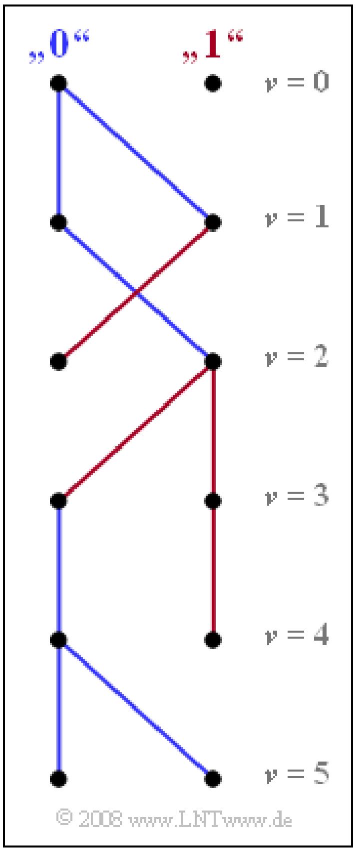
A3.11: Viterbi–Empfänger und Trellisdiagramm



Der sog. Viterbi–Empfänger erlaubt eine aufwandsgünstige Realisierung der Maximum–Likelihood–Entscheidungsregel. Er beinhaltet die im Folgenden aufgeführten Systemkomponenten:

- ein an den Sendegrundimpuls angepasstes Matched–Filter mit dem Frequenzgang $H_{\rm MF}(f)$ und dem Ausgangssignal $m(t)$,
- einen Abtaster im Abstand der Symboldauer (Bitdauer) T, der das zeitkontinuierliche Signal $m(t)$ in die zeitdiskrete Folge $\langle m_\nu \rangle$ wandelt,
- ein Dekorrelationsfilter mit dem Frequenzgang $H_{\rm DF}(f)$ zur Entfernung statistischer Bindungen zwischen den Störanteilen der Folge $\langle d_\nu \rangle$,
- den Viterbi–Entscheider, der mit einem trellisbasierten Algorithmus die Sinkensymbolfolge $\langle v_\nu \rangle$ gewinnt.

Die Grafik zeigt das vereinfachte Trellisdiagramm der beiden Zustände „0” und „1” für die Zeitpunkte $\nu \le 5$. Dieses Diagramm erhält man als Ergebnis der Auswertung der beiden minimalen Gesamtfehlergrößen $\Gamma_\nu(0)$ und $\Gamma_\nu(1)$ entsprechend der Aufgabe Z3.11.

Gehen Sie in dieser Aufgabe von unipolaren und gleichwahrscheinlichen Amplitudenkoeffizienten aus:

$$\Pr(a_\nu = 0) = \Pr(a_\nu = 1) = 0.5\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 3.8.** Alle Größen sind hier normiert zu verstehen. Die hier angesprochene Thematik wird auch im folgenden Interaktionsmodul behandelt:

Eigenschaften des Viterbi–Empfängers (Dateigröße 335 kB)

Fragebogen zu "A3.11: Viterbi–Empfänger und Trellisdiagramm"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Das Matched–Filter dient vorwiegend der Störleistungsbegrenzung.
- [ ] Das Dekorrelationsfilter entfernt Bindungen bzgl. Abtastwerten.
- [ ] Die Störleistung wird nur von $H_{\rm MF}(f)$, nicht von $H_{\rm DF}(f)$ beeinflusst.

b) Zu welchen Zeiten ν kann man das aktuelle Symbol a_ν endgültig entscheiden?

- [ ] $\nu = 1$,
- [ ] $\nu = 2$,
- [ ] $\nu = 3$,
- [ ] $\nu = 4$,
- [ ] $\nu = 5$.

c) Wie lautet die vom Viterbi–Empfänger entschiedene Folge?

$\boldsymbol{a_1}$ =

$\boldsymbol{a_2}$ =

$\boldsymbol{a_3}$ =

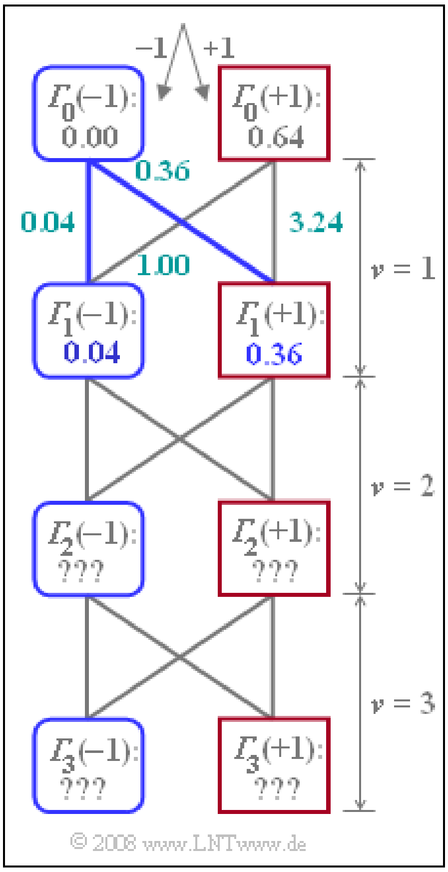
$\boldsymbol{a_4}$ =

$\boldsymbol{a_5}$ =

d) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu?

- [ ] Es ist sicher, dass die erkannte Folge auch gesendet wurde.
- [ ] Ein MAP–Empfänger hätte die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit.
- [ ] Schwellenwertentscheidung ist gleich gut wie der ML-Empfänger.

Z3.11: Maximum-Likelihood-Fehlergrößen



Für die in A3.11 behandelte Maximum–Likelihood–Konstellation mit bipolaren Amplitudenkoeffizienten $a_\nu \in \{+1, -1\}$ sollen die Fehlergrößen $\varepsilon_\nu(i)$ sowie die minimalen Gesamtfehlergrößen $\Gamma_\nu(-1)$ und $\Gamma_\nu(+1)$ ermittelt werden.

Der Grundimpuls ist durch die beiden Werte g_0 und g_{-1} gegeben. Diese können ebenso wie die Detektionsabtastwerte d_0 und d_1 aus den nachfolgenden Berechnungen für die Fehlergrößen $\varepsilon_\nu(i)$ zu den Zeitpunkten $\nu = 0$ und $\nu = 1$ entnommen werden. Anzumerken ist, dass vor der eigentlichen Nachricht (a_1, a_2, a_3) stets das Symbol $a_0 = 0$ gesendet wird. Für den Zeitpunkt $\nu = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(+1) &= [-0.4 - 0.4]^2 = 0.64\,,\\ \varepsilon_0(-1) &= [-0.4 + 0.4]^2 = 0.00\,.\end{aligned}$$

Daraus könnte bereits zum Zeitpunkt $\nu = 0$ geschlossen werden, dass mit großer Wahrscheinlichkeit $a_1 = -1$ ist. Für den Zeitpunkt $\nu = 1$ ergeben sich folgende Fehlergrößen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(+1,+1) &= [-0.8 - 0.6 - 0.4]^2 = 3.24\,,\\ \varepsilon_1(+1,-1) &= [-0.8 - 0.6 + 0.4]^2 = 1.00\,,\\ \varepsilon_1(-1,+1) &= [-0.8 + 0.6 - 0.4]^2 = 0.36\,,\\ \varepsilon_1(-1,-1) &= [-0.8 + 0.6 + 0.4]^2 = 0.04\,.\end{aligned}$$

Die minimalen Gesamtfehlergrößen $\Gamma_\nu(-1)$ und $\Gamma_\nu(+1)$, die mit diesen sechs Fehlergrößen berechnet werden können, sind bereits in der Grafik eingezeichnet. Die weiteren Detektionsabtastwerte sind

$$d_2 = 0.1\,,\quad d_3 = 0.5\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 3.8.** Alle Größen sind hier normiert zu verstehen. Die hier angesprochene Thematik wird auch im folgenden Interaktionsmodul behandelt:

Eigenschaften des Viterbi–Empfängers (Dateigröße 335 kB).

Fragebogen zu "Z3.11: Maximum-Likelihood-Fehlergrößen"

a) Von welchen Detektionsabtastwerten d_0 und d_1 wurde ausgegangen?

d_0 =

d_1 =

b) Welche Grundimpulswerte wurden dabei vorausgesetzt?

g_0 =

g_{-1} =

c) Welche der aufgeführten Detektionsabtastwerte sind für $\nu \geq 1$ möglich?

- [ ] ±0.2,
- [ ] ±0.4,
- [ ] ±0.6,
- [ ] ±1.0.

d) Geben Sie die minimalen Gesamtfehlergrößen für die Zeit $\nu = 2$ an ($d_2 = 0.1$).

$\Gamma_2(+1)$ =

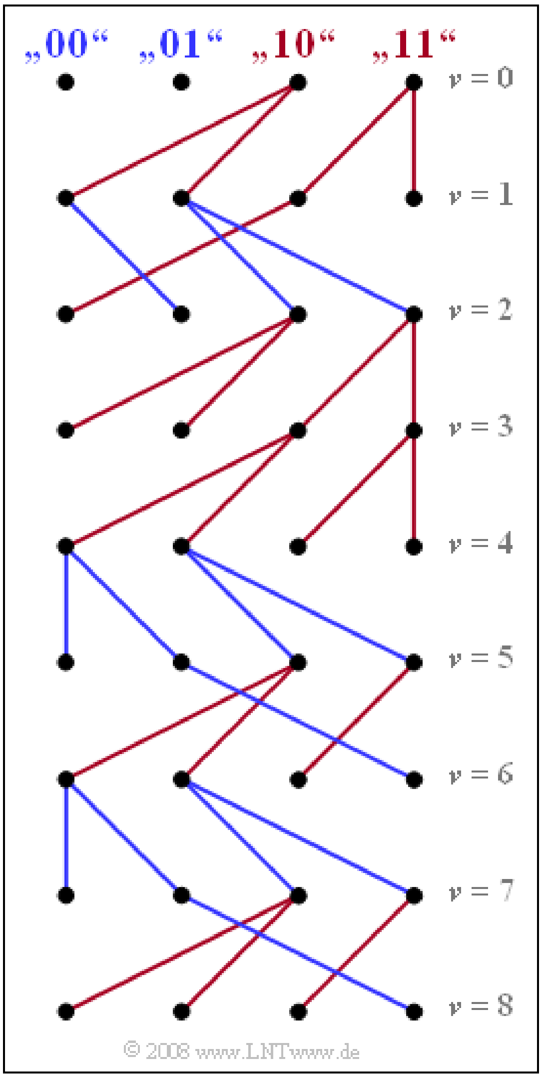
$\Gamma_2(-1)$ =

e) Berechnen Sie die minimalen Gesamtfehlergrößen für die Zeit $\nu = 3$ ($d_3 = 0.5$).

$\Gamma_3(+1)$ =

$\Gamma_3(-1)$ =

A3.12: Trellisdiagramm für 2 Vorläufer



Wir gehen von den Grundimpulswerten g_0, g_{-1} und g_{-2} aus. Das bedeutet, dass die Entscheidung über das Symbol a_ν auch durch die nachfolgenden Koeffizienten $a_{\nu+1}$ und $a_{\nu+2}$ beeinflusst wird. Damit sind für jeden Zeitpunkt ν genau 8 Fehlergrößen ε_ν zu berechnen, aus denen die minimalen Gesamtfehlergrößen $\Gamma_\nu(00)$, $\Gamma_\nu(01)$, $\Gamma_\nu(10)$ und $\Gamma_\nu(11)$ berechnet werden können. Hierbei liefert beispielsweise $\Gamma_\nu(01)$ Information über das Symbol a_ν unter der Annahme, dass $a_{\nu+1} = 0$ und $a_{\nu+2} = 1$ sein werden. Die minimale Gesamtfehlergröße $\Gamma_\nu(01)$ ist hierbei der kleinere Wert aus dem Vergleich von

$$\Gamma_{\nu-1}(00) + \varepsilon_\nu(001) \text{ und } \Gamma_{\nu-1}(10) + \varepsilon_\nu(101).$$

Zur Berechnung der minimalen Gesamtfehlergröße $\Gamma_2(10)$ in den Teilaufgaben a) und b) soll von folgenden Zahlenwerten ausgegangen werden:

- unipolare Amplitudenkoeffizienten: $a_\nu \in \{0, 1\}$,
- Grundimpulswerte $g_0 = 0.5$, $g_{-1} = 0.3$, $g_{-2} = 0.2$,
- anliegender Detektionsabtastwert: $d_2 = 0.2$,
- Minimale Gesamtfehlergrößen zum Zeitpunkt $\nu = 1$:

$$\Gamma_1(00) = 0.0, \quad \Gamma_1(01) = 0.2, \qquad \Gamma_1(10) = 0.6, \quad \Gamma_1(11) = 1.2.$$

In der Grafik ist das vereinfachte Trellisdiagramm für die Zeitpunkte $\nu = 1$ bis $\nu = 8$ dargestellt. Blaue Zweige kommen entweder von $\Gamma_{\nu-1}(00)$ oder von $\Gamma_{\nu-1}(01)$ und kennzeichnen eine hypothetische „0”. Dagegen weisen alle roten Zweige – ausgehend von den Zuständen $\Gamma_{\nu-1}(10)$ bzw. $\Gamma_{\nu-1}(11)$ – jeweils auf das Symbol „1” hin.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 3.8.** Alle Größen sind hier normiert zu verstehen. Die hier angesprochene Thematik wird auch im folgenden Interaktionsmodul behandelt:

Eigenschaften des Viterbi–Empfängers (Dateigröße 335 kB).

Fragebogen zu "A3.12: Trellisdiagramm für 2 Vorläufer"

a) Berechnen Sie die folgenden Fehlergrößen:

$\varepsilon_2(010)$ =

$\varepsilon_2(011)$ =

$\varepsilon_2(110)$ =

$\varepsilon_2(111)$ =

b) Berechnen Sie die folgenden minimalen Gesamtfehlergrößen:

$\Gamma_2\ (10)$ =

$\Gamma_2\ (11)$ =

c) Wie lauten die vom Viterbi–Empfänger ausgegebenen Symbole?

- [ ] Die ersten sieben Symbole sind 1011010.
- [ ] Die ersten sieben Symbole sind 1101101.
- [ ] Das letzte Symbol $a_8 = 1$ ist sicher.
- [ ] Über das Symbol a_8 ist noch keine endgültige Aussage möglich.

A3.13: Vergleich SE – DFE – ML

	A	B	C	D
g_0	1.0	0.6	0.4	0.3
g_{-1}	0.0	0.1	0.3	0.4
g_1	0.0	0.3	0.3	0.3
σ_d	0.2	0.2	0.2	0.2
p_{SE}	$2.87 \cdot 10^{-7}$	???	???	???
p_{DFE}	$2.87 \cdot 10^{-7}$	???	???	???
p_{ML}	???	???	???	???

Es sollen Fehlerwahrscheinlichkeiten verschiedener Empfängertypen miteinander verglichen werden. Im Einzelnen werden betrachtet:

- Schwellenwertentscheidung (p_{SE}),
- Entscheidungsrückkopplung (p_{DFE}) und
- Maximum–Likelihood–Detektion (p_{ML}).

Der „Hauptwert" g_0, der Vorläufer g_{-1} und der Nachläufer g_1 des Detektionsgrundimpulses sowie der Detektionsstöreffektivwert vor dem jeweiligen Entscheider (σ_d) sind für vier Systemvarianten **A**, **B**, **C** und **D** in der Tabelle angegeben.

Ausgegangen wird von bipolaren Amplitudenkoeffizienten, so dass zum Beispiel für die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit des Empfängers mit einfachem Schwellenwertentscheider gilt:

$$p_{U,SE} = \begin{cases} Q\left(\frac{g_0 - |g_{-1}| - |g_1|}{\sigma_d}\right) & \text{bei geöffnetem Auge,} \\ Q(0) = 0.5 & \text{bei geschlossenem Auge.} \end{cases}$$

Beim Nyquistsystem **A** ist die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit genau so groß, nämlich

$$p_{SE} = p_{U,SE} = Q\left(\frac{g_0}{\sigma_d}\right) = Q(5) \approx 2.87 \cdot 10^{-7}.$$

Bei den anderen hier betrachteten Systemvarianten **B**, **C** und **D** sind die Impulsinterferenzen so stark und der vorgegebene Störeffektivwert so klein, dass die folgende Näherung angewendet werden kann:

$$p_{SE} \approx \frac{1}{4} \cdot p_{U,SE} = \frac{1}{4} \cdot Q\left(\frac{\text{Max}\,[0,\, g_0 - |g_{-1}| - |g_1|]}{\sigma_d}\right).$$

Mit Ausnahme des Nyquistsystems **A** (hier ist $p_{DFE} = p_{SE}$) gilt für den DFE–Empfänger statt dessen:

$$p_{DFE} \approx \frac{1}{2} \cdot p_{U,DFE} = \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{\text{Max}\,[0,\, g_0 - |g_{-1}|]}{\sigma_d}\right).$$

Dagegen wurde auf der **letzten Theorieseite** zu diesem Kapitel gezeigt, dass für einen Empfänger mit ML–Entscheidung folgende Näherung zutrifft:

$$p_{ML} = Q\left(\frac{\text{Max}\,[g_\nu]}{\sigma_d}\right).$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 3.8.** Die Zahlenwerte der Q–Funktion können Sie mit dem Interaktionsmodul

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen (Dateigröße: 235 MB)

ermitteln. Um den im Theorieteil angegebenen Algorithmus für zwei Vorläufer anwenden zu können, müssten Sie folgende Umbenennungen vornehmen:

$$g_1 \ \Rightarrow \ g_0, \quad g_0 \ \Rightarrow \ g_{-1}, \quad g_{-1} \ \Rightarrow \ g_{-2}\,.$$

Dies hat jedoch für die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeiten keine Bedeutung.

Fragebogen zu "A3.13: Vergleich SE – DFE – ML"

a) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei System **A** mit ML–Detektion?

System A: $p_{\rm ML}$ =

b) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten sind bei System **B** zu erwarten?

System B: $p_{\rm SE}$ =

System B: $p_{\rm DFE}$ =

System B: $p_{\rm ML}$ =

c) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten ergeben sich bei System **C**?

System C: $p_{\rm SE}$ =

System C: $p_{\rm DFE}$ =

System C: $p_{\rm ML}$ =

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten sind bei System **D** zu erwarten?

System D: $p_{\rm SE}$ =

System D: $p_{\rm DFE}$ =

System D: $p_{\rm ML}$ =