Musterlösung zur Aufgabe A3.11

a) Richtig sind die <u>beiden ersten Lösungsvorschläge</u>. Das Signal $m(t)$ nach dem Matched–Filter $H_{\rm MF}(f)$ weist das größtmögliche Signal–zu–Störleistungsverhältnis auf. Die Störanteile der Folge $\langle m_\nu \rangle$ sind aber aufgrund der spektralen Formung (stark) korreliert. Aufgabe des zeitdiskreten Dekorrelationsfilters mit dem Frequenzgang $H_{\rm DF}(f)$ ist es, diese Bindungen aufzulösen, weshalb für $H_{\rm DF}(f)$ auch der Name „Whitening–Filter" verwendet wird. Dies ist allerdings nur auf Kosten einer erhöhten Störleistung möglich ⇒ der letzte Lösungsvorschlag trifft nicht zu.

b) Die beiden bei $\underline{\nu = 1}$ ankommenden Pfeile sind jeweils blau gezeichnet und kennzeichnen das Symbol $a_1 = 0$. Somit ist bereits zu diesem Zeitpunkt das Ausgangssymbol a_1 festgelegt. Ebenso stehen die Symbole $a_3 = 1$ und $a_5 = 0$ bereits zu den Zeitpunkten $\underline{\nu = 3}$ bzw. $\underline{\nu = 5}$ fest.

Dagegen ist zum Zeitpunkt $\nu = 2$ eine Entscheidung bezüglich des Symbols a_2 nicht möglich. Unter der Hypothese, dass das nachfolgende Symbol $a_3 = 0$ sein wird, würde sich Symbol $a_2 = 1$ ergeben (bei „0" kommt ein roter Pfad an, also von „1" kommend). Dagegen führt die Hypothese $a_3 = 1$ zum Ergebnis $a_2 = 0$ (der bei „1" ankommende Pfad ist blau).

c) Aus den durchgehenden Pfaden bei $\nu = 5$ ist ersichtlich:

$$a_1 \underline{= 0}, \quad a_2 \underline{= 0}, \quad a_3 \underline{= 1}, \quad a_4 \underline{= 0}, \quad a_5 \underline{= 0}.$$

d) Richtig ist nur die <u>zweite Aussage</u>: Da die Quellensymbole „0" und „1" als gleichwahrscheinlich vorausgesetzt wurden, ist der ML–Empfänger (Viterbi) identisch mit dem MAP–Empfänger.

Ein Schwellenwertentscheider – der zu jedem Takt eine symbolweise Entscheidung trifft – hat nur dann die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie der Viterbi–Empfänger, wenn es keine Impulsinterferenzen gibt. Dies ist hier offensichtlich nicht der Fall, sonst müsste zu jedem Zeitpunkt ν eine endgültige Entscheidung getroffen werden können.

Die erste Aussage trifft ebenfalls nicht zu. Das würde nämlich bedeuten, dass der Viterbi–Empfänger die Fehlerwahrscheinlichkeit 0 haben kann. Dies ist aus informationstheoretischen Gründen nicht möglich.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.11

a) Aus den Gleichungen auf der Angabenseite erkennt man $d_0 = \underline{-0.4}$ und $d_1 = \underline{-0.8}$.

b) Die Fehlergrößen $\varepsilon_0(i)$ beinhalten den Grundimpulswert g_{-1}, über den der Zusammenhang zwischen dem Amplitudenkoeffizienten a_1 und dem Detektionsabtastwert d_0 hergestellt wird (g_0 ist in diesen Gleichungen nicht enthalten). Man erkennt $g_{-1} \underline{= 0.4}$. Aus den Gleichungen für ν = 1 ist der Hauptwert $g_0 \underline{= 0.6}$ ablesbar.

c) Die möglichen Nutzabtastwerte sind $\pm g_0 \pm g_{-1} = \pm 0.6 \pm 0.4$, also $\underline{\pm 0.2}$ und $\underline{\pm 1.0}$. Bei unipolarer Signalisierung würden sich die Werte 0, 0.4, 0.6 und 1 ergeben. Der Zusammenhang zwischen bipolaren Werten b_i und den unipolaren Äquivalenten u_i lautet allgemein:

$$b_i = 2 \cdot u_i - 1\,.$$

d) Die Fehlergrößen ergeben sich für ν = 2 unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus c) wie folgt:

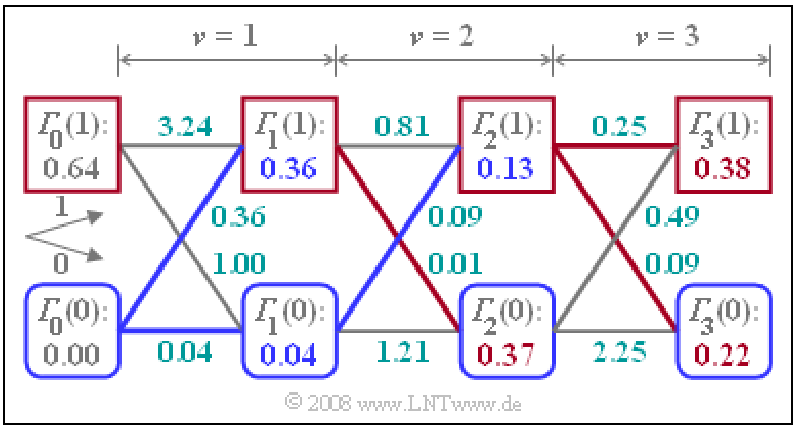
$$\begin{aligned}\varepsilon_2(+1,+1) &= [0.1-1.0]^2 = 0.81, \;\; \varepsilon_2(-1,+1) = [0.1+0.2]^2 = 0.09\,,\\ \varepsilon_2(+1,-1) &= [0.1-0.2]^2 = 0.01, \;\; \varepsilon_2(-1,-1) = [0.1+1.0]^2 = 1.21\,.\end{aligned}$$

Damit lauten die minimalen Gesamtfehlergrößen:

$$\begin{aligned}\mathit{\Gamma}_2(+1) &= \mathrm{Min}\left[\mathit{\Gamma}_1(+1) + \varepsilon_2(+1,+1),\;\; \mathit{\Gamma}_1(-1) + \varepsilon_2(-1,+1)\right] = \\ &= \mathrm{Min}\left[0.36+0.81, 0.04+0.09\right] \;\underline{= 0.13}\,,\\ \mathit{\Gamma}_2(-1) &= \mathrm{Min}\left[\mathit{\Gamma}_1(+1) + \varepsilon_2(+1,-1),\;\; \mathit{\Gamma}_1(-1) + \varepsilon_2(-1,-1)\right] = \\ &= \mathrm{Min}\left[0.36+0.01, 0.04+1.21\right] \;\underline{= 0.37}\,.\end{aligned}$$

$\mathit{\Gamma}_2(+1)$ = 0.13 ist die minimale Gesamtfehlergröße unter der Hypothese, dass das nachfolgende Symbol a_3 = +1 sein wird. Unter dieser Annahme ist a_2 = –1 wahrscheinlicher als a_2 = +1, wie aus dem nachfolgenden Trellisdiagramm hervorgeht (der ankommende Pfad ist blau).

<u>Hinweis:</u> In nebenstehender Grafik ist der Zustand „1” als „+1” und „0” als „–1” zu interpretieren.



Eine durchaus realistische Alternative zu der Kombination „$a_2 = -1$, $a_3 = +1$” ist „a_2 = +1, a_3 = –1”, die zur minimalen Gesamtfehlergröße $\mathit{\Gamma}_2(-1)$ = 0.37 führen. Hier ist der ankommende Pfad rot.

e) Nun gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_3(+1,+1) &= [0.5-1.0]^2 = 0.25, \;\; \varepsilon_3(-1,+1) = [0.5+0.2]^2 = 0.49\,,\\ \varepsilon_3(+1,-1) &= [0.5-0.2]^2 = 0.09, \;\; \varepsilon_3(-1,-1) = [0.5+1.0]^2 = 2.25\,.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \varGamma_3(+1) = \text{Min}\,[0.13 + 0.25, 0.37 + 0.49] \;\underline{= 0.38},$$
$$\varGamma_3(-1) = \text{Min}\,[0.13 + 0.09, 0.37 + 2.25] \;\underline{= 0.22}.$$

Bei beiden Gleichungen ist der jeweils erste Term der kleinere, wobei jeweils $\varGamma_2(+1) = 0.13$ enthalten ist. Deshalb wird der Viterbi–Empfänger mit Sicherheit $a_3 = +1$ ausgeben, ganz egal, welche Informationen er zu späteren Zeitpunkten ($\nu > 3$) noch bekommen wird.

Verfolgt man den durchgehenden Pfad im Trellisdiagramm, so sind durch diese Festlegung bei $\nu = 3$ auch die früheren Amplitudenkoeffizienten fix: $a_1 = a_2 = -1$.

Musterlösung zur Aufgabe A3.12

a) Die erste Fehlergröße wird wie folgt berechnet:

$$\varepsilon_2(010) = [d_0 - 0 \cdot g_0 - 1 \cdot g_{-1} - 0 \cdot g_{-2}]^2 = [0.2 - 0.3]^2 \underline{= 0.01}\,.$$

Entsprechend gilt für die weiteren Fehlergrößen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(011) &= [0.2 - 0.3 - 0.2]^2 \underline{= 0.09}\,,\\ \varepsilon_2(110) &= [0.2 - 0.5 - 0.3]^2 \underline{= 0.36}\,,\\ \varepsilon_2(111) &= [0.2 - 0.5 - 0.3 - 0.2]^2 \underline{= 0.64}\,.\end{aligned}$$

b) Die Aufgabe ist, jeweils den minimalen von zwei Vergleichswerten zu finden:

$$\begin{aligned}\varGamma_2(10) &= \mathrm{Min}\,[\varGamma_1(01) + \varepsilon_2(010),\;\; \varGamma_1(11) + \varepsilon_2(110)] =\\ &= \mathrm{Min}\,[0.2 + 0.01, 1.2 + 0.36] \;\underline{= 0.21}\,,\\ \varGamma_2(11) &= \mathrm{Min}\,[\varGamma_1(01) + \varepsilon_2(011),\;\; \varGamma_1(11) + \varepsilon_2(111)] =\\ &= \mathrm{Min}\,[0.2 + 0.09, 1.2 + 0.64] \;\underline{= 0.29}\,.\end{aligned}$$

c) Richtig sind der <u>erste und der letzte Lösungsvorschlag</u>. Die Folge **1011010** erkennt man aus dem durchgehenden Pfad. Dagegen kann über das Symbol a_8 zum Zeitpunkt $\nu = 8$ noch keine endgültige Aussage gemacht werden: Nur unter der Hypothese $a_9 = 1$ und $a_{10} = 1$ würde man sich für $a_8 = 0$ entscheiden, bei anderen Hypothesen für $a_8 = 1$.

Musterlösung zur Aufgabe A3.13

a) Ohne Impulsinterferenzen bringen der DFE– und der ML–Empfänger keine Verbesserung gegenüber der einfachen Schwellenwertentscheidung:

$$p_{\rm SE} = p_{\rm DFE} = p_{\rm ML} \underline{\approx 2.87 \cdot 10^{-7}}\,.$$

b) Mit $g_0 = 0.6$, $g_{-1} = 0.1$ und $g_1 = 0.3$ erhält man näherungsweise:

$$\begin{aligned}
p_{\rm SE} &\approx \frac{1}{4} \cdot {\rm Q}\left(\frac{0.6-0.1-0.3}{0.2}\right) = \frac{1}{4} \cdot {\rm Q}(1) \underline{\approx 0.04}\,,\\
p_{\rm DFE} &\approx \frac{1}{2} \cdot {\rm Q}\left(\frac{0.6-0.1}{0.2}\right) = \frac{1}{2} \cdot {\rm Q}(2.5) \underline{\approx 3.1 \cdot 10^{-3}}\,,\\
p_{\rm ML} &\approx {\rm Q}\left(\frac{0.6}{0.2}\right) = {\rm Q}(3) \underline{\approx 1.35 \cdot 10^{-3}}\,.
\end{aligned}$$

c) Die Fehlerwahrscheinlichkeiten lauten mit $g_0 = 0.4$ und $g_1 = g_{-1} = 0.3$:

$$\begin{aligned}
p_{\rm SE} &\approx \frac{1}{4} \cdot {\rm Q}(0) \underline{= 0.125} \quad \Rightarrow \quad {\rm geschlossenes\ Auge}\,,\\
p_{\rm DFE} &\approx \frac{1}{2} \cdot {\rm Q}\left(\frac{0.4-0.3}{0.2}\right) = \frac{1}{2} \cdot {\rm Q}(0.5) \underline{\approx 0.15}\,,\\
p_{\rm ML} &\approx {\rm Q}\left(\frac{0.4}{0.2}\right) = {\rm Q}(2) \underline{\approx 0.0227}\,.
\end{aligned}$$

Interessant – und nicht etwa ein Rechenfehler – ist, dass die DFE schlechter ist als der herkömmliche Schwellenwertentscheider, wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit 10% oder mehr beträgt (siehe dazu auch die Musterlösung zur Teilaufgabe d).

d) Nun ergibt sich auch für den DFE–Empfänger ein geschlossenes Auge. Die Fehlerwahrscheinlichkeit $p_{\rm DFE}$ ist größer als $p_{\rm SE}$, da nun die ungünstigste Symbolfolge häufiger auftritt. Nach der angegebenen einfachen Näherung gilt:

$$p_{\rm SE} = \frac{1}{4} \cdot {\rm Q}(0) = 0.125\,, \quad p_{\rm DFE} = \frac{1}{2} \cdot {\rm Q}(0) \underline{= 0.250}\,.$$

Bei exakter Rechnung erhält man dagegen:

$$\begin{aligned}
p_{\rm SE} &= \frac{1}{4} \cdot {\rm Q}\left(\frac{0.3-0.4-0.3}{0.2}\right) + \frac{1}{4} \cdot {\rm Q}\left(\frac{0.3-0.4+0.3}{0.2}\right) + \\
&+ \frac{1}{4} \cdot {\rm Q}\left(\frac{0.3+0.4-0.3}{0.2}\right) + \frac{1}{4} \cdot {\rm Q}\left(\frac{0.3+0.4+0.3}{0.2}\right) = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[{\rm Q}(-2) + {\rm Q}(1) + {\rm Q}(2) + {\rm Q}(5)\right] = \frac{1}{4} \cdot \left[1 + {\rm Q}(1) + {\rm Q}(5)\right]\,.
\end{aligned}$$

Wegen ${\rm Q}(-2) + {\rm Q}(2) = 1$ und ${\rm Q}(5) \approx 0$ erhält man daraus $p_{\rm SE} \approx 25.5\%$.

Entsprechend gilt für den DFE–Empfänger:

$$
\begin{aligned}
p_{\rm DFE} &= \frac{1}{2}\cdot {\rm Q}\left(\frac{0.3-0.4}{0.2}\right) + \frac{1}{2}\cdot {\rm Q}\left(\frac{0.3+0.4}{0.2}\right) + \\
&= \frac{1}{2}\cdot [{\rm Q}(-0.5) + {\rm Q}(3.5)] \approx \frac{1-{\rm Q}(0.5)}{2} \underline{= 0.35}.
\end{aligned}
$$

Dagegen beträgt die Fehlerwahrscheinlichkeit $p_{\rm ML}$ eines Maximum–Likelihood–Empfängers weiterhin Q(2) $\underline{= 2.27\%}$. Die Reihenfolge der Detektionsgrundimpulswerte ist für die Fehlerwahrscheinlichkeit des Viterbi–Empfängers (nahezu) nicht von Bedeutung.