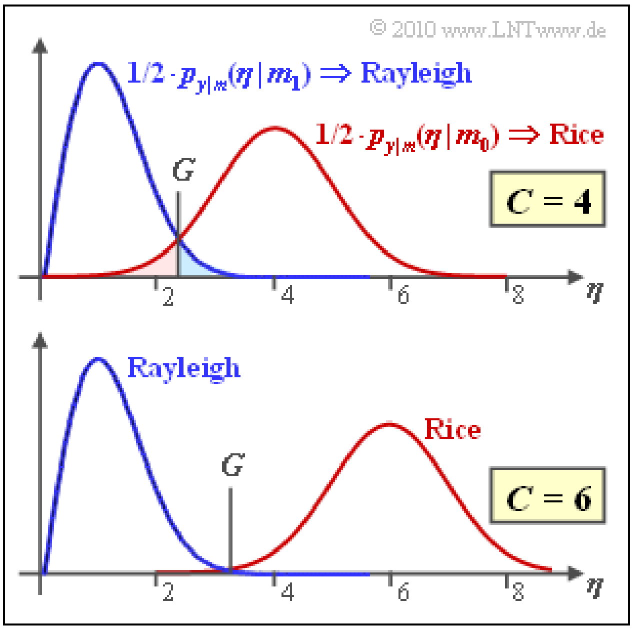
A4.17: Nichtkohärente OOK



Die Abbildung zeigt die beiden Dichtefunktionen, die sich bei einer nichtkohärenten Demodulation von *On–Off–Keying* ergeben. Dabei wird vorausgesetzt, dass die zwei OOK–Signalraumpunkte bei $\boldsymbol{s}_0 = C$ (Nachricht m_0) und bei $\boldsymbol{s}_1 = 0$ (Nachricht m_1) liegen.

Die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit dieses Systems wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^G p_{y|m}(\eta|m_0)\,\mathrm{d}\eta + \frac{1}{2} \cdot \int_G^\infty p_{y|m}(\eta|m_1)\,\mathrm{d}\eta\,.$$

Mit der Streuung $\sigma_n = 1$, die im Folgenden vorausgesetzt wird, lautet die sich für $m = m_1$ ergebende Rayleighverteilung (blaue Kurve):

$$p_{y|m}(\eta|m_1) = \eta \cdot \mathrm{e}^{-\eta^2/2}\,.$$

Die Riceverteilung (rote Kurve) kann im vorliegenden Fall (wegen $C >> \sigma_n$) durch eine Gaußverteilung angenähert werden:

$$p_{y|m}(\eta|m_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-(\eta - C)^2/2}\,.$$

Die optimale Entscheidergrenze $G_{\rm opt}$ ergibt sich aus dem Schnittpunkt von roter und blauer Kurve. Aus den beiden Skizzen erkennt man, dass $G_{\rm opt}$ von C abhängt. Für die obere Grafik gilt $C = 4$, für die untere $C = 6$. Alle Größen sind hier als normiert zu betrachten und es wird für alle Berechnungen und Grafiken $\sigma_n = 1$ vorausgesetzt.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.5.** Für das komplementäre Gaußsche Fehlerintegral können Sie folgende Näherungen verwenden:

$$\mathrm{Q}(1.5) \approx 0.0668\,, \quad \mathrm{Q}(2.5) \approx 0.0062\,, \quad \mathrm{Q}(2.65) \approx 0.0040\,.$$

Sie können Ihre Ergebnisse mit folgendem Berechnungstool kontrollieren:

Nichtkohärentes On–Off–Keying (Dateigröße: 1.88 MB)

Fragebogen zu "A4.17: Nichtkohärente OOK"

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der mittleren Symbolenergie E_S und der Konstanten C der Riceverteilung? Es gilt:

- ☐ $E_S = C$,
- ☐ $E_S = C^2$,
- ☐ $E_S = C^2/2$.

b) Geben Sie eine Bestimmungsgleichung für die optimale Entscheidergrenze G an. Es gilt:

- ☐ $G = C/2$,
- ☐ $G - 1/C \cdot \ln(G) = C/2 + 1/(2C) \cdot \ln(2\pi)$,
- ☐ $G = 1/C \cdot \ln(G)$.

c) Bestimmen Sie die optimale Entscheidergrenze für $C = 4$.

$\boldsymbol{C = 4}$**:** $\boldsymbol{G_{opt}}$ =

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für $C = 4$ und $G = 2.5$?

$\boldsymbol{C = 4}$**:** $\boldsymbol{p_S}$ = %

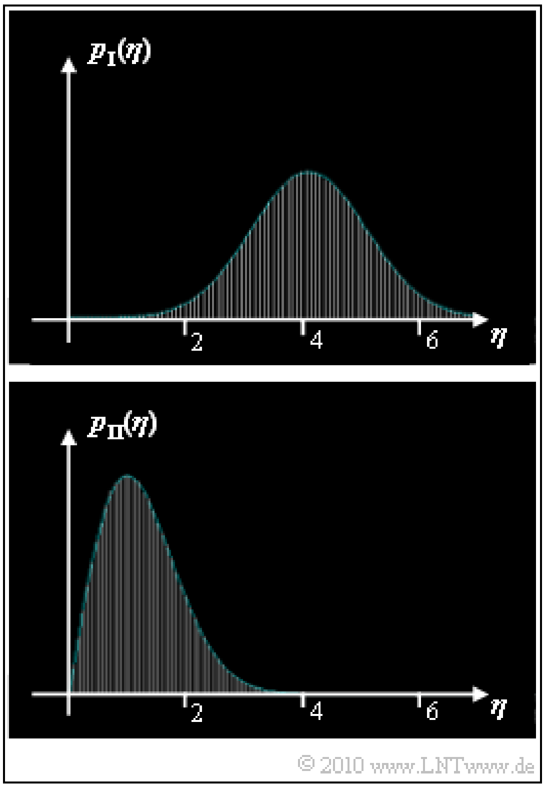
e) Bestimmen Sie die optimale Entscheiderschwelle für $C = 6$.

$\boldsymbol{C = 6}$**:** $\boldsymbol{G_{opt}}$ =

f) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit $C = 6$ und $G = 3.5$?

$\boldsymbol{C = 6}$**:** $\boldsymbol{p_S}$ = %

Z4.17: Rayleigh- und Riceverteilung



Für die Untersuchung von Nachrichtensystemen haben die Rayleigh– und die Rice–Verteilung eine große Bedeutung. Im Folgenden sei y eine rayleigh– oder eine riceverteilte Zufallsgröße und η jeweils eine Realisierung hiervon.

- Die *Rayleighverteilung* ergibt sich dabei für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (kurz: WDF) einer Zufallsgröße y, die sich aus den beiden gaußverteilten und statistisch unabhängigen Komponenten u und v (beide mit der Streuung σ_n) wie folgt ergibt:

$$y = \sqrt{u^2 + v^2} \;\Rightarrow\; p_y(\eta) = \frac{\eta}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

- Die *Riceverteilung* erhält man unter sonst gleichen Randbedingungen für den Anwendungsfall, dass bei einer der beiden Komponenten noch eine Konstante C addiert wird:

$$y = \sqrt{(u+C)^2 + v^2} \quad\Rightarrow\quad p_y(\eta) = \frac{\eta}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2 + C^2}{2\sigma_n^2}\right] \cdot {\rm I}_0\left[\frac{\eta \cdot C}{\sigma_n^2}\right].$$

In dieser Gleichung bezeichnet ${\rm I}_0(x)$ die **modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung.**

In der Grafik sind die beiden Dichtefunktionen dargestellt, wobei allerdings nicht angegeben wird, ob $p_{\rm I}(\eta)$ bzw. $p_{\rm II}(\eta)$ zu einer Rayleigh– oder zu einer Riceverteilung gehören. Bekannt ist nur, dass je eine Rayleigh– und eine Riceverteilung dargestellt und dass der Parameter σ_n bei beiden gleich ist.

Für Ihre Entscheidung, ob Sie $p_{\rm I}(\eta)$ oder $p_{\rm II}(\eta)$ der Riceverteilung zuordnen, und für die Ermittlung der WDF–Parameter können Sie folgende Aussagen berücksichtigen:

- Für große Werte des Quotienten C/σ_n lässt sich die Riceverteilung durch eine Gaußverteilung mit Mittelwert C und Streuung σ_n annähern.
- Die der Grafik zugrunde liegenden Werte von C und σ_n sind ganzzahlig.

Hinsichtlich der Rayleighverteilung ist zu beachten:

- Für beide Verteilungen ist der gleiche Wert σ_n zugrunde gelegt.
- Für die Streuung (Wurzel aus der Varianz) der Rayleighverteilung gilt:

$$\sigma_y = \sigma_n \cdot \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} \;\approx\; 0.655 \cdot \sigma_n\,.$$

- Für die Streuung/Varianz der Riceverteilung kann allgemein nur ein komplizierter Ausdruck mit hypergeometrischen Funktionen angegeben werden, ansonsten nur eine Näherung für $C >> \sigma_n$ entsprechend der Gaußverteilung.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.5.** Zur Lösung des Integrals in Teilaufgabe d) können Sie verwenden:

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{const.}$$

Fragebogen zu "Z4.17: Rayleigh- und Riceverteilung"

a) Ordnen Sie die Grafiken der Rayleigh– bzw. Riceverteilung zu.

- $p_{\rm I}(\eta)$ entspricht der Rayleighverteilung, $p_{\rm II}(\eta)$ der Riceverteilung.
- $p_{\rm I}(\eta)$ entspricht der Riceverteilung, $p_{\rm II}(\eta)$ der Rayleighverteilung.

b) Geben Sie die Parameter der hier dargestellten Riceverteilung an.

$\boldsymbol{C}$ =

$\boldsymbol{\sigma_n}$ =

c) Welche Verteilung besitzt eine größere Varianz,

- die Rayleighverteilung,
- die Riceverteilung?

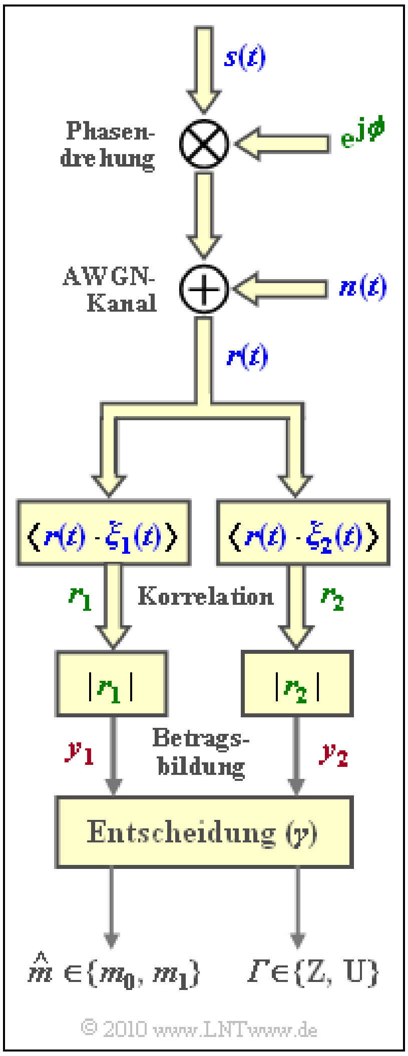
d) Berechnen Sie die Überschreitungswahrscheinlichkeiten der Rayleighverteilung:

$\mathbf{Pr}(y > \sigma_n)$ =

$\mathbf{Pr}(y > 2\sigma_n)$ =

$\mathbf{Pr}(y > 3\sigma_n)$ =

A4.18: Nichtkohärente BPSK–Demodulation



Wir betrachten *Frequency Shift Keying* (FSK) mit M = 2 ⇒ binäre Signalisierung. Die beiden Basisfunktionen im Tiefpassbereich sind in diesem Fall komplex und lauten

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \sqrt{1/T}\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\cdot\pi\cdot h\cdot t/T}\,, \quad 0 \le t \le T\,, \\ \xi_2(t) &= \sqrt{1/T}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\pi\cdot h\cdot t/T}\,, \quad 0 \le t \le T\,. \end{aligned}$$

Für die zwei möglichen Signalformen im Tiefpassbereich gilt dann mit der mittleren Symbolenergie E_S:

$$\begin{aligned} m_0: s_{\mathrm{TP},0} = \sqrt{E_\mathrm{S}}\cdot \xi_1(t) \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{s}_0 = (\sqrt{E_\mathrm{S}}, 0)\,, \\ m_1: s_{\mathrm{TP},1} = \sqrt{E_\mathrm{S}}\cdot \xi_2(t) \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{s}_1 = (0, \sqrt{E_\mathrm{S}})\,. \end{aligned}$$

Hierbei gibt h den sog. *Modulationsindex* an. Dieser muss gewisse Kriterien erfüllen, damit sich auch nach der Demodulation orthogonale Signalformen ergeben. Diese Kriterien hängen allerdings davon ab, ob beim Empfänger ein kohärenter oder ein nichtkohärenter Demodulator verwendet wird.

Die Grafik zeigt im unteren Bereich den nichtkohärenten Demodulator für binäres *Frequency Shift Keying* (FSK). Alle komplexen Signale sind blau beschriftet, komplexe Werte grün und reelle Werte rot.

Gegenüber dem im **Theorieteil** angegebenen Entscheidungsprozess wird nun ein komplizierterer Entscheider betrachtet, der außer dem Schätzwert noch ein *Sicherheitsflag* $\it\Gamma$ = {„Z”, „U”} ausgibt. „Z” und „U” stehen hierbei für eine zuverlässige bzw. eine unzuverlässige Entscheidung. Es gibt also vier Möglichkeiten der Entscheidung, gesteuert durch den Parameter γ:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= m_0,\ \mathit{\Gamma} = "\mathrm{Z}"\,, \ \text{falls } y_1 > \gamma\cdot y_2\,, \\ \hat{m} &= m_0,\ \mathit{\Gamma} = "\mathrm{U}"\,, \ \text{falls } y_2 < y_1 < \gamma\cdot y_2\,, \\ \hat{m} &= m_1,\ \mathit{\Gamma} = "\mathrm{Z}"\,, \ \text{falls } y_2 > \gamma\cdot y_1\,, \\ \hat{m} &= m_1,\ \mathit{\Gamma} = "\mathrm{U}"\,, \ \text{falls } y_1 < y_2 < \gamma\cdot y_1\,. \end{aligned}$$

In den Fragen zur Aufgabe werden die beiden Werte γ = 1 und γ = 2 betrachtet.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Entscheider fälschlicherweise für das Symbol m_1 entscheidet und zudem anzeigt, dass diese Entscheidung als zuverlässig zu betrachten ist (besonders verwerflich), gilt

$$\mathrm{Pr}\{\hat{m} = m_1,\ \mathit{\Gamma} = "\mathrm{Z}" \,|\, m_0\} = \frac{1}{1+\gamma^2}\cdot \exp\left[-\frac{\gamma^2\cdot E_\mathrm{S}}{(1+\gamma^2)\cdot N_0}\right]\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.5.**

Fragebogen zu "A4.18: Nichtkohärente BPSK–Demodulation"

a) Welche Aussagen sind bei kohärenter Demodulation der FSK zutreffend?

- [ ] Orthogonalität ergibt sich, wenn h ganzzahlig ist.
- [ ] Auch für $h = 0.5$ ergeben sich orthogonale Signalformen.
- [ ] Orthogonalität ist grundsätzlich nicht zu erreichen.
- [ ] Beim AWGN–Kanal gilt $r(t) = s(t) + n(t)$.

b) Welche Aussagen sind bei nichtkohärenter Demodulation der FSK zutreffend?

- [ ] Orthogonalität ergibt sich, wenn h ganzzahlig ist.
- [ ] Auch für $h = 0.5$ ergeben sich orthogonale Signalformen.
- [ ] Orthogonalität ist grundsätzlich nicht zu erreichen.
- [ ] Beim AWGN–Kanal gilt $r(t) = s(t) + n(t)$.

c) Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass der Schätzwert nicht mit der gesendeten Nachricht übereinstimmt? ($E_S/N_0 = 10$).

p_S =

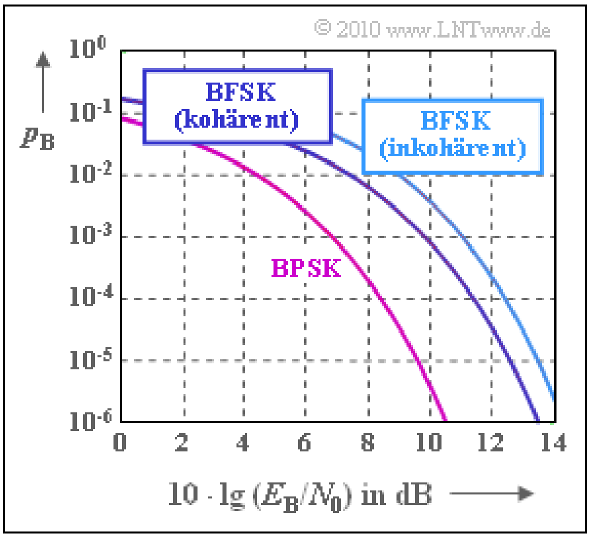
d) Es sei $\gamma = 2$ und $E_S/N_0 = 10$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass trotz Fehler das Sicherheitsflag eine zuverlässige Entscheidung signalisiert?

$\gamma = 2$: Pr(Γ = „Z", Fehler) =

e) Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Fehler die Zusatzinformation „unzuverlässig" angezeigt wird? Es sei weiterhin $E_S/N_0 = 10$.

$\gamma = 2$: Pr(Γ = „U" | Fehler) =

Z4.18: FSK kohärent/nichtkohärent



Die Grafik zeigt die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für eine binäre **FSK–Modulation** bei

- kohärenter Demodulation bzw.
- inkohärenter Demodulation

im Vergleich zur binären Phasenmodulation (BPSK). Es wird stets Orthogonalität vorausgesetzt. Bei kohärenter Demodulation kann hierbei der Modulationsindex h ein Vielfaches von 0.5 sein, so dass die mittlere Kurve auch für *Minimum Shift Keying* (MSK) gültig ist. Dagegen muss bei nichtkohärenter Demodulation einer FSK der Modulationsindex h ein Vielfaches von 1 sein.

Diesem Systemvergleich liegt wieder der AWGN–Kanal zugrunde, gekennzeichnet durch das Verhältnis E_B/N_0. Die Gleichungen für die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten lauten bei

- **Binary Frequency Shift Keying** (BFSK) mit *kohärenter* Demodulation:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right).$$

- **Binary Frequency Shift Keying** (BFSK) mit *inkohärenter* Demodulation:

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot e^{-E_B/(2N_0)}.$$

- **Binary Phase Shift Keying** (BPSK), nur *kohärente* Demodulation möglich:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right).$$

Bei BPSK muss das logarithmierte Verhältnis $10 \cdot \lg(E_B/N_0)$ mindestens 9.6 dB betragen, damit die Bitfehlerwahrscheinlichkeit den Wert $p_B = 10^{-5}$ nicht überschreitet.

Bei binären Modulationsverfahren kann E_B auch durch E_S und p_B durch p_S ersetzt werden. Dann spricht man von der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S und der Symbolenergie E_S.

Hinweis: Die Aufgabe behandelt die Thematik von **Kapitel 4.4** und **Kapitel 4.5** des vorliegenden Buches „Digitalsignalübertragung". Weitere Informationen finden Sie im Buch „Modulationsverfahren". Verwenden Sie die Näherung $\lg(2) \approx 0.3$.

Fragebogen zu "Z4.18: FSK kohärent/nichtkohärent"

a) Welches E_B/N_0 ist bei FSK und kohärenter Demodulation erforderlich, damit die Forderung $p_B \le 10^{-5}$ erfüllt ist?

FSK, kohärent: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

b) Sind folgende Aussagen richtig: Man erhält das gleiche Ergebnis wie unter a)

- [ ] bei der kohärenten FSK mit Modulationsindex $\eta = 0.7$,
- [ ] bei der kohärenten FSK mit Modulationsindex $\eta = 1$?

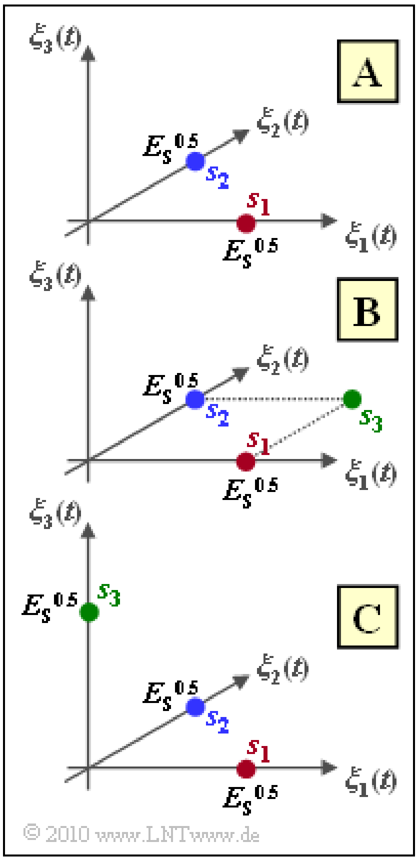
c) Welches E_B/N_0 ist bei FSK mit Modulationsindex $h = 1$ und nichtkohärenter Demodulation erforderlich, damit $p_B \le 10^{-5}$ erfüllt ist?

FSK, inkohärent: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12.6$ dB für die FSK und nichtkohärente Demodulation?

p_B =

A4.19: Orthogonale mehrstufige FSK



Wir betrachten in dieser letzten Übungsaufgabe zu diesem Kapitel *Frequency Shift Keying* (FSK) mit M Signalformen und setzen voraus, dass diese paarweise zueinander orthogonal sind. In diesem Fall können die äquivalenten Tiefpass–Signale $s_i(t)$ mit $i = 1, \ldots , M$ in folgender Form dargestellt werden:

$$s_i(t) = \sqrt{E_{\rm S}} \cdot \xi_i(t)\,.$$

$\xi_i(t)$ sind komplexe Basisfunktionen, für die allgemein $i = 1, \ldots , N$ gilt. Bei orthogonaler Signalisierung ist allerdings stets $M = N$.

Die Grafik zeigt drei verschiedene Signalraumkonstellationen. Jedoch beschreiben nicht alle drei eine orthogonale FSK. Hierauf wird in der Teilaufgabe a) Bezug genommen.

Im **Theorieteil** ist die exakte Formel für die Wahrscheinlichkeit einer korrekten Entscheidung bei AWGN–Störung angegeben:

$$\begin{aligned}{\rm Pr}(\mathcal{C}) &= \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^i \cdot \binom{M-1}{i} \cdot \frac{1}{i+1} \cdot \\ &\cdot \exp\left[-\frac{i}{(i+1)} \cdot \frac{E_{\rm S}}{N_0}\right].\end{aligned}$$

Daraus lässt sich sehr einfach die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit berechnen:

$$p_{\rm S} = {\rm Pr}(\mathcal{E}) = 1 - {\rm Pr}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{M-1} (-1)^{i+1} \cdot \binom{M-1}{i} \cdot \frac{1}{i+1} \cdot \exp\left[-\frac{i}{(i+1)} \cdot \frac{E_{\rm S}}{N_0}\right].$$

Eine obere Schranke ($p_{\rm S,\ max} \ge p_{\rm S}$) ergibt sich aufgrund der alternierenden Vorzeichen, wenn man von dieser Summe nur den ersten Term berücksichtigt:

$$p_{\rm S,max} = \frac{M-1}{2} \cdot {\rm e}^{-E_{\rm S}/(2N_0)}\,.$$

In der Teilaufgabe d) soll diese Schranke bei gegebenem Verhältnis $E_{\rm B}/N_0$ ausgewertet werden, wobei $E_{\rm B}$ die mittlere Signalenergie pro Bit angibt:

$$E_{\rm B} = \frac{E_{\rm S}}{{\rm ld}\,(M)}\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **letzte Theorieseite** von Kapitel 4.5.

Fragebogen zu "A4.19: Orthogonale mehrstufige FSK"

a) Welche der obigen Signalraumkonstellationen gelten für orthogonale FSK?

- [ ] Konstellation A,
- [ ] Konstellation B,
- [ ] Konstellation C.

b) Berechnen Sie für $E_S/N_0 = 6$ die Fehlerwahrscheinlichkeit der binären, ternären und quaternären FSK. E_S bezeichnet die Symbolenergie.

$M = 2$: p_S =

$M = 3$: p_S =

$M = 4$: p_S =

c) Berechnen Sie die obere Schranke $p_{S,\,max}$ für $E_S/N_0 = 6$. E_S: Symbolenergie.

$E_S/N_0 = 6$, $M = 2$: $p_{S,\,max}$ =

$M = 3$: $p_{S,\,max}$ =

$M = 4$: $p_{S,\,max}$ =

d) Berechnen Sie die obere Schranke $p_{S,max}$ für $E_B/N_0 = 6$. E_B: Bitenergie.

$E_B/N_0 = 6$, $M = 2$: $p_{S,\,max}$ =

$M = 3$: $p_{S,\,max}$ =

$M = 4$: $p_{S,\,max}$ =