

Musterlösung zur Aufgabe A1.8

a) Bereits aus den Gleichungen auf der Angabenseite ist ersichtlich, dass der mittlere Lösungsvorschlag richtig ist. Die Definitionsgleichungen lauten:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du,$$
$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Durch einfache Substitutionen kann der oben genannte Zusammenhang einfach nachgewiesen werden.

b) Richtig sind die beiden ersten Lösungsvorschläge: Die Gleichungen gelten nur für den AWGN-Kanal und für einen optimalen Binärempfänger, zum Beispiel entsprechend des Matched-Filter-Ansatzes. Impulsinterferenzen – verursacht durch den Kanal oder das Empfangsfilter – werden damit nicht erfasst. Die genaue Sendeimpulsformung spielt dagegen keine Rolle, solange das Empfangsfilter $H_E(f)$ an das Sendespektrum angepasst ist. Zwei unterschiedliche Sendeimpulsformen $H_S(f)$ führen zur genau gleichen Fehlerwahrscheinlichkeit, wenn sie die gleiche Energie pro Bit aufweisen.

c) Diese Ergebnisse können direkt aus der Tabelle abgelesen werden:

$$p_{\text{ASK}} \equiv \underline{0.343 \cdot 10^{-4}}, \quad p_{\text{BPSK}} \equiv \underline{0.901 \cdot 10^{-8}}.$$

d) Mit $E_B/N_0 = 8 \Rightarrow 10 \cdot \lg E_B/N_0 \approx 9$ dB erhält man folgende Fehlerwahrscheinlichkeiten:

$$p_{\text{ASK}} \equiv \underline{0.241 \cdot 10^{-2}}, \quad p_{\text{BPSK}} \equiv \underline{0.336 \cdot 10^{-4}}.$$

e) Aus der Teilaufgabe c) folgt, dass bei der binären Phasenmodulation $10 \cdot \lg E_B/N_0 \approx 12$ dB erfüllt sein muss, damit $p_{\text{BPSK}} \approx 10^{-8}$ möglich ist. Die angegebenen Gleichungen zeigen aber auch, dass die ASK-Kurve um 3 dB (exakt 3.01 dB) rechts von der BPSK-Kurve liegt. Daraus folgt:

$$10 \cdot \lg (E_B/N_0)_{\min} \approx \underline{15 \text{ dB}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.8

a) Der Rauscheffektivwert ergibt sich hier zu

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{2 \cdot T_B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}{2 \cdot 1 \text{ ns}}} = 1 \text{ V}$$
$$\Rightarrow p_{\text{BB}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q(4) \equiv \underline{0.317 \cdot 10^{-4}}.$$

b) Beim Basisbandsystem gilt:

$$E_B = s_0^2 \cdot T_B = (4 \text{ V})^2 \cdot 10^{-9} \text{ s} \equiv \underline{1.6 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2\text{s}}.$$

Natürlich ergibt sich mit der zusätzlich angegebenen Gleichung die genau gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 16 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2\text{s}}{2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}}\right) = Q(4) = 0.317 \cdot 10^{-4}.$$

Ein Vergleich mit Aufgabe A1.8(d) zeigt, dass $E_B/N_0 = 8$ nicht (exakt) gleich $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9 \text{ dB}$ ist.

Im ersten Fall ergibt sich $p_{\text{BB}} = 0.317 \cdot 10^{-4}$, im zweiten $p_{\text{BB}} = 0.336 \cdot 10^{-4}$.

c) Bei halber Sendeamplitude $s_0 = 2 \text{ V}$ sinkt die Energie pro Bit auf ein Viertel und es gelten folgende Gleichungen:

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\frac{2 \text{ V}}{1 \text{ V}}\right) \equiv \underline{0.227 \cdot 10^{-1}},$$
$$p_{\text{BB}} = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2\text{s}}{2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}}\right) = Q(2) = 0.227 \cdot 10^{-1}.$$

d) Unter Berücksichtigung der nur mehr halben Energie $E_B = s_0^2 \cdot T_B/2$ erhält man mit $\sigma_d^2 = N_0/T_B$ und

$$p_{\text{BPSK}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right)$$

das genau gleiche Ergebnis wie beim optimalen Basisbandsystem (zweiter Lösungsvorschlag).

e) Es ergeben sich die genau gleichen Ergebnisse wie bei der Basisbandübertragung:

$$\frac{E_B}{N_0} = 8 : p_{\text{BPSK}} = Q(\sqrt{16}) = Q(4) \equiv \underline{0.317 \cdot 10^{-4}},$$
$$\frac{E_B}{N_0} = 2 : p_{\text{BPSK}} = Q(\sqrt{4}) = Q(2) \equiv \underline{0.227 \cdot 10^{-1}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A1.9

a) Durch die Rotation des Phasendiagramms um $\Delta\phi_T = 15^\circ$ wird der Abstand der Nutzabstastwerte von der Schwelle um $\cos(15^\circ) \approx 0.966$ geringer. Daraus folgt:

$$p_B = Q(0.966 \cdot 4) \approx Q(3.86) \underline{=} 0.57 \cdot 10^{-4}.$$

b) Analog zu Teilaufgabe a) erhält man mit $\cos(45^\circ) \approx 0.707$:

$$p_B = Q(0.707 \cdot 4) \approx Q(2.83) \underline{=} 0.233 \cdot 10^{-2}.$$

c) Bei 4-QAM wird durch die Rotation um $\Delta\phi_T$ im Uhrzeigersinn der Abstand

- von der horizontalen Schwelle (Entscheidung des ersten Bits) gleich $s_0 \cdot \cos(45^\circ + \Delta\phi_T)$, also kleiner als ohne Phasenversatz,
- von der vertikalen Schwelle (Entscheidung des zweiten Bits) gleich $s_0 \cdot \cos(45^\circ - \Delta\phi_T)$, also größer als ohne Phasenversatz.

Damit erhält man für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(45^\circ + \Delta\phi_T) \cdot s_0}{0.25 \cdot s_0/\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(45^\circ - \Delta\phi_T) \cdot s_0}{0.25 \cdot s_0/\sqrt{2}}\right).$$

Hierbei ist der kleinere Rauscheffektivwert der QAM bereits berücksichtigt. Zur Kontrolle berechnen wir die Fehlerwahrscheinlichkeit für $\Delta\phi_T = 0$:

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(45^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(45^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) = Q(4).$$

Dagegen erhält man mit $\Delta\phi_T = 15^\circ$:

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(60^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(30^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [Q(2.83) + Q(4.90)] \approx \frac{1}{2} \cdot [0.233 \cdot 10^{-2} + 0.479 \cdot 10^{-6}] \underline{=} 0.117 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

d) Bei einem Phasenversatz von 45° erhält man aus der oben allgemein hergeleiteten Gleichung:

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(90^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\cos(0^\circ) \cdot 4}{1/\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [Q(0) + Q(5.66)] \underline{\approx} 0.25. \end{aligned}$$

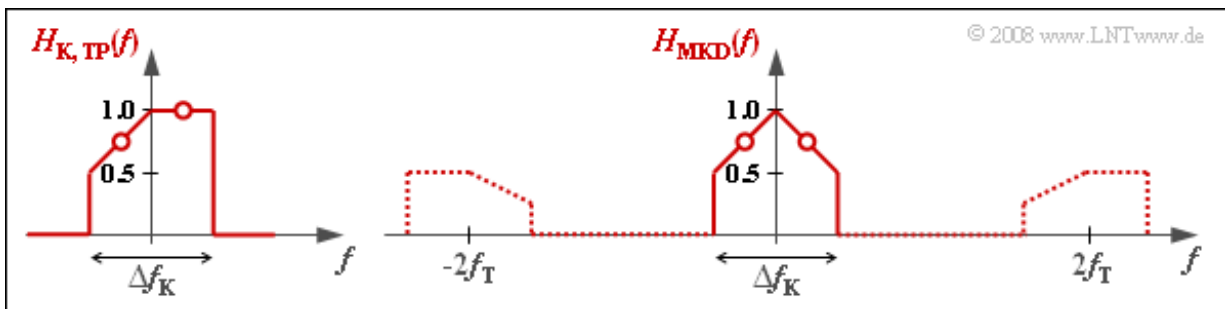
Das heißt: Die Fehlentscheidung für das erste Bit ist 50%. Dagegen wird das zweite Bit nahezu fehlerfrei ($\approx 10^{-8}$) entschieden. Insgesamt ergibt sich so eine mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit von ca. 25%.

Musterlösung zur Aufgabe A1.10

a) Alle Aussagen mit Ausnahme der erstgenannten sind richtig. $H_{K,TP}(f)$ ergibt sich aus $H_K(f)$ durch Abschneiden der negativen Frequenzanteile sowie Verschieben um f_T nach links. Bei Frequenzgängen wird – im Gegensatz zu Spektren – auf das Verdoppeln der Anteile bei positiven Frequenzen verzichtet. Deshalb gilt:

$$H_{K,TP}(f = 0) = H_K(f = f_T) = 1.$$

Wegen der reellen unsymmetrischen Spektralfunktionen $H_{K,TP}(f)$ ist die Fourierrücktransformierte $h_{K,TP}(t)$ nach dem Zuordnungssatz komplex.



b) Hier ist nur der dritte Lösungsvorschlag richtig. Die Spektralfunktion $H_{MKD}(f)$ besitzt stets einen geraden Realteil. Demzufolge ist $h_{MKD}(t)$ stets reell. Hätte $H_K(f)$ zusätzlich einen um f_T ungeraden Imaginärteil, so würde $H_{MKD}(f)$ einen um $f = 0$ ungeraden Imaginärteil aufweisen. Damit wäre $h_{MKD}(t)$ immer noch eine reelle Funktion.

Die Grafik verdeutlicht die Unterschiede zwischen $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$. Die Anteile von $H_{MKD}(f)$ im Bereich um $\pm 2f_T$ müssen nicht weiter beachtet werden.

c) $H_{MKD}(f)$ setzt sich additiv aus einem Rechteck und einem Dreieck zusammen, jeweils mit Breite Δf_K und Höhe 0.5. Daraus folgt:

$$h_{MKD}(t) = \frac{\Delta f_K}{2} \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f_K \cdot t) + \frac{\Delta f_K}{4} \cdot \text{si}^2\left(\pi \cdot \frac{\Delta f_K}{2} \cdot t\right)$$

$$\Rightarrow h_{MKD}(t = 0) = \frac{\Delta f_K}{2} + \frac{\Delta f_K}{4} = 0.75 \cdot \Delta f_K$$

$$\Rightarrow h_{MKD}(t = 0) / \Delta f_K \equiv \underline{0.75}.$$

d) Die erste si-Funktion besitzt zwar äquidistante Nulldurchgänge im Abstand $1/\Delta f_K$. Die äquidistanten Nulldurchgänge der gesamten Zeitfunktion $h_{MKD}(t)$ werden aber durch den zweiten Term bestimmt:

$$h_{MKD}\left(t = \frac{1}{\Delta f_K}\right) = \frac{\Delta f_K}{2} \cdot \text{si}(\pi) + \frac{\Delta f_K}{4} \cdot \text{si}^2(\pi/2) = \frac{\Delta f_K}{4},$$

$$h_{MKD}\left(t = \frac{2}{\Delta f_K}\right) = \frac{\Delta f_K}{2} \cdot \text{si}(2\pi) + \frac{\Delta f_K}{4} \cdot \text{si}^2(\pi) = 0.$$

Richtig ist der zweite Lösungsvorschlag.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.10

a) Für den Bandpass–Frequenzgang $H_K(f)$ kann geschrieben werden:

$$H_K(f) = H_{K,TP}(f) \star [\delta(f - f_M) + \delta(f + f_M)].$$

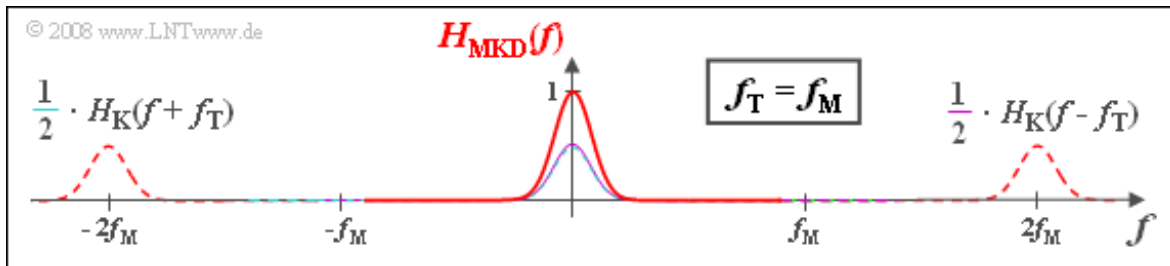
Die Fourierreücktransformierte des Klammersausdrucks liefert eine Cosinusfunktion der Frequenz f_M mit der Amplitude 2. Nach dem Faltungssatz gilt somit:

$$h_K(t) = 2 \cdot \Delta f_K \cdot \exp[-\pi \cdot (\Delta f_K \cdot t)^2] \cdot \cos(2\pi f_M t) \Rightarrow h_K(t=0)/\Delta f_K \equiv 2.$$

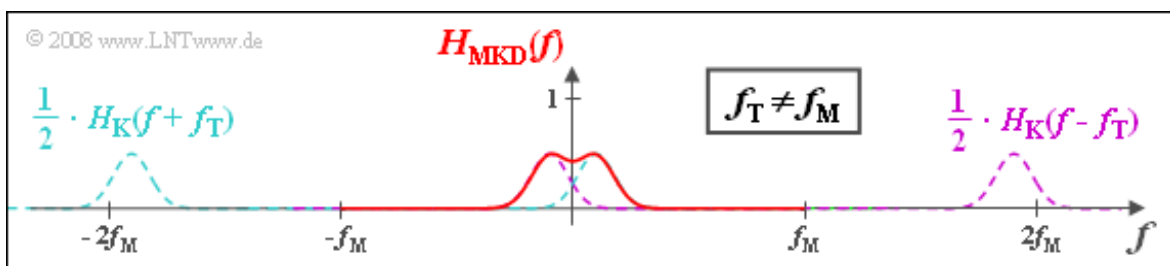
Das heißt: Die TP–Impulsantwort $h_{K,TP}(t)$ ist formgleich mit der Hüllkurve der BP–Impulsantwort $h_K(t)$, aber doppelt so groß.

b) Die erste Aussage ist falsch, da $H_{MKD}(f)$ auch Anteile um $\pm 2f_T$ besitzt. Die Zeitfunktion $h_{K,TP}(t)$ ist entsprechend der angegebenen Gleichung reell. Gleiches gilt für $h_{MKD}(t)$ auch unter Berücksichtigung der $\pm 2f_T$ –Anteile, da $H_{MKD}(f)$ eine bezüglich $f = 0$ gerade Funktion ist. Richtig sind also die Aussagen 2, 3 und 4.

Die Grafik zeigt den Frequenzgang $H_{MKD}(f)$, der auch Anteile um $\pm 2f_T$ besitzt. Bei tiefen Frequenzen ist $H_{K,TP}(f)$ identisch mit $H_{MKD}(f)$.



c) Hier unterscheiden sich $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ auch bei den tiefen Frequenzen. $H_{K,TP}(f)$ ist eine Gaußfunktion mit dem Maximum bei $f_\epsilon = f_M - f_T$. Aufgrund dieser Unsymmetrie ist $h_{K,TP}(f)$ komplex. Dagegen ist $H_{MKD}(f)$ weiterhin eine bezüglich $f = 0$ gerade Funktion mit reeller Impulsantwort $h_{MKD}(t)$. $H_{MKD}(f)$ setzt sich aus zwei Gaußfunktionen bei $\pm f_\epsilon$ zusammen. Richtig ist nur der Lösungsvorschlag 4.



d) Richtig ist natürlich die erste Antwort.