

## A2.1: AKF und LDS nach Codierung

Wir betrachten das Digital signal

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu} \cdot g_s(t - \nu \cdot T),$$

wobei wir folgende Beschreibungsgrößen verwenden:

- $a_{\nu}$  sind die Amplitudenkoeffizienten,
- $g_s(t)$  gibt den Sendegrundimpuls an,
- $T$  ist die Symboldauer (Abstand der Impulse).

Zur Charakterisierung der spektralen Eigenschaften, die

sich aufgrund der Codierung und der Impulsformung ergeben, verwendet man unter anderem

- die Autokorrelationsfunktion (AKF)

$$\varphi_s(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot \varphi_a(\lambda) \cdot \varphi_{g_s}^*(\tau - \lambda \cdot T),$$

- das Leistungsdichtespektrum (LDS)

$$\Phi_s(f) = \frac{1}{T} \cdot \Phi_a(f) \cdot \Phi_{g_s}^*(f).$$

Hierbei bezeichnet  $\varphi_a(\lambda)$  die diskrete Autokorrelationsfunktion der Amplitudenkoeffizienten, die mit der spektralen Leistungsdichte  $\Phi_a(f)$  über die Fouriertransformation zusammenhängt. Für diese gilt somit:

$$\Phi_a(f) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi_a(\lambda) \cdot e^{-j2\pi f \lambda T}.$$

Weiterhin sind in obigen Gleichungen die Energie-AKF und das Energiespektrum verwendet:

$$\varphi_{g_s}^*(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) \cdot g_s(t + \tau) dt \quad \circ \text{---} \bullet \quad \Phi_{g_s}^*(f) = |G_s(f)|^2.$$

In der vorliegenden Aufgabe soll für die spektrale Leistungsdichte der Amplitudenkoeffizienten folgender Funktionsverlauf angenommen werden (siehe Grafik):

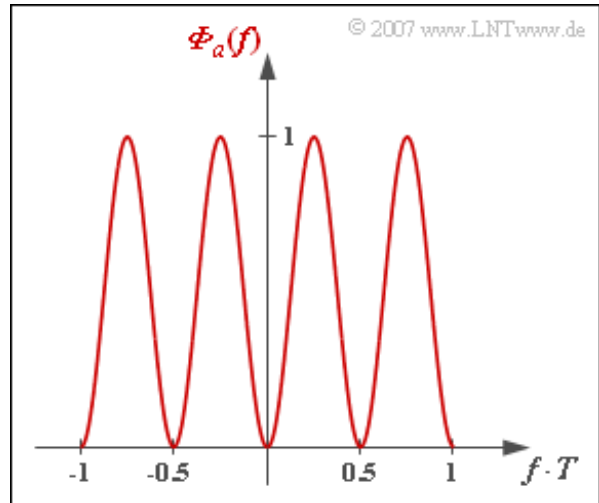
$$\Phi_a(f) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(4\pi f T).$$

Für den Sendegrundimpuls werden folgende Annahmen getroffen:

- In der Teilfrage b) sei  $g_s(t)$  ein NRZ-Rechteckimpuls, so dass eine dreieckförmige Energie-AKF vorliegt, die auf den Bereich  $|\tau| \leq T$  beschränkt ist. Das Maximum ist dabei

$$\varphi_{g_s}^*(\tau = 0) = s_0^2 \cdot T.$$

- Für die Teilaufgabe c) soll von einer Wurzel-Nyquist-Charakteristik mit Rolloff-Faktor  $r = 0$  ausgegangen werden. In diesem Fall gilt:



$$|G_s(f)|^2 = \begin{cases} s_0^2 \cdot T^2 & \text{für } |f| < \frac{1}{2T}, \\ 0 & \text{für } |f| > \frac{1}{2T}. \end{cases}$$

- Für numerische Berechnungen ist stets  $s_0^2 = 10 \text{ mW}$  zu verwenden.

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 2.1** des vorliegenden Buches. Berücksichtigen Sie, dass die Sendeleistung  $P_S$  gleich der AKF  $\varphi_s(\tau)$  an der Stelle  $\tau = 0$  ist, aber auch als Integral über das LDS  $\Phi_s(f)$  berechnet werden kann.

### Fragebogen zu "A2.1: AKF und LDS nach Codierung"

- a) Wie groß sind die diskreten AKF-Werte  $\varphi_a(\lambda)$  der Amplitudenkoeffizienten?  
Geben Sie insbesondere die Zahlenwerte für  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$  und  $\lambda = 2$  ein.

$$\varphi_a(\lambda = 0) =$$

$$\varphi_a(\lambda = 1) =$$

$$\varphi_a(\lambda = 2) =$$

- b) Welche Sendeleistung ergibt sich mit dem NRZ-Sendegrundimpuls?

$$\text{NRZ-Rechteck: } P_S = \quad \text{mW}$$

- c) Wie groß ist die Sendeleistung bei der Wurzel-Nyquist-Charakteristik ( $r = 0$ )?

$$\text{Wurzel-Nyquist: } P_S = \quad \text{mW}$$

## Z2.1: Zur äquivalenten Bitrate

Die obere Darstellung zeigt das Quellensignal  $q(t)$  einer redundanzfreien Binärquelle mit Bitdauer  $T_q$  und Bitrate  $R_q$ . Beide Signalparameter können der Skizze entnommen werden.

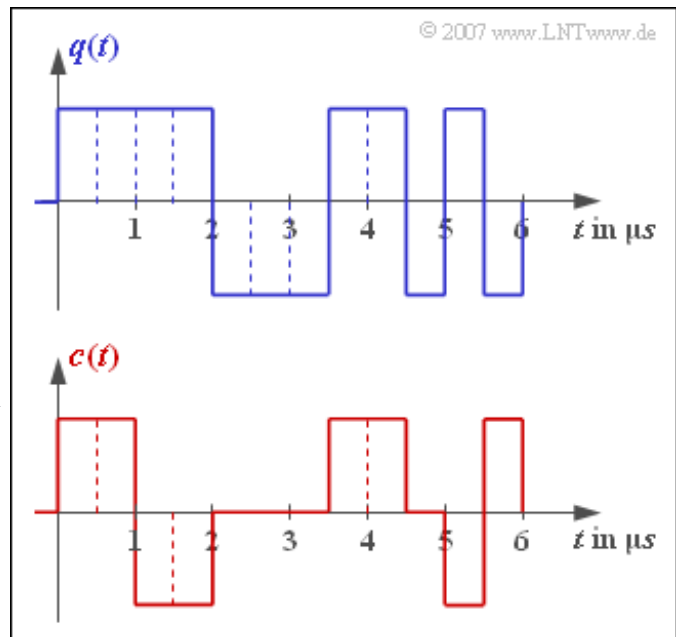
Dieses Binärsignal wird symbolweise codiert und ergibt das unten gezeichnete Codersignal  $c(t)$ . Alle möglichen Codesymbole kommen in dem dargestellten Signalausschnitt der Dauer  $6 \mu\text{s}$  vor. Mit der Stufenzahl  $M_c$  und der Symboldauer  $T_c$  kann man die äquivalente Bitrate – oder den Informationsfluss – des Codersignals angeben:

$$R_c = \frac{\text{ld}(M_c)}{T_c}.$$

Daraus erhält man die relative Redundanz des Codes, wenn man wie hier davon ausgeht, dass die Quelle selbst redundanzfrei ist:

$$r_c = \frac{R_c - R_q}{R_c}.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 2.1** dieses Buches. Bei dem hier betrachteten Übertragungscode handelt es sich um den Bipolarcode zweiter Ordnung, was jedoch für die Lösung dieser Aufgabe nicht von Bedeutung ist.



### Fragebogen zu "Z2.1: Zur äquivalenten Bitrate"

a) Geben Sie die Bitdauer  $T_q$  und die Bitrate  $R_q$  der Quelle an.

$$T_q = \quad \mu\text{s}$$

$$R_q = \quad \text{Mbit/s}$$

b) Wie groß sind die Symboldauer  $T_c$  und die Stufenzahl  $M_c$  des Codersignals?

$$T_c = \quad \mu\text{s}$$

$$M_c =$$

c) Wie groß ist die äquivalente Bitrate  $R_c$  des Codersignals?

$$R_c = \quad \text{Mbit/s}$$

d) Geben Sie die relative Redundanz des Codes an.

$$r_c = \quad \%$$

## A2.2: Binäre bipolare Rechtecke

Wir gehen von folgendem Signal aus:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu} \cdot g_s(t - \nu \cdot T).$$

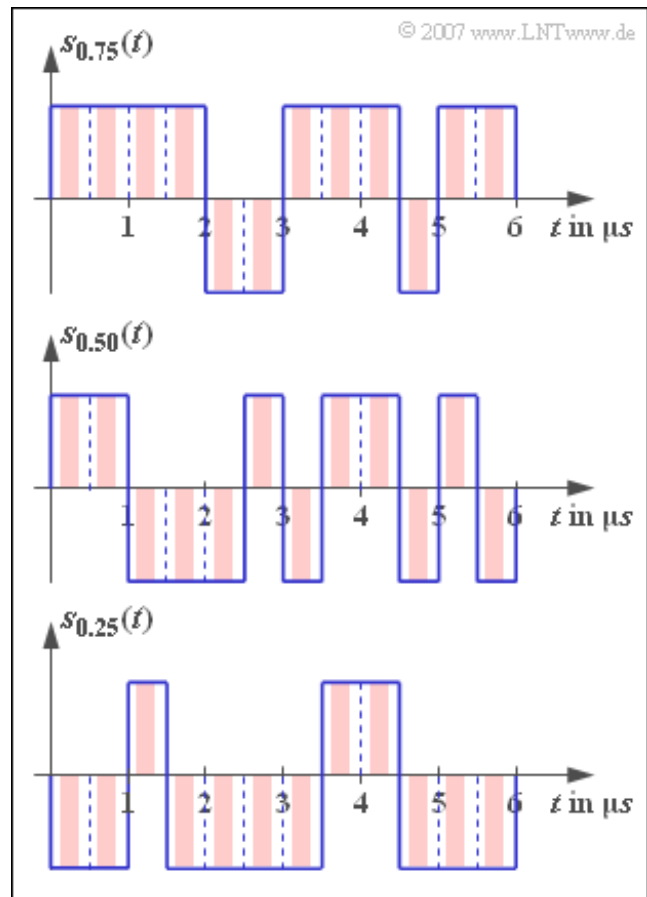
Der Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  wird in dieser Aufgabe stets als rechteckförmig angenommen, wobei das NRZ-Format (blaue Signalverläufe in der Grafik) als auch das RZ-Format mit dem Tastverhältnis  $T_S/T = 0.5$  (rote Signalverläufe) zu untersuchen ist.

Die Amplitudenkoeffizienten besitzen die folgenden Eigenschaften:

- Sie sind binär und bipolar:  $a_{\nu} \in \{-1, +1\}$ .
- $\langle a_{\nu} \rangle$  weist keine statistischen Bindungen auf.
- Die Auftretswahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Werte  $\pm 1$  lauten mit  $0 < p < 1$ :

$$\Pr(a_{\nu} = +1) = p,$$

$$\Pr(a_{\nu} = -1) = 1 - p.$$



Die drei in der Grafik dargestellten Signalausschnitte gelten für  $p = 0.75$ ,  $p = 0.50$  und  $p = 0.25$ .

Im Laufe dieser Aufgabe wird auf folgende Beschreibungsgrößen Bezug genommen:

- $m_a = E[a_{\nu}]$  gibt den linearen Mittelwert der Amplitudenkoeffizienten an, und  $m_{2a} = E[a_{\nu}^2]$  ist der quadratische Mittelwert. Damit kann auch die Varianz  $\sigma_a^2 = m_{2a} - m_a^2$  berechnet werden.
- Die diskrete AKF der Amplitudenkoeffizienten ist  $\varphi_a(\lambda) = E[a_{\nu} \cdot a_{\nu + \lambda}]$ . Es gilt hier:

$$\varphi_a(\lambda) = \begin{cases} m_2 & \text{für } \lambda = 0, \\ m_1^2 & \text{für } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

- Die Energie-AKF des Sendegrundimpulses beträgt:

$$\varphi_{g_s}^{\bullet}(\tau) = \begin{cases} s_0^2 \cdot T_S \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T_S}\right) & \text{für } |\tau| \leq T_S \\ 0 & \text{für } |\tau| \geq T_S. \end{cases}$$

- Damit erhält man für die gesamte AKF des Sendesignals:

$$\varphi_s(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot \varphi_a(\lambda) \cdot \varphi_{g_s}^{\bullet}(\tau - \lambda \cdot T).$$

- Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_s(f)$  ist die Fouriertransformierte der AKF  $\varphi_s(\tau)$ .

**Hinweis:** Diese Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 2.1** des Buches „Digitalsignalübertragung“.

### Fragebogen zu "A2.2: Binäre bipolare Rechtecke"

a) Welche der drei dargestellten Signale sind redundanzfrei?

$s_{0.75}(t)$ ,

$s_{0.5}(t)$ ,

$s_{0.25}(t)$ .

b) Berechnen Sie den quadratischen Mittelwert  $m_{2a}$  der Amplitudenkoeffizienten.

$p = 0.75: m_{2a} =$

$p = 0.50: m_{2a} =$

$p = 0.25: m_{2a} =$

c) Berechnen Sie den linearen Mittelwert  $m_a$  in Abhängigkeit von  $p$ .

$p = 0.75: m_a =$

$p = 0.50: m_a =$

$p = 0.25: m_a =$

d) Berechnen Sie die Varianz  $\sigma_a^2$  der Amplitudenkoeffizienten abhängig von  $p$ .

$p = 0.75: \sigma_a^2 =$

$p = 0.50: \sigma_a^2 =$

$p = 0.25: \sigma_a^2 =$

e) Es gelte zunächst  $p = 0.5$ . Skizzieren Sie die AKF  $\varphi_s(\tau)$  für den NRZ- und den RZ-Grundimpuls und bewerten Sie folgende Aussagen:

Die AKF ist in beiden Fällen dreieckförmig.

Das LDS verläuft in beiden Fällen  $si^2$ -förmig.

Die LDS-Fläche ist in beiden Fällen gleich.

Bei RZ-Impulsen beinhaltet  $\Phi_s(f)$  zusätzliche Diracfunktionen.

f) Es gelte nun  $p = 0.75$ . Skizzieren Sie die AKF für den NRZ-Grundimpuls und bewerten Sie folgende Aussagen:

Die AKF besteht aus einem Dreieck und einem Gleichanteil.

Das LDS besteht aus einem  $si^2$ -Anteil und einem Dirac bei  $f = 0$ .

Die Diracfunktion hat das Gewicht  $s_0^2$ .

Mit  $p = 0.25$  ergibt sich das gleiche Leistungsdichtespektrum.

g) Es gelte weiterhin  $p = 0.75$ . Skizzieren Sie die AKF für den RZ-Grundimpuls und bewerten Sie folgende Aussagen:

Auch hier beinhaltet das LDS einen  $si^2$ -förmigen Anteil.

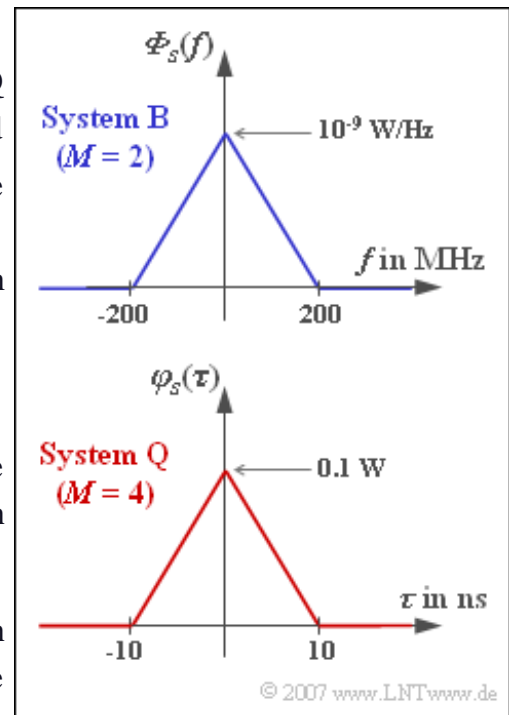
Gleichzeitig gibt es im LDS noch unendlich viele Diraclinien.

## A2.3: Binär- und Quaternärsignal

Es sollen zwei redundanzfreie Übertragungssysteme **B** und **Q** jeweils mit bipolaren Amplitudenkoeffizienten  $a_v$  verglichen gegenüber gestellt werden. Beide Systeme erfüllen die erste Nyquistbedingung. Gemäß der Wurzel-Wurzel-Aufteilung ist das Spektrum  $G_d(f)$  des Detektionsgrundimpulses formgleich mit der spektralen Leistungsdichte  $\Phi_s(f)$  des Sendesignals.

Bekannt sind folgende Eigenschaften der beiden Systeme:

- Vom binären System **B** ist die spektrale Leistungsdichte  $\Phi_s(f)$  am Sender bekannt und in der Grafik zusammen mit den Beschreibungsparametern dargestellt.
- Das System **Q** benutzt ein NRZ-Rechtecksignal mit den vier möglichen Amplitudenwerten  $\pm s_0$  und  $\pm s_0/3$ , die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.
- $s_0^2$  hat die Einheit einer Leistung und gibt die maximale Momentanleistung an, die nur dann auftritt, wenn eines der beiden „äußeren Symbole“ gesendet wird.
- Die Beschreibungsparameter von System **Q** können der dreieckförmigen AKF in nebenstehender Grafik entnommen werden.



**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 2.1** und **Kapitel 2.2** dieses Buches. Berücksichtigen Sie bei der Lösung, dass bei einem stochastischen Signal die Autokorrelationsfunktion (AKF) und das Leistungsdichtespektrum (LDS) stets über die Fouriertransformation zusammenhängen.

### Fragebogen zu "A2.3: Binär- und Quaternärsignal"

a) Welche Symboldauer  $T$  hat das Binärsystem aufgrund der Nyquistbedingung?

**System B:  $T =$**  ns

b) Wie groß ist die (äquivalente) Bitrate des Binärsystems?

**System B:  $R_B =$**  Mbit/s

c) Welche Leistung besitzt das binäre Sendesignal?

**System B:  $P_S =$**  mW

d) Welche Aussagen sind bezüglich des Binärsystems zutreffend?

- Die AKF  $\varphi_s(\tau)$  des Sendesignals  $s(t)$  hat einen  $si^2$ -förmigen Verlauf.
- Die Energie-AKF  $\varphi_{g_s}(\tau)$  des Grundimpulses  $g_s(t)$  ist  $si^2$ -förmig.
- Der Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  selbst ist  $si^2$ -förmig.

e) Welche Symboldauer weist das Quaternärsystem auf?

**System Q:  $T =$**  ns

f) Wie groß ist die äquivalente Bitrate (Informationsfluss) des Quaternärsignals?

**System Q:  $R_B =$**  Mbit/s

g) Welche Leistung besitzt das quaternäre Sendesignal?

**System Q:  $P_S =$**  mW

h) Wie groß ist die maximale momentane Sendeleistung beim Quaternärsignal?

**System Q:  $s_0^2 =$**  mW

## A2.4: Dual- und Graycodierung

Die beiden dargestellten Signale  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  sind zwei unterschiedliche Realisierungen eines redundanzfreien quaternären Sendesignals, die beide vom blau gezeichneten Quellensignal  $q(t)$  abgeleitet wurden. Bei einem der Sendesignale wurde der sog. **Dualcode** mit der Zuordnung

$$\begin{aligned} \text{LL} &\Leftrightarrow -s_0, & \text{LH} &\Leftrightarrow -s_0/3, \\ \text{HL} &\Leftrightarrow +s_0/3, & \text{HH} &\Leftrightarrow +s_0 \end{aligned}$$

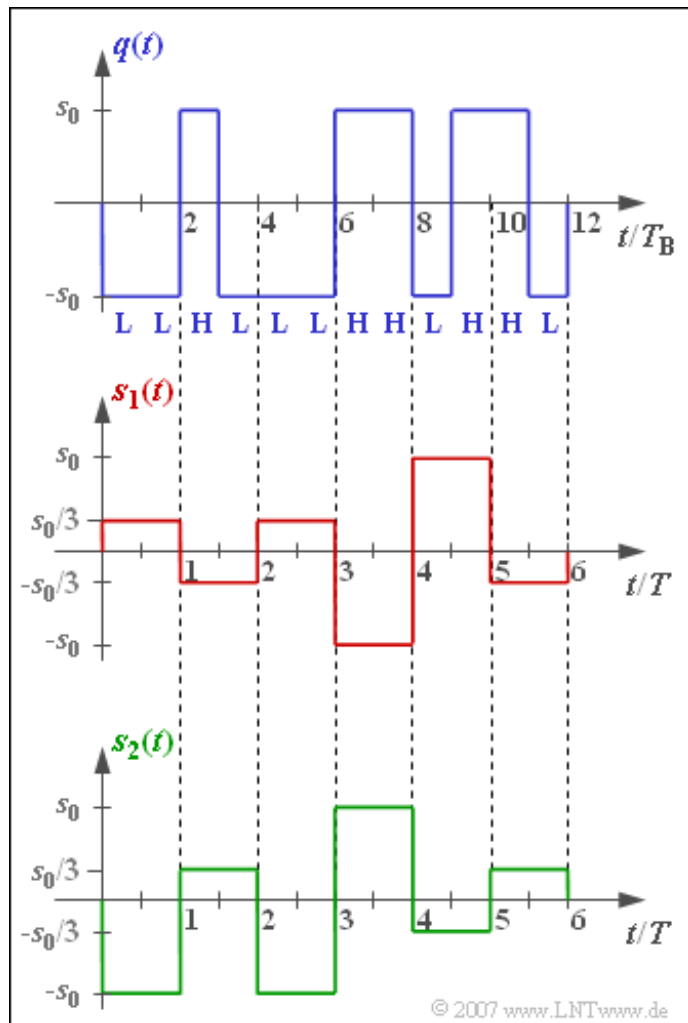
verwendet, beim anderen eine bestimmte Form eines **Graycodes**. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass sich die Binärdarstellung benachbarter Amplitudenwerte immer nur in einem einzigen Bit unterscheiden.

Bei der Lösung der Aufgabe soll von folgenden Voraussetzungen ausgegangen werden:

- Die Amplitudenstufen liegen bei  $\pm 3V$  und  $\pm 1V$ . Die Entscheidungsschwellen liegen in der Mitte zwischen zwei benachbarten Amplitudenwerten, also bei  $-2V$ ,  $0V$  und  $+2V$ .
- Der Rauscheffektivwert ist  $\sigma_d$ . Dieser ist so zu wählen, dass die Verfälschungswahrscheinlichkeit vom äußeren Symbol ( $+s_0$ ) zum nächstgelegenen Symbol ( $+s_0/3$ ) genau  $p = 1\%$  beträgt.
- Verfälschungen zu nicht benachbarten Symbolen können ausgeschlossen werden; bei Gaußschen Störungen ist diese Vereinfachung in der Praxis stets erlaubt.
- Man unterscheidet grundsätzlich zwischen der **Symbolfehlerwahrscheinlichkeit**  $p_S$  (bezogen auf das Quaternärsignal) und der **Bitfehlerwahrscheinlichkeit**  $p_B$  (bezogen auf das Quellensignal).

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 2.2**. Zur numerischen Auswertung der Q-Funktion können Sie folgendes Interaktionsmodul benutzen:

**Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen** (Dateigröße 235 kB)



### Fragebogen zu "A2.4: Dual- und Graycodierung"

a) Bei welchem der Signale  $s_1(t)$  bzw.  $s_2(t)$  wird eine Graycodierung verwendet?

$s_1(t)$  verwendet eine Graycodierung.

$s_2(t)$  verwendet eine Graycodierung.

b) Bestimmen Sie aus der vorne angegebenen Bedingung den Rauscheffektivwert.

$$\sigma_d = \quad \text{V}$$

c) Welche Symbolfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit dem Graycode?

$$\text{Graycode: } p_S = \quad \%$$

d) Berechnen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei Verwendung des Graycodes.

$$\text{Graycode: } p_B = \quad \%$$

e) Welche Symbolfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich mit dem Dualcode?

$$\text{Dualcode: } p_S = \quad \%$$

f) Berechnen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei Verwendung des Dualcodes.

$$\text{Dualcode: } p_B = \quad \%$$

## Z2.4: $p_S$ und $p_B$ bei einem Oktalsystem

Es wird ein Digitalsystem mit  $M = 8$  Amplitudenstufen (Oktalsystem) betrachtet, dessen  $M - 1 = 7$  Entscheidungsschwellen genau bei den jeweiligen Intervallmitten liegen. Ein jeder der gleichwahrscheinlichen Amplitudenkoeffizienten  $a_\mu$  ( $1 \leq \mu \leq 8$ ) kann nur in die unmittelbaren Nachbarkoeffizienten  $a_{\mu-1}$  bzw.  $a_{\mu+1}$  verfälscht werden und zwar in beiden Richtungen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit  $p = 0.01$ . Hierzu einige Beispiele:

- $a_5$  geht mit  $p = 0.01$  in den Koeffizienten  $a_4$  über und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in den Koeffizienten  $a_6$ .
- $a_8$  wird mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  in den Koeffizienten  $a_7$  verfälscht; in anderer Richtung ist keine Verfälschung möglich.

$\mu$	Zufall	Gray
1	H L L	x L L
2	H H H	x L H
3	L L L	x H H
4	L H H	x H L
5	H H L	x x x
6	H L H	x x x
7	L L H	x x x
8	L H L	x x x

© 2007 www.LNTwww.de

Die Zuordnung von jeweils drei binären Quellensymbolen in einen oktalen Amplitudenkoeffizienten geschieht alternativ entsprechend

- der zweiten Spalte in der angegebenen Tabelle, die „zufällig“ – ohne Strategie – generiert wurde,
- der Graycodierung, die in Spalte 3 nur unvollständig angegeben und noch zu ergänzen ist.

Angegeben ist der Graycode für  $M = 4$ . Bei  $M = 8$  sind die beiden letzten Binärzeichen an der gestrichelt eingezeichneten Linie zu spiegeln. Für die ersten vier Amplitudenkoeffizienten ist an der ersten Stelle ein L zu ergänzen, für  $a_5, \dots, a_8$  das Binärsymbol H.

Für die beiden Zuordnungen „Zufall“ und „Gray“ sollen berechnet werden:

- die **Symbolfehlerwahrscheinlichkeit**  $p_S$ , die in beiden Fällen gleich ist; diese Größe gibt die mittlere Verfälschungswahrscheinlichkeit eines Amplitudenkoeffizienten  $a_\mu$  an,
- die **Bitfehlerwahrscheinlichkeit**  $p_B$  bezogen auf die (decodierten) Binärsymbole.

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themenbereich von **Kapitel 2.2**.

### Fragebogen zu "Z2.4: $p_S$ und $p_B$ bei einem Oktalsystem"

a) Welchem Amplitudenkoeffizienten  $a_\mu$  entsprechen beim Graycode die binären Folgen „LHH“ bzw. „HLL“? Geben Sie den jeweiligen Index an ( $1 < \mu < 8$ ).

**LHH:  $\mu$  =**

**HLL:  $\mu$  =**

b) Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit.

**$p_S$  =** %

c) Berechnen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für den Graycode.

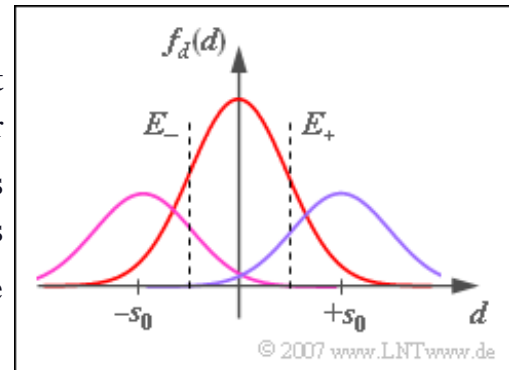
**Graycode:  $p_B$  =** %

d) Berechnen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für den „Zufallscode“.

**Zufallscode:  $p_B$  =** %

## A2.5: Ternäre Signalübertragung

Betrachtet wird ein ternäres Übertragungssystem ( $M = 3$ ) mit den möglichen Amplitudenwerten  $-s_0$ ,  $0$  und  $+s_0$ . Bei der Übertragung addiert sich dem Signal ein additives Gaußsches Rauschen mit dem Effektivwert  $\sigma_d$ . Die Rückgewinnung des dreistufigen Digitalsignals beim Empfänger geschieht mit Hilfe von zwei Entscheidungsschwellen bei  $E_-$  bzw.  $E_+$ .



Zunächst werden die Auftretswahrscheinlichkeiten von den drei Eingangssymbolen als gleichwahrscheinlich angenommen:

$$p_- = \Pr(-s_0) = \frac{1}{3}, \quad p_0 = \Pr(0) = \frac{1}{3}, \quad p_+ = \Pr(+s_0) = \frac{1}{3}.$$

Die Entscheidungsschwellen liegen vorerst mittig bei  $E_- = -s_0/2$  und  $E_+ = +s_0/2$ .

Ab der Teilaufgabe c) gelten für die Symbolwahrscheinlichkeiten  $p_- = p_+ = 1/4$  und  $p_0 = 1/2$ , wie in der Grafik dargestellt. Für diese Konstellation soll durch Variation der Entscheidungsschwellen  $E_-$  und  $E_+$  die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$  minimiert werden.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 2.2**. Für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$  eines  $M$ -stufigen Nachrichtenübertragungssystems mit gleichwahrscheinlichen Eingangssymbolen und Schwellenwerten genau in der Mitte zwischen zwei benachbarten Amplitudenstufen gilt:

$$p_S = \frac{2 \cdot (M - 1)}{M} \cdot Q \left( \frac{s_0}{(M - 1) \cdot \sigma_d} \right).$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeitswerte gemäß der  $Q$ - bzw. der  $\text{erfc}$ -Funktion können Sie mit folgendem Interaktionsmodul numerisch ermitteln:

**Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen** (Dateigröße 235 kB)

Verwenden Sie zur Überprüfung der Ergebnisse das Berechnungsmodul

**Symbolfehlerwahrscheinlichkeit von Digitalssystemen** (Dateigröße 778 kB)

### Fragebogen zu "A2.5: Ternäre Signalübertragung"

a) Welche Symbolfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei gleichwahrscheinlichen Symbolen und dem (normierten) Rauscheffektivwert  $\sigma_d/s_0 = 0.25$ ?

$$p_0 = 1/3, \sigma_d = 0.25 : p_S = \quad \%$$

b) Wie ändert sich die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit mit  $\sigma_d/s_0 = 0.5$ ?

$$p_0 = 1/3, \sigma_d = 0.5 : p_S = \quad \%$$

c) Welcher Wert ergibt sich mit  $p_- = p_+ = 0.25$  und  $p_0 = 0.5$ ?

$$p_0 = 1/2, \sigma_d = 0.5 : p_S = \quad \%$$

d) Bestimmen Sie für  $p_0 = 1/2$  die optimalen Schwellen  $E_+$  und  $E_- = -E_+$ .

$$p_0 = 1/2, \sigma_d = 0.5 : E_{+, \text{opt}} =$$

e) Welche Symbolfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei optimalen Schwellen?

$$\text{optimale Schwellen: } p_S = \quad \%$$

f) Wie lauten die optimalen Schwellenwerte für  $p_0 = 0.2$  und  $p_- = p_+ = 0.4$ ?

$$p_0 = 0.2, \sigma_d = 0.5 : E_{+, \text{opt}} =$$

g) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich? Interpretieren Sie das Ergebnis.

$$\text{optimale Schwellen: } p_S = \quad \%$$

## A2.6: Modifizierter MS43-Code

Bei der ISDN-Datenübertragung wird in Deutschland und Belgien auf der so genannten  $U_{KO}$ -Schnittstelle, die den Übertragungsweg zwischen Vermittlungsstelle und Wohnung beschreibt, der MMS43-Code (*Modified Monitored Sum 4B3T*) eingesetzt. Hierbei handelt es sich um einen 4B3T-Code mit vier Codetabellen, die gemäß der laufenden digitalen Summe (nach  $l$ -Blöcken)

$$\Sigma_l = \sum_{\nu=1}^{3 \cdot l} a_{\nu}$$

zur Codierung herangezogen werden. Zur Initialisierung wird  $\Sigma_0 = 0$  verwendet.

Die Farbgebungen in der Grafik bedeuten:

- Ändert sich die laufende digitale Summe nicht ( $\Sigma_{l+1} = \Sigma_l$ ), so ist ein Feld grau hinterlegt.
- Eine Zunahme ( $\Sigma_{l+1} > \Sigma_l$ ) ist rot hinterlegt, eine Abnahme ( $\Sigma_{l+1} < \Sigma_l$ ) blau.
- Je intensiver die Farbgebung, um so größer ist die Änderung.

Binärwort	laufende digitale Summe $\Sigma_l =$			
	0	1	2	3
L L L L	+ 0 +	0 - 0	0 - 0	0 - 0
L L L H	0 - +	0 - +	0 - +	0 - +
L L H L	+ - 0	+ - 0	+ - 0	+ - 0
L L H H	0 0 +	0 0 +	0 0 +	- - 0
L H L L	- + 0	- + 0	- + 0	- + 0
L H L H	0 + +	- 0 0	- 0 0	- 0 0
L H H L	- + +	- + +	- - +	- - +
L H H H	- 0 +	- 0 +	- 0 +	- 0 +
H L L L	+ 0 0	+ 0 0	+ 0 0	0 - -
H L L H	+ - +	+ - +	+ - +	- - -
H L H L	+ + -	+ + -	+ - -	+ - -
H L H H	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -
H H L L	+ + +	- + -	- + -	- + -
H H L H	0 + 0	0 + 0	0 + 0	- 0 -
H H H L	0 + -	0 + -	0 + -	0 + -
H H H H	+ + 0	0 0 -	0 0 -	0 0 -

© 2007 www.LNTwww.de

**Hinweis:** Diese Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 2.3**. Die Binärsymbole werden in diesem Lerntutorial mit **L** („Low“) und **H** („High“) bezeichnet. Häufig findet man in der Literatur auch die Binärsymbole **L** und **0** (statt **H**). Manchmal entspricht aber auch **L** unserem **H** und **0** unserem **L**.

Damit eine solche Verwirrung vermieden wird und die „0“ nicht in beiden Alphabeten (binär und ternär) – dazu noch mit unterschiedlicher Bedeutung – auftritt, wurde in *LNTwww* die zugegebenerweise etwas gewöhnungsbedürftige Nomenklatur verwendet. Wir sind uns durchaus bewusst, dass auch unsere Nomenklatur manche Leser verwirren wird.

Sie können Ihre Ergebnisse mit dem Interaktionsmodul **Prinzip der 4B3T-Codierung** überprüfen.

### Fragebogen zu "A2.6: Modifizierter MS43-Code"

a) Was sind Gründe dafür, dass bei ISDN statt des redundanzfreien Binärcodes ein 4B3T-Code verwendet wird?

- 4B3T ist dem redundanzfreien Binärcode grundsätzlich überlegen.
- Das Sendesignal sollte wegen  $H_K(0) = 0$  gleichsignalfrei sein.
- Kleinere Schrittgeschwindigkeit ermöglicht größere Kabellänge.

b) Codieren Sie die binäre Folge „HHLL LHLL LHHL HLHL“ (mit  $\Sigma_0 = 0$ ). Wie lautet der Amplitudenkoeffizient des dritten Ternärsymbols des vierten Blocks?

$$a_{12} =$$

c) Ermitteln Sie das Markovdiagramm für den Übergang von  $\Sigma_l$  auf  $\Sigma_{l+1}$ . Welche Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben sich?

$$\Pr(\Sigma_{l+1} = 0 \mid \Sigma_l = 0) =$$

$$\Pr(\Sigma_{l+1} = 2 \mid \Sigma_l = 0) =$$

$$\Pr(\Sigma_{l+1} = 0 \mid \Sigma_l = 2) =$$

d) Welche Eigenschaften folgen aus dem Markovdiagramm?

- Alle Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(\Sigma_l = 0) = \dots = \Pr(\Sigma_l = 3)$  sind gleich.
- Es gilt  $\Pr(\Sigma_l = 0) = \Pr(\Sigma_l = 3)$  und  $\Pr(\Sigma_l = 1) = \Pr(\Sigma_l = 2)$ .
- Die Extremwerte (0 bzw. 3) treten seltener auf als 1 oder 2.

## Z2.6: 4B3T-Code nach Jessop und Waters

Die Grafik zeigt die zwei Codetabellen für den 4B3T-Code nach Jessop und Waters. Je nach dem aktuellen Wert der laufenden digitalen Summe

$$\Sigma_l = \sum_{\nu=1}^{3 \cdot l} a_\nu$$

gibt es für jedes binäre Eingangstupel „LLLL“ ... „HHHH“ zwei unterschiedliche ternäre Codefolgen. In der Tabelle stehen „+“ und „-“ für die Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu = +1$  bzw.  $a_\nu = -1$ .

Die Laufvariable  $l$  kennzeichnet die einzelnen Blöcke.

In der Aufgabe wird von den folgenden sechs Eingangsblöcken ausgegangen: LLHL HLLH LHHH HLLH HLHH HHLH.

Die laufende digitale Summe ist mit  $\Sigma_0 = 0$  (Teilaufgaben bis einschließlich d) bzw.  $\Sigma_0 = 5$  (Teilaufgabe e) initialisiert.

Binärwort	laufende digitale Summe $\Sigma_l =$	
	0; 1; 2	3; 4; 5
LLLL	+ 0 -	+ 0 -
LLLH	- + 0	- + 0
LLHL	0 - +	0 - +
LLHH	+ - 0	+ - 0
LHLL	+ + 0	- - 0
LHLH	0 + +	0 - -
LHHL	+ 0 +	- 0 -
LHHH	+ + +	- - -
HLLL	+ + -	- - +
HLLH	- + +	+ - -
HLHL	+ - +	- + -
HLHH	+ 0 0	- 0 0
HHLL	0 + 0	0 - 0
HHLH	0 0 +	0 0 -
HHHL	0 + -	0 + -
HHHH	- 0 +	- 0 +

© 2007 www.LNTwww.de

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das Kapitel 2.3. Die Binärsymbole werden in diesem Lerntutorial mit L („Low“) und H („High“) bezeichnet. Häufig findet man in der Literatur auch die Binärsymbole L und 0 (statt H). Manchmal entspricht aber auch L unserem H und 0 unserem L.

Damit eine solche Verwirrung vermieden wird und die „0“ nicht in beiden Alphabeten (binär und ternär) – dazu noch mit unterschiedlicher Bedeutung – auftritt, wurde in LNTwww die zugegebenerweise etwas gewöhnungsbedürftige Nomenklatur verwendet. Wir sind uns durchaus bewusst, dass auch unsere Nomenklatur manche Leser verwirren wird.

Sie können Ihre Ergebnisse mit dem Interaktionsmodul **Prinzip der 4B3T-Codierung** überprüfen.

### Fragebogen zu "Z2.6: 4B3T-Code nach Jessop und Waters"

a) Codieren Sie die Eingangsfolge „LLHL HLLH LHHH HLLH HLHH HHLH“ ausgehend vom Initialwert  $\Sigma_0 = 0$ . Wie lautet die ternäre Ausgangsfolge?

- 0 - + - + + - - - - + + + 0 0 0 0 0 +,
- 0 - + - + + + + + + - - - - 0 0 0 0 0 +,
- 0 - + + - - - - - - - + + + + 0 0 0 0 0 - .

b) Welchen Wert hat die laufende digitale Summe nach Codierung der 6 Blöcke?

$$\Sigma_6 =$$

c) Wieviele Ternärwerte „+1“ können maximal aufeinanderfolgen?

$$K_{+1} =$$

d) Wieviele Ternärwerte „0“ können maximal aufeinanderfolgen?

$$K_0 =$$

e) Welchen Wert hat die laufende digitale Summe nach Codierung der 6 Blöcke, wenn von  $\Sigma_0 = 5$  ausgegangen wird?

$$\Sigma_6 =$$

## A2.7: AMI-Code

Die Grafik zeigt das Blockschaltbild zur AMI-Codierung, wobei von den binären bipolaren Amplitudenkoeffizienten  $q_v \in \{-1, +1\}$  am Eingang ausgegangen wird. Diese Umcodierung erfolgt zweistufig:

- Im ersten Teil des Blockschaltbildes wird bei jedem Taktschritt ein binär-vorcodiertes Symbol  $b_v$  aus der Modulo-2-Addition von  $q_v$  und  $b_{v-1}$  erzeugt. Es gilt  $b_v \in \{-1, +1\}$ .
- Danach wird durch eine herkömmliche Subtraktion der aktuelle Amplitudenkoeffizient des ternären Sendesignals  $s(t)$  bestimmt. Dabei gilt:

$$a_v = \frac{1}{2} \cdot [b_v - b_{v-1}] .$$

Aufgrund der AMI-Codierung wird sichergestellt, dass keine langen „+1“- bzw. „-1“-Sequenzen entstehen. Um auch lange Nullfolgen zu vermeiden, wurden auch modifizierte AMI-Codes entwickelt:

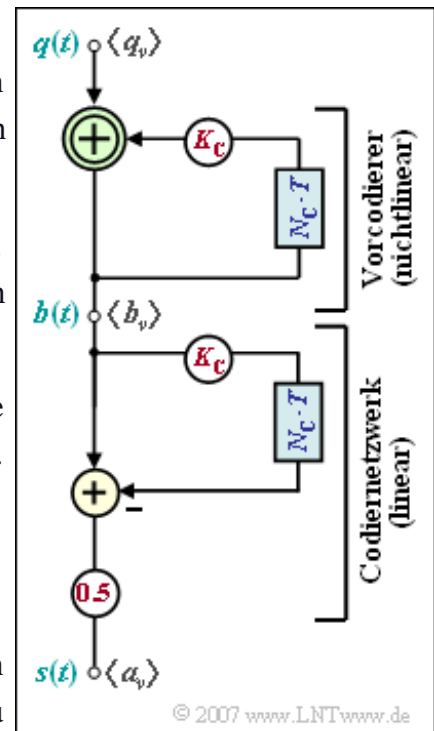
- Beim HDB3-Code werden je vier aufeinanderfolgende Nullen durch eine gezielte Verletzung der AMI-Codierregel markiert.
- Beim B6ZS-Code werden sechs aufeinanderfolgende Nullen durch eine gezielte Verletzung der AMI-Codierregel markiert.

Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_a(f)$  der Amplitudenkoeffizienten soll aus den diskreten AKF-Werten  $\varphi_a(\lambda) = E[a_v \cdot a_{v+\lambda}]$  ermittelt werden. Die Fouriertransformation lautet in dieser diskreten Darstellung:

$$\Phi_a(f) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi_a(\lambda) \cdot e^{-j2\pi f \lambda T} .$$

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 2.4**. Sie können Ihre Ergebnisse mit folgendem Interaktionsmodul überprüfen:

**Signale, AKF und LDS der Pseudoternär codes** (Dateigröße: 761 kB)



### Fragebogen zu "A2.7: AMI-Code"

- a) Die Eingangsfolge sei  $\langle q_v \rangle = \langle +1, -1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, -1, -1, +1 \rangle$ .  
Ermitteln Sie die binär-vorcodierte Folge  $\langle b_v \rangle$  mit der Vorbelegung  $b_0 = -1$ .  
Geben Sie zur Kontrolle folgende Werte ein:

$$b_1 =$$

$$b_{11} =$$

$$b_{12} =$$

- b) Ermitteln Sie die Folge  $\langle a_v \rangle$  der Amplitudenkoeffizienten des AMI-codierten Sendesignals  $s(t)$ . Geben Sie zur Ergebnisüberprüfung folgende Werte ein:

$$a_1 =$$

$$a_{11} =$$

$$a_{12} =$$

- c) Würde sich ein HDB3- bzw. ein B6ZS-Signal im betrachteten Bereich ( $12T$ ) vom AMI-Code unterscheiden?

Der HDB3-Code unterscheidet sich vom AMI-Code.

Der B6ZS-Code unterscheidet sich vom AMI-Code.

- d) Wie groß sind die drei Auftretswahrscheinlichkeiten beim AMI-Code?

$$\Pr(a_v = +1) =$$

$$\Pr(a_v = 0) =$$

$$\Pr(a_v = -1) =$$

- e) Berechnen Sie die beiden ersten Mittelwerte der Amplitudenkoeffizienten.

$$E[a_v] =$$

$$E[a_v^2] =$$

- f) Berechnen Sie die diskrete AKF  $\varphi_a(\lambda)$ , insbesondere die AKF-Werte

$$\varphi_a(\lambda = 0) =$$

$$\varphi_a(\lambda = 1) =$$

$$\varphi_a(\lambda = 2) =$$

- g) Wie lautet das LDS  $\Phi_a(f)$ ? Welche Werte ergeben für  $f = 0$  und  $f = 1/(2T)$ ?

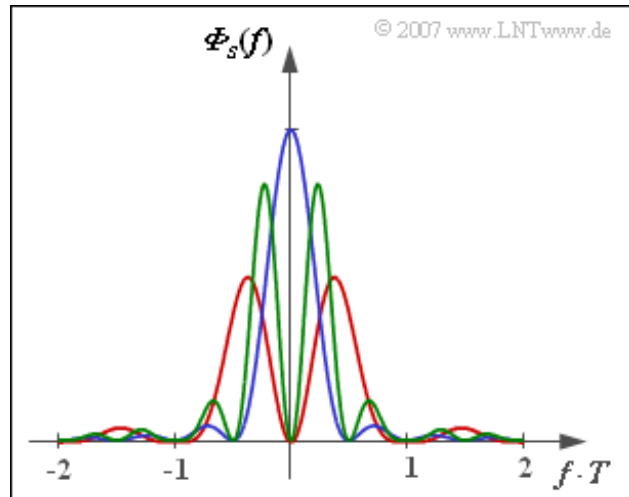
$$\Phi_a(f=0) =$$

$$\Phi_a(f=1/(2T)) =$$

## Z2.7: Pseudoternär codes – LDS

In der Grafik sehen Sie die Leistungsdichtespektren von drei verschiedenen Pseudoternär codes, die sich aus der allgemeinen Beschreibung gemäß **Aufgabe A2.7** durch unterschiedliche Werte der Parameter  $N_C$  und  $K_C$  ergeben. In verschiedenen Farben sind die Leistungsdichtespektren

$$\Phi_s(f) = \frac{s_0^2 \cdot T}{2} \cdot \text{si}^2(\pi f T) \cdot [1 - K_C \cdot \cos(2\pi f N_C T)]$$



für folgende Varianten dargestellt:

- AMI-Code ( $N_C = 1, K_C = +1$ ),
- Duobinär code ( $N_C = 1, K_C = -1$ ),
- Bipolarcode zweiter Ordnung ( $N_C = 2, K_C = +1$ ).

Bei obiger LDS-Gleichung ist die Verwendung von rechteckförmigen NRZ-Sendegrundimpulsen vorausgesetzt. Alle hier betrachteten Pseudoternär codes besitzen dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\Pr[s(t) = 0] = \frac{1}{2}, \quad \Pr[s(t) = +s_0] = \Pr[s(t) = -s_0] = \frac{1}{4}.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 2.4**. Sie können Ihre Ergebnisse mit folgendem Interaktionsmodul überprüfen:

**Signale, AKF und LDS der Pseudoternär codes** (Dateigröße: 761 kB)

### Fragebogen zu "Z2.7: Pseudoternär codes – LDS"

a) Welcher Kurvenzug gehört zum AMI-Code?

- rot,
- blau,
- grün.

b) Welcher Kurvenzug gehört zum Duobinär code?

- rot,
- blau,
- grün.

c) Welcher Kurvenzug gehört zum Bipolarcode zweiter Ordnung?

- rot,
- blau,
- grün.

d) Welcher Code besitzt die größte Sendeleistung?

- AMI-Code.
- Duobinär code.
- Bipolarcode 2. Ordnung.
- Die Sendeleistung ist bei allen Codes gleich.

e) Welcher dieser Codes ist gleichsignalfrei?

- AMI-Code.
- Duobinär code.
- Bipolarcode 2. Ordnung.

f) Warum benötigt man beim „Telefonkanal“ gleichsignalfreie Codes?

- Zur Verbindung von Leitungen unterschiedlicher Impedanz benötigt man Übertrager, die eine Hochpasscharakteristik bewirken.
- Da die Stromversorgung oft über die Signalleitung erfolgt, darf das zu übertragende Nachrichtensignal keinen Gleichanteil beinhalten.

## A2.8: Vergleich Binär - AMI - 4B3T

In der Grafik sind drei Augendiagramme (ohne Rauschen) dargestellt, wobei jeweils ein rechteckförmiger NRZ-Sendegrundimpuls und für das Gesamtsystem eine Cosinus-Rolloff-Charakteristik mit Rolloff-Faktor  $r = 0.8$  zugrunde liegen. Für die einzelnen Augendiagramme ist weiterhin vorausgesetzt (von oben nach unten):

- der redundanzfreie Binärcode,
- der AMI-Code (ca. 37% Redundanz),
- der 4B3T-Code (ca. 16% Redundanz).

Weiter kann von folgenden Voraussetzungen ausgegangen werden:

- Es liegt AWGN-Rauschen vor, wobei gilt:

$$10 \cdot \lg \frac{s_0^2 \cdot T}{N_0} = 10 \text{ dB}.$$

- Die Detektionsstörleistung hat beim Binärsystem folgenden Wert (wegen des nicht optimalen Empfangsfilters 12%-Aufschlag):

$$\sigma_d^2 = 1.12 \cdot \frac{N_0}{2T}.$$

- Die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit des Binärsystems lautet:

$$p_s = Q \left( \frac{s_0}{\sigma_d} \right).$$

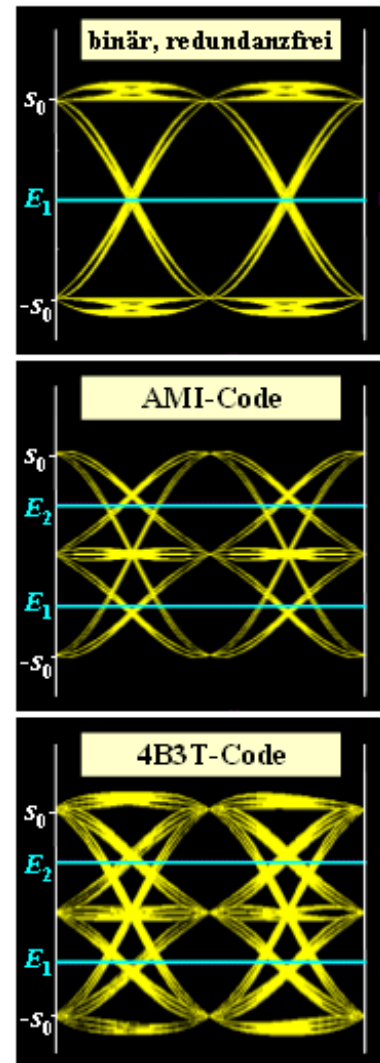
- Dagegen gilt für die beiden redundanten Ternärsysteme:

$$p_s = \frac{4}{3} \cdot Q \left( \frac{s_0/2}{\sigma_d} \right).$$

- Zu berücksichtigen ist dabei, dass sich der Rauscheffektivwert  $\sigma_d$  gegenüber dem redundanzfreien Binärsystem durchaus verändern kann.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 2.3** und das **Kapitel 2.4** des vorliegenden Buches. Zur numerischen Auswertung der Q-Funktion können Sie das folgende Interaktionsmodul verwenden:

**Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen** (Dateigröße 235 kB)



© 2007 www.LNTwww.de

### Fragebogen zu "A2.8: Vergleich Binär - AMI - 4B3T"

a) Berechnen Sie den (normierten) Rauscheffektivwert für das Binärsystem.

$$\text{binär: } \sigma_d/s_0 =$$

b) Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit des Binärsystems?

$$\text{binär: } p_S =$$

c) Wie groß ist der Rauscheffektivwert beim System mit AMI-Codierung?

$$\text{AMI: } \sigma_d/s_0 =$$

d) Welche Auswirkungen hat dies auf die Fehlerwahrscheinlichkeit?

$$\text{AMI: } p_S =$$

e) Welcher Rauscheffektivwert ergibt sich bei Verwendung des 4B3T-Codes?

$$\text{4B3T: } \sigma_d/s_0 =$$

f) Zu welcher Fehlerwahrscheinlichkeit führt demnach der 4B3T-Code?

$$\text{4B3T: } p_S =$$