Musterlösung zur Aufgabe A4.17

a) Richtig ist hier der letzte Lösungsvorschlag. Die Energie ist gleich dem Wert $\boldsymbol{s}_0 = C$ in der Signalraumkonstellation zum Quadrat, geteilt durch 2. Der Faktor 1/2 berücksichtigt, dass die Nachricht m_1 keinen Energiebeitrag liefert ($\boldsymbol{s}_1 = 0$).

b) Die optimale Entscheidergrenze G liegt beim Schnittpunkt der beiden dargestellten Kurven. Der Faktor 1/2 berücksichtigt die gleichwahrscheinlichen Nachrichten m_0 und m_1. Damit erhält man folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{G}{2} \cdot \exp\left[-\frac{G^2}{2}\right] = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{G^2 - 2C \cdot G + C^2}{2}\right]$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{2\pi} \cdot G = \exp\left[C \cdot G - C^2/2\right] \quad \Rightarrow \quad C \cdot G - \ln\left(\sqrt{2\pi} \cdot G\right) - C^2/2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad G - \frac{1}{C} \cdot \ln\left(G\right) = C/2 + \frac{1}{2C} \cdot \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) = C/2 + \frac{1}{2C} \cdot \ln\left(2\pi\right).$$

Richtig ist hier also der Lösungsvorschlag 2.

c) Mit $C = 4$ lautet die unter b) angegebene Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} f(G) &= G - \frac{1}{C} \cdot \ln\left(G\right) - C/2 - \frac{1}{2C} \cdot \ln\left(2\pi\right) = \\ &= G - 0.25 \cdot \ln\left(G\right) - 2 - \ln\left(2\pi\right)/8 \approx G - 0.25 \cdot \ln\left(G\right) - 2.23 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur numerisch gelöst werden:

$$\begin{aligned} G = 2.0: \ f(G) &= -0.403\,, \ G = 3.0: \ f(G) = 0.495\,, \ G = 2.5: \ f(G) = 0.041\,, \\ G = 2.4: \ f(G) &= -0.049\,, \ G = 2.46: \ f(G) \approx 0. \end{aligned}$$

Die optimale Entscheidungsgrenze liegt demnach bei $G_{\rm opt}$ = 2.46 ≈ 2.5.

d) Die Fehlerwahrscheinlichkeit setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

$$p_{\rm S} = \Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \cdot \Pr(\mathcal{E}|m = m_1) + \frac{1}{2} \cdot \Pr(\mathcal{E}|m = m_0).$$

Der erste Anteil (Verfälschung von m_1 nach m_0) ergibt sich aus der Überschreitung der Grenze G durch die Rayleighverteilung

$$\Pr(\mathcal{E}|m = m_1) = \int_G^{\infty} p_{y|m}(\eta|m_1)\,{\rm d}\eta = {\rm e}^{-G^2/2} = {\rm e}^{-3.125} \approx 0.044.$$

Der zweite Anteil (Verfälschung von m_0 nach m_1) ergibt sich aus der Riceverteilung, die hier durch die Gaußverteilung angenähert ist:

$$\Pr(\mathcal{E}|m = m_0) = \int_0^{G} p_{y|m}(\eta|m_0)\,{\rm d}\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{G} {\rm e}^{-(\eta - C)^2/2}\,{\rm d}\eta.$$

Dieser Anteil lässt sich mit dem komplementären Gaußschen Fehlerintegral ${\rm Q}(x)$ angeben:

$$\begin{aligned}\Pr(\mathcal{E}|m=m_0) &= \Pr(y < G-C) = \Pr(y > C-G) = \\ &= \mathrm{Q}(\frac{C-G}{\sigma_n}) = \mathrm{Q}(\frac{4-2.5}{1}) = \mathrm{Q}(1.5) \approx 0.0688\,.\end{aligned}$$

Damit erhält man insgesamt:

$$p_\mathrm{S} = \Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}\cdot 0.0440 + \frac{1}{2}\cdot 0.0668 \approx \underline{5.54\,\%}\,.$$

Eine Simulation hat ergeben, dass sich eine etwas kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt, wenn man anstelle der Gaußnäherung die tatsächliche Riceverteilung ansetzt. Dann gilt mit $G = 2.5$:

$$p_\mathrm{S} = \Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}\cdot 0.0440 + \frac{1}{2}\cdot 0.0484 \approx \underline{4.62\,\%}\,.$$

Die Gaußnäherung liefert also eine obere Schranke für die tatsächliche Fehlerwahrscheinlichkeit.

e) Mit $C = 6$ lautet die unter c) angegebene Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned}&f(G) = G - \frac{1}{C}\cdot\ln\,(G) - C/2 - \frac{1}{2C}\cdot\ln\,(2\pi) \approx G - \ln\,(G)/6 - 3.153 = 0\,,\\ &G = 3.0:\ f(G) = -0.336\,,\ G = 3.5:\ f(G) = 0.138\,,\\ &G = 3.3:\ f(G) = -0.052\,,\ G = 3.35:\ f(G) \approx 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{G_\mathrm{opt} \approx 3.35}\,.\end{aligned}$$

f) Analog zur Teilaufgabe d) erhält man mit $G = 3.5$:

$$\begin{aligned}p_\mathrm{S} &= \Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-G^2/2} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Q}(C-G) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{-6.125} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Q}(2.5) = \frac{1}{2}\cdot 2.2\cdot 10^{-3} + \frac{1}{2}\cdot 6.2\cdot 10^{-3} \underline{= 0.42\,\%}\,.\end{aligned}$$

Mit der optimalen Entscheidergrenze $G_\mathrm{opt} = 3.35$ ergibt sich ein etwas kleinerer Wert:

$$p_\mathrm{S} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{-5.61} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Q}(2.65) = \frac{1}{2}\cdot 3.6\cdot 10^{-3} + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10^{-3} = 0.38\,\%\,.$$

Die tatsächliche Fehlerwahrscheinlichkeit bei Verwendung der Riceverteilung (keine Gaußnäherung) liefert einen etwas kleineren Wert: 0.33%.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.17

a) Die obere Grafik zeigt näherungsweise eine Gaußverteilung und gehört dementsprechend zur Riceverteilung. Richtig ist also der zweite Lösungsvorschlag.

b) Man erkennt aus der Grafik: Der Mittelwert der Gaußverteilung ist $C = 4$ und die Streuung ist $\sigma_n = 1$. Vorgegeben war ja, dass C und σ_n ganzzahlig seien. Damit lauten die beiden Dichtefunktionen:

$$p_{\rm I}(\eta) = \eta \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2+16}{2}\right] \cdot {\rm I}_0(4\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(\eta-4)^2}{2}\right],$$

$$p_{\rm II}(\eta) = \eta \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2}{2}\right].$$

c) Richtig ist der Lösungsvorschlag 2, wie bereits aus der Grafik ersichtlich ist. Eine Rechnung bestätigt dieses Ergebnis:

$$\sigma^2_{\rm Rice} = \sigma_n^2 = 1,$$

$$\sigma^2_{\rm Rayl} = \sigma_n^2 \cdot (2-\frac{\pi}{2}) \approx 0.429.$$

d) Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, dass y größer ist als ein Wert y_0, gleich

$$\Pr(y > y_0) = \int_{y_0}^{\infty} \frac{\eta}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2}{2\sigma_n^2}\right] {\rm d}\eta.$$

Mit der Substitution $x^2 = \eta^2/(2\sigma_n^2)$ kann hierfür geschrieben werden:

$$\Pr(y > y_0) = 2 \cdot \int_{y_0/(\sqrt{2}\cdot\sigma_n)}^{\infty} x \cdot {\rm e}^{-x^2}\,{\rm d}x = \left[{\rm e}^{-x^2}\right]^{\infty}_{\sqrt{2}\cdot\sigma_n} = \exp\left[-\frac{y_0^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

Hierbei wurde das vorne angegebene unbestimmte Integral benutzt. Insbesondere gilt:

$$\Pr(y > \sigma_n) = {\rm e}^{-0.5} \approx 0.607,$$

$$\Pr(y > 2\sigma_n) = {\rm e}^{-2.0} \approx 0.135,$$

$$\Pr(y > 3\sigma_n) = {\rm e}^{-4.5} \approx 0.011.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.18

a) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1, 2 und 4. Bei kohärenter Demodulation ist Orthogonalität dann gegeben, wenn der Modulationsindex h ein Vielfaches von 0.5 ist. Binäre FSK mit h = 0.5 nennt man auch *Minimum Shift Keying* (MSK). Da durch die Phasenregelung die Phasenverschiebung (Laufzeit) auf dem AWGN–Übertragungskanal ausgeglichen wird → $\exp(\mathrm{j}\phi) \cdot \exp(-\mathrm{j}\phi) = 1$, gilt tatsächlich für die Signale im äquivalenten Tiefpassbereich:

$$r(t) = s(t) + n(t)\,.$$

b) Hier ist nur der erste Lösungsvorschlag richtig, das heißt, h = 1, 2, 3, ... muss nun ganzzahlig sein. Nichtkohärente Demodulation von FSK ist somit nicht möglich. Wegen der fehlenden Phasenregelung gilt außerdem:

$$r(t) = s(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\phi} + n(t)\,.$$

c) Bei gleichwahrscheinlichen Nachrichten gilt:

$$p_\mathrm{S} = \mathrm{Pr}(\mathcal{E}) = \mathrm{Pr}(\mathcal{E}|\, m = m_0) = \mathrm{Pr}(\hat{m} = m_1 |\, m = m_0)\,.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der vorgegebenen Gleichung mit $\gamma = 1$. In diesem Fall ist stets $\mathit{\Gamma}$ = „Z” und die Entscheidungsregel lautet dann: Entscheide auf das Symbol m_0, falls $y_1 > y_2$:

$$p_\mathrm{S} = \frac{1}{1+\gamma^2} \cdot \exp\left[- \frac{\gamma^2 \cdot E_\mathrm{S}}{(1+\gamma^2)\cdot N_0}\right]_{\gamma = 1} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-E_\mathrm{S}/(2N_0)}\,.$$

Mit $E_\mathrm{S}/N_0 = 10$ erhält man $p_\mathrm{S} = 1/2 \cdot \mathrm{e}^{-5} \approx \underline{3.37 \cdot 10^{-3}}$.

d) Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus Symmetriegründen zu

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}(\mathit{\Gamma} = \text{"Z"} \cap \mathrm{Fehler}) &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Pr}\{(\hat{m} = m_1) \cap \mathit{\Gamma} = \text{"Z"}\,|\, m_0\} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Pr}\{(\hat{m} = m_0) \cap (\mathit{\Gamma} = \text{"Z"})\,|\, m_1\} = \\ &= \mathrm{Pr}\{(\hat{m} = m_1) \cap (\mathit{\Gamma} = \text{"Z"})\,|\, m_0\} = \\ &= \frac{1}{1+2^2} \cdot \exp\left[- \frac{2^2 \cdot E_\mathrm{S}}{(1+2^2)\cdot N_0}\right] = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{e}^{-8} = \underline{6.7 \cdot 10^{-5}}\,.\end{aligned}$$

e) Da „U” und „Z” nach der Statistik ein vollständiges System ergeben, gilt mit den Ergebnissen der Teilaufgaben c) und d):

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}(\mathit{\Gamma} = \text{"U"} \cap \mathrm{Fehler}) &= \mathrm{Pr}(\mathrm{Fehler}) - \mathrm{Pr}(\mathit{\Gamma} = \text{"Z"}, \mathrm{Fehler}) = \\ &= 3.37 \cdot 10^{-3} - 6.7 \cdot 10^{-5} = \underline{3.3 \cdot 10^{-3}}\,.\end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathrm{Pr}(\mathit{\Gamma} = U \,|\, \mathrm{Fehler})$:

$$\mathrm{Pr}(\mathit{\Gamma} = \text{"U"}\,|\mathrm{Fehler}) = \frac{\mathrm{Pr}(\mathit{\Gamma} = \text{"U"} \cap \mathrm{Fehler})}{\mathrm{Pr}(\mathrm{Fehler})} = \frac{3.3 \cdot 10^{-3}}{3.37 \cdot 10^{-3}} = \underline{0.98}\,.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.18

a) Ein Vergleich der Gleichungen auf der Angabenseite macht deutlich, dass bei binärer FSK mit kohärenter Demodulation das AWGN–Verhältnis E_B/N_0 verdoppelt werden muss, damit die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie bei BPSK erreicht wird. In anderen Worten: Die kohärente BFSK–Kurve liegt um $10 \cdot \lg(2) \approx 3$ dB rechts von der BPSK–Kurve. Um $p_B \le 10^{-5}$ zu garantieren, muss gelten:

$$10 \cdot \lg \frac{E_B}{N_0} \approx 9.6\ \text{dB} + 3\ \text{dB} \underline{= 12.6\ \text{dB}}\,.$$

b) Die angegebene Gleichung gilt nicht nur für die MSK (diese ist eine FSK mit h = 0.5), sondern für jede Form von orthogonaler FSK. Eine solche liegt vor, wenn der Modulationsindex h ein ganzzahliges Vielfaches von 0.5 ist, zum Beispiel für h = 1. Mit h = 0.7 ergibt sich keine orthogonale FSK.

Es kann gezeigt werden, dass sich für h = 0.7 sogar eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als bei orthogonaler FSK ergibt. Mit $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = 12.6 dB erreicht man hier sogar $p_B \approx 10^{-6}$, also eine Verbesserung um eine Zehnerpotenz. Richtig ist demzufolge der <u>Lösungsvorschlag 2</u>.

c) Aus der Umkehrfunktion der angegebenen Gleichung erhält man:

$$\frac{E_B}{2 \cdot N_0} = \ln \frac{1}{2p_B} = \ln(50000) \approx 10.82$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_B}{N_0} = 21.64 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \lg \frac{E_B}{N_0} \underline{\approx 13.4\ \text{dB}}\,.$$

d) Aus $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = 12.6 dB folgt:

$$\frac{E_B}{N_0} = 10^{1.26} \approx 16.8 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_B}{2 \cdot N_0} \approx 8.4 \quad \Rightarrow \quad p_B = \frac{1}{2} \cdot \text{e}^{-8.4} \underline{\approx 1.12 \cdot 10^{-4}}\,.$$

Das heißt: Bei gleichem E_B/N_0 wird die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der nichtkohärenter Demodulation gegenüber kohärenter Demodulation (siehe Teilaufgabe a) um etwa den Faktor 11 vergrößert.

Musterlösung zur Aufgabe A4.19

a) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 3. Bei der Konstellation **B** ist dagegen die Orthogonalität nicht gegeben. Vielmehr gilt hier $M = 3$ und $N = 2$.

b) Für die binäre FSK ($M = 2$) gilt mit der Abkürzung $x = E_S/N_0 = 6$:

$$p_S = (-1)^2 \cdot \binom{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-x/2} = \frac{1}{2} \cdot e^{-3} \approx \underline{0.0249}\,.$$

Entsprechend erhält man für die ternäre FSK ($M = 3$):

$$p_S = (-1)^2 \cdot \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-(1/2)\cdot x} + (-1)^3 \cdot \binom{2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-(2/3)\cdot x} =$$
$$= e^{-3} - \frac{1}{3} \cdot e^{-4} \approx 0.0498 - 0.0061 = \underline{0.0437}\,.$$

Schließlich ergibt sich für die quaternäre FSK ($M = 4$):

$$p_S = (-1)^2 \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-x/2} + (-1)^3 \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-2x/3} + (-1)^4 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{-3x/4}$$
$$= \frac{3}{2} \cdot e^{-3} - e^{-4} + e^{-4.5} \approx 0.0747 - 0.0183 + 0.0111 = \underline{0.0675}\,.$$

c) Mit konstantem $E_S/N_0 = 6$ gilt stets $p_{S,\,max} \ge p_S$:

$$\begin{aligned} M = 2: \quad p_{S,\,max} &= \underline{0.0249} = p_S\,, \\ M = 3: \quad p_{S,\,max} &= \underline{0.0498} > 0.0437 = p_S\,, \\ M = 4: \quad p_{S,\,max} &= \underline{0.0747} > 0.0675 = p_S\,. \end{aligned}$$

Analysiert man die Gleichung

$$p_{S\,max} = (M-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-E_S/(2N_0)}$$

etwas genauer, so erkennt man, dass diese Schranke genau die **Union Bound** angibt:

- Beim Binärsystem gibt $1/2 \cdot \exp[-E_S/(2N_0)]$ die Verfälschungswahrscheinlichkeit an, zum Beispiel von $\boldsymbol{s}_1$ nach $\boldsymbol{s}_2$ oder umgekehrt.
- Beim M–stufigen System ist der Abstand zwischen $\boldsymbol{s}_1$ und $\boldsymbol{s}_2$ genau so groß. Aber auch die Punkte $\boldsymbol{s}_3, \ldots, \boldsymbol{s}_M$ liegen im gleichen Abstand zu $\boldsymbol{s}_1$ bzw. zu $\boldsymbol{s}_2$.
- Die „Union Bound" berücksichtigt die Verfälschungsmöglichkeiten eines Punktes zu jedem der allgemein $M - 1$ anderen Punkte durch den Faktor $M - 1$.

d) Mit $E_B = E_S/\text{ld}(M)$ erhält man

$$p_{S\,max} = \frac{M-1}{2} \cdot \exp\left[-\frac{\text{ld}\,(M) \cdot E_B}{2 \cdot N_0}\right]\,.$$

Nun wird die Fehlerwahrscheinlichkeit mit zunehmender Stufenzahl immer kleiner, da bei konstantem E_B die Energie E_S pro Symbol um den Faktor ld (M) zunimmt. Der Faktor $M - 1$ (dieser berücksichtigt die

Verfälschungsmöglichkeiten eines Signalraumpunktes) hat dann weniger Einfluss als die Vergrößerung des negativen Exponenten:

$$\begin{aligned} M = 2: \quad p_{\rm S,max} &= 1/2 \cdot {\rm e}^{-3} \ \underline{= 0.0249}\,, \\ M = 3: \quad p_{\rm S,max} &= {\rm e}^{-4.755} \ \underline{= 0.0086}\,, \\ M = 4: \quad p_{\rm S,max} &= 3/2 \cdot {\rm e}^{-6} \ \underline{= 0.0037}\,. \end{aligned}$$