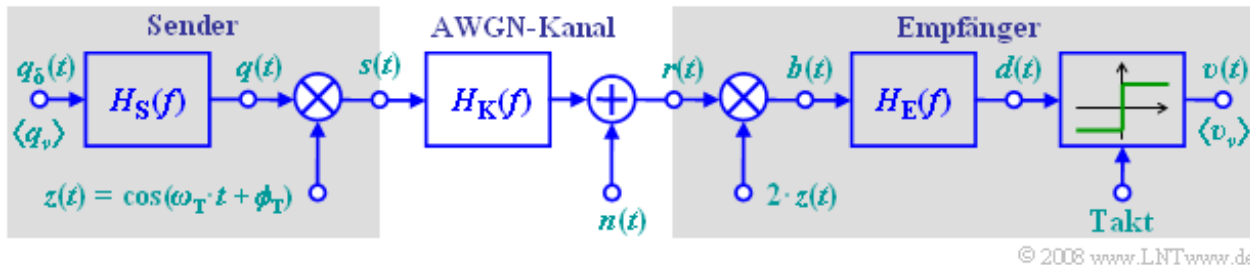


## Gemeinsames Blockschaltbild für ASK und BPSK

Im **Kapitel 4.2** des Buches „Modulationsverfahren“ wurden die digitalen Trägerfrequenzsysteme **ASK** (*Amplitude Shift Keying*) und **BPSK** (*Binary Phase Shift Keying*) bereits ausführlich beschrieben. In diesem Kapitel wird nun die **Fehlerwahrscheinlichkeit** dieser Systeme berechnet, wobei von dem folgenden gemeinsamen Blockschaltbild ausgegangen wird:



Im gesamten Kapitel 4.1 gelten folgende Voraussetzungen:

- Die Demodulation geschieht stets **kohärent**. Das heißt: Beim Empfänger wird ein Trägersignal mit gleicher Frequenz wie beim Sender zugesetzt, aber mit doppelter Amplitude. Der Phasenversatz sei zunächst  $\Delta\phi_T = 0$ .
- Bei BPSK wird von den bipolaren Amplitudenkoeffizienten  $a_v \in \{-1, +1\}$  ausgegangen und die Entscheiderschwelle liegt bei  $E = 0$ . Dagegen gilt bei ASK  $a_v \in \{0, 1\}$ . Die Entscheiderschwelle  $E$  ist für diesen unipolaren Fall bestmöglich zu wählen.
- Wir betrachten stets den **AWGN-Kanal**, das heißt, dass für den Kanalfrequenzgang  $H_K(f) = 1$  gilt und  $n(t)$  weißes Gaußsches Rauschen mit der (einseitigen) Rauschleistungsdichte  $N_0$  darstellt. Die Entzerrung linearer Kanalverzerrungen – also der Fall  $H_K(f) \neq \text{const.}$  – ist in gleicher Weise möglich wie bei der Basisbandübertragung. Hierzu sei auf das **Kapitel 3.3** verwiesen.

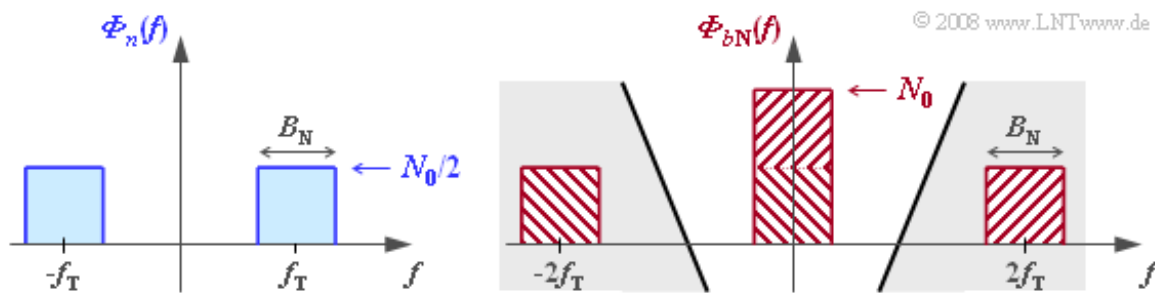
## Fehlerwahrscheinlichkeit des optimalen BPSK–Systems (1)

Wir gehen zunächst von einem bipolaren rechteckförmigen Quellsignal  $q(t)$  mit der Amplitude  $\pm s_0$  aus. Dessen normiertes Spektrum lautet:  $H_S(f) = \text{si}(\pi f T)$ . Ebenso wie bei der **Basisbandübertragung** ergibt sich die kleinstmögliche Bitfehlerwahrscheinlichkeit für das Empfangsfilter  $H_E(f) = H_S^*(f) = \text{si}(\pi f T)$ . Die **Signalverläufe** des BPSK–Systems mit Matched–Filter–Empfänger zeigen:

- Das Detektionsnutzsignal  $d_S(t)$  – also ohne Rauschanteil – ist zu allen Detektionszeitpunkten  $\nu T$  stets  $\pm s_0$ , wobei das Vorzeichen durch die Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu$  festgelegt sind.
- Wie beim vergleichbaren Basisbandsystem beträgt die **Fehlerwahrscheinlichkeit**  $p_B = Q(s_0/\sigma_d)$ , wobei  $Q(x)$  das **komplementäre Gaußsche Fehlerintegral** bezeichnet.
- Unterschiedlich zum Basisbandsystem ist jedoch die Rauschleistung. Der Rauschanteil  $b_N(t)$  ergibt sich durch die Multiplikation des Bandpassrauschens  $n(t)$  mit dem Träger  $2 \cdot \cos(2\pi f_T t)$  und besitzt die Rauschleistungsdichte

$$\Phi_{bN}(f) = \Phi_n(f) \star [1^2 \cdot \delta(f - f_T) + 1^2 \cdot \delta(f + f_T)] .$$

- Die nachfolgende Grafik verdeutlicht diese Gleichung am Beispiel von bandbegrenztem weißem Rauschen mit der Bandbreite  $B_n$ . Während  $\Phi_n(f = f_T)$  gleich  $N_0/2$  gilt, ist  $\Phi_{bN}(f = 0) = N_0$ . Die Anteile um  $\pm 2f_T$  werden durch das nachfolgende Empfangsfilter  $H_E(f)$  eliminiert und spielen für die weiteren Betrachtungen keine Rolle.

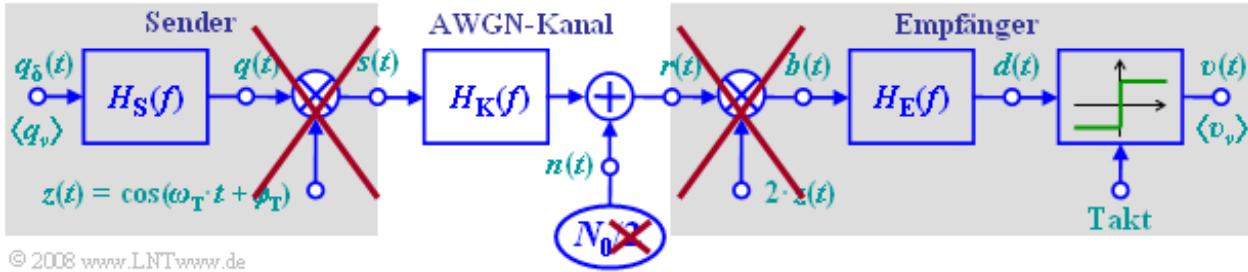


- Bei echt weißem Rauschen gilt mit dem Grenzübergang  $B_n \rightarrow \infty$  :

$$\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2}, \quad \Phi_{bN}(f) = N_0.$$

## Fehlerwahrscheinlichkeit des optimalen BPSK-Systems (2)

Die gerade durchgeführten Betrachtungen zeigen, dass man zur Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit des BPSK-Systems auf die beiden Multiplikationen mit  $z(t)$  und  $2 \cdot z(t)$  verzichten kann, wenn man die Rauschleistung verdoppelt.



Damit ergibt sich für die **Rauschleistung** vor dem Entscheider bei AWGN-Rauschen:

$$\sigma_d^2 = N_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi f T_B) df = \frac{N_0}{T_B},$$

also der doppelte Wert als bei der Basisbandübertragung. *Hinweis:* Um später einen Vergleich mit der QAM zu ermöglichen, wurde hier die Symboldauer  $T$  durch die Bitdauer  $T_B$  ersetzt. Bei BPSK (und auch bei ASK) sind  $T$  und  $T_B$  gleich.

Damit lautet die BPSK-Fehlerwahrscheinlichkeit mit den zwei üblichen **Gaußschen Fehlerfunktionen**:

$$p_B = Q \left( \sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T_B}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T_B}{2 \cdot N_0}} \right).$$

Berücksichtigt man weiter, dass die bei BPSK aufgewandte Energie pro Bit

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \cdot T_B$$

beträgt, so kann diese Gleichung wie folgt umgeformt werden:

$$p_B = Q \left( \sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_B}{N_0}} \right).$$

Es ergibt sich somit genau die gleiche Formel wie bei der **Basisbandübertragung**, bei der jedoch für die „Energie pro Bit“  $E_B = s_0^2 \cdot T_B$  zu verwenden ist.

*Anmerkung:* Diese letzte Gleichung – nicht die obere – gilt nicht nur bei rechteckförmigem  $q(t)$ , sondern für jedes beliebige  $H_S(f)$ , solange

- das Empfangsfilter  $H_E(f) = H_S^*(f)$  exakt an den Sender angepasst ist,
- das Produkt  $H_S(f) \cdot H_E(f)$  das erste Nyquistkriterium erfüllt.

## Fehlerwahrscheinlichkeit des optimalen ASK–Systems

Wir betrachten nun ein **ASK–System** bei gleichen Voraussetzungen wie das BPSK–System. Hier

- sind alle Detektionsnutzsignalwerte  $d_S(vT)$  entweder 0 oder  $s_0$ ,
- ist dem entsprechend der Abstand von der Schwelle  $E = s_0/2$  jeweils  $s_0/2$ ,
- ist der Rauscheffektivwert  $\sigma_d$  genau so groß wie bei BPSK,
- ist die Energie pro Bit nur halb so groß wie bei BPSK:

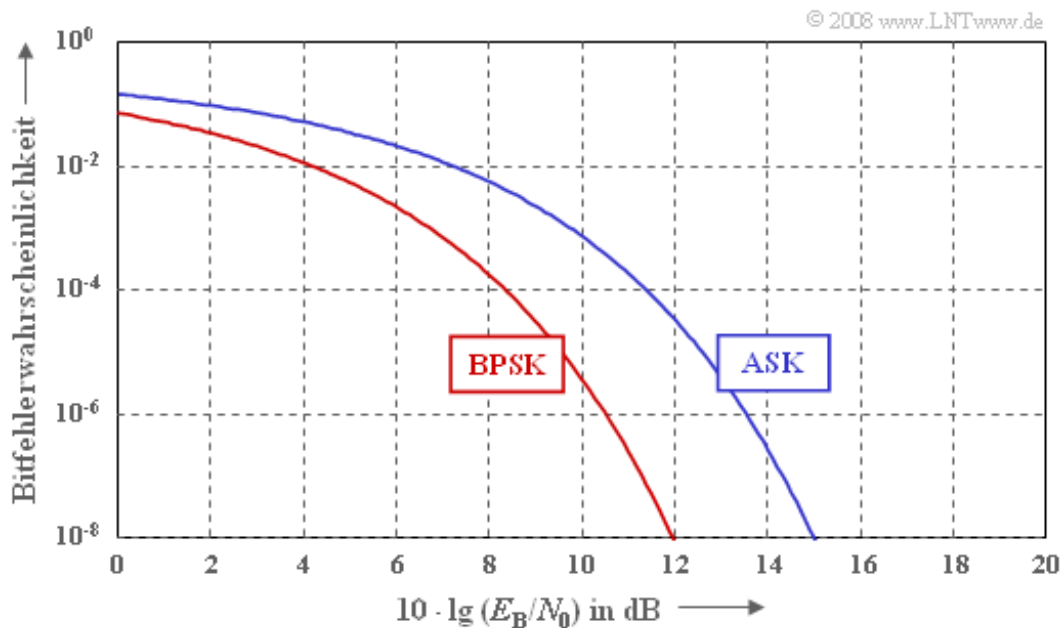
$$E_B = \frac{1}{4} \cdot s_0^2 \cdot T_B.$$

Damit lauten die entsprechenden Gleichungen für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = Q\left(\frac{s_0/2}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T_B}{4 \cdot N_0}}\right),$$

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2 \cdot N_0}}\right).$$

Die Grafik zeigt die Fehlerwahrscheinlichkeiten von ASK und BPSK abhängig vom Quotienten  $E_B/N_0$ .



Man erkennt aus dieser doppelt–logarithmischer Darstellung:

- Die ASK–Kurve liegt um 3 dB rechts von der BPSK–Kurve. Für die Fehlerwahrscheinlichkeit  $10^{-8}$  benötigt man bei BPSK etwa  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 12$  dB, bei ASK dagegen ca. 15 dB.
- Der Systemvergleich bei dem festen Abszissenwert  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 8$  dB liefert die beiden Bitfehlerwahrscheinlichkeiten  $2 \cdot 10^{-4}$  (für BPSK) bzw.  $6 \cdot 10^{-3}$  (für ASK).

## Fehlerwahrscheinlichkeit bei 4–QAM und 4–PSK (1)

Im **Kapitel 4.3** des Buches „Modulationsverfahren“ wurde die Quadraturamplitudenmodulation (QAM) ausführlich beschrieben. Dem **Blockschaltbild** ist zu entnehmen:

- Die 4–QAM kann durch zwei zueinander **orthogonale BPSK–Systeme** mit Cosinus– bzw. Minus–Sinus–Träger dargestellt werden.
- Das binäre Quellensignal  $q(t)$  mit der Bitdauer  $T_B \Rightarrow$  Bitrate  $R_B$  wird in zwei Teilsignale  $q_I(t)$  und  $q_Q(t)$  mit jeweils halber Rate aufgespaltet (Seriell–Parallel–Wandlung). Die Symboldauer von  $q_I(t)$  bzw.  $q_Q(t)$  beträgt jeweils  $T = 2 \cdot T_B$ , die Symbolrate jeweils  $R_B/2$ .
- Die Amplituden der beiden orthogonalen Trägersignale sind um den Faktor „Wurzel aus 2“ kleiner gewählt als bei der BPSK, so dass die Hüllkurve des **Sendesignals**  $s(t)$  wiederum  $s_0$  beträgt.

Die Fehlerwahrscheinlichkeit der QAM ist die gleiche wie die der zwei orthogonalen BPSK–Systemen. Wegen der kleineren Signalamplitude und der niedrigeren Symbolrate gilt:

$$p_B = Q\left(\frac{s_0/\sqrt{2}}{\sigma_d}\right) \quad \text{mit} \quad \sigma_d^2 = \frac{N_0}{2 \cdot T_B}$$
$$\Rightarrow p_B = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot T_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right).$$

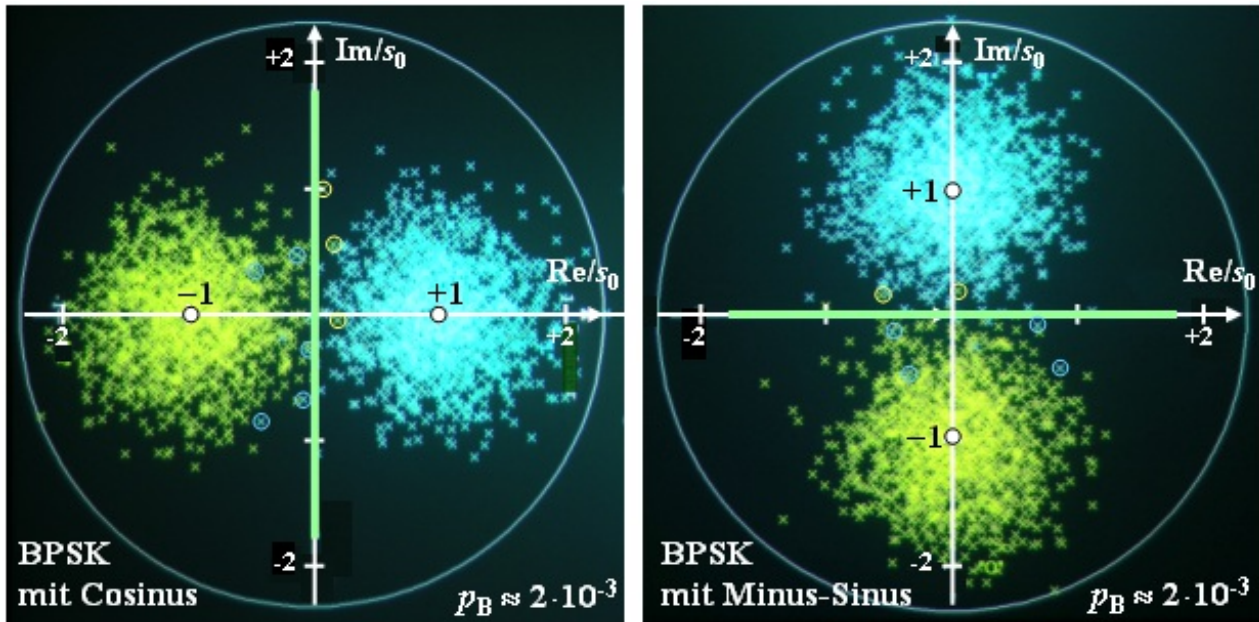
Das heißt: Obwohl mit der 4–QAM gegenüber der BPSK die doppelte Informationsmenge übertragen werden kann, ergibt sich in Abhängigkeit von  $E_B/N_0$  die genau gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Berücksichtigt ist hierbei, dass auch bei der 4–QAM für die mittlere Energie pro Bit gilt:

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \cdot T_B.$$

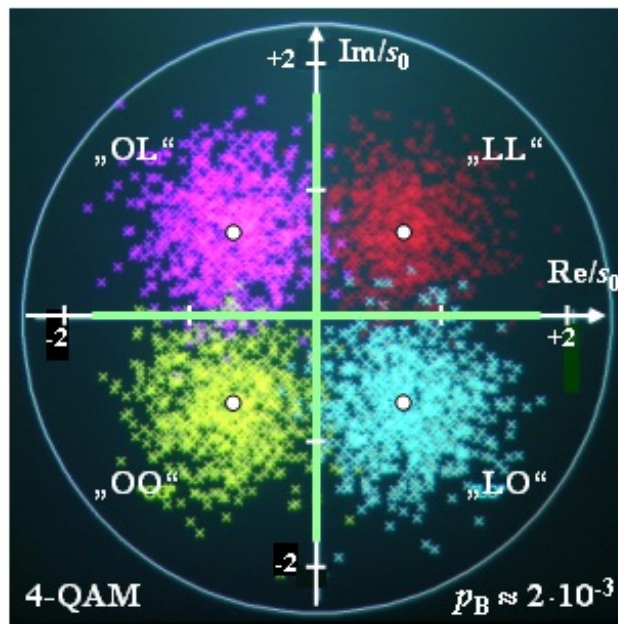
Da sich die **quaternäre Phasenmodulation** (4–PSK) von der 4–QAM nur um eine Phasenverdrehung von  $45^\circ$  unterscheidet, ergibt sich auch für diese bei Berücksichtigung geeigneter Entscheidungsgebiete die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit.

## Fehlerwahrscheinlichkeit bei 4-QAM und 4-PSK (2)

Die Grafik zeigt oben die Phasendiagramme der BPSK mit Cosinus- bzw. Minus-Sinusträger, jeweils für  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 6 \text{ dB}$ . *Hinweis:* In der linken (bzw. rechten) Grafik erkennt man Bitfehler durch gelbe Kreuze rechts (bzw. oberhalb) der Entscheidungsschwelle. Zur besseren Kenntlichmachung sind diese Bitfehler durch Kreise hervorgehoben.



© 2008 www.LNTwww.de



Der Abstand der Nutzabtastwerte ohne Rauschen (markiert durch die weißen Punkte) von der jeweiligen Entscheidungsschwelle (grün markiert) beträgt jeweils  $s_0$ . Die Varianz der Detektionsabtastwerte – erkennbar an den Punktwolken – ist gleich

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{T_B} = \frac{s_0^2/2}{E_B/N_0}, \quad \text{wegen } E_B = \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \cdot T_B.$$

Mit  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 6 \text{ dB} \Rightarrow E_B/N_0 = 10^{0.6} \approx 4$  ergibt sich daraus:

$$\frac{\sigma_d^2}{s_0^2} = \frac{1}{2 \cdot 10^{0.6}} \approx 0.125 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_d}{s_0} \approx 0.35,$$

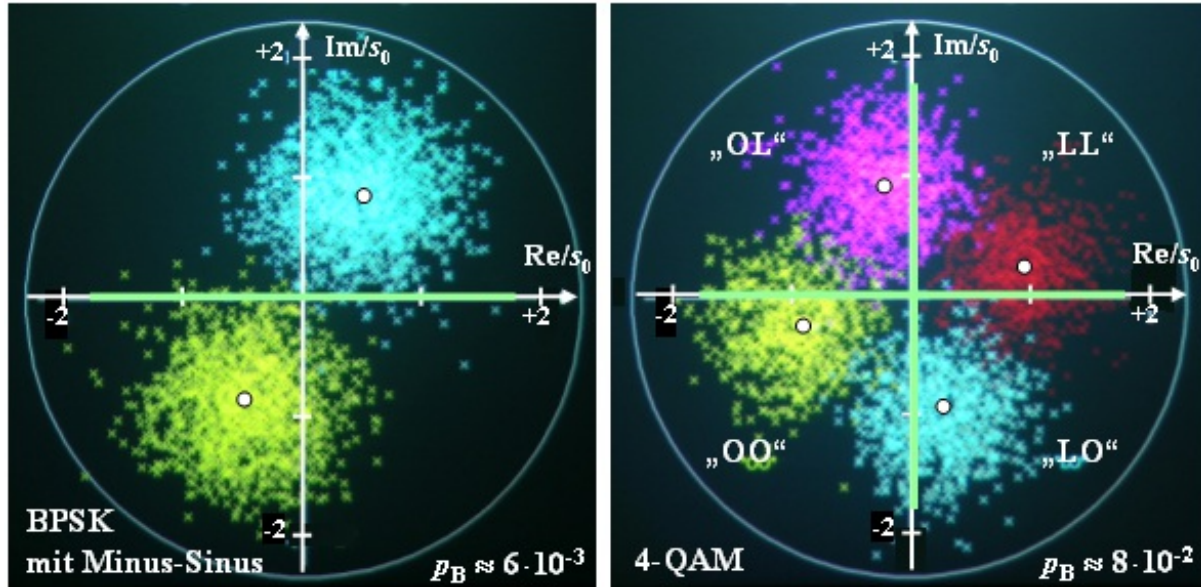
und für die Fehlerwahrscheinlichkeit gilt:

$$p_B = Q(s_0/\sigma_d) = Q\left(\sqrt{2 \cdot 10^{0.6}}\right) = Q(2.8) \approx 2 \cdot 10^{-3}.$$

Die untere Grafik zeigt die Verhältnisse bei 4-QAM, die man als die Überlagerung zweier orthogonaler BPSK-Systeme mit Cosinusträger und Minus-Sinusträger auffassen kann. Der Abstand der vier Nutztastwerte (ohne Rauschen, markiert durch die weißen Punkte) vom Ursprung ist wieder  $s_0$ . Der Abstand zu den beiden Entschwellerschwelen ist nun allerdings um den Faktor „Wurzel aus 2“ geringer als bei der BPSK, aber auch der Rauscheffektivwert  $\sigma_d$  ist um den gleichen Faktor kleiner. Damit ergibt sich für die 4-QAM die genau gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit ( $2 \cdot 10^{-3}$ ) wie bei der BPSK.

## Phasenversatz zwischen Sender und Empfänger

Voraussetzung für die Gültigkeit der bisherigen Gleichungen ist eine strenge Synchronität zwischen den bei Sender und Empfänger zugesetzten Trägersignalen. Nun wird ein Phasenversatz  $\Delta\phi_T$  zwischen den beiden Trägersignalen angenommen, während weiterhin von Frequenzsynchronität ausgegangen wird.



© 2008 www.LNTwww.de

Die Grafik zeigt die Phasendiagramme für  $\Delta\phi_T = 30^\circ$ . Man erkennt:

- Sowohl bei BPSK (links) als auch bei der 4-QAM (rechts) bewirkt ein Phasenversatz um  $\Delta\phi_T$  eine **Drehung** des Phasendiagramms.
- Bei BPSK bewirkt der Phasenversatz ein um  $\cos(\Delta\phi_T)$  kleineres Nutzsignal. Den gleichen Effekt haben wir bereits beim **Synchronemodulator** eines analogen Übertragungssystems festgestellt.
- Demzufolge wird auch der Abstand des Detektionsnutzsignals von der Entscheidungsschwelle um den gleichen Faktor geringer, was zu einer höheren Fehlerwahrscheinlichkeit führt:

$$p_B = Q\left(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0} \cdot \cos(\Delta\phi_T)\right).$$

Mit den hier zugrundeliegenden Zahlenwerten ( $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 6 \text{ dB}$ ,  $\Delta\phi_T = 30^\circ$ ) erhöht sich die Fehlerwahrscheinlichkeit der BPSK von 0.2% auf etwa 0.6%. Dagegen wird bei der 4-QAM (rechtes Diagramm) die Fehlerwahrscheinlichkeit mit  $\phi_T = 30^\circ$  nahezu um den Faktor 40 größer ( $p_B \approx 8\%$ ).

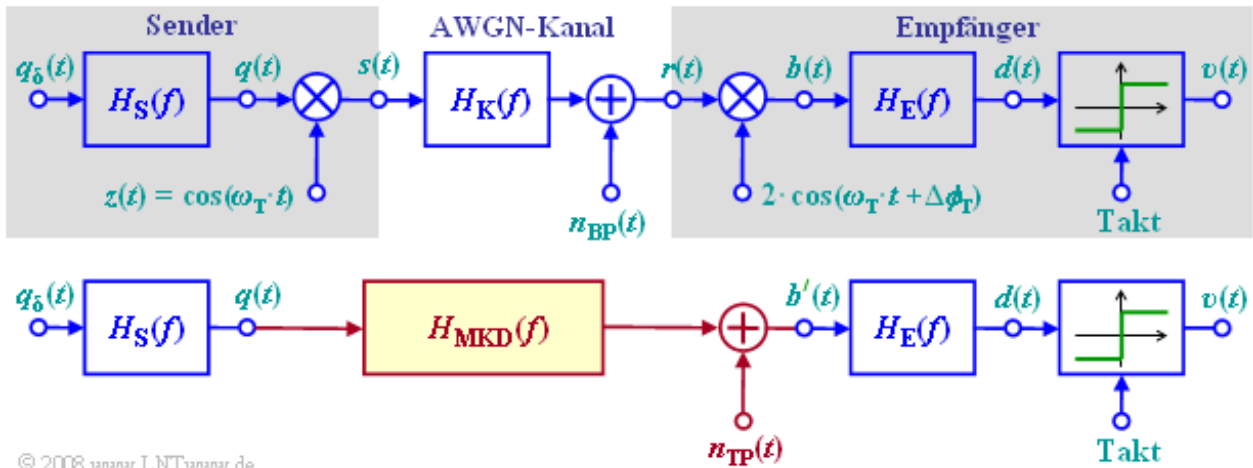
Allgemein gilt hier für die 4-QAM, falls  $|\Delta\phi_T| < 45^\circ$ , wie in **Aufgabe A1.9** gezeigt werden soll:

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}} \cdot \frac{\cos(45^\circ)}{\cos(45^\circ + \Delta\phi_T)}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}} \cdot \frac{\cos(45^\circ)}{\cos(45^\circ - \Delta\phi_T)}\right).$$

**Fazit:** Obwohl man mit der 4-QAM über den gleichen Kanal die doppelte Information wie bei BPSK übertragen kann, weisen bei idealen Bedingungen beide Systeme die gleiche Übertragungsqualität (Fehlerwahrscheinlichkeit) auf. Bei nicht idealen Bedingungen – zum Beispiel einem Phasenversatz – steigt allerdings die Fehlerwahrscheinlichkeit der 4-QAM sehr viel stärker an als die der BPSK.

## Basisbandmodell für ASK und BPSK (1)

Die Grafik zeigt oben nochmals das Gesamtschaltbild eines Trägerfrequenzsystems mit kohärenter Demodulation, das für ASK (unipolare Amplitudenkoeffizienten) und BPSK (bipolare Koeffizienten) in gleicher Weise gültig ist. Durch die Multiplikation mit dem Trägersignal  $z(t)$  wird das Spektrum  $Q(f)$  des Quellensignals – und dementsprechend auch das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_q(f)$  – um die Trägerfrequenz  $\pm f_T$  beidseitig verschoben. Nach dem Kanal wird diese Verschiebung durch den Synchrondemodulator wieder rückgängig gemacht.



Geht man vom **äquivalenten Basisbandmodell** entsprechend der unteren Grafik aus, so lässt sich die Berechnung der Signale nach dem Demodulator vereinfachen:

- Man kürzt quasi den Einfluss von Modulator und Demodulator und ersetzt den Bandpasskanal mit dem Frequenzgang  $H_K(f)$  durch eine geeignete Tiefpass-Übertragungsfunktion  $H_{MKD}(f)$ , wobei der Index für „Modulator-Kanal- Demodulator“ steht.
- Unter Berücksichtigung einer Phasendifferenz  $\Delta\phi_T$  zwischen den Trägersignalen von Sender und Empfänger erhält man für die resultierende Übertragungsfunktion:

$$H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot [e^{-j \cdot \Delta\phi_T} \cdot H_K(f - f_T) + e^{j \cdot \Delta\phi_T} \cdot H_K(f + f_T)] .$$

- Bei einem reellen und um die Trägerfrequenz  $f_T$  symmetrischen Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  – also falls  $H_K(f_T - f) = H_K(f_T + f)$  gilt – kann man diese Gleichung wie folgt vereinfachen:

$$H_{MKD}(f) = \frac{\cos(\Delta\phi_T)}{2} \cdot [H_K(f - f_T) + H_K(f + f_T)] .$$

- Die Signale  $b'(t)$  im unteren Bild sowie  $b(t)$  nach dem Demodulator des Bandpass-Systems (oberes Bild) sind somit bis auf die  $\pm 2f_T$ -Anteile identisch. Diese Anteile werden jedoch durch das Empfangsfilter  $H_E(f)$  eliminiert.

Die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten von ASK und BPSK können somit auch mit dem einfacheren Basisbandmodell berechnet werden, und zwar auch dann, wenn ein verzerrender Kanal  $H_K(f)$  vorliegt. Zu beachten ist, dass auch das Rauschsignal  $n(t)$  in den Tiefpassbereich transformiert werden muss. Bei **weißem Rauschen** muss hierzu  $\Phi_n(f) = N_0/2$  durch  $\Phi_{n,TP}(f) = N_0$  ersetzt werden.

## Basisbandmodell für ASK und BPSK (2)

Die Grafik verdeutlicht das Basisbandmodell anhand der Amplitudenspektren, wobei vereinfachend

- ein gaußförmiges  $Q(f)$ ,
- BPSK-Modulation,
- ein rechteckförmiger Bandpasskanal  $H_K(f)$ ,
- phasensynchrone Demodulation, und
- ein ebenfalls rechteckförmiges Empfangsfilter  $H_E(f)$  mit  $\Delta f_E > \Delta f_K$

vorausgesetzt werden. Man erkennt, dass das Spektrum  $D(f)$  durch das äquivalente Basisbandmodell richtig wiedergegeben wird, obwohl sich die Spektren  $B(f)$  bzw.  $B'(f)$  unterscheiden. Die resultierende Übertragungsfunktion  $H_{MKD}(f)$  berücksichtigt auch die Bandbegrenzung durch den Kanal.

