

## Musterlösung zur Aufgabe A2.7

**a)** Die Modulo-2-Addition kann auch als Antivalenz aufgefasst werden. Es gilt  $b_v = +1$ , falls sich  $q_v$  und  $b_{v-1}$  unterscheiden, andernfalls ist  $b_v = -1$  zu setzen. Mit dem Startwert  $b_0 = -1$  erhält man:

$$b_1 = +1, \quad b_2 = +1, \quad b_3 = -1, \quad b_4 = +1, \quad b_5 = +1, \quad b_6 = -1, \\ b_7 = +1, \quad b_8 = +1, \quad b_9 = +1, \quad b_{10} = +1, \quad b_{11} = +1, \quad b_{12} = -1.$$

**b)** Die AMI-Codierung liefert die folgenden Amplitudenkoeffizienten:

$$a_1 = +1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = +1, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = -1, \\ a_7 = +1, \quad a_8 = 0, \quad a_9 = 0, \quad a_{10} = 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} = -1.$$

Zu diesem Ergebnis kommt man entweder über die Gleichung  $a_v = (b_v - b_{v-1})/2$  oder durch direkte Anwendung der einfachen AMI-Codierregel:

- Ein Quellensymbol  $q_v = -1$  führt stets zu  $a_v = 0$ .
- Die Quellensymbole  $q_v = +1$  führen alternierend zu  $a_v = +1$  und  $a_v = -1$ .

**c)** Der AMI-Code liefert zwischen  $v = 8$  und  $v = 11$  vier aufeinanderfolgende Nullen. Beim HDB3-Code würden diese vier Symbole mit „+0 0 +“ markiert. Dadurch wird zur Kenntlichmachung die AMI-Regel bewusst verletzt. Dagegen ersetzt der B6ZS-Code nur Nullfolgen der Länge 6 ⇒ Lösungsvorschlag 1.

**d)** Unter der Annahme gleichwahrscheinlicher Binärwerte  $\pm 1$  erhält man  $\Pr(a_v = 0) = \Pr(q_v = -1) = 1/2$  und aus Symmetriegründen  $\Pr(a_v = +1) = \Pr(a_v = -1) = 1/4$ .

**e)** Mit den unter d) berechneten Wahrscheinlichkeiten erhält man:

$$E[a_v] = \frac{1}{4} \cdot (+1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-1) = 0, \\ E[a_v^2] = \frac{1}{4} \cdot (+1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot (-1)^2 = 0.5.$$

**f)** Der AKF-Wert bei  $\lambda = 0$  ist gleich dem quadratischen Mittelwert der Amplitudenkoeffizienten:

$$\varphi_a(\lambda = 0) = E[a_v^2] = 0.5.$$

Da die Ordnung des AMI-Codes  $N = 1$  ist, gilt für  $\lambda > 1$ :

$$\varphi_a(\lambda > 1) = E^2[a_v] = 0.$$

Der AKF-Wert  $\varphi_a(\lambda = 1)$  muss durch Mittelung bestimmt werden:

$$\varphi_a(\lambda = 1) = E[a_v \cdot a_{v+1} \cdot \Pr(a_v \cap a_{v+1})].$$

Von den neun Kombinationsmöglichkeiten für  $a_v \cdot a_{v+1}$  liefern nur vier einen von 0 verschiedenen Wert.

In den anderen Fällen ist entweder  $a_v = 0$  oder  $a_{v+1} = 0$ . Da beim AMI-Code aber auch

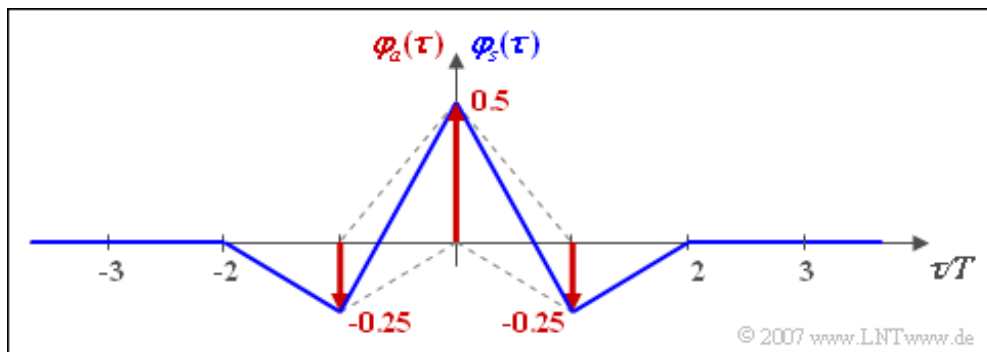
$$\Pr[(a_v = +1) \cap (a_{v+1} = +1)] = 0, \\ \Pr[(a_v = -1) \cap (a_{v+1} = -1)] = 0$$

zutritt, erhält man mit

$$\begin{aligned} \Pr[(a_\nu = +1) \cap (a_{\nu+1} = -1)] &= \Pr(a_\nu = +1) \cdot \Pr(a_{\nu+1} = -1 | a_\nu = +1) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr[(a_\nu = -1) \cap (a_{\nu+1} = +1)] &= \Pr(a_\nu = -1) \cdot \Pr(a_{\nu+1} = +1 | a_\nu = -1) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

als Endergebnis  $\varphi_a(\lambda = +1) = \varphi_a(\lambda = -1) \underline{=} -0.25$ , da die AKF stets eine gerade Funktion ist. Hierbei ist berücksichtigt, dass nach  $a_\nu = +1$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $a_{\nu+1} = 0$  und  $a_{\nu+1} = -1$  folgt.



Die obige Grafik zeigt die diskrete AKF  $\varphi_a(\lambda)$  der Amplitudenkoeffizienten und die AKF  $\varphi_s(\tau)$  des Sendesignals unter der Voraussetzung von NRZ-Rechteckimpulsen und AMI-Codierung. Dabei ist die blau gezeichnete AKF  $\varphi_s(\tau)$  das Ergebnis der (diskreten) Faltung zwischen der diskreten AKF  $\varphi_a(\lambda)$  – rot gezeichnet – und der dreieckförmigen Energie-AKF des Sendegrundimpulses.

**g)** Aus der angegebenen Gleichung erhält man unter Berücksichtigung der in f) berechneten diskreten AKF-Werte  $\varphi_a(\lambda = 0) = 1/2$ ,  $\varphi_a(|\lambda| = 1) = -1/4$  und  $\varphi_a(|\lambda| > 1) = 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_a(f) &= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi_a(\lambda) \cdot e^{-j 2\pi f \lambda T} = \varphi_a(\lambda = 0) + 2 \cdot \varphi_a(\lambda = 1) \cdot \cos(2\pi f \lambda T) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2\pi f T)] = \sin^2(\pi f T). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$\Phi_a(f = 0) \underline{=} 0, \quad \Phi_a(f = \frac{1}{2T}) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \underline{=} 1.$$

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.7

a) Beim AMI-Code kann das LDS wie folgt umgeformt werden:

$$\Phi_s(f) = s_0^2 \cdot T \cdot \sin^2(\pi f T) \cdot \text{si}^2(\pi f T).$$

Dieser Kurvenverlauf ist rot dargestellt. Das LDS der Amplitudenkoeffizienten ist  $\Phi_a(f) = \sin^2(\pi f T)$ .

b) Nach Umformung erhält man für den Duobinär code:

$$\Phi_s(f) = s_0^2 \cdot T \cdot \cos^2(\pi f T) \cdot \text{si}^2(\pi f T).$$

In der Grafik ist der Duobinär code blau gezeichnet. Es gilt weiter:  $\Phi_a(f) = \cos^2(\pi f T)$ .

c) Der Bipolarcode zweiter Ordnung unterscheidet sich vom AMI-Code nur durch den Faktor 2 im Argument der  $\sin^2$ -Funktion:

$$\Phi_s(f) = s_0^2 \cdot T \cdot \sin^2(2\pi f T) \cdot \text{si}^2(\pi f T).$$

Der grüne Kurvenzug stellt diesen Funktionsverlauf dar. Gegenüber dem AMI-Code ist  $\Phi_a(f)$  genau halb so breit.

d) Die Sendeleistung  $P_S$  ist gleich dem Integral über das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_s(f)$  und ist für alle hier betrachteten Codes gleich  $\Rightarrow$  Lösungsvorschlag 4. Dies folgt auch aus der Leistungsberechnung durch Scharmittelung:

$$\begin{aligned} P_S &= \Pr[s(t) = +s_0] \cdot (+s_0)^2 + \Pr[s(t) = -s_0] \cdot (-s_0)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot s_0^2 + \frac{1}{4} \cdot s_0^2 = \frac{1}{2} \cdot s_0^2. \end{aligned}$$

e) Gleichsignalfreiheit liegt vor, wenn das Leistungsdichtespektrum bei der Frequenz  $f = 0$  keinen Anteil aufweist. Dies gilt für den AMI-Code und den Bipolarcode zweiter Ordnung  $\Rightarrow$  Lösungsvorschläge 1 und 3. Diese Aussage bedeutet nicht nur, dass  $s(t)$  keinen Gleichanteil besitzt, also dass  $\Phi_s(f)$  keine Diracfunktion bei  $f = 0$  besitzt. Es bedeutet darüber hinaus auch, dass der kontinuierliche LDS-Anteil bei  $f = 0$  verschwindet. Dies wird genau dann erreicht, wenn die lange „+1“- und die lange „-1“-Folge durch die Codiervorschrift ausgeschlossen werden.

f) Beide vorgegebenen Lösungsvorschläge treffen in der Praxis zu.

## Musterlösung zur Aufgabe A2.8

a) Aus dem angegebenen S/N-Verhältnis erhält man:

$$10 \cdot \lg \frac{s_0^2 \cdot T}{N_0} = 10 \text{ dB} \Rightarrow N_0 = \frac{s_0^2 \cdot T}{10}$$
$$\Rightarrow \sigma_d^2 = 1.12 \cdot \frac{N_0}{2T} = 0.056 \cdot s_0^2 \Rightarrow \frac{\sigma_d}{s_0} \underline{\underline{= 0.237}}.$$

b) Daraus folgt für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit des binären redundanzfreien Referenzsystems:

$$p_S = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) \approx Q(4.22) \underline{\underline{= 1.22 \cdot 10^{-5}}}.$$

c) Die Symboldauer  $T$  des AMI-codierten Signals ist gleich der Bitdauer  $T_B$  des Binärsignals. Deshalb ändert sich an den Bandbreitenverhältnissen nichts und man erhält den gleichen Rauscheffektivwert wie unter Punkt a) berechnet:

$$\sigma_d/s_0 \underline{\underline{= 0.237}}.$$

d) Aufgrund der ternären Entscheidung wird das Argument der Q-Funktion halbiert:

$$p_S \approx \frac{4}{3} \cdot Q(2.11) = \frac{4}{3} \cdot 1.74 \cdot 10^{-2} \underline{\underline{= 2.32 \cdot 10^{-2}}}.$$

Der Faktor  $4/3$  berücksichtigt hierbei, dass das innere Symbol „0“ nach zwei Richtungen hin verfälscht werden kann.

e) Bei Anwendung einer 4B3T-Codierung wird die Symbolrate um 25% verringert. Um den gleichen Faktor 0.75 wird dadurch die Rauschleistung kleiner als unter a) und c) berechnet. Daraus folgt:

$$\sigma_d/s_0 = \sqrt{0.75} \cdot 0.237 \underline{\underline{\approx 0.205}}.$$

f) Aufgrund des kleineren Rauscheffektivwertes ergibt sich nun eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als mit dem AMI-Code:

$$p_S \approx \frac{4}{3} \cdot Q\left(\frac{0.5}{0.205}\right) = \frac{4}{3} \cdot 0.833 \cdot 10^{-2} \underline{\underline{= 1.11 \cdot 10^{-2}}}.$$

Die noch kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit des redundanzfreien Binär codes kann der 4B3T-Code aufgrund der ternären Entscheidung (halbe Augenöffnung) jedoch nicht erreichen.