Zu Kapitel 1.3: Beweis des ersten Nyquistkriteriums

1. Wir gehen von der ersten Nyquistbedingung im Zeitbereich aus:

$$g_{\rm Nyq}(\nu T) = \left\{ \begin{array}{ll} g_0 & \text{für} \quad \nu = 0 \, , \\ 0 & \text{für} \quad \nu \neq 0 \, . \end{array} \right.$$

2. Aus dem zweiten Fourierintegral erhält man somit für $\nu \neq 0$:

$$g_{\rm Nyq}(\nu T) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\rm Nyq}(f) \cdot {\rm e}^{{\rm j}\,2\pi f\,\nu\,T}\,{\rm d}f = 0\,.$$

3. Zerlegt man das Fourierintegral in Teilintegrale der Breite $1/T$, so lauten die Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(k-1/2)/T}^{(k+1/2)/T} G_{\rm Nyq}(f) \cdot {\rm e}^{{\rm j}\,2\pi f\,\nu\,T}\,{\rm d}f = 0\,.$$

4. Mit der Substitution $f' = f + k/T$ folgt daraus:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} G_{\rm Nyq}(f' - \frac{k}{T}) \cdot {\rm e}^{{\rm j}\,2\pi\,\cdot\,(f'-k/T)\,\cdot\,\nu T}\,{\rm d}f' = 0\,.$$

5. Für alle ganzzahligen Werte von k und ν gilt:

$${\rm e}^{-{\rm j}\,2\pi\,k\,\nu} = 1 \quad\quad \Rightarrow \quad\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} G_{\rm Nyq}(f' - \frac{k}{T}) \cdot {\rm e}^{{\rm j}\,2\pi f'\,\nu T}\,{\rm d}f' = 0\,.$$

6. Durch Vertauschen von Summation und Integration sowie Umbenennen von f' in f folgt weiter:

$$\int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_{\rm Nyq}(f - \frac{k}{T}) \cdot {\rm e}^{{\rm j}\,2\pi f \nu\,T}\,{\rm d}f = 0\,.$$

7. Diese Forderung ist für alle $\nu \neq 0$ nur dann zu erfüllen, wenn die unendliche Summe unabhängig von f ist, also einen konstanten Wert besitzt:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_{\rm Nyq}(f - \frac{k}{T}) = K_{\rm Nyq}\,.$$

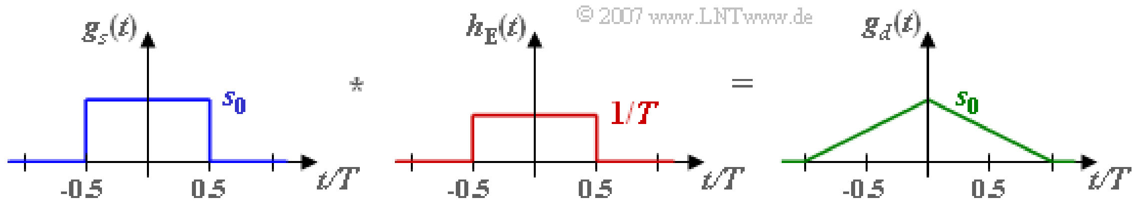
8. Aus der vorletzten Gleichung erhält man gleichzeitig für $\nu = 0$:

$$\int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_{\rm Nyq}(f - \frac{k}{T})\,{\rm d}f = K_{\rm Nyq} \cdot \frac{1}{T} = g_0 \quad \Rightarrow \quad K_{\rm Nyq} = g_0 \cdot T\,.$$

q.e.d.

Zu Kapitel 1.4: Nebenrechnungen zur Seite 2b

Gleichungen zur Beschreibung von **System A** ($T_S = T$, $T_E = T$):



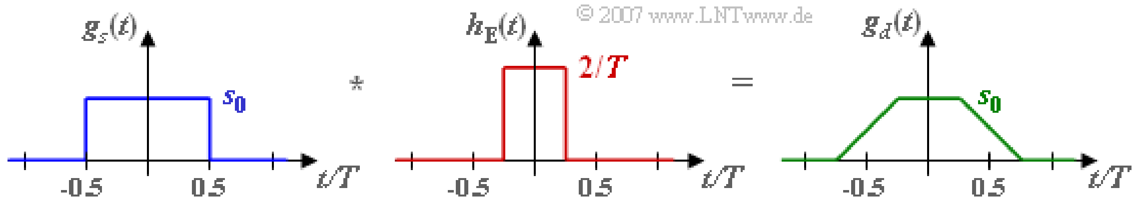
Nutzabtastwert: $$g_0 = g_d(t=0) = \int_{-T/2}^{T/2} g_s(t) \cdot h_E(t)\, dt = s_0 \cdot \frac{1}{T} \cdot T = s_0$$

Rauschleistung: $$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} h_E(t)^2\, dt = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot T = \frac{N_0}{2T}$$

$$\Rightarrow \quad p_B = Q\left(\frac{g_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot s_0^2 \cdot T}{N_0}}\right)$$

Energie pro Bit: $$E_B = P_S \cdot T = s_0^2 \cdot T \qquad \Rightarrow \quad p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right)$$

Gleichungen zur Beschreibung von **System B** ($T_S = T$, $T_E = T/2$):



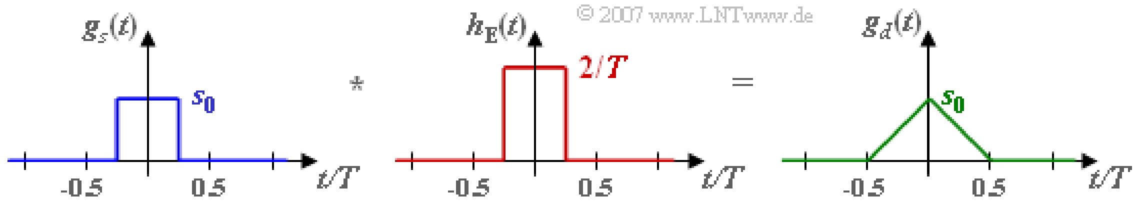
Nutzabtastwert: $$g_0 = g_d(t=0) = \int_{-T/2}^{T/2} g_s(t) \cdot h_E(t)\, dt = s_0 \cdot \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2} = s_0$$

Rauschleistung: $$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} h_E(t)^2\, dt = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{4}{T^2} \cdot \frac{T}{2} = \frac{N_0}{T}$$

$$\Rightarrow \quad p_B = Q\left(\frac{g_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{N_0}}\right)$$

Energie pro Bit: $$E_B = P_S \cdot T = s_0^2 \cdot T \qquad \Rightarrow \quad p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right)$$

Gleichungen zur Beschreibung von **System C** ($T_S = T/2$, $T_E = T/2$):



Nutzabtastwert: $g_0 = g_d(t = 0) = \int_{-T/2}^{T/2} g_s(t) \cdot h_E(t)\; dt = s_0 \cdot \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2} = s_0$

Rauschleistung: $\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} h_E(t)^2\; dt = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{4}{T^2} \cdot \frac{T}{2} = \frac{N_0}{T}$

$$\Rightarrow \quad p_B = Q\left(\frac{g_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{N_0}}\right)$$

Energie pro Bit: $E_B = P_S \cdot T = \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \cdot T \quad \Rightarrow \quad p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right)$