A1.8: Vergleich von ASK und BPSK

Die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten der Modulationsarten *Amplitude Shift Keying* (ASK) sowie *Binary Shift Keying* (BPSK) werden oft durch die beiden folgenden Gleichungen angegeben:

$$p_{\rm ASK} = {\rm Q}\left(\sqrt{\frac{E_{\rm B}}{N_0}}\right) = \frac{1}{2}\cdot {\rm erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{\rm B}}{2\cdot N_0}}\right),$$

$$p_{\rm BPSK} = {\rm Q}\left(\sqrt{\frac{2\cdot E_{\rm B}}{N_0}}\right) = \frac{1}{2}\cdot {\rm erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{\rm B}}{N_0}}\right).$$

$E_{\rm B}/N_0$ (log.)	$p_{\rm B}$(ASK)	$p_{\rm B}$(BPSK)
0 dB	$0.242\cdot 10^{0}$	$0.786\cdot 10^{-1}$
1 dB	$0.131\cdot 10^{0}$	$0.563\cdot 10^{-1}$
2 dB	$0.104\cdot 10^{0}$	$0.375\cdot 10^{-1}$
3 dB	$0.789\cdot 10^{-1}$	$0.229\cdot 10^{-1}$
4 dB	$0.565\cdot 10^{-1}$	$0.125\cdot 10^{-1}$
5 dB	$0.377\cdot 10^{-1}$	$0.595\cdot 10^{-2}$
6 dB	$0.230\cdot 10^{-1}$	$0.239\cdot 10^{-2}$
7 dB	$0.126\cdot 10^{-1}$	$0.723\cdot 10^{-3}$
8 dB	$0.600\cdot 10^{-2}$	$0.191\cdot 10^{-3}$
9 dB	$0.241\cdot 10^{-2}$	$0.336\cdot 10^{-4}$
10 dB	$0.783\cdot 10^{-3}$	$0.387\cdot 10^{-5}$
11 dB	$0.194\cdot 10^{-3}$	$0.261\cdot 10^{-6}$
12 dB	$0.343\cdot 10^{-4}$	$0.901\cdot 10^{-8}$

Diese beiden Gleichungen sind in der beigefügten Tabelle ausgewertet. Dabei gilt:

- $E_{\rm B}$ gibt die mittlere Energie pro Bit an.
- N_0 ist die Rauschleistungsdichte.
- Zwischen den Fehlerfunktionen ${\rm Q}(x)$ und ${\rm erfc}(x)$ besteht ein fester Zusammenhang.

Anzumerken ist, dass diese Gleichungen nicht allgemein gelten, sondern nur unter gewissen idealisierten Bedingungen. Diese Voraussetzungen sollen in dieser Aufgabe herausgearbeitet werden.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 1.5.**

Fragebogen zu "A1.8: Vergleich von ASK und BPSK"

a) Welcher deterministischer Zusammenhang besteht zwischen $\mathrm{Q}(x)$ und $\mathrm{erfc}(x)$?

- [ ] Es gilt $\mathrm{Q}(x) = 2 \cdot \mathrm{erfc}(x)$,
- [ ] Es gilt $\mathrm{Q}(x) = 0.5 \cdot \mathrm{erfc}(x/2^{0.5})$,
- [ ] Es gilt $\mathrm{erfc}(x) = 0.5 \cdot \mathrm{Q}(x/2^{0.5})$.

b) Wann gelten die angegebenen Fehlerwahrscheinlichkeits–Gleichungen?

- [ ] Sie gelten nur für den AWGN–Kanal.
- [ ] Sie gelten nur für Matched–Filter–Empfänger (oder Varianten).
- [ ] Die Gleichungen berücksichtigen Impulsinterferenzen.
- [ ] Die Gleichungen gelten nur bei rechteckförmiger Signalformung.

c) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten ergeben sich für $10 \cdot \lg E_\mathrm{B}/N_0 = 12$ dB?

$10 \cdot \lg E_\mathrm{B}/N_0 = 12$ dB: p_ASK =

$10 \cdot \lg E_\mathrm{B}/N_0 = 12$ dB: p_BPSK =

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten ergeben sich für $E_\mathrm{B}/N_0 = 8$?

$E_\mathrm{B}/N_0 = 8$: p_ASK =

$E_\mathrm{B}/N_0 = 8$: p_BPSK =

e) Die Fehlerwahrscheinlichkeit soll nicht größer werden als 10^{-8}. Wie groß ist das erforderliche $10 \cdot \lg E_\mathrm{B}/N_0$ bei ASK?

ASK, BER = 10^{-8}: $(E_\mathrm{B}/N_0)_\mathrm{min}$ = dB.

Z1.8: BPSK-Fehlerwahrscheinlichkeit

Wir gehen von dem optimalen Basisbandübertragungssystem für Binärsignale aus mit

- bipolaren Amplitudenkoeffizienten $a_\nu \in \{-1, +1\}$,
- rechteckförmigem Sendesignal mit den Signalwerten $\pm s_0$ und der Bitdauer T_B,
- AWGN–Rauschen mit der Rauschleistungsdichte N_0,
- Empfangsfilter gemäß dem Matched–Filter–Prinzip,
- Entscheider mit der optimalen Schwelle $E = 0$.

x	$20 \cdot \lg x$	$\mathrm{Q}(x)$
0	$-\infty$ dB	$0.500 \cdot 10^{0}$
1	0.000 dB	$0.159 \cdot 10^{0}$
2	6.021 dB	$0.227 \cdot 10^{-1}$
3	9.542 dB	$0.135 \cdot 10^{-2}$
4	12.041 dB	$0.317 \cdot 10^{-4}$
5	13.979 dB	$0.287 \cdot 10^{-6}$
6	15.563 dB	$0.987 \cdot 10^{-9}$
7	16.902 dB	$0.128 \cdot 10^{-11}$
8	18.062 dB	$0.622 \cdot 10^{-15}$
9	19.085 dB	$0.113 \cdot 10^{-18}$
10	20.000 dB	$0.762 \cdot 10^{-23}$

Wenn nichts anderes angegeben ist, so sollten Sie zudem von den folgenden Zahlenwerten ausgehen:

$$s_0 = 4\,\mathrm{V}, \quad T_\mathrm{B} = 1\,\mathrm{ns}, \quad N_0 = 2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}\,.$$

Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit dieses „Basisbandsystems" wurde bereits in **Kapitel 1.2** angegeben (Index BB):

$$p_\mathrm{BB} = \mathrm{Q}\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) \quad \mathrm{mit} \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{2 \cdot T_\mathrm{B}}}.$$

Hierbei bezeichnet σ_d den Rauscheffektivwert am Entscheider und $\mathrm{Q}(x)$ die komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion, die hier tabellarisch gegeben ist.

Diese Fehlerwahrscheinlichkeit kann man auch in der Form

$$p_\mathrm{BB} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_\mathrm{B}}{N_0}}\right)$$

schreiben, wobei E_B die „Energie pro Bit" bezeichnet. Die Fehlerwahrscheinlichkeit eines vergleichbaren Übertragungssystems mit *Binary Phase Shift Keying* (BPSK) lautet:

$$p_\mathrm{BPSK} = \mathrm{Q}\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) \quad \mathrm{mit} \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{T_\mathrm{B}}}.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 1.5.** Da hier s_0 in „Volt" angegeben ist, besitzt E_B die Einheit „V^2/Hz".

Fragebogen zu "Z1.8: BPSK-Fehlerwahrscheinlichkeit"

a) Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit des Basisbandsystems?

$\boldsymbol{s_0 = 4\text{V}: p_{\text{BB}}}$ =

b) Wie groß ist die Energie pro Bit beim Basisbandsystem?

$\boldsymbol{s_0 = 4\text{V}: E_{\text{B}}}$ = V^2s

c) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei halber Sendeamplitude?

$\boldsymbol{s_0 = 2\text{V}: p_{\text{BB}}}$ =

d) Geben Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit der BPSK abhängig vom Quotienten E_B/N_0 an. Welches Ergebnis stimmt?

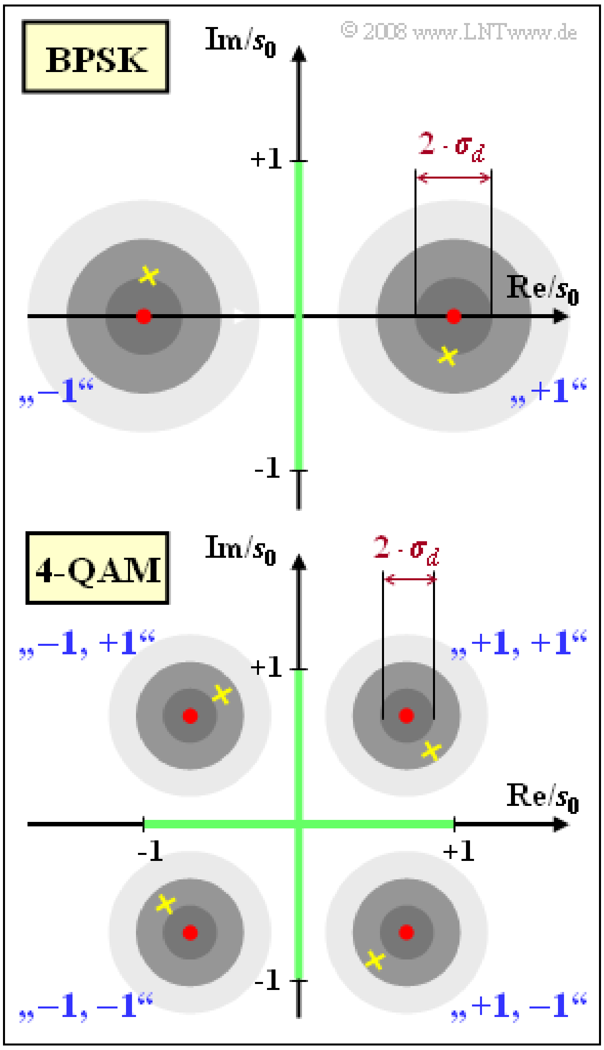
- ☐ $p_\text{BPSK} = \text{Q}[(E_\text{B}/N_0)^{1/2}]$,
- ☐ $p_\text{BPSK} = \text{Q}[(2E_\text{B}/N_0)^{1/2}]$,
- ☐ $p_\text{BPSK} = \text{Q}[(4E_\text{B}/N_0)^{1/2}]$.

e) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten ergeben sich für $E_\text{B}/N_0 = 8$ und $E_\text{B}/N_0 = 2$?

$\boldsymbol{E_\text{B}/N_0 = 8: p_{\text{BPSK}}}$ =

$\boldsymbol{E_\text{B}/N_0 = 2: p_{\text{BPSK}}}$ =

A1.9: BPSK und 4-QAM



Die Grafik zeigt schematisch die Phasendiagramme der binären Phasenmodulation (abgekürzt BPSK) und der Quadraturamplitudenmodulation (4–QAM genannt). Die letztere lässt sich durch zwei BPSK–Systeme mit Cosinus– und Minus–Sinus–Träger beschreiben, wobei bei jedem der Teilkomponenten die Sendeamplitude gegenüber der BPSK um den Faktor „Wurzel aus 2" reduziert ist. Die Hüllkurve des Gesamtsignals $s(t)$ ist somit ebenfalls konstant gleich s_0.

Die Fehlerwahrscheinlichkeit abhängig vom Quotienten E_B/N_0 lautet bei BPSK und 4–QAM gleichermaßen:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right).$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit des BPSK–Systems kann aber auch in der Form

$$p_{B,\,BPSK} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) \quad \text{mit} \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{T_B}}$$

dargestellt werden. Entsprechend gilt für das 4–QAM–System:

$$p_{B,\,QAM} = Q\left(\frac{s_0/\sqrt{2}}{\sigma_d}\right) \quad \text{mit} \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{2 \cdot T_B}}.$$

Beide Gleichungen gelten allerdings nur unter der Voraussetzung einer exakten Phasensynchronisation. Bei einem Phasenversatz $\Delta\phi_T$ zwischen sender– und empfangsseitigem Trägersignal erhöht sich die Fehlerwahrscheinlichkeit signifikant, wobei BPSK– und QAM–System unterschiedlich degradiert werden. Im Phasendiagramm macht sich der Phasenversatz durch eine Rotation der Punktwolken bemerkbar. In der Grafik sind die Mittelpunkte der Punktwolken für $\Delta\phi_T = 15°$ durch gelbe Kreuze markiert, während die Kreise die Mittelpunkte für $\Delta\phi_T = 0$ angeben.

Es gilt stets $E_B/N_0 = 8$, so dass sich die Fehlerwahrscheinlichkeiten von BPSK und QAM im günstigsten Fall (ohne Phasenversatz) jeweils wie folgt ergeben ⇒ **Aufgabe Z1.8:**

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q(4) = 0.317 \cdot 10^{-4}.$$

Bezeichnet man den Abstand der BPSK–Nutzabtastwerte von der (vertikalen) Entscheiderschwelle mit s_0, so ergibt sich für den Rauscheffektivwert $\sigma_d = s_0/4$. Die helleren Kreise in der Grafik markieren die

Höhenlinien mit dem Radius $2\sigma_d$ bzw. $3\sigma_d$ der Gaußschen 2D–WDF.

Bei der 4–QAM sind gegenüber der BPSK die Abstände der rot eingezeichneten Nutzabtastwerte von den nun zwei Entscheiderschwellen jeweils um den Faktor „Wurzel aus 2” geringer, aber es ergibt sich auch ein um den gleichen Faktor kleinerer Rauscheffektivwert σ_d.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Seite **Phasenversatz zwischen Sender und Empfänger** im **Kapitel 1.5.** Die Werte der Q–Funktion können Sie mit folgenden Interaktionsmodul ermitteln:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen (Dateigröße 235 kB)

Fragebogen zu "A1.9: BPSK und 4-QAM"

a) Welche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei BPSK mit $\Delta\phi_T = 15°$?

BPSK, $\Delta\boldsymbol{\phi}_T$ = 15° : $\boldsymbol{p}_B$ =

b) Welche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei BPSK mit $\Delta\phi_T = 45°$?

BPSK, $\Delta\boldsymbol{\phi}_T$ = 45° : $\boldsymbol{p}_B$ =

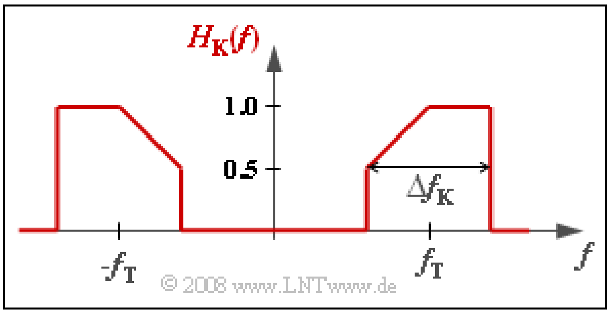
c) Bestimmen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit der 4–QAM bei Phasenversatz allgemein und mit $\Delta\phi_T = 15°$.

QAM, $\Delta\boldsymbol{\phi}_T$ = 15° : $\boldsymbol{p}_B$ =

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei QAM mit $\Delta\phi_T = 45°$?

QAM, $\Delta\boldsymbol{\phi}_T$ = 45° : $\boldsymbol{p}_B$ =

A1.10: Basisbandmodell der BPSK



Wir betrachten in dieser Aufgabe ein BPSK–System mit kohärenter Demodulation, das heißt, es gilt

$$s(t) = z(t) \cdot q(t),$$
$$b(t) = 2 \cdot z(t) \cdot r(t).$$

Die hier gewählten Bezeichnungen lehnen sich an das **Blockschaltbild** im Theorieteil an.

Der Einfluss eines Kanalfrequenzgangs $H_K(f)$ lässt sich in einfacher Weise berücksichtigen, wenn man diesen zusammen mit Modulator und Demodulator durch einen gemeinsamen Basisbandfrequenzgang beschreibt:

$$H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[H_K(f - f_T) + H_K(f + f_T) \right].$$

Damit werden

- Modulator und Demodulator quasi gegeneinander gekürzt und
- der Bandpasskanal $H_K(f)$ in den Tiefpassbereich transformiert.

Die Übertragungsfunktion $H_{MKD}(f)$ darf nicht mit der Tiefpass–Übertragungsfunktion $H_{K,TP}(f)$ gemäß der Beschreibung in **Kapitel 4.3** des Buches „Signaldarstellung" verwechselt werden, die sich aus $H_K(f)$ durch Abschneiden der Anteile bei negativen Frequenzen sowie einer Frequenzverschiebung um f_T nach links ergibt.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 1.5.**

Fragebogen zu "A1.10: Basisbandmodell der BPSK"

a) Welche Aussagen gelten für die äquivalente Tiefpassfunktion $H_{\rm K,TP}(f)$?

- [ ] Es gilt $H_{\rm K,TP}(f = 0) = 2$.
- [ ] Es gilt $H_{\rm K,TP}(f = \Delta f_{\rm K}/4) = 1$.
- [ ] Es gilt $H_{\rm K,TP}(f = -\Delta f_{\rm K}/4) = 0.75$.
- [ ] Die dazugehörige Zeitfunktion $h_{\rm K,TP}(t)$ ist komplex.

b) Welche Aussagen gelten für den Frequenzgang $H_{\rm MKD}(f)$?

- [ ] Es gilt $H_{\rm MKD}\ (f = 0) = 2$.
- [ ] Es gilt $H_{\rm MKD}(f = \Delta f_{\rm K}/4) = 1$.
- [ ] Es gilt $H_{\rm MKD}(f = -\Delta f_{\rm K}/4) = 0.75$.
- [ ] Die dazugehörige Zeitfunktion $h_{\rm MKD}\ (t)$ ist komplex.

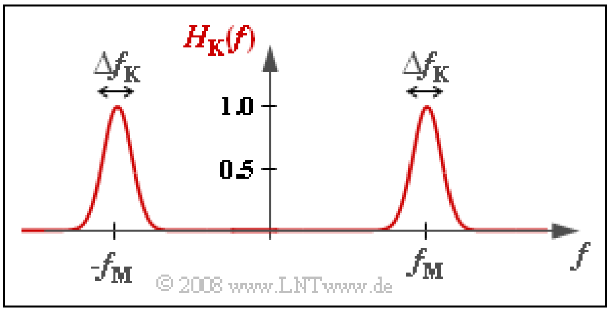
c) Berechnen Sie die Zeitfunktion $h_{\rm MKD}(t)$. Geben Sie den Wert bei $t = 0$ an.

$\boldsymbol{h_{\rm MKD}(t = 0)/\Delta f_{\rm K}}$ =

d) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu?

- [ ] $h_{\rm MKD}(t)$ besitzt äquidistante Nulldurchgänge im Abstand $1/\Delta f_{\rm K}$.
- [ ] $h_{\rm MKD}(t)$ besitzt äquidistante Nulldurchgänge im Abstand $2/\Delta f_{\rm K}$.

Z1.10: Gauß-Bandpass



Bei trägerfrequenzmodulierter Übertragung muss der Kanalfrequenzgang $H_K(f)$ stets als Bandpass angesetzt werden. Die Kanalparameter sind zum Beispiel die Mittenfrequenz f_M und die Bandbreite Δf_K, wobei die Mittenfrequenz f_M oft mit der Trägerfrequenz f_T übereinstimmt. In dieser Aufgabe soll insbesondere von einem Gaußbandpass mit dem Frequenzgang

$$H_K(f) = \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f - f_M}{\Delta f_K}\right)^2\right] + \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f + f_M}{\Delta f_K}\right)^2\right]$$

entsprechend der Grafik ausgegangen werden. Zur Modulation wird binäre Phasenmodulation (BPSK) verwendet, die Demodulation erfolgt frequenz– und phasensynchron.

Zur Beschreibung benutzt man oft den äquivalenten TP–Frequenzgang $H_{K,TP}(f)$. Dieser ergibt sich aus $H_K(f)$ durch

- Abschneiden der Anteile bei negativen Frequenzen,
- Verschieben des Spektrums um f_T nach links.

Im betrachteten Beispiel ergibt sich mit $f_T = f_M$ für den äquivalenten TP–Frequenzgang:

$$H_{K,TP}(f) = \exp\left[-\pi \cdot (f/\Delta f_K)^2\right].$$

Die entsprechende Zeitfunktion (Fouruerrücktransformierte) lautet:

$$h_{K,TP}(t) = \Delta f_K \cdot \exp\left[-\pi \cdot (\Delta f_K \cdot t)^2\right].$$

Zur Beschreibung eines phasensynchronen BPSK–Systems im Tiefpassbereich eignet sich aber auch der Frequenzgang

$$H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[H_K(f - f_T) + H_K(f + f_T)\right],$$

wobei „MKD" für Modulator – Kanal – Demodulator steht. Häufig – aber nicht immer – sind $H_{MKD}(f)$ und $H_{K,TP}(f)$ identisch.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **letzte Theorieseite** von **Kapitel 1.5.**

Fragebogen zu "Z1.10: Gauß-Bandpass"

a) Geben Sie die Impulsantwort $h_K(t)$ des Gauß–Bandpasskanals an. Welcher (normierte) Wert ergibt sich für den Zeitpunkt $t = 0$?

$\boldsymbol{h_K(t = 0)/\Delta f_K}$ =

b) Welche Aussagen gelten unter der Voraussetzung $f_T = f_M$?

- ☐ $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ stimmen vollständig überein.
- ☐ $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ sind für tiefe Frequenzen gleich.
- ☐ Die Zeitfunktion $h_{K,TP}(t)$ ist reell.
- ☐ Die Zeitfunktion $h_{MKD}(t)$ ist reell.

c) Welche Aussagen gelten unter der Voraussetzung $f_T \neq f_M$?

- ☐ $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ stimmen vollständig überein.
- ☐ $H_{K,TP}(f)$ und $H_{MKD}(f)$ sind für tiefe Frequenzen gleich.
- ☐ Die Zeitfunktion $h_{K,TP}(t)$ ist reell.
- ☐ Die Zeitfunktion $h_{MKD}(t)$ ist reell.

d) Im Hinblick auf eine kleinere Bitfehlerwahrscheinlichkeit sollte gelten:

- ☐ $f_M = f_T$,
- ☐ $f_M \neq f_T$.