann nach der jeweiligen Betragsbildung $\Rightarrow y_1 = |r_1|, y_2 = |r_2|$ folgende Entscheidungsregel angewandt werden:

$$\hat{m} = \begin{cases} m_0, & \text{falls } y_1 > y_2, \\ m_1, & \text{falls } y_1 < y_2. \end{cases}$$

Zur einfacheren Realisierung des Entscheiders kann auch die Differenz $y_1 - y_2$ mit der Entscheidungsgrenze $G = 0$ ausgewertet werden.

Nichtkohärente Demodulation von binärer FSK (2)

Im Folgenden wird die Fehlerwahrscheinlichkeit unter der Annahme berechnet, dass $m = m_0$ gesendet wurde. Unter der weiteren Voraussetzung gleichwahrscheinlicher Binärnachrichten m_0 und m_1 ist die absolute Fehlerwahrscheinlichkeit genau so groß:

$$\Pr(\mathcal{E}) = \Pr(\mathcal{E} | m_0).$$

Mit der Annahme $m = m_0$ ergeben sich für die komplexen Korrelationsausgangswerte r_i und deren Beträge y_i :

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{E} \cdot e^{j\phi} + n_1 \Rightarrow y_1 = |r_1| \text{ ist riceverteilt,} \\ r_2 &= n_2 \Rightarrow y_2 = |r_2| \text{ ist rayleighverteilt.} \end{aligned}$$

Hierbei steht E für die *Symbolenergie* E_S und die *Bitenergie* E_B gleichermaßen (wegen $M = 2$), und n_1 und n_2 sind unkorrelierte komplexe Rauschgrößen mit Mittelwert 0 und Varianz $2\sigma_n^2$. Somit lautet die Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$\begin{aligned} p_{y_1, y_2 | m}(\eta_1, \eta_2 | m_0) &= p_{y_1 | m}(\eta_1 | m_0) \cdot p_{y_2 | m}(\eta_2 | m_0), \\ p_{y_1 | m}(\eta_1 | m_0) &= \frac{\eta_1}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta_1^2 + E}{2\sigma_n^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{\eta_1 \cdot \sqrt{E}}{\sigma_n^2}\right], \\ p_{y_2 | m}(\eta_2 | m_0) &= \frac{\eta_2}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta_2^2}{2\sigma_n^2}\right]. \end{aligned}$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich allgemein wie folgt:

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{E}) &= \int_0^\infty \int_{\eta_1}^\infty p_{y_1, y_2 | m}(\eta_1, \eta_2 | m_0) \, d\eta_2 \, d\eta_1 = \\ &= \int_0^\infty p_{y_1 | m}(\eta_1 | m_0) \cdot \int_{\eta_1}^\infty p_{y_2 | m}(\eta_2 | m_0) \, d\eta_2 \, d\eta_1. \end{aligned}$$

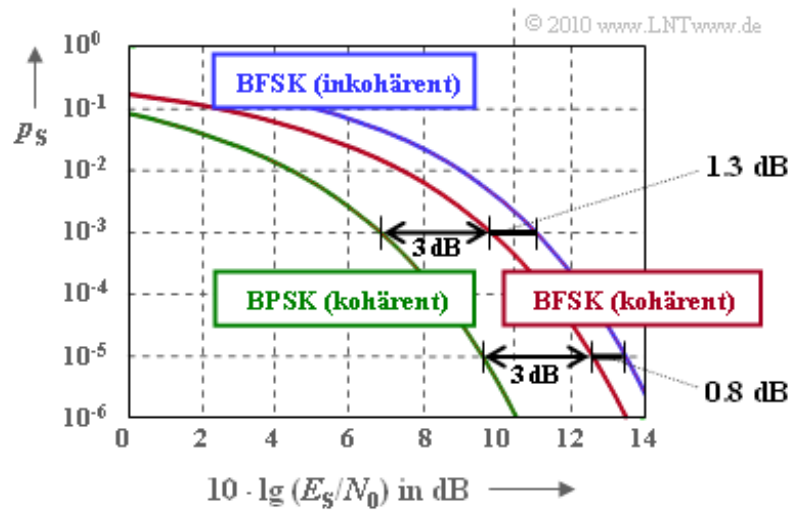
Nach einigen mathematischen Umformungen erhält man das überraschend einfache Ergebnis für die **nichtkohärente Demodulation** der binären FSK:

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \cdot e^{-E_S/(2N_0)} \Rightarrow \text{Herleitung.}$$

Zum Vergleich sei nochmals das Ergebnis für die **kohärente Demodulation** angegeben:

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) = Q(\sqrt{E_S/N_0}).$$

Die Grafik stellt die Fehlerwahrscheinlichkeitskurven beider Demodulationsverfahren in Abhängigkeit des AWGN-Quotienten E_S/N_0 vergleichend gegenüber.



Man erkennt:

- Die nichtkohärente FSK benötigt gegenüber der kohärenten FSK bei $p_S = 10^{-5}$ ein um 0.8 dB größeres E_S/N_0 . Bei $p_S = 10^{-3}$ beträgt der Abstand sogar 1.3 dB.
- Dagegen ist der Abstand zwischen der kohärenten binären FSK von der kohärenten BPSK unabhängig von der Fehlerwahrscheinlichkeit gleich 3 dB.

Herleitung: Fehlerwahrscheinlichkeit von nichtkohärenter BFSK

Das auf der letzten Seite vorweg genommene Ergebnis soll nun in einigen Rechenschritten hergeleitet werden. Wir gehen dabei von den folgenden Gleichungen aus:

$$\Pr(\mathcal{E}) = \int_0^\infty p_{y_1|m}(\eta_1 | m_0) \cdot \int_{\eta_1}^\infty p_{y_2|m}(\eta_2 | m_0) \, d\eta_2 \, d\eta_1,$$

$$p_{y_1|m}(\eta_1 | m_0) = \frac{\eta_1}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta_1^2 + E}{2\sigma_n^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{\eta_1 \cdot \sqrt{E}}{\sigma_n^2}\right],$$

$$p_{y_2|m}(\eta_2 | m_0) = \frac{\eta_2}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta_2^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

- Das innere Integral gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die rayleighverteilte Zufallsgröße η_2 größer ist als η_1 – siehe **Musterlösung zur Aufgabe ZA.17**:

$$\int_{\eta_1}^\infty p_{y_2|m}(\eta_2 | m_0) \, d\eta_2 = \exp\left[-\frac{\eta_1^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$\Rightarrow \Pr(\mathcal{E}) = \int_0^\infty \frac{\eta_1}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{2\eta_1^2 + C^2}{2\sigma_n^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{\eta_1 \cdot C}{\sigma_n^2}\right] \, d\eta_1.$$

- Mit den Substitutionen $C_0 = C/2$ und $\sigma_0^2 = \sigma_n^2/2$ erhält man:

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{E}) &= \int_0^\infty \frac{\eta_1}{2 \cdot \sigma_0^2} \cdot \exp\left[-\frac{2\eta_1^2 + 4C_0^2}{4\sigma_0^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{\eta_1 \cdot 2C_0}{2\sigma_0^2}\right] \, d\eta_1 = \\ &= \int_0^\infty \frac{\eta_1}{2 \cdot \sigma_0^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta_1^2 + 2C_0^2}{2\sigma_0^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{\eta_1 \cdot C_0}{\sigma_0^2}\right] \, d\eta_1. \end{aligned}$$

- Durch Verschieben von Gleichungsteilen vor das Integral gelingt es, dass der Integrand wieder eine Riceverteilung beschreibt:

$$\Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \cdot \exp\left[-\frac{C_0^2}{2\sigma_0^2}\right] \cdot \int_0^\infty \frac{\eta_1}{\sigma_0^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta_1^2 + C_0^2}{2\sigma_0^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{\eta_1 \cdot C_0}{\sigma_0^2}\right] \, d\eta_1.$$

- Für jede WDF – so auch für Rice – ist das Integral über das gesamte Definitionsgebiet gleich 1:

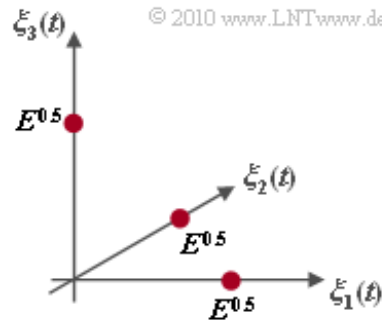
$$\Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \cdot \exp\left[-\frac{C_0^2}{2\sigma_0^2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \exp\left[-\frac{C^2}{4\sigma_n^2}\right].$$

- Mit der schon mehrmals verwendeten Beziehung $\sigma_n^2 = N_0/2$ sowie der Tatsache, dass bei binärer FSK die mittlere Signalenergie pro Symbol (E_S) gleich C^2 ist, erhält man schließlich das vorne angegebene Ergebnis:

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \cdot e^{-E_S/(2N_0)}. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

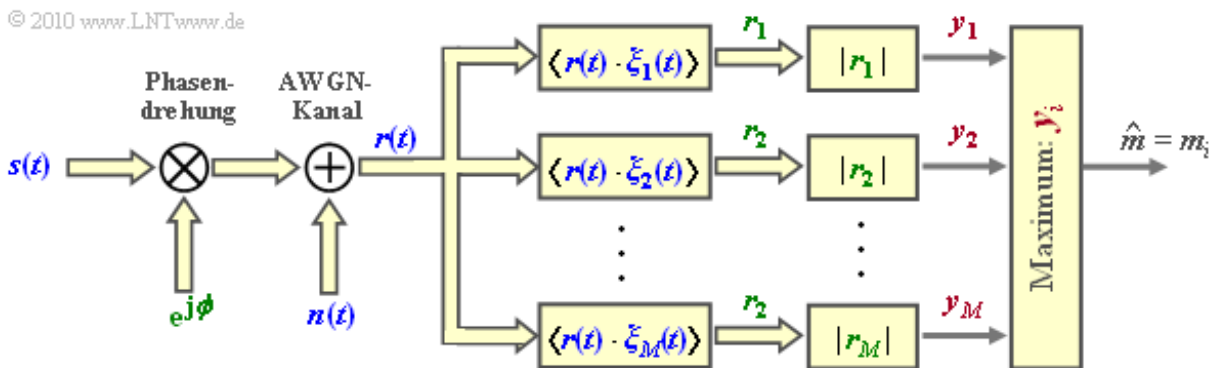
Nichtkohärente Demodulation von mehrstufiger FSK (1)

Wir betrachten nun die Nachrichtenmenge $\{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ und bezeichnen M als Stufenzahl.



Notwendige Voraussetzung für die Anwendung des Modulationsverfahrens „*Frequency Shift Keying*“ und eines nichtkohärenten Demodulators ist ein ganzzahliger Modulationsindex h . In diesem Fall ist die M -stufige FSK orthogonal und es ergibt sich eine Signalraumkonstellation, wie in der oberen Grafik für den Sonderfall $M = 3$ dargestellt.

Der nichtkohärente Demodulator ist in der Abbildung am Seitenende angegeben. Gegenüber der **Empfängerstruktur für binäre FSK** unterscheidet sich dieser Empfänger lediglich durch M Zweige anstelle von nur zweien, welche die Vergleichswerte y_1, y_2, \dots, y_M liefern.



Farbkennungen: komplexes Signal komplexer Wert reeller Wert

Die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit folgt auf der nächsten Seite.

Nichtkohärente Demodulation von mehrstufiger FSK (2)

Zur Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit gehen wir wieder von der Annahme aus, dass m_0 gesendet wurde. Das bedeutet, dass die Entscheidung richtig ist, wenn y_1 der größte Detektionsausgangswert ist:

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{C}) &= \Pr [(y_2 < y_1) \cap (y_3 < y_1) \cap \dots \cap (y_M < y_1) | m = m_0] = \\ &= \Pr \left[\bigcap_{k=2}^M (y_k < y_1) | m = m_0 \right], \quad \Pr(\mathcal{E}) = 1 - \Pr(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Die explizite Berechnung wird hier nur stichpunktartig angegeben. Teilweise wird auf die **Herleitung** der BFSK-Fehlerwahrscheinlichkeit Bezug genommen:

- Mit der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{y_1|m}(\eta_1|m_0)$ erhält man:

$$\Pr(\mathcal{C}) = \int_0^\infty \Pr \left[\bigcap_{k=2}^M (y_k < y_1) | y_1 = \eta_1, m = m_0 \right] \cdot p_{y_1|m}(\eta_1 | m_0) \, d\eta_1.$$

- Die Entscheidungswerte y_2, y_3, \dots, y_M sind bei gegebenem y_1 statistisch unabhängig. Deshalb gilt:

$$\Pr(\mathcal{C}) = \int_0^\infty \{ \Pr [(y_2 < y_1) | y_1 = \eta_1, m = m_0] \}^{M-1} \cdot p_{y_1|m}(\eta_1 | m_0) \, d\eta_1.$$

- Der ausgewählte Wert y_2 konditioniert auf m_0 besitzt eine Rayleighverteilung mit Parameter σ_n^2 :

$$\begin{aligned} \Pr [(y_2 < y_1) | y_1 = \eta_1, m = m_0] &= \int_0^{\eta_1} p_{y_2|m}(\eta_2 | m_0) \, d\eta_2 = \\ &= 1 - \exp \left[-\frac{\eta_1^2}{2\sigma_n^2} \right] = 1 - a = A \quad (\text{Abkürzung}). \end{aligned}$$

- Gesucht ist nun der Ausdruck A^{M-1} , für den gilt:

$$\begin{aligned} A^{M-1} &= (1 - a)^{M-1} = \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^i \cdot \binom{M-1}{i} \cdot (-1)^i \cdot a^i = \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^i \cdot \binom{M-1}{i} \cdot \exp \left[-\frac{i \cdot \eta_1^2}{2\sigma_n^2} \right]. \end{aligned}$$

- Weiterhin besitzt y_1 konditioniert auf $m = m_0$ eine Riceverteilung. Die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Entscheidung lässt sich somit in folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{C}) &= \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^i \cdot \binom{M-1}{i} \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty \exp \left[-\frac{i \cdot \eta_1^2}{2\sigma_n^2} \right] \cdot \frac{\eta_1}{\sigma_n^2} \cdot \exp \left[-\frac{\eta_1^2 + E_S}{2\sigma_n^2} \right] \cdot I_0 \left[\frac{\eta_1 \cdot \sqrt{E_S}}{\sigma_n^2} \right] \, d\eta_1. \end{aligned}$$

- Durch Substitutionen gelingt es, den Integranden entsprechend der Riceverteilung zu gestalten. Da sich jede Wahrscheinlichkeitsdichte zu 1 integriert, erhält man:

$$\Pr(\mathcal{C}) = \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^i \cdot \binom{M-1}{i} \cdot \frac{1}{i+1} \cdot \exp \left[-\frac{i \cdot E_S}{(i+1) \cdot N_0} \right], \quad E_S = E_B \cdot \text{ld}(M).$$

- Der Sonderfall $M = 2$ führt zum genau gleichen Ergebnis, wie für die binäre FSK berechnet:

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{C}) &= (-1)^0 \cdot \binom{2-1}{0} \cdot \frac{1}{0+1} \cdot \exp \left[-\frac{0 \cdot E_S}{(0+1) \cdot N_0} \right] + \\ &+ (-1)^1 \cdot \binom{2-1}{1} \cdot \frac{1}{1+1} \cdot \exp \left[-\frac{1 \cdot E_S}{(1+1) \cdot N_0} \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-E_S/(2N_0)} \quad \Rightarrow \quad \Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \cdot e^{-E_S/(2N_0)}. \end{aligned}$$