

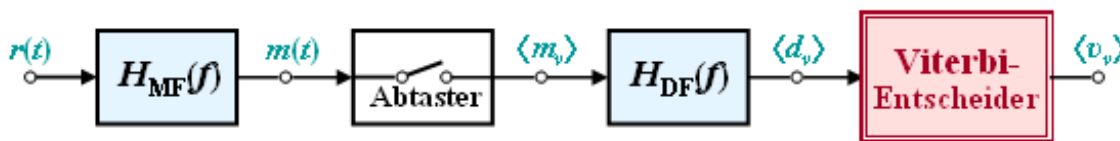
Blockschaltbild und Voraussetzungen für Kapitel 3.8 (1)

Der **Korrelationsempfänger** ist im Sinne der **Maximum-Likelihood-Entscheidungsregel** optimal, das heißt, er führt bei gleichwahrscheinlichen Quellensymbolen zur minimalen Fehlerwahrscheinlichkeit. Nachteilig ist:

- Der Realisierungsaufwand steigt exponentiell mit der Länge N der zu detektierenden Symbolfolge.
- Da die Folge gemeinsam entschieden wird, kommt es bei großem N zu langen Verzögerungen.

In den 1970er Jahren hat **Andrew J. Viterbi** einen ML-Empfänger vorgeschlagen, der die Detektion von Teilen der empfangenen Nachricht erlaubt und bei dem sich der Realisierungsaufwand auch bei unendlich langen Folgen in Grenzen hält.

© 2008 www.LNTwww.de



Zu den einzelnen Komponenten des Blockschaltbildes ist anzumerken:

- Das an den Empfangsgrundimpuls und die Störung angepasste Matched-Filter $H_{MF}(f)$ dient der **Störleistungsbegrenzung**. Das MF-Ausgangssignal $m(t)$ bzw. die Folge $\langle m_v \rangle$ der äquidistanten Signalwerte nach der Abtastung besitzt das bestmögliche Signal-zu-Stör-Leistungsverhältnis.
- Aufgabe des Dekorrelationsfilters $H_{DF}(f)$ ist es, aus der Folge $\langle m_v \rangle$ die Detektionsabtastwerte $d_v = d_{Sv} + d_{Nv}$ zu gewinnen, deren Störanteile d_{Nv} unkorreliert sind. Dieses Filter wird deshalb auch **Whitening-Filter** genannt.
- Der **Viterbi-Entscheider**, der im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen steht, gewinnt aus der Folge $\langle d_v \rangle$ seiner wertkontinuierlichen Eingangswerte die binäre Ausgangsfolge $\langle v_v \rangle$ entsprechend der Maximum-Likelihood-Regel mit der kleinstmöglichen Fehlerwahrscheinlichkeit $\Pr(v_v \neq q_v)$.

Die Beschreibung wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

Blockschaltbild und Voraussetzungen für Kapitel 3.8 (2)

Um den **Viterbi-Algorithmus** möglichst einfach beschreiben und veranschaulichen zu können, werden hier einige vereinfachende Voraussetzungen getroffen:

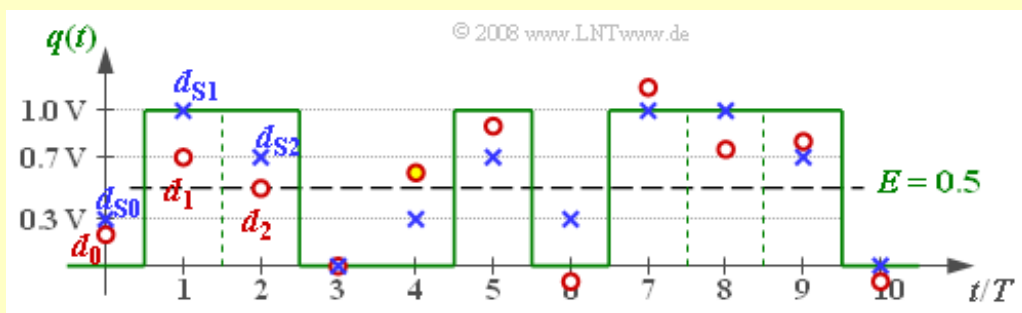
- Die Amplitudenkoeffizienten seien **unipolar** $\Rightarrow a_v \in \{0, 1\}$. Anzumerken ist, dass es bei der Verwendung bipolarer Koeffizienten $a_v \in \{-1, +1\}$ nur weniger Modifikationen bedarf.
- Der Grundimpuls $g_d(t)$ besteht nur aus dem **Hauptwert** $g_0 = g_d(t = T_D)$ und **einem Vorläufer** $g_{-1} = g_d(t = T_D - T)$.
- Damit ergeben sich für die wertkontinuierlichen **Detektionsabtastrwerte**

$$d_v = a_v \cdot g_0 + a_{v+1} \cdot g_{-1} + d_{Nv},$$

wobei die Rauschkomponente d_{Nv} als gaußverteilt angenommen wird (Streuung σ_d).

Bei bipolarer Signalisierung ist der Algorithmus nicht aufwändiger. Dagegen steigt der Rechenaufwand, wenn der Detektionsgrundimpuls breiter wird und mehr als nur einen Vorläufer g_{-1} aufweist. Die Vernachlässigung von Nachläufern stellt keine grundlegende Einschränkung dar, weil jeder Impuls $g_d(t)$ diese Bedingung durch geeignete Wahl des Detektionszeitpunktes T_D erfüllen kann. Anzumerken ist weiter, dass im Folgenden alle Signalwerte auf 1 normiert werden.

Beispiel: In der Grafik sind die Detektionsnutzabtastrwerte d_{Sv} als (blaue) Kreuze eingetragen, wobei die zugehörigen Amplitudenkoeffizienten $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, \dots$ aus dem grün eingezeichneten Quellsignal $q(t)$ abgelesen werden können. Die Grundimpulswerte sind in diesem Beispiel zu $g_0 = 0.7$ und $g_{-1} = 0.3$ angenommen. Aus der Grafik ist weiter zu erkennen, dass d_{Sv} nur vier verschiedene Werte, nämlich 0, g_0 , g_{-1} und $g_0 + g_{-1}$, annehmen kann.



Die am Viterbi-Entscheider anstehenden Abtastrwerte (rote Punkte) sind $d_0 = 0.2, d_1 = 0.7, d_2 = 0.5, d_3 = 0, \dots$, wobei die Differenzen $d_{Nv} = d_v - d_{Sv}$ von einer AWGN-Rauschquelle herrühren.

Ein Schwellenwertentscheider (mit der Schwelle bei $E = 0.5$) würde bei diesen dargestellten zehn Bit mindestens eine Fehlentscheidung treffen (bei $v = 4$), und eventuell eine weitere bei $v = 2$, falls d_2 geringfügig kleiner ist als der Schwellenwert $E = 0.5$. Dagegen wird der Viterbi-Empfänger diese Folge der Länge 10 richtig entscheiden, wie auf den nächsten Seiten gezeigt werden wird.

Fehlergrößen und Gesamtfehlergrößen (1)

Wie in **Kapitel 3.7** bezeichnet $Q \in \{Q_i\}$ wieder die zeitlich begrenzte, aus N Binärsymbolen bestehende Quellensymbolfolge. Die Anzahl der möglichen Quellensymbolfolgen Q_i beträgt somit 2^N . V bezeichnet wieder die Sinkensymbolfolge der Länge N , die vom Viterbi-Entscheider gleich der wahrscheinlichsten Folge Q_j gesetzt wird.

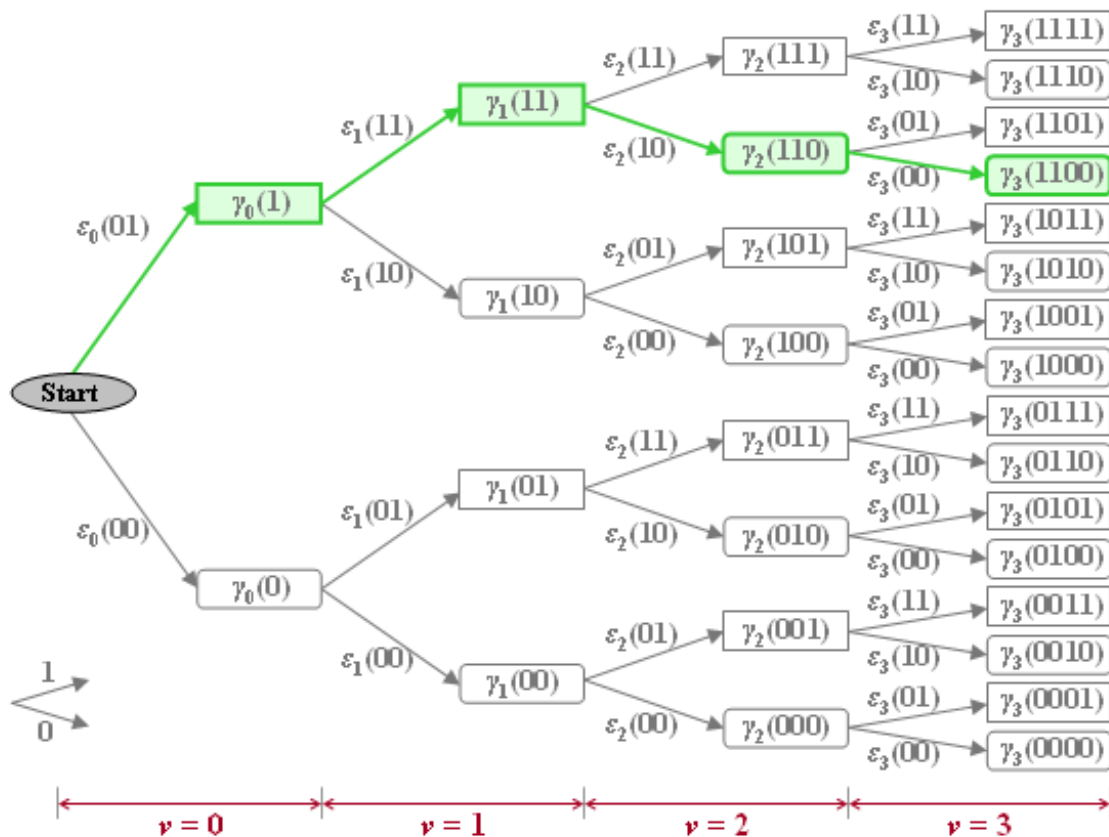
Definition: Die **Fehlergröße** bezeichnet die quadratische Abweichung zwischen dem tatsächlichen, verrauschten Abtastwert d_ν und dem zur Folge Q_i gehörenden Nutzabtastwert $d_{S_\nu}(i)$:

$$\varepsilon_\nu(i) = |d_\nu - d_{S_\nu}(i)|^2.$$

Die **Gesamtfehlergröße** $\gamma_\nu(i)$ kennzeichnet die Summe aller Fehlergrößen bis zum Zeitpunkt ν :

$$\gamma_\nu(i) = \sum_{k=0}^{\nu} \varepsilon_k(i).$$

Häufig bezeichnet man $\gamma_\nu(i)$ auch als die *Metrik*. Anzumerken ist, dass diese Definitionen an einem Grundimpuls mit Hauptwert g_0 und nur einem Vorläufer g_{-1} angepasst sind. Bei ν Vorläufern müsste die obige Summe bei $k = 1 - \nu$ beginnen. Der Parameter $i \in \{0, \dots, 2^{N+1}-1\}$ wird meist in der Binärschreibweise ausgedrückt, so dass i gleichzeitig die Amplitudenkoeffizienten $a_1, \dots, a_{\nu+1}$ (jeweils entweder 0 oder 1) angibt.



Die Grafik verdeutlicht die oben definierten Größen in einer Baumstruktur, woraus zu erkennen ist, dass die Gesamtfehlergrößen iterativ berechnet werden können:

$$\gamma_\nu(i) = \gamma_{\nu-1}(i') + \varepsilon_k(i'').$$

i , i' und i'' sind unterschiedliche Laufvariable. Die Bildbeschreibung folgt auf der nächsten Seite.

Fehlergrößen und Gesamtfehlergrößen (2)

Zu dieser Grafik, die **hier** nochmals eingeblendet werden kann, ist Folgendes anzumerken:

- Die Knoten des Baumdiagramms stehen für die *Gesamtfehlergrößen* $\gamma_v(i)$; deren Anzahl wird mit jedem Iterationsschritt verdoppelt. Zum Zeitpunkt v gibt es 2^{v+1} solcher Knoten. Beispielsweise sind für $v = 3$ genau $2^4 = 16$ Knoten zu erkennen.
- Die zu den Gesamtfehlergrößen $\gamma_v(i)$ gehörigen *Amplitudenkoeffizienten* ergeben sich, wenn man den Weg vom Anfangsknoten bis zum betrachteten Knoten verfolgt. Es wird vereinbart, dass einem nach oben gerichteten Zweig der Amplitudenkoeffizient 1 und einem nach unten gerichteten Zweig eine 0 zugeordnet wird.
- Beispielsweise kennzeichnet der grün hinterlegte Knoten $\gamma_3(1100)$ die Gesamtfehlergröße unter der hypothetischen Annahme, dass die Symbole $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0$ gesendet wurden. Diese Zuordnung kann auch aus den Richtungen der Pfeile im Baumdiagramm abgelesen werden: zunächst zweimal nach oben, dann zweimal nach unten.
- Aufgrund des Vorläufers muss bereits zum Zeitpunkt $v = 3$ der Koeffizient a_4 mitberücksichtigt werden. Alle Knoten $\gamma_v(i)$, die unter der Voraussetzung $a_{v+1} = 1$ berechnet werden, sind im Baumdiagramm durch Rechtecke dargestellt, während die Hypothese $a_{v+1} = 0$ jeweils durch ein abgerundetes Rechteck symbolisiert ist, z. B. $\gamma_2(110)$ oder $\gamma_3(1100)$.

- Die Zweige im Baumdiagramm sind den *Fehlergrößen* $\varepsilon_v(i)$ zugeordnet. Beim vorausgesetzten Grundimpuls (nur g_0 und g_{-1} sind ungleich 0) gibt es zu jedem Zeitpunkt mit Ausnahme des Startzustandes ($v = 0$) genau vier unterschiedliche Größen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_v(00) &= |d_v|^2, & \varepsilon_v(01) &= |d_v - g_{-1}|^2, \\ \varepsilon_v(10) &= |d_v - g_0|^2, & \varepsilon_v(11) &= |d_v - g_0 - g_{-1}|^2.\end{aligned}$$

- Die Gesamtfehlergröße γ_v ist gleich der Summe aus dem vorausgegangenen Knoten γ_{v-1} und dem dazwischenliegenden Zweig ε_v . Beispielsweise gilt für die hervorgehobenen Knoten:

$$\gamma_1(11) = \gamma_0(1) + \varepsilon_1(11), \quad \gamma_2(110) = \gamma_1(11) + \varepsilon_2(10), \quad \gamma_3(1100) = \gamma_2(110) + \varepsilon_3(00).$$

- Bei den ersten Knoten $\gamma_0(0)$ und $\gamma_0(1)$ wird berücksichtigt, dass vor der eigentlichen Übertragung (a_1, a_2, \dots) vereinbarungsgemäß stets das Symbol $a_0 = 0$ übertragen wird. Daraus folgt:

$$\gamma_0(0) = \varepsilon_0(00) = |d_0|^2, \quad \gamma_0(1) = \varepsilon_0(01) = |d_0 - g_{-1}|^2.$$

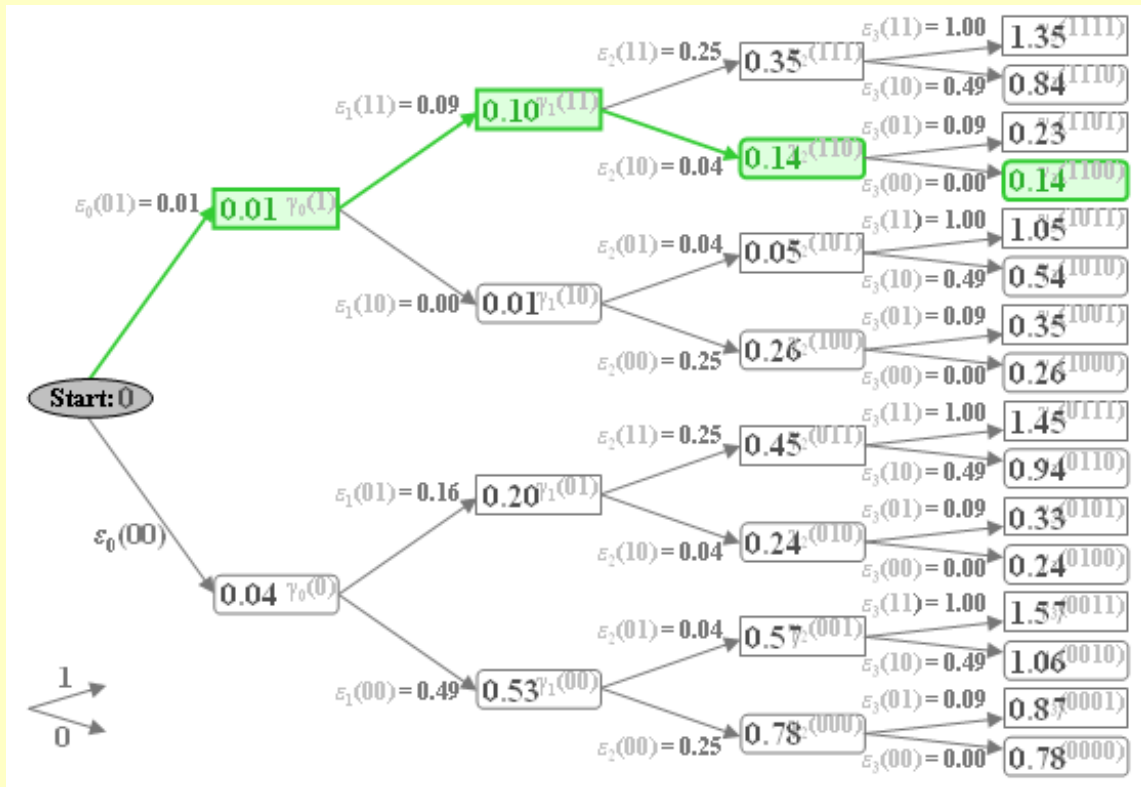
Das nachfolgende Beispiel wird hoffentlich diese etwas ermüdenden Aussagen verdeutlichen.

Fehlergrößen und Gesamtfehlergrößen (3)

Beispiel: Wir betrachten wie im **letzten Beispiel** die unipolare Quellensymbolfolge der Länge $N = 3$, mit den Amplitudenkoeffizienten $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0$ und die weiteren Parameterwerte

$$g_0 = 0.7, \quad g_{-1} = 0.3, \quad d_0 = 0.2, \quad d_1 = 0.7, \quad d_2 = 0.5, \quad d_3 = 0.$$

Nachfolgend ist das Baumdiagramm mit den Knoten $\gamma_\nu(i)$ für die Zeitpunkte $\nu = 0$ bis $\nu = 3$ dargestellt. Die Berechnung der sich ergebenden Fehlergrößen $\varepsilon_\nu(i)$ folgt am Ende der Seite.



Die minimale Gesamtfehlergröße $\gamma_3(1100)$ ist gleich 0.14. Daraus ergeben sich die Koeffizienten der nach den vorliegenden Signalwerten d_0, d_1, d_2, d_3 mit größter Wahrscheinlichkeit gesendeten Folge zu $a_1 = 1, a_2 = 1$ und $a_3 = 0$ (grün eingezeichnete Pfad). Weiter ist zu sagen:

- Ist die Folgenlänge $N = 3$ (das heißt: nur drei Symbole werden durch den Viterbi-Empfänger gemeinsam entschieden), so ist auch die Entscheidung $a_4 = 0$ mit Sicherheit die richtige, da alle Koeffizienten $a_{\nu > 3}$ als 0 vorausgesetzt wurden.
- Bei längerer Folge ($N > 3$) kann aus dem minimalen Wert $\gamma_3(1100)$ nicht unbedingt geschlossen werden, dass $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0$ Teil der wahrscheinlichsten Folge ist. Bei Berücksichtigung weiterer Abtastwerte (d_4, d_5, \dots) könnte sich dieses vorläufige Ergebnis durchaus noch ändern.

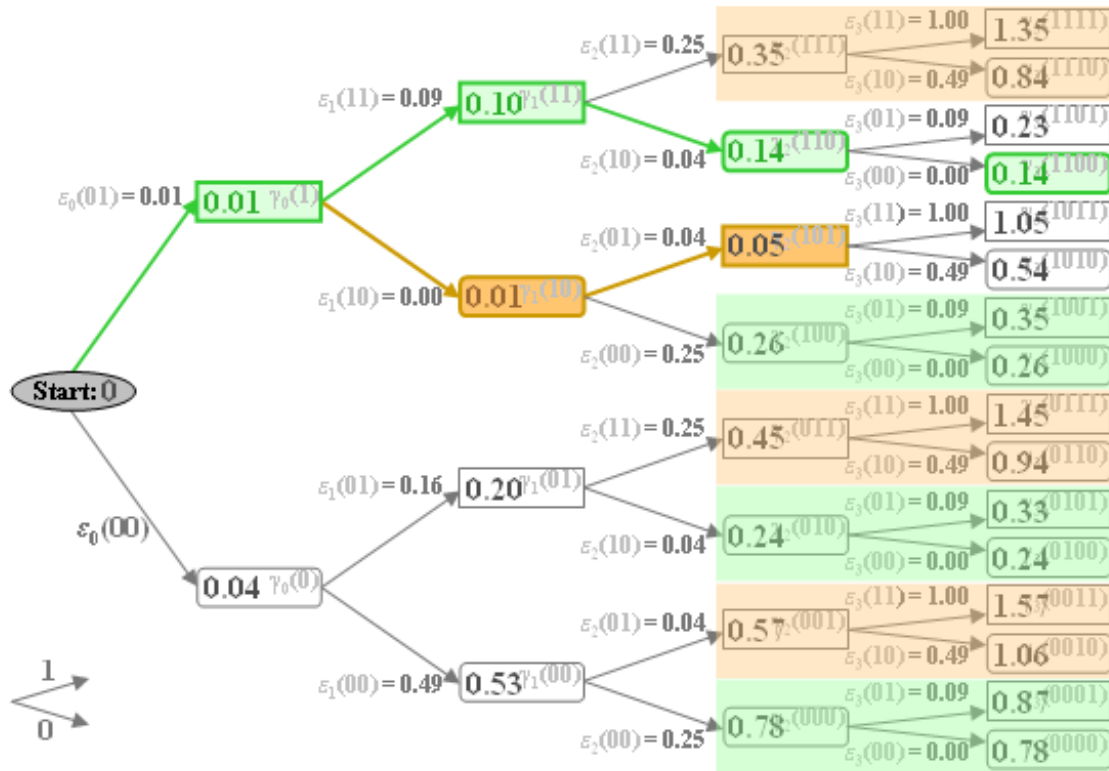
Nachzutragen ist noch die Berechnung der Fehlergrößen für die Zeitpunkte $\nu = 0$ bis $\nu = 3$:

$$\begin{aligned} \nu = 0 : \quad \varepsilon_0(00) &= [0.2 - (0 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0.3)]^2 = 0.04, \\ \varepsilon_0(01) &= [0.2 - (0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3)]^2 = 0.01, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu = 1: \quad \varepsilon_1(00) &= [0.7 - (0 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0.3)]^2 = 0.49, \\
\varepsilon_1(01) &= [0.7 - (0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3)]^2 = 0.16, \\
\varepsilon_1(10) &= [0.7 - (1 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0.3)]^2 = 0.00, \\
\varepsilon_1(11) &= [0.7 - (1 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3)]^2 = 0.09, \\
\nu = 2: \quad \varepsilon_2(00) &= [0.5 - (0 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0.3)]^2 = 0.25, \\
\varepsilon_2(01) &= [0.5 - (0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3)]^2 = 0.04, \\
\varepsilon_2(10) &= [0.5 - (1 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0.3)]^2 = 0.04, \\
\varepsilon_2(11) &= [0.5 - (1 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3)]^2 = 0.25, \\
\nu = 3: \quad \varepsilon_3(00) &= [0.0 - (0 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0.3)]^2 = 0.00, \\
\varepsilon_3(01) &= [0.0 - (0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3)]^2 = 0.09, \\
\varepsilon_3(10) &= [0.0 - (1 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0.3)]^2 = 0.49, \\
\varepsilon_3(11) &= [0.0 - (1 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3)]^2 = 1.00.
\end{aligned}$$

Minimale Gesamtfehlergröße und Trellisdiagramm (1)

Wir gehen weiterhin von den Zahlenwerten des letzten Beispiels aus.



Wichtige Eigenschaften des optimalen Entscheiders (Maximum-Likelihood) lassen sich aus obiger Grafik anhand des Zeitpunktes $v = 2$ erkennen:

- Die minimale Gesamtfehlergröße ist $\gamma_2(101) = 0.05$ (braun hervorgehoben). Das bedeutet: Eine Entscheidung zu diesem Zeitpunkt – basierend auf den Werten d_0, d_1 und d_2 – wäre zugunsten der Folge „101“ anstelle der gesendeten Folge „110“ ausgegangen.
- Daraus folgt: Für eine optimale Entscheidung sollte eine zu frühe endgültige Festlegung unbedingt vermieden werden. Allerdings kann man zu jedem Zeitpunkt v bereits mehrere Teilsymbolfolgen ausschließen, die zu späteren Zeitpunkten nicht mehr berücksichtigt werden müssen.
- Zu $\gamma_2(001), \gamma_2(011)$ und $\gamma_2(111)$ werden jeweils genau die gleichen Fehlergrößen hinzuaddiert. Da diese drei Metriken alle größer sind als $\gamma_2(101) = 0.05$, steht bereits bei $v = 2$ fest, dass „001“, „011“ sowie „111“ nicht Bestandteil der wahrscheinlichsten Folge sein können. Diese Knoten und alle ihre Nachfahren müssen deshalb nicht weiter beachtet werden (braune Überdeckungen).
- Gleiches gilt für die abgerundeten Knoten: $\gamma_2(000), \gamma_2(010)$ und $\gamma_2(100)$ sind größer als der grün markierte Knoten $\gamma_2(110) = 0.14$, so dass auch diese und ihre Nachfahren ab dem Zeitpunkt $v = 3$ nicht mehr berücksichtigt werden müssen (grüne Überdeckungen).
- Man stellt fest: Von den acht Knoten bei $v = 2$ müssen nur zwei weiterverfolgt werden, nämlich das abgerundete Rechteck $\gamma_2(110) = 0.14$ und das Rechteck $\gamma_2(101) = 0.05$. Diese beschreiben die minimalen Gesamtfehlergrößen unter der Annahme, dass $a_3 = 0$ bzw. $a_3 = 1$ sein wird.

Die Beschreibung wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

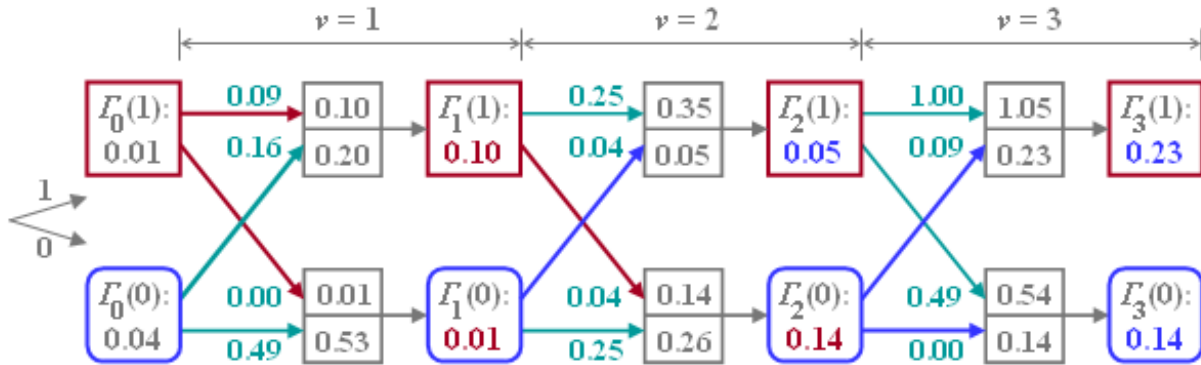
Minimale Gesamtfehlergröße und Trellisdiagramm (2)

Verallgemeinern wir nun das Ergebnis dieses Beispiels. Unter der weiterhin gültigen Annahme, dass der Grundimpuls neben dem Hauptwert (g_0) nur einen Vorläufer (g_{-1}) aufweist, ergeben sich die beiden **minimalen Gesamtfehlergrößen** zum Zeitpunkt ν formal zu

$$\Gamma_\nu(0) = \text{Min} [\Gamma_{\nu-1}(0) + \varepsilon_\nu(00), \Gamma_{\nu-1}(1) + \varepsilon_\nu(10)] ,$$

$$\Gamma_\nu(1) = \text{Min} [\Gamma_{\nu-1}(0) + \varepsilon_\nu(01), \Gamma_{\nu-1}(1) + \varepsilon_\nu(11)] .$$

Das Verfahren der *Gesamtfehlerminimierung* lässt sich im **Trellisdiagramm** anschaulich darstellen.



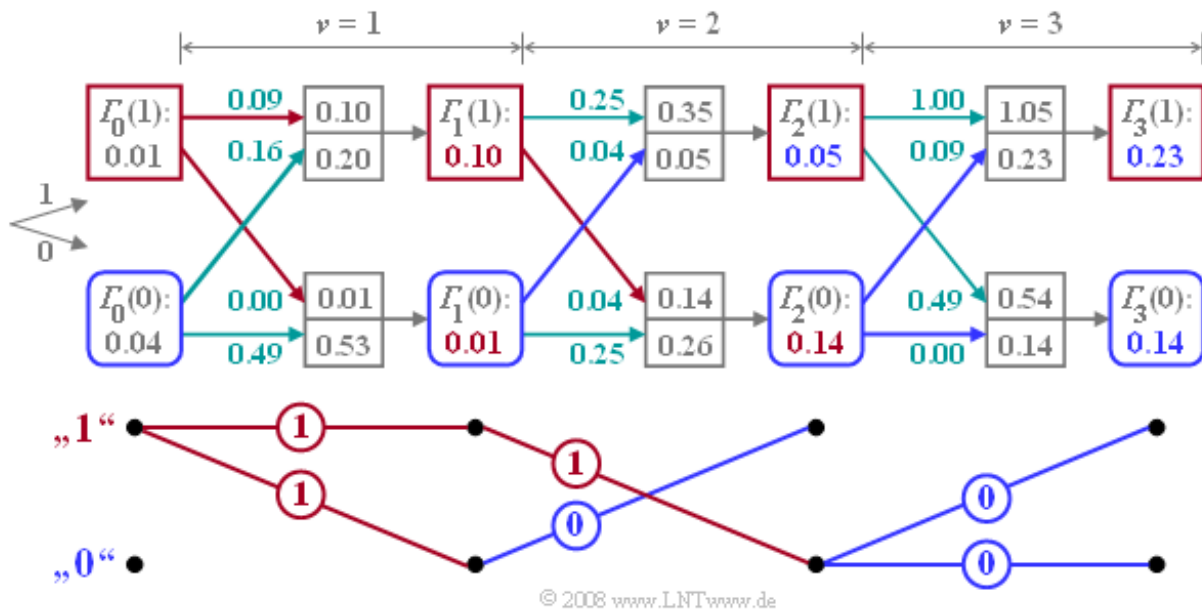
Ein Vergleich mit den Bildern auf den letzten Seiten zeigt:

- Der untere Zweig stellt die minimale Gesamtfehlergröße $\Gamma_\nu(0)$ dar, die zu jedem Zeitpunkt ν unter der Hypothese berechnet wird, dass $a_{\nu+1} = 0$ gelten wird (blaue abgerundete Quadrate).
- Dagegen beschreibt der obere Zweig die minimalen Gesamtfehlergrößen $\Gamma_\nu(1)$ unter der Annahme $a_{\nu+1} = 1$ (rote Quadrate). Auch hier sind die Zahlenwerte an das bisherige Beispiel angepasst.
- Außer $\Gamma_\nu(0)$ und $\Gamma_\nu(1)$ muss der ML-Entscheider auch die dazugehörigen Symbolfolgen (Pfade) abspeichern. Diese Zweige sind in der Grafik rot bzw. blau hervorgehoben.
- Falls Γ_ν aus dem Knoten $\Gamma_{\nu-1}(0)$ hervorgeht – also wenn der untere der beiden ankommenden Zweige hervorgehoben ist – so ist das dazugehörige Symbol „0“, andernfalls die „1“.
- Zur Zeit $\nu = 3$ ergeben sich z. B. sowohl $\Gamma_3(0) = 0.14$ als auch $\Gamma_3(1) = 0.23$ aus dem Vorgänger $\Gamma_2(0)$, so dass beide ausgewählte Pfade jeweils auf das Symbol „0“ verweisen (blaue Zweige).

Vereinfachtes Trellisdiagramm

Der Vorteil des Trellisdiagramms besteht darin, dass sich die Anzahl der Knoten und Zweige nicht bei jedem Iterationsschritt verdoppeln. Durch die Auswahl der minimalen Gesamtfehlergrößen werden nur noch diejenigen Symbolfolgen weiter betrachtet, die als Teil der wahrscheinlichsten Folge überhaupt noch in Frage kommen.

Das Trellisdiagramm lässt sich weiter vereinfachen, indem man nur noch die ausgewählten Zweige einzeichnet. Dies ist im unteren Teil der Grafik an unserem Zahlenbeispiel verdeutlicht. Zur Erinnerung: Die tatsächlich gesendeten Amplitudenkoeffizienten seien $a_1 = 1, a_2 = 1$ und $a_3 = 0$, und das oben gezeichnete Trellisdiagramm wurden unter der Annahme berechnet, dass aufgrund der Impulswerte $g_{-1} = 0.3$ und $g_0 = 0.7$ und des AWGN-Rauschens die Eingangswerte $d_0 = 0.2, d_1 = 0.7, d_2 = 0.5$ und $d_3 = 0$ am ML-Entscheider anliegen.



Dieses **vereinfachte Trellisdiagramm** erlaubt folgende Aussagen:

- Die Entscheidung über $a_1 = 1$ kann sofort zum Zeitpunkt $v = 1$ getroffen werden, da sich unter beiden Hypothesen – nämlich das nachfolgende Symbol ist $a_2 = 0$ bzw. das nachfolgende Symbol ist $a_2 = 1$ – das gleiche Resultat $a_1 = 1$ ergibt.
- Dagegen kann die endgültige Entscheidung über a_2 zum Zeitpunkt $v = 2$ noch nicht getroffen werden. Unter der Annahme, dass $a_3 = 0$ sein wird, müsste man sich für $a_2 = 1$ entscheiden, während die Hypothese $a_3 = 1$ zur Festlegung auf $a_2 = 0$ führen würde.
- Zur Zeit $v = 3$ ist die Entscheidung für $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0$ endgültig, da beide durchgehenden Pfade diese (die in diesem Fall richtige) Folge suggerieren. Würde man die Entscheidung auf den Zeitpunkt $v = 4$ verschieben, so hätte man nicht mehr nutzbare Information über a_1, a_2 und a_3 .

Alle Aussagen dieses Kapitels können mit dem folgenden Interaktionsmodul überprüft werden:

Viterbi-Empfänger für einen Vorläufer (Dateigröße 335 kB)

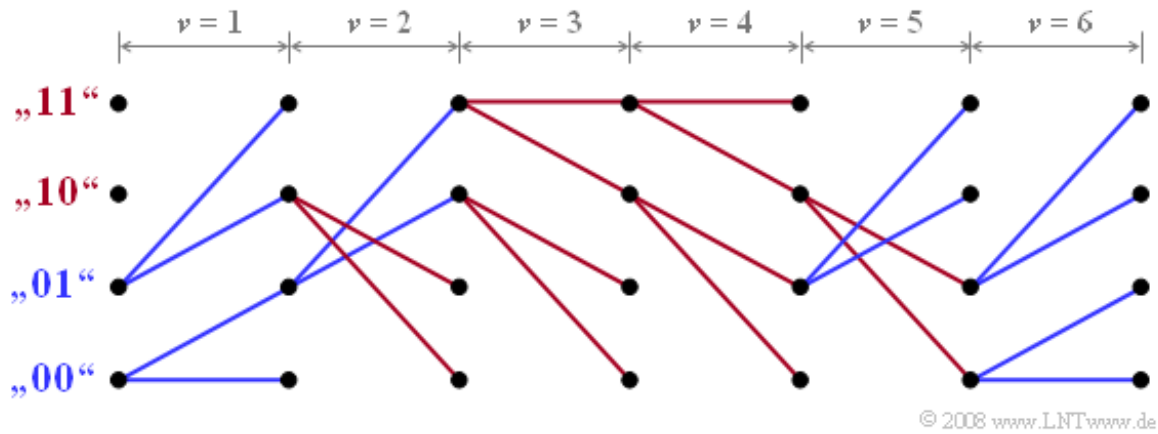
Erweiterung auf zwei Vorläufer

Wird der Grundimpuls durch die Abtastwerte g_0, g_{-1} und g_{-2} beschrieben, so gibt es im Trellisdiagramm zu jedem Zeitpunkt ν genau vier Metriken $\Gamma_\nu(00), \dots, \Gamma_\nu(11)$ zu bestimmen. $\Gamma_\nu(01)$ beschreibt dann beispielsweise die minimale Gesamtfehlergröße für die Detektion des Symbols a_ν unter der Hypothese, dass $a_{\nu+1} = 0$ und $a_{\nu+2} = 1$ sein werden, und es gilt:

$$\Gamma_\nu(01) = \text{Min} [\Gamma_{\nu-1}(00) + \varepsilon_\nu(001), \Gamma_{\nu-1}(10) + \varepsilon_\nu(101)] .$$

In der **Aufgabe A3.12** wird noch im Detail auf die Berechnung der Fehlergrößen und die Minimierung der Gesamtfehlergrößen eingegangen. Hier betrachten wir nur ein beispielhaftes Trellisdiagramm, das die (fehlerfreie) Detektion von folgender Symbolfolge wiedergibt:

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 0, \dots$$



Dieses **vereinfachte Trellisdiagramm** erlaubt folgende Aussagen:

- Alle von $\Gamma_{\nu-1}(00)$ bzw. $\Gamma_{\nu-1}(01)$ abgehende Zweige sind dem Symbol „0“ zugeordnet und blau gezeichnet. Die von den zwei oberen Zuständen abgehenden roten Zweige kennzeichnen die „1“.
- Verfolgt man die durchgehenden Pfade, so erkennt man die angegebene Folge. Da zum Zeitpunkt $\nu = 6$ nur blaue Zweige ankommen, liegen hier die ersten sechs Bit der Folge endgültig fest.
- Teilfolgen könnten aber auch bereits zu den Zeiten $\nu = 1, \nu = 3$ und $\nu = 4$ ausgegeben werden, da sich zu diesen Zeiten für alle vier Zustände die gleichen Teilpfade ergeben.
- Dagegen darf bei $\nu = 2$ und $\nu = 5$ nicht sofort entschieden werden. Beispielsweise ist zum Zeitpunkt $\nu = 5$ nur sicher, dass entweder $a_5 = 0, a_6 = 1$ oder $a_5 = 1, a_6 = 0$ sein werden.

Fehlerwahrscheinlichkeit bei Maximum-Likelihood-Entscheidung (1)

Die exakte Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit p_B bei ML-Entscheidung (beispielsweise mit dem Korrelations- oder dem Viterbi-Empfänger) ist sehr aufwändig. Dabei müssen

- die Differenzenergien zwischen allen möglichen Symbolfolgen Q_i, Q_j ermittelt werden, wobei die Fehlerwahrscheinlichkeit im Wesentlichen durch die minimale Differenzenergie bestimmt wird;
- auch die Einflüsse von Matched-Filter $H_{MF}(f)$ und Dekorrelationsfilter $H_{DF}(f)$ berücksichtigt und der Effektivwert σ_d des Detektionsstörsignals bestimmt werden.

Eine einfache Näherung für die (mittlere) **Fehlerwahrscheinlichkeit bei ML-Entscheidung** lautet:

$$p_{ML} = Q\left(\frac{g_{\max}}{\sigma_d}\right) \quad \text{mit } g_{\max} = \text{Max } |g_\nu|.$$

Diese Näherung gilt nur bei **bipolarer Signalisierung**. Bei unipolaren Amplitudenkoeffizienten muss das Argument der Q-Funktion halbiert werden.

Für die folgende Interpretation und das anschließende Beispiel auf der nächsten Seite wird vorausgesetzt, dass $v + 1$ Grundimpulswerte (inclusive des Hauptwertes) von 0 verschieden sind. Dann gilt:

- Der Viterbi-Entscheider muss alle diese Grundimpulswerte berücksichtigen. Das bedeutet, dass ein Trellisdiagramm mit 2^v Zuständen zu bearbeiten ist.
- Voraussetzung für die Gültigkeit obiger Gleichung ist die Unkorreliertheit der Störungen am Entscheider, die durch das Dekorrelationsfilter erreicht wird.
- Für den Vergleich mit Schwellenwertentscheider (p_{SE}) bzw. Entscheidungsrückkopplung (p_{DFE}) wird der Effektivwert σ_d des Detektionsstörsignals als konstant vorausgesetzt.
- Zu berücksichtigen ist aber, dass die Optimierung des ML-Systems zu sehr schmalbandigen Filtern führt, da alle Impulsausläufer durch den ML-Algorithmus herausgerechnet werden können.
- Unter der Voraussetzung konstanter Rauschleistungsdichte N_0 (am Empfängereingang) ist deshalb der Störeffektivwert (am Entscheider) beim ML-System kleiner als bei den anderen Varianten.
- Das bedeutet: Der Störabstandsgewinn durch die Maximum-Likelihood-Entscheidung ist unter Umständen noch größer, als es das nachfolgende Beispiel (mit $\sigma_d = \text{const.}$) ausdrückt.

Fehlerwahrscheinlichkeit bei Maximum-Likelihood-Entscheidung (2)

Beispiel: Wir betrachten die Grundimpulswerte $g_{-1} = 0.2$, $g_0 = 0.6$ und $g_1 = 0.2$ und gehen vom konstanten Störeffektivwert $\sigma_d = 0.1$ aus. Zur Vereinfachung sind alle Größen normiert.

Bei einem Binärempfänger mit **einfacher Schwellenwertentscheidung** entsprechend **Kapitel 3.2** ergibt sich für die (mittlere) Fehlerwahrscheinlichkeit bei bipolarer Signalisierung:

$$\begin{aligned} p_{SE} &= \frac{1}{4} \cdot Q\left(\frac{g_0 + g_1 + g_{-1}}{\sigma_d}\right) + \frac{1}{4} \cdot Q\left(\frac{g_0 + g_1 - g_{-1}}{\sigma_d}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot Q\left(\frac{g_0 - g_1 + g_{-1}}{\sigma_d}\right) + \frac{1}{4} \cdot Q\left(\frac{g_0 - g_1 - g_{-1}}{\sigma_d}\right) \approx \frac{Q(2)}{4} = 0.57\%. \end{aligned}$$

Für den Empfänger mit **idealer Entscheidungsrückkopplung** erhält man unter Berücksichtigung von $g_1 = 0$ (Kompensation des Nachläufers):

$$p_{DFE} = \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{g_0 + g_{-1}}{\sigma_d}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{g_0 - g_{-1}}{\sigma_d}\right) \approx \frac{Q(4)}{4} = 0.16 \cdot 10^{-4}.$$

Dagegen führt die Anwendung der **Maximum-Likelihood-Entscheidung** (mit Korrelations- bzw. Viterbi-Empfänger) zur sehr viel kleineren Fehlerwahrscheinlichkeit

$$p_{ML} = Q\left(\frac{g_0}{\sigma_d}\right) \approx Q(6) = 10^{-9}.$$

Dies entspricht gegenüber den beiden anderen Systemen einem Störabstandsgewinn von ca. 3 dB (DFE) bzw. 7.5 dB (SE). Das Ergebnis dieser einfachen Näherung wurde durch Simulationen im Wesentlichen bestätigt.

Um den oben beschriebenen Viterbi-Algorithmus direkt anwenden zu können, müssen die (normierten) Grundimpulswerte $g_0 = 0.2$, $g_{-1} = 0.6$ und $g_{-2} = 0.2$ eingestellt werden. Eine Zeitverschiebung um Vielfache der Symboldauer T gegenüber dem aus Darstellungsgründen gewählten Koordinatensystem ändert nämlich die Leistungsmerkmale der Viterbi-Entscheidung nicht.

Die ML-Fehlerwahrscheinlichkeit nach obiger Gleichung richtet sich allein nach dem größten aller Grundimpulswerte. Dabei kann es durchaus sein, dass „Vorläufer“ größer sind als der Hauptwert.

Aus der obigen Näherung erkennt man weiter, dass eine ML-Entscheidung nur bei Vorhandensein von Impulsinterferenzen von Vorteil ist. Bei Nyquistentzerrung (das heißt: nur der Grundimpulswert g_0 ist von 0 verschieden) arbeitet auch der Maximum-Likelihood-Empfänger symbolweise und mit der gleichen Fehlerwahrscheinlichkeit $Q(g_0/\sigma_d)$ wie ein herkömmlicher Empfänger.