Musterlösung zur Aufgabe A4.1

a) Für die bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt nach dem **Satz von Bayes** mit der Schnittmenge $A \cap B$:

$$\Pr(B\,|\,A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}, \quad \Pr(A\,|\,B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

$$\Rightarrow \quad \Pr(A\,|\,B) = \Pr(B\,|\,A) \cdot \frac{\Pr(A)}{\Pr(B)}.$$

Richtig ist der Lösungsvorschlag 3. Im Sonderfall $\Pr(B) = \Pr(A)$ wäre auch der Vorschlag 1 richtig.

b) Mit $A \Rightarrow$ „$x = 0$" und $B \Rightarrow$ „$y = 0$" ergibt sich sofort die Gleichung gemäß Lösungsvorschlag 1:

$$\Pr(x=0\,|\,y=0) = \Pr(y=0\,|\,x=0) \cdot \frac{\Pr(x=0)}{\Pr(y=0)}.$$

c) Wir berechnen den L–Wert der Rückschlusswahrscheinlichkeiten. Unter der Annahme $y = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} L_{\rm R}(y=0) &= L(x\,|\,y=0) = \ln \frac{\Pr(x=0\,|\,y=0)}{\Pr(x=1\,|\,y=0)} = \\ &= \ln \frac{\Pr(y=0\,|\,x=0) \cdot \Pr(x=0)/\Pr(y=0)}{\Pr(y=0\,|\,x=1) \cdot \Pr(x=1)/\Pr(y=0)} = \\ &= \ln \frac{\Pr(y=0\,|\,x=0)}{\Pr(y=0\,|\,x=1)} + \ln \frac{\Pr(x=0)}{\Pr(x=1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad L_{\rm R}(y=0) = L(x\,|\,y=0) = L_{\rm V}(y=0) + L_{\rm A}(x).$$

In gleicher Weise ergibt sich unter der Annahme $y = 1$:

$$L_{\rm R}(y=1) = L(x\,|\,y=1) = L_{\rm V}(y=1) + L_{\rm A}(x).$$

Die beiden Ergebnisse lassen sich mit $y \in \{0, 1\}$ und

- dem Eingangs–LLR,

$$L_{\rm A}(x) = \ln \frac{\Pr(x=0)}{\Pr(x=1)},$$

- sowie dem Vorwärts–LLR,

$$L_{\rm V}(y) = L(y\,|\,x) = \ln \frac{\Pr(y\,|\,x=0)}{\Pr(y\,|\,x=1)},$$

wie folgt zusammenfassen:

$$L_{\rm R}(y) = L(x\,|\,y) = L_{\rm V}(y) + L_{\rm A}(x).$$

Die Identität $L_{\rm R}(y) \equiv L_{\rm V}(y)$ erfordert $L_{\rm A}(x) = 0$ $\Rightarrow$ gleichwahrscheinliche Symbole $\Rightarrow$ Vorschlag 2.

d) Der Aufgabenbeschreibung können Sie entnehmen, dass mit der Verfälschungswahrscheinlichkeit $\varepsilon = 0.1$ der Ausgangswert $y = 1$ zum Vorwärts–LLR $L_{\rm V}(y = 1) = -2.197$ führt. Wegen $\Pr(x = 0) = 1/2$ $\Rightarrow$ $L_{\rm A}(x) = 0$ gilt somit auch:

$$L_{\rm R}(y=1) = L_{\rm V}(y=1) \ \underline{-2.197}.$$

e) Bei gleicher Verfälschungswahrscheinlichkeit $\varepsilon = 0.1$ unterscheidet sich $L_V(y = 0)$ von $L_V(y = 1)$ nur durch das Vorzeichen. Mit $\Pr(x = 0) = 0.2 \Rightarrow L_A(x) = -1.382$ erhält man somit:

$$L_R(y=0) = (+)2.197 - 1.382 \underline{= +0.815}\,.$$

f) Wie Sie sicher gerne nachprüfen werden, gilt der Zusammenhang „$L_R = L_V + L_A$" auch für den „2–auf–M–Kanal", unabhängig vom Umfang M des Ausgangsalphabets $\Rightarrow$ <u>Antwort Ja</u>.

g) Der AWGN–Kanal wird durch den skizzierten „2–auf–M–Kanal" mit $M \to \infty$ ebenfalls beschrieben $\Rightarrow$ <u>Antwort Ja</u>.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.1

a) Mit den gegebenen Symbolwahrscheinlichkeiten $\Pr(x = +1) = 3/4$ und $\Pr(x = -1) = 1/4$ erhält man:

$$L(x) = \ln \frac{\Pr(x = +1)}{\Pr(x = -1)} = \ln \frac{3/4}{1/4} \underline{= 1.099}\,.$$

b) Entsprechend der Definition

$$L(x) = \ln \frac{\Pr(x = +1)}{\Pr(x = -1)}$$

ergibt sich für $L(x) = -2$ die folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\Pr(x = +1)}{1 - \Pr(x = +1)} \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{-2} \approx 0.135 \quad \Rightarrow \quad 1.135 \cdot \Pr(x = +1) \stackrel{!}{=} 0.135$$

$$\Rightarrow \quad \Pr(x = +1) = 0.119\,, \quad \Pr(x = -1) \underline{= 0.881}\,.$$

c) Für den bedingten L–Wert $L(y = \mathrm{E}\,|\,x)$ in Vorwärtsrichtung gilt beim vorgegebenen BEC–Modell:

$$L(y = \mathrm{E}\,|\,x) = \ln \frac{\Pr(y = \mathrm{E}\,|\,x = +1)}{\Pr(y = \mathrm{E}\,|\,x = -1)} = \ln \frac{\lambda}{\lambda} \underline{= 0}\,.$$

d) Analog zur Musterlösung der Teilaufgabe (c) erhält man für $y = \pm 1$:

$$L(y = +1\,|\,x) \; = \; \ln \frac{\Pr(y = +1\,|\,x = +1)}{\Pr(y = +1\,|\,x = -1)} = \ln \frac{1-\lambda}{0} \underline{\;\Rightarrow \; +\infty}\,,$$

$$L(y = -1\,|\,x) \; = \; \ln \frac{\Pr(y = -1\,|\,x = +1)}{\Pr(y = -1\,|\,x = -1)} = \ln \frac{0}{1-\lambda} \underline{\;\Rightarrow \; -\infty}\,.$$

Richtig sind demnach die <u>Lösungsvorschläge 1 und 2</u>.

e) Richtig ist der <u>letzte Lösungsvorschlag</u>:

- Für $\lambda = 0$ (idealer Kanal) ergibt sich $L(y = \mathrm{E}\,|\,x) = \ln(0/0) \;\Rightarrow$ unbestimmtes Ergebnis.
- Für $\lambda = 1$ (vollständige Auslöschung, $y \equiv \mathrm{E}$) sind $L(y = +1\,|\,x)$ und $L(y = -1\,|\,x)$ unbestimmt.

Musterlösung zur Aufgabe A4.2

a) Alle Lösungsvorschläge sind richtig:

- Die Übertragungsgleichung lautet stets $y = x + n$, wobei $x \in \{+1, -1\}$ gilt und n eine Gaußsche Zufallsgröße mit Streuung σ ⇒ Varianz σ^2 angibt ⇒ **AWGN–Kanal.**
- Die **AWGN–Bitfehlerwahrscheinlichkeit** berechnet sich mit der Streuung σ zu $\text{Q}(1/\sigma)$, wobei $\text{Q}(x)$ die **komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion** bezeichnet.
- Für jeden AWGN–Kanal ergibt sich entsprechend dem **Theorieteil** das Kanal–LLR stets zu $L_\text{K}(y) = L(y|x) = K_\text{L} \cdot y$. Die Konstante K_L ist für die beiden Kanäle unterschiedlich.

b) Beim AWGN–Kanal gilt $L_\text{K}(y) = K_\text{L} \cdot y$ mit der Konstanten $K_\text{L} = 2/\sigma^2$. Die Streuung σ kann aus der Grafik auf der Angabenseite als der Abstand der Wendepunkte innerhalb der Gaußkurven von ihren jeweiligen Mittelpunkten abgelesen werden. Beim Kanal A ergibt sich $\sigma = 1$.

Zum gleichen Ergebnis kommt man durch Auswertung der Gaußfunktion

$$\frac{f_\text{G}(y=\sigma)}{f_\text{G}(y=0)} = \text{e}^{-y^2/(2\sigma^2)}\Bigg|_{y=\sigma} = \text{e}^{-0.5} \approx 0.6065\,.$$

Das bedeutet: Beim Abszissenwert $y = \sigma$ ist die mittelwertfreie Gaußfunktion $f_\text{G}(y)$ auf 60.65% ihres Maximalwertes abgeklungen. Somit gilt für die Konstante beim Kanal A: $K_\text{L} = 2/\sigma^2 \underline{= 2}$.

c) Wir geben zunächst die jeweiligen L–Werte von Kanal A an:

$$L_\text{K}(y_1 = +1.0) = +2\,,\quad L_\text{K}(y_2 = +0.5) = +1\,,\quad L_\text{K}(y_3 = -1.5) = -3\,.$$

Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

- Die Entscheidung für das (wahrscheinlichste) Codebit x_i wird aufgrund des Vorzeichens von $L_\text{K}(y_\text{i})$ getroffen: $x_1 = +1$, $x_2 = +1$, $x_3 = -1$ ⇒ die Lösungsvorschläge 1, 2 und 3 sind richtig.
- Die Entscheidung „$x_1 = +1$” ist wegen $|L_\text{K}(y_1)| > |L_\text{K}(y_3)|$ zuverlässiger als die Entscheidung „$x_2 = +1$” ⇒ Lösungsvorschlag 4 ist ebenfalls richtig.
- Die Entscheidung „$x_1 = +1$” ist aber weniger zuverlässig als die Entscheidung „$x_3 = -1$”, da $|L_\text{K}(y_1)|$ kleiner als $|L_\text{K}(y_3)|$ ist ⇒ Lösungsvorschlag 5 ist falsch.

Dies kann man auch so interpretieren: Der Quotient zwischen dem roten und dem blauen WDF–Wert ist bei $y_3 = -1.5$ größer als der Quotient zwischen dem blauen und dem roten WDF–Wert bei $y_1 = +1$.

d) Nach gleichen Überlegungen wie bei der Teilaufgabe b) ergibt sich für die Streuung von Kanal B: $\sigma = 1/2$ ⇒ $K_\text{L} = 2/\sigma^2 \underline{= 8}$.

e) Für den Kanal B gilt: $L_\text{K}(y_1 = +1.0) = +8$, $L_\text{K}(y_2 = +0.5) = +4$ und $L_\text{K}(y_3 = -1.5) = -12$. Damit ist offensichtlich, dass die beiden ersten Lösungsvorschläge zutreffen, nicht aber der dritte, weil

$$|L_\text{K}(y_3 = -1.5, \text{Kanal A})| = 3 \quad < \quad |L_\text{K}(y_2 = 0.5, \text{Kanal B})| = 4\,.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.3

a) Das Empfangswort $\underline{y}_2$ = (0, 1, 0) ist kein gültiges Codewort bezüglich des *Single Parity–check Codes* SPC (3, 2). Somit ist die erste Aussage falsch.

Da der SPC(3, 2) zudem nur die minimale Distanz $d_{\rm min}$ = 2 aufweist, kann auch kein Fehler korrigiert werden. Richtig ist somit der Lösungsvorschlag 3.

b) Die möglichen Codeworte beim RP (3, 1) sind $\underline{x}_0$ = (0, 0, 0) und $\underline{x}_1$ = (1, 1, 1). Die minimale Distanz dieses Codes beträgt $d_{\rm min}$ = 3, so dass $t = (d_{\rm min} - 1)/2 = 1$ Fehler korrigiert werden kann. Neben $\underline{y}_0$ = (0, 0, 0) werden auch die Empfangsworte $\underline{y}_1$ = (0, 0, 1), $\underline{y}_2$ = (0, 1, 0) und $\underline{y}_4$ = (1, 0, 0) dem Decodierergebnis $\underline{x}_0$ = (0, 0, 0) zugeordnet ⇒ Lösungsvorschlag 2.

c) Entsprechend dem BSC–Modell gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $\underline{y}_2$ = (0, 1, 0) empfangen wird, unter der Voraussetzung, dass $\underline{x}_0$ = (0, 0, 0) gesendet wurde:

$$\Pr(\underline{y} = \underline{y}_2 \,|\, \underline{x} = \underline{x}_0) = (1-\varepsilon)^2 \cdot \varepsilon \,.$$

Der erste Term $(1 - \varepsilon)^2$ gibt dabei die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das erste und das dritte Bit richtig übertragen wurden und ε berücksichtigt die Verfälschungswahrscheinlichkeit für das zweite Bit.

Entsprechend gilt für das zweite mögliche Codewort $\underline{x}_1$ = (1, 1, 1):

$$\Pr(\underline{y} = \underline{y}_2 \,|\, \underline{x} = \underline{x}_1) = \varepsilon^2 \cdot (1-\varepsilon) \,.$$

Nach dem Satz von Bayes gilt dann für die Rückschlusswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
\Pr(\underline{x} = \underline{x}_0 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2) &= \Pr(\underline{y} = \underline{y}_2 \,|\, \underline{x} = \underline{x}_0) \cdot \frac{\Pr(\underline{x} = \underline{x}_0)}{\Pr(\underline{y} = \underline{y}_2)} \,, \\
\Pr(\underline{x} = \underline{x}_1 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2) &= \Pr(\underline{y} = \underline{y}_2 \,|\, \underline{x} = \underline{x}_1) \cdot \frac{\Pr(\underline{x} = \underline{x}_1)}{\Pr(\underline{y} = \underline{y}_2)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{\Pr(\text{richtige Entscheidung})}{\Pr(\text{falsche Entscheidung})} = \frac{(1-\varepsilon)^2 \cdot \varepsilon}{\varepsilon^2 \cdot (1-\varepsilon)} = \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \,.$$

Mit ε = 0.269 erhält man folgende Zahlenwerte:

$$S = 0.731/0.269 \underline{= 2.717} \quad \Rightarrow \quad \ln\,(S) \underline{= 1} \,.$$

d) Das Vorzeichen des Kanal–L–Wertes $L_{\rm K}(i)$ ist positiv, falls y_i = 0, und negativ für y_i = 1. Der Betrag gibt die Zuverlässigkeit von y_i an. Beim BSC–Modell gilt $|L_{\rm K}(i)| = \ln\,(1 - \varepsilon)/\varepsilon = 1$ für alle i. Also:

$$\underline{L_{\rm K}}(1) \underline{= +1}\,, \quad \underline{L_{\rm K}}(2) \underline{= -1}\,, \quad \underline{L_{\rm K}}(3) \underline{= +1}\,.$$

e) Die erste Tabelle verdeutlicht die iterative symbolweise Decodierung ausgehend von $\underline{y}_2$ = (0, 1, 0).

	$L_{APP}(1)$	$L_{APP}(2)$	$L_{APP}(3)$	Σ_{APP}	$L_E(1)$	$L_E(2)$	$L_E(3)$
$I=0$	+1	–1	+1	+1	0	2	0
$I=1$	+1	+1	+1	+3	2	2	2
$I=2$	+3	+3	+3	+9			

Diese Ergebnisse lassen sich wie folgt interpretieren:

- Die Vorbelegung (Iteration I = 0) geschieht entsprechend $\underline{L}_{\rm APP} = \underline{L}_{\rm K}$. Eine harte Entscheidung ⇒ „sign $\underline{L}_{\rm APP}(i)$” würde zum Decodierergebnis (0, 1, 0) führen. Die Zuverlässigkeit dieses offensichtlich falschen Ergebnisses wird mit $|\Sigma_{\rm APP}| = 1$ angegeben. Dieser Wert stimmt mit dem in Teilaufgabe (c) berechneten „ln (S)” überein.
- Nach der ersten Iteration (I = 1) sind alle Aposteriori–L–Werte $L_{\rm APP}(i) = +1$. Eine harte Entscheidung würde hier das (voraussichtlich) richtige Ergebnis $\underline{x}_{\rm APP}$ = (0, 0, 0) liefern. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ergebnis richtig ist, wird durch $|\Sigma_{\rm APP}| = 3$ quantifiziert:

$$\ln \frac{{\rm Pr}(\underline{x} = \underline{x}_0 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2)}{1-{\rm Pr}(\underline{x} = \underline{x}_0 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2)} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{{\rm Pr}(\underline{x} = \underline{x}_0 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2)}{1-{\rm Pr}(\underline{x} = \underline{x}_0 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2)} = {\rm e}^3 \approx 20$$
$$\Rightarrow \quad {\rm Pr}(\underline{x} = \underline{x}_0 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2) = 20/21 \approx 95.39\%\,.$$

- Die zweite Iteration bestätigt das Decodierergebnis der ersten Iteration. Die Zuverlässigkeit wird hier sogar mit „9” beziffert. Dieser Wert kann wie folgt interpretiert werden:

$$\frac{{\rm Pr}(\underline{x} = \underline{x}_0 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2)}{1-{\rm Pr}(\underline{x} = \underline{x}_0 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2)} = {\rm e}^9 \quad \Rightarrow \quad {\rm Pr}(\underline{x} = \underline{x}_0 \,|\, \underline{y} = \underline{y}_2) = {\rm e}^9/({\rm e}^9+1) \approx 99.99\%\,.$$

Mit jeder weiteren Iteration nimmt der Zuverlässigkeitswert und damit die Wahrscheinlichkeit ${\rm Pr}(\underline{x}_0 \,|\, \underline{y}_2)$ drastisch zu ⇒ Alle Lösungsvorschläge sind richtig.

f) Für den Empfangsvektor $\underline{y}_6$ = (1, 1, 0) gilt folgende Tabelle:

	$L_{APP}(1)$	$L_{APP}(2)$	$L_{APP}(3)$	Σ_{APP}	$L_E(1)$	$L_E(2)$	$L_E(3)$
$I=0$	–1	–1	+1	–1	0	0	–2
$I=1$	–1	–1	–1	–3	–2	–2	–2
$I=2$	–3	–3	–3	–9			

Der Decoder entscheidet sich nun für die Folge $\underline{x}_1$ = (1, 1, 1). Der Fall „$\underline{y}_3$ = (1, 1, 0) empfangen unter der Voraussetzung $\underline{x}_1$ = (1, 1, 1) gesendet” würde genau der in der letzten Teilaufgabe betrachteten Konstellation „$\underline{y}_2$ = (1, 0, 1) empfangen und $\underline{x}_0$ = (0, 0, 0) gesendet” entsprechen.

Da aber $\underline{x}_0$ = (0, 0, 0) gesendet wurde, gibt es nun zwei Bitfehler mit folgender Konsequenz:

- Der iterative Decoder entscheidet falsch.
- Mit jeder weiteren Iteration wird die falsche Entscheidung als zuverlässiger deklariert.

Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3.

Musterlösung zur Aufgabe Z4.3

a) Für die binäre Zufallsgröße $x \in \{+1, -1\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten

- $p = \Pr(x = +1)$, und
- $q = \Pr(x = -1) = 1 - p$

gelten folgende Definitionen:

$$L(x) = \ln \frac{p}{q} = \frac{p}{1-p} \quad \Rightarrow \quad -\infty \le L(x) \le +\infty\,,$$
$$S(x) = p - q = 2 \cdot p - 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le S(x) \le +1\,.$$

Ausgehend vom S–Wert erhält man wegen $p + q = 1$:

$$S(x) = p - q = \frac{p-q}{p+q} = \frac{1-q/p}{1+q/p}\,.$$

Gleichzeitig gilt $q/p = \exp(-L(x))$. Daraus folgt:

$$S(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-L(x)}}{1+\mathrm{e}^{-L(x)}}\,.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\exp[-L(x)/2]$, so erhält man schließlich:

$$S(x) = \frac{\mathrm{e}^{+L(x)/2} - \mathrm{e}^{-L(x)/2}}{\mathrm{e}^{+L(x)/2} + \mathrm{e}^{-L(x)/2}} = \tanh[L(x)/2]\,.$$

Die Umkehrfunktion ergibt

$$L(x) = 2 \cdot \tanh^{-1}[S(x)]\,.$$

Richtig sind somit die <u>Lösungsvorschläge 2 und 3</u>.

Pr(x = +1)	**1.0**	**0.9**	**0.8**	**0.7**	**0.6**	**0.5**	**0.4**	**0.3**	**0.2**	**0.1**	**0.0**
L(x)	**+∞**	**+2.197**	**+1.382**	**+0.847**	**+0.405**	**0**	**–0.405**	**–0.847**	**–1.382**	**–2.197**	**–∞**
S(x)	**1.0**	**0.8**	**0.6**	**0.4**	**0.2**	**0**	**–0.2**	**–0.4**	**–0.6**	**–0.8**	**–1.0**

Die Tabelle zeigt den L–Wert sowie den S–Wert für einige Wahrscheinlichkeiten $p = \Pr(x = +1)$.

b) Der extrinsische L–Wert für das Symbol x_3 berücksichtigt nur die Apriori–L–Werte $L_{\rm A}(x_1)$ und $L_{\rm A}(x_2)$, nicht jedoch $L_{\rm A}(x_3)$. Beim (3, 1) *Repetition Code* ergibt sich hierfür:

$$L_{\rm E}(x_3) = L_{\rm A}(x_1) + L_{\rm A}(x_2) = 2 + (-1) \underline{= +1}\,.$$

c) Für den Aposteriori–L–Wert erhält man somit:

$$L_{\rm APP}(x_3) = L_{\rm A}(x_3) + L_{\rm E}(x_3) = 3 + 1 \underline{= +4}\,.$$

d) Hier lautet die entsprechende Berechnungsvorschrift:

$$\begin{aligned} L_{\rm E}(x_3) &= 2 \cdot \tanh^{-1}\,[\tanh(x_1/2) \cdot \tanh(x_2/2)] = \\ &= 2 \cdot \tanh^{-1}\,[\tanh(+1) \cdot \tanh(-0.5)] = 2 \cdot \tanh^{-1}\,[0.7616 \cdot (-0.4621)] = \\ &= 2 \cdot \tanh^{-1}\,[-0.3519] = -2 \cdot 0.3676 \underline{= -0.7352}\,. \end{aligned}$$

Das Endergebnis wurde der Tabelle auf der Angabenseite entnommen.

e) Beim Wiederholungscode der Länge $n = 3$ gilt wie in der Teilaufgabe (c): Vorzeichen?

$$L_{\rm E}(x_3) = L_{\rm A}(x_1) + L_{\rm A}(x_2) = -0.847 + 1.382 \;\underline{= +0.535}\,.$$

Benutzt wurden hierbei die L–Werte entsprechend der Tabelle zur Teilaufgabe (a).

f) Nachdem hier anstelle der Apriori–L–Werte die Apriori–Wahrscheinlichkeiten gegeben sind, kommt man gegenüber der Teilaufgabe (d) auf dem Umweg über den extrinsischen S–Wert schneller zum Erfolg.

Die extrinsische Wahrscheinlichkeit für das dritte Symbol bezeichnen wir hier mit $P_{\rm E}(x_3)$. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} P_{\rm E}(x_3 = +1) &= P_{\rm A}(x_1 = +1) \cdot P_{\rm A}(x_2 = -1) + P_{\rm A}(x_1 = -1) \cdot P_{\rm A}(x_2 = +1) = \\ &= 0.3 \cdot (1 - 0.8) + (1 - 0.3) \cdot 0.8 = 0.62\,. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich für die weiteren Größen:

$$S_{\rm E}(x_3) = P_{\rm E}(x_3 = +1) - P_{\rm E}(x_3 = -1) = 0.62 - 0.38 = 0.24\,,$$
$$L_{\rm E}(x_3) = 2 \cdot \tanh^{-1}\,[S_{\rm E}(x_3)] = 2 \cdot \tanh^{-1}(0.24) = 2 \cdot 0.245 \;\underline{= +0.49}$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.4

a) Für die Apriori–L–Werte der beiden ersten Bits des Codewortes gilt:

$$L_{\rm A}(i=1) \;=\; \ln \left[\frac{1-p_1}{p_1}\right] = \ln 4 \;\underline{= +1.386}\,,$$
$$L_{\rm A}(i=2) \;=\; \ln \left[\frac{1-p_2}{p_2}\right] = \ln 1/9 \;\underline{= -2.197}\,.$$

Die Werte können aus der vierten Spalte der vorne angegebenen **Tabelle** abgelesen werden.

b) Zur Berechnung des extrinsischen L–Wertes über das i–te Bit dürfen nur die Informationen über die drei anderen Bits ($j \neq i$) herangezogen werden. Mit der angegebenen Gleichung gilt:

$$L_{\rm E}(i=1) = \ln \frac{1+\prod\limits_{j\neq 1}(1-2p_j)}{1-\prod\limits_{j\neq 1}(1-2p_j)}\,.$$

Für das Produkt erhält man entsprechend der dritten Spalte der **Tabelle:**

$$\prod_{j=2,\,3,\,4}(1-2p_j) = (-0.8)\cdot(+0.4)\cdot(-0.2) = 0.064$$
$$\Rightarrow \quad L_{\rm E}(i=1) = \ln \frac{1+0.064}{1-0.064} = \ln\,(1.137) \;\underline{= +0.128}\,.$$

Hinsichtlich Bit 2 erhält man entsprechend:

$$\prod_{j=1,\,3,\,4}(1-2p_j) = (+0.6)\cdot(+0.4)\cdot(-0.2) = -0.048$$
$$\Rightarrow \quad L_{\rm E}(i=2) = \ln \frac{1-0.048}{1+0.048} = \ln\,(0.908) \;\underline{= -0.096}\,.$$

c) Für den Apriori–L–Wert gilt:

$$L_j = L_{\rm A}(j) = \ln \left[\frac{{\rm Pr}(x_j=0)}{{\rm Pr}(x_j=1)}\right] = \ln \left[\frac{1-p_j}{p_j}\right]$$
$$\Rightarrow \quad 1-p_j = p_j\cdot {\rm e}^{L_j} \quad \Rightarrow \quad p_j = \frac{1}{1+{\rm e}^{L_j}}\,.$$

Damit gilt auch:

$$1-2\cdot p_j = 1-\frac{2}{1+{\rm e}^{L_j}} = \frac{1+{\rm e}^{L_j}-2}{1+{\rm e}^{L_j}} = \frac{{\rm e}^{L_j}-1}{{\rm e}^{L_j}+1}\,.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner noch mit $\exp(-L_j/2)$, so erhält man:

$$1-2\cdot p_j = \frac{{\rm e}^{L_j/2}-{\rm e}^{-L_j/2}}{{\rm e}^{L_j/2}+{\rm e}^{-L_j/2}} = \tanh(L_j/2)\,.$$

Somit sind <u>alle Lösungsvorschläge</u> richtig. Die Funktion *Tangens Hyperbolicus* findet man zum Beispiel tabellarisch in **[BS01]** oder in der letzten Spalte der vorne angegebenen **Tabelle.**

d) Wir berechnen $L_{\rm E}(i=3)$ zunächst in gleicher Weise wie in der Teilaufgabe (b):

$$\prod_{j=1,\,2,\,4} (1-2p_j) = (+0.6)\cdot(-0.8)\cdot(-0.2) = +0.096$$

$$\Rightarrow \quad L_{\rm E}(i=3) = \ln\,\frac{1+0.096}{1-0.096} = \ln\,(1.212)\ \underline{=+0.193}\,.$$

Den extrinsischen L–Wert hinsichtlich des letzten Bits berechnen wir nach der Gleichung

$$L_{\rm E}(i=4) = \ln\,\frac{1+\pi}{1-\pi}, \quad \text{mit} \quad \pi = \tanh(L_1/2)\cdot\tanh(L_2/2)\cdot\tanh(L_3/2)\,.$$

Damit ergibt sich entsprechend der obigen **Tabelle:**

$$p_1 = 0.2 \quad\Rightarrow\quad L_1 = +1.386 \quad\Rightarrow\quad L_1/2 = +0.693$$

$$\Rightarrow \quad \tanh(L_1/2) = \frac{{\rm e}^{+0.693}-{\rm e}^{-0.693}}{{\rm e}^{+0.693}+{\rm e}^{-0.693}} = 0.6 \quad\Rightarrow\quad \text{gleiches Ergebnis wie } 1-2\cdot p_1\,,$$

$$p_2 = 0.9 \quad\Rightarrow\quad L_2 = -2.197 \quad\Rightarrow\quad L_2/2 = -1.099$$

$$\Rightarrow \quad \tanh(L_2/2) = \frac{{\rm e}^{-1.099}-{\rm e}^{+1.099}}{{\rm e}^{-1.099}+{\rm e}^{+1.099}} = -0.8 \quad\Rightarrow\quad \text{gleiches Ergebnis wie } 1-2\cdot p_2\,,$$

$$p_3 = 0.3 \quad\Rightarrow\quad L_3 = 0.847 \quad\Rightarrow\quad L_3/2 = +0.419$$

$$\Rightarrow \quad \tanh(L_3/2) = \frac{{\rm e}^{+0.419}-{\rm e}^{-0.419}}{{\rm e}^{+0.419}+{\rm e}^{-0.419}} = 0.4 \quad\Rightarrow\quad \text{gleiches Ergebnis wie } 1-2\cdot p_3\,.$$

Das Endergebnis lautet somit:

$$\pi = (+0.6)\cdot(-0.8)\cdot(+0.4) = -0.192 \quad\Rightarrow\quad L_{\rm E}(i=4) = \ln\,\frac{1-0.192}{1+0.192}\ \underline{=-0.389}\,.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.4

a) Entsprechend nebenstehender Tabelle gilt:

$$\Pr[w_\mathrm{H}(\underline{x}) \text{ ist gerade}] = \Pr[w_\mathrm{H} = 0] + \Pr[w_\mathrm{H} = 2]\,.$$

x_1	x_2	$w_\mathrm{H}(x)$	$\Pr(x_1)\cdot\Pr(x_2)$
0	0	0	$0.8 \cdot 0.1 = 0.08$
0	1	1	$0.8 \cdot 0.9 = 0.72$
1	0	1	$0.9 \cdot 0.1 = 0.09$
1	1	2	$0.2 \cdot 0.9 = 0.18$

Mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = \Pr(x_1 = 1) = 0.2\,, \quad q_1 = \Pr(x_1 = 0) = 0.8\,,$$
$$p_2 = \Pr(x_2 = 1) = 0.9\,, \quad q_2 = \Pr(x_2 = 0) = 0.1$$

erhält man:

$$\Pr[w_\mathrm{H}(\underline{x}) = 0] = \Pr[(x_1 = 0) \cap (x_2 = 0)] = q_1 \cdot q_2 = 0.8 \cdot 0.1 = 0.08\,,$$
$$\Pr[w_\mathrm{H}(\underline{x}) = 2] = \Pr[(x_1 = 1) \cap (x_2 = 1)] = p_1 \cdot p_2 = 0.2 \cdot 0.9 = 0.18$$
$$\Rightarrow \quad \Pr[w_\mathrm{H}(\underline{x}) \text{ ist gerade}] = 0.8 + 0.18 \;\underline{= 0.26}\,.$$

Die Gallager–Gleichung liefert für den gleichen Parametersatz:

$$\Pr[w_\mathrm{H}(\underline{x}) \text{ ist gerade}] = 0.5 + 0.5 \cdot \prod_{i=1}^{2} (1 - 2 \cdot p_i) =$$
$$= 0.5 + 0.5 \cdot (1 - 2 \cdot 0.2) \cdot (1 - 2 \cdot 0.9) = 0.26\,.$$

Die von Gallager 1963 angegebene Gleichung wurde hiermit für $n = 2$ verifiziert.

b) In der nebenstehenden Tabelle sind die vier Kombinationen mit einer geraden Anzahl an Einsen blau markiert. Die Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Kombinationen sind in der letzten Spalte angegeben. Somit ergibt sich hier:

$$\Pr[w_\mathrm{H}(\underline{x}) \text{ ist gerade}] = 0.056 +$$
$$+ 0.216 + 0.006 + 0.126 \;\underline{= 0.404}\,.$$

x_1	x_2	x_3	$w_\mathrm{H}(x)$	$\Pr(x_1)\cdot\Pr(x_2)\cdot\Pr(x_3)$
0	0	0	0	$0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.7 = 0.056$
0	0	1	1	$0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.024$
0	1	0	1	$0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.7 = 0.504$
0	1	1	2	$0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3 = 0.216$
1	0	0	1	$0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.7 = 0.014$
1	0	1	2	$0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.006$
1	1	0	2	$0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.7 = 0.126$
1	1	1	3	$0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.3 = 0.054$

Die roten Zeilen liefern das Komplementärereignis:

$$\Pr[w_\mathrm{H}(\underline{x}) \text{ ist ungerade}] = 0.024 +$$
$$+ 0.504 + 0.014 + 0.054 = 0.596\,.$$

Die Gallager–Gleichung liefert auch hier wieder das exakt gleiche Ergebnis.

$$\Pr[w_\mathrm{H}(\underline{x}) \text{ ist gerade}] = 0.5 + 0.5 \cdot \prod_{i=1}^{3} (1 - 2 \cdot p_i) =$$
$$= 0.5 + 0.5 \cdot (+0.6) \cdot (-0.8) \cdot (+0.4) = 0.404\,.$$

Anzumerken ist, dass diese Gleichung für alle n und alle beliebigen Wahrscheinlichkeiten gültig ist.

c) Entsprechend der Angabenseite gilt:

$$\pi = \prod_{i=1}^{4} \ (1 - 2 \cdot p_i) \ = \ (1 - 2 \cdot 0.2) \cdot (1 - 2 \cdot 0.9) \cdot (1 - 2 \cdot 0.3) \cdot (1 - 2 \cdot 0.6) =$$
$$= \ (+0.6) \cdot (-0.8) \cdot (+0.4) \cdot (-0.2) = 0.0384 \, .$$

Daraus lassen sich berechnen:

$$\Pr(\text{blau}) = \Pr\left[w_{\rm H}(\underline{x}) \ \text{ist gerade}\right] \ = \ 0.5 + 0.5 \cdot \pi = 0.5 + 0.5 \cdot 0.0384 \ \underline{= 0.5192} \, ,$$
$$\Pr(\text{rot}) = \Pr\left[w_{\rm H}(\underline{x}) \ \text{ist ungerade}\right] \ = \ 0.5 - 0.5 \cdot \pi = 0.5 - 0.5 \cdot 0.0384 \ \underline{= 0.4808} \, .$$

Addiert man die blauen bzw. die roten Wahrscheinlichkeiten auf der Angabenseite, so erhält man exakt die hier berechneten Werte. Für den Quotienten ergibt sich:

$$Q = \frac{\Pr\left[w_{\rm H}(\underline{x}) \ \text{ist gerade}\right]}{\Pr\left[w_{\rm H}(\underline{x}) \ \text{ist ungerade}\right]} = \frac{0.5192}{0.4808} \ \underline{= 1.0799} \, .$$

d) Für den *Single Parity–check Code* wurde der extrinsische *L*–Wert bezüglich des *i*–ten Bits wie folgt angegeben:

$$L_{\rm E}(i) = \ln \frac{\Pr\left[w_{\rm H}(\underline{x}^{(-i)}) \ \text{ist gerade} \,|\, \underline{y}\right]}{\Pr\left[w_{\rm H}(\underline{x}^{(-i)}) \ \text{ist ungerade} \,|\, \underline{y}\right]} \, ,$$

oder:

$$L_{\rm E}(i) = \ln \frac{1 + \prod_{j \ne i} \ (1 - 2 \cdot p_j)}{1 - \prod_{j \ne i} \ (1 - 2 \cdot p_j)} \, .$$

Beim SPC(5, 4, 2) $\Rightarrow$ $n = 5$ ergibt sich dieses Produkt für $i = 5$ aus folgenden vier Multiplikanden:

$$\pi = \prod_{j=1,\,2,\,3,\,4} (1 - 2 \cdot p_j) = (1 - 2 \cdot p_1) \cdot (1 - 2 \cdot p_2) \cdot (1 - 2 \cdot p_3) \cdot (1 - 2 \cdot p_4) \, .$$

Der Vergleich mit der Teilaufgabe (c) zeigt, dass $L_{\rm E}(i = 5) = \ln Q = \ln(1.0799)$ $\underline{\approx 0.077}$ ist.

e) Richtig ist der <u>Lösungsvorschlag 3</u>, weil das Ergebnis für $L_{\rm E}(i = 5)$ unabhängig von p_5 ist.

Musterlösung zur Aufgabe A4.5

a) Entsprechend dem zweiten $L_{\rm E}(i)$–Ansatz gilt:

$$\begin{aligned} {\rm sign}[L_{\rm E}(1)] &= {\rm sign}[L_{\rm E}(2)] \cdot {\rm sign}[L_{\rm E}(3)] = -1\,, \\ |L_{\rm E}(1)| &= {\rm Min}\,(|L_{\rm E}(2)|\,, |L_{\rm E}(3)|) = {\rm Min}\,(0.4\,, 1.0) = 0.4 \\ \Rightarrow \quad L_{\rm E}(1) &\ \underline{= -0.4}\,. \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhält man:

$$L_{\rm E}(2)\ \underline{= -1.0}\,, \quad L_{\rm E}(3)\ \underline{= +0.4}\,.$$

	L_1	L_2	L_3	$L_{\rm E}(1)$	$L_{\rm E}(2)$	$L_{\rm E}(3)$
$I=0$	+1.0	+0.4	–1.0	–0.4	–1.0	+0.4
$I=1$	+0.6	–0.6	–0.6	+0.6	–0.6	–0.6
$I=2$	+1.2	–1.2	–1.2	+1.2	–1.2	–1.2
$I=3$	+2.4	–2.4	–2.4	+2.4	–2.4	–2.4
$I=4$	+4.8	–4.8	–4.8			

b) Die Aposteriori–L–Werte zu Beginn der ersten Iteration (I = 1) ergeben sich aus der Summe der bisherigen L–Werte (für I = 0) und den unter (a) berechneten extrinsischen Werten:

$$\begin{aligned} L_1 = L_{\rm APP}(1) &= 1.0 + (-0.4)\ \underline{= +0.6}\,, \\ L_2 = L_{\rm APP}(2) &= 0.4 + (-1.0)\ \underline{= -0.6}\,, \\ L_3 = L_{\rm APP}(3) &= (-1.0) + 0.4\ \underline{= -0.6}\,. \end{aligned}$$

c) Wie aus obiger Tabelle hervorgeht, sind die <u>Lösungsvorschläge 1 und 2</u> richtig im Gegensatz zur Antwort 3: Mit jeder neuen Iteration werden die Beträge von $L(1)$, $L(2)$ und $L(3)$ signifikant größer.

d) Wie aus nebenstehender Tabelle hervorgeht, sind <u>die Antworten 1 und 3</u> richtig. Die Entscheidung fällt also für das Codewort $\underline{x}_0$ = (+1, +1, +1). Ab I = 1 wäre dies auch die Entscheidung von *Hard Decision*.

	L_1	L_2	L_3	$L_{\rm E}(1)$	$L_{\rm E}(2)$	$L_{\rm E}(3)$
$I=0$	+0.6	+1.0	–0.4	–0.4	–0.4	+0.6
$I=1$	+0.2	+0.6	+0.2	+0.2	+0.2	+0.2
$I=2$	+0.4	+0.8	+0.4	+0.4	+0.4	+0.4
$I=3$	+0.8	+1.2	+0.8	+0.8	+0.8	+0.8
$I=4$	+1.6	+2.0	+1.6			

	L_1	L_2	L_3	$L_{\rm E}(1)$	$L_{\rm E}(2)$	$L_{\rm E}(3)$
$I=0$	+0.6	+1.0	–0.8	–0.8	–0.6	+0.6
$I=1$	–0.2	+0.4	–0.2	–0.2	–0.2	–0.2
$I=2$	–0.4	+0.2	–0.4	–0.2	+0.4	–0.2
$I=3$	–0.6	+0.6	–0.6	–0.6	+0.6	–0.6
$I=4$	–1.2	+1.2	–1.2			

e) Wegen $|L(3)| > |L(1)|$ gilt bereits ab $I = 1$:

$$L_1 < 0\,, \quad L_2 > 0\,, \quad L_3 < 0\,.$$

Ab dieser Iterationsschleife liefert *Hard Decision* das Codewort $\underline{x}_2$ = (–1, +1, –1). Richtig sind somit die <u>Antworten 2 und 3</u>.

f) Die nebenstehende Tabelle zeigt, dass unter der Voraussetzung $|L(1)| = |L(3)|$ ab der Iterationsschleife $I = 1$ alle extrinsischen L–Werte 0 sind. Damit bleiben die Aposteriori–L–Werte auch für I > 1 konstant gleich $\underline{L}$ = (0., +0.4, 0.), was keinem Codewort zugeordnet werden kann ⇒ <u>Lösungsvorschlag 3</u>.

	L_1	L_2	L_3	$L_{\rm E}(1)$	$L_{\rm E}(2)$	$L_{\rm E}(3)$
$I=0$	+0.6	+1.0	–0.6	–0.6	–0.6	+0.6
$I=1$	0	+0.4	0	0	0	0

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.5

a) Entsprechend der Angabe gilt:

$$L_{\rm E}(i) = \ln \frac{1+\pi}{1-\pi}, \quad \text{mit} \quad \pi = \prod_{j \ne i}^{3} \tanh(L_j/2).$$

Aus der Tabelle auf der Angabenseite kann abgelesen werden:

$\tanh(L_1/2) = \tanh(0.5) = 0.4621$,

$\tanh(L_2/2) = \tanh(0.2) = 0.1974$.

Da der Tangens Hyperbolikus eine ungerade Funktion ist, gilt weiter

$\tanh(L_3/2) = -\tanh(0.5) = -\,0.4621$.

- Berechnung von $L_{\rm E}(1)$:

$$\pi = \tanh(L_2/2) \cdot \tanh(L_3/2) = (+0.1974) \cdot (-0.4621) = -0.0912$$

$$\Rightarrow \quad L_{\rm E}(1) = \ln \frac{1-0.0912}{1+0.0912} \underline{= -0.1829}.$$

- Berechnung von $L_{\rm E}(2)$:

$$\pi = \tanh(L_1/2) \cdot \tanh(L_3/2) = (+0.4621) \cdot (-0.4621) = -0.2135$$

$$\Rightarrow \quad L_{\rm E}(2) = \ln \frac{1-0.2135}{1+0.2135} \underline{= -0.4337}.$$

- Berechnung von $L_{\rm E}(3)$:

$$\pi = \tanh(L_1/2) \cdot \tanh(L_2/2) = (+0.4621) \cdot (+0.1974) = +0.0912$$

$$\Rightarrow \quad L_{\rm E}(3) = \ln \frac{1+0.0912}{1-0.0912} \underline{= +0.1829} = -L_{\rm E}(1).$$

b) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1, 2, 3 und 5: Die Funktion

$$y = \tanh(x) = \frac{{\rm e}^{x} - {\rm e}^{-x}}{{\rm e}^{x} + {\rm e}^{-x}} = \frac{1-{\rm e}^{-2x}}{1+{\rm e}^{-2x}}$$

ist für alle x–Werte berechenbar und es gilt $\tanh(-x) = -\tanh(x)$. Für große Werte von x wird ${\rm e}^{-x}$ sehr klein, so dass man im Grenzfall $x \to \infty$ den Grenzwert $y = 1$ erhält.

c) Da der Tangens Hyperbolikus nur Werte zwischen ±1 liefert, ist die Umkehrfunktion $x = \tanh^{-1}(y)$ auch nur für $|y| \le 1$ auswertbar. Durch Umstellen der angegebenen Gleichung

$$x = \tanh^{-1}(y) = 1/2 \cdot \ln \frac{1+y}{1-y}$$

erhält man:

$${\rm e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \quad \Rightarrow \quad {\rm e}^{-2x} = \frac{1-y}{1+y} \quad \Rightarrow \quad (1+y) \cdot {\rm e}^{-2x} = 1-y$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \tanh(x)\,.$$

Das bedeutet:

- Die im Lösungsvorschlag 2 angegebene Gleichung ist richtig.
- Im Grenzfall $y \to 1$ gilt $x = \tanh^{-1}(y) \to \infty$.
- Auch die Umkehrfunktion ist ungerade $\Rightarrow$ im Grenzfall $y \to -1$ geht $x \to -\infty$.

Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 2 und 4.

d) Ausgehend von der Gleichung

$$L_\mathrm{E}(i) = \ln\,\frac{1+\pi}{1-\pi}$$

kommt man mit dem Ergebnis von (c) zur äquivalenten Gleichung entsprechend dem Lösungsvorschlag 2:

$$L_\mathrm{E}(i) = 2\cdot\tanh^{-1}(\pi)\,.$$

e) Mit dem Ergebnis der Teilaufgabe (a) erhält man

- für den ersten extrinsischen L–Wert, da $\pi_1 = -0.0912$:

$$L_\mathrm{E}(1) = 2\cdot\tanh^{-1}(-0.0912) = -2\cdot\tanh^{-1}(0.0912) = -2\cdot 0.0915 \underline{= -0.1830}\,.$$

- für den zweiten extrinsischen L–Wert, da $\pi_2 = -0.2135$:

$$L_\mathrm{E}(2) = -2\cdot\tanh^{-1}(0.2135) = -2\cdot 0.2168 \underline{= -0.4336}\,.$$

- für den dritten extrinsischen L–Wert, da $\pi_3 = +0.0912 = -\pi_1$:

$$L_\mathrm{E}(3) = -L_\mathrm{E}(1) \underline{= +0.1830}\,.$$

Das Ergebnis wurde mit Hilfe der roten Tabelleneinträge auf der Angabenseite ermittelt und stimmt bis auf Rundungsfehler (Multiplikation/Division durch 2) mit den Ergebnissen der Teilaufgabe (a) überein.

Musterlösung zur Aufgabe A4.6

a) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 3:

Allgemein gilt $\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{G}$. Daraus folgt für

- den ersten Zeilenvektor:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- den zweiten Zeilenvektor:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- den dritten Zeilenvektor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1, 2 und 4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu dieser Teilaufgabe ist weiter anzumerken:

- Die angegebene erste Spalte ist schon allein deshalb richtig, weil sie mit einer Zeile (der dritten) der Generatormatrix $\mathbf{G}_2$ übereinstimmt.
- Die dritte Spalte des 2D–Codewortes müsste mit der zweiten Spalte identisch sein, da jeweils vom gleichen Codewort (1, 0, 1) ausgegangen wird.
- Der angegebene Vektor (1, 1, 0, 0, 1, 1) kann aber schon allein deshalb nicht richtig sein, da C_2 ebenso wie C_1 ein systematischer Code ist.
- Auch der verkürzte (6, 3, 3)–Hammingcode C_2 ist linear, so dass auch ohne Rechnung die Zurordnung $\underline{u} = (0, 0, 0) \Rightarrow \underline{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ angebbar ist.

c) Rechts sind die vollständigen Codetabellen des

Codeworte von C_1	Codeworte von C_2

- Hammingcodes (7, 4, 3),
- verkürzten Hammingcodes (6, 3, 3)

angegeben. Man erkennt daraus (ohne dass das für diese Aufgabe von Interesse ist), dass die hier betrachteten Codes jeweils die Hamming–Distanz $d_{\min} = 3$ aufweisen.

Hamming-Code (7, 4)	verkürzt auf (6, 3)
(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	
(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)	
(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)	
(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)	
(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 0)
(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)	(0, 0, 1, 0, 1, 1)
(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)	(0, 1, 0, 1, 0, 1)
(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)	(0, 1, 1, 1, 1, 0)
(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)	(1, 0, 0, 1, 1, 0)
(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)	(1, 0, 1, 1, 0, 1)
(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)	(1, 1, 0, 0, 1, 1)
(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)	(1, 1, 1, 0, 0, 0)
(1, 1, 0, 0, 0, 1, 1)	
(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)	
(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)	
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	

Die folgende kleine Grafik zeigt das Ergebnis der gesamten Codierung. Unten rechts ist die Checks–on–Checks–Matrix der Dimension 3 × 3 ist zu erkennen.

0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

Bezüglich der Teilaufgabe (c) sind nur die Lösungsvorschläge 1 und 2 richtig, wobei es Zufall ist, dass hier in der Checks–on–Checks–Matrix zwei Zeilen und zwei Spalten identisch sind.

Weiter ist anzumerken: Es ist egal, ob man die Zeilen 4 bis 6 der Gesamtmatrix über den Code C_1 gewinnt oder die Spalten 5 bis 7 über den Code C_2.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.6

a) Richtig sind die Aussagen 1, 2 und 4.:

- Die Anzahl der Zeilen der Generatormatrix $\mathbf{G}_1$ gibt die Länge des Informationsblocks an: $k = 4$. Dagegen ist die Codewortlänge n gleich der Anzahl der Spalten $\Rightarrow$ Coderate $R = k/n = 4/7$.
- Der Code ist systematisch, da die Generatormatrix $\mathbf{G}_1$ mit einer 4×4–Diagonalmatrix beginnt.
- Es handelt sich um einen „normalen" Hammingcode. Für diesen gilt mit der Codewortlänge n und der Anzahl der Prüfbits $\Rightarrow$ $m = n - k$ der Zusammenhang $n = 2^m - 1$.
- Im vorliegenden Fall handelt es sich um den Hammingcode (7, 4, 3). Der letzte Parameter in dieser Codebezeichnung gibt die freie Distanz an $\Rightarrow$ $d_{\rm min} = 3$.

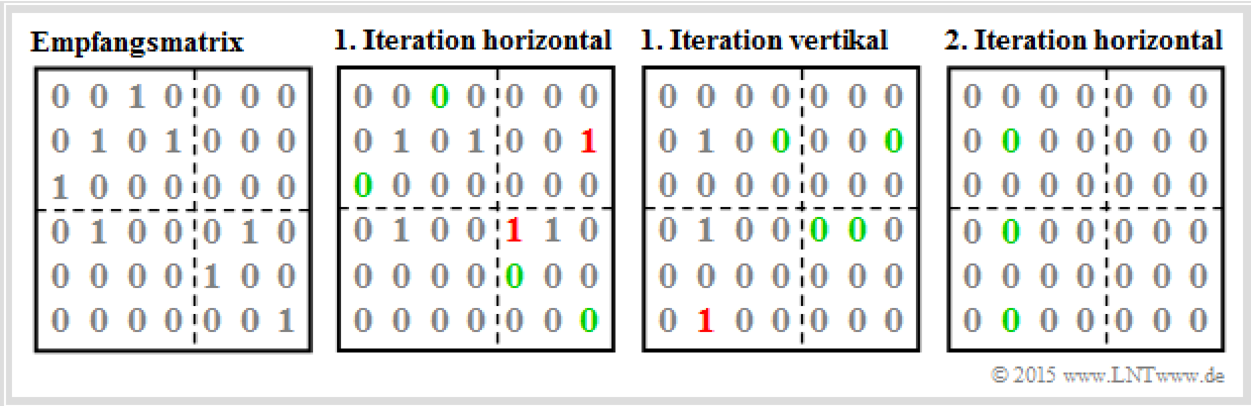
b) Richtig sind die Aussagen 2, 3 und 4. Es handelt sich um einen verkürzten Hammingcode mit dem Parameter $n = 6$, $k = 3$ und $d_{\rm min} = 3$, ebenfalls in systematischer Form. Die Coderate beträgt $R = 1/2$.

c) Die Grundstruktur des Produktcodes ist auf der **ersten Theorieseite** dargestellt. Man erkennt

- den Informationsblock mit $k = k_1 \cdot k_2 = 4 \cdot 3 \underline{= 12}$ Bit, und
- die Codewortlänge als die Gesamtzahl aller Bit: $n = n_1 \cdot n_2 = 7 \cdot 6 \underline{= 42}$.
- Die Coderate ist somit $R = k/n = 12/42 = 2/7$. Oder: $R = R_1 \cdot R_2 = 4/7 \cdot 1/2 \underline{= 2/7} \approx 0.289$.
- Die freie Distanz beträgt $d = d_1 \cdot d_2 = 3 \cdot 3 \underline{= 9}$.

Musterlösung zur Aufgabe A4.7

a) Der Decodiervorgang der Empfangsmatrix **A** wird durch die folgende Grafik verdeutlicht.



- Die Einzelfehler in den Zeilen 1, 3, 5 und 6 werden vom (7, 4, 3)–Hammingcode erkannt und und können korrigiert werden ⇒ grüne Markierungen in der Grafik „1. Iteration horizontal”.
- Für die zweite Zeile ergibt sich das Syndrom

$$\underline{s} = \underline{y}_2 \cdot \mathbf{H}_1^{\rm T} = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 0) + (1, 1, 1) = (0, 0, 1) = \underline{s}_1 \, .$$

  Nach der oberen Syndromtabelle auf der Angabenseite wird somit fälschlicherweise das letzte Bit „korrigiert”. Fehlkorrekturen sind in der oberen Grafik rot eingetragen.

- Entsprechend gilt für die vierte Zeile:

$$\underline{s} = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \cdot \mathbf{H}_1^{\rm T} = (1, 1, 0) + (0, 1, 0) = (1, 0, 0) = \underline{s}_4 \, .$$

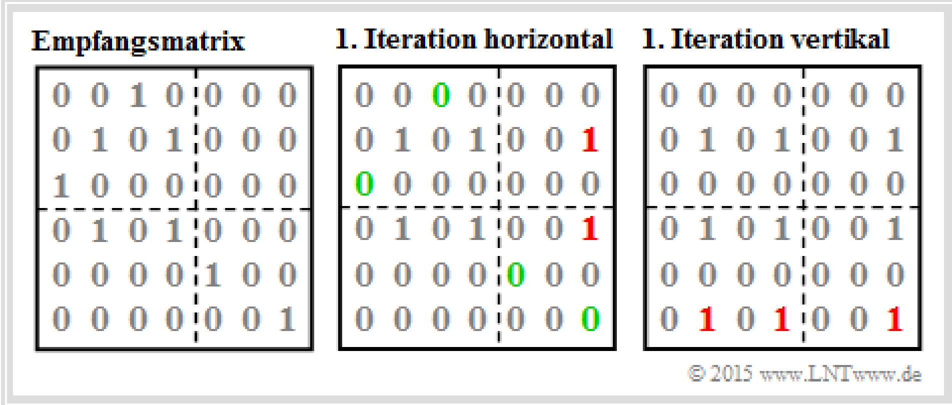
  Dies bewirkt eine Fehlkorrektur von Bit 5.

- Die vertikale Decodierung der Spalten 1, 3, 4, 5, 6 und 7 ist problemlos, da höchstens ein Fehler pro Spalte auftritt, der durch den verkürzten Hammingcode (6, 3, 3) korrigiert werden kann.
- In Spalte 2 kommt es dagegen zu einer Fehlkorrektur des letzten Bits entsprechend der unteren Syndromtabelle. Mit der Transponierten der (6, 3)–Prüfmatrix $\mathbf{H}_2$ ergibt sich nämlich:

$$\underline{s} = \underline{y}_{2S} \cdot \mathbf{H}_2^{\rm T} = (0, 1, 0, 1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 1) + (1, 0, 0) = (0, 0, 1) = \underline{s}_1 \, .$$

- Die zweite Horizontaldecodierung ist problemlos, da nun in jeder Zeile maximal ein Fehler auftritt ⇒ Lösungsvorschlag 3.

b) Die folgende Grafik zeigt den Decodiervorgang entsprechend den Vorgaben gemäß **B**.

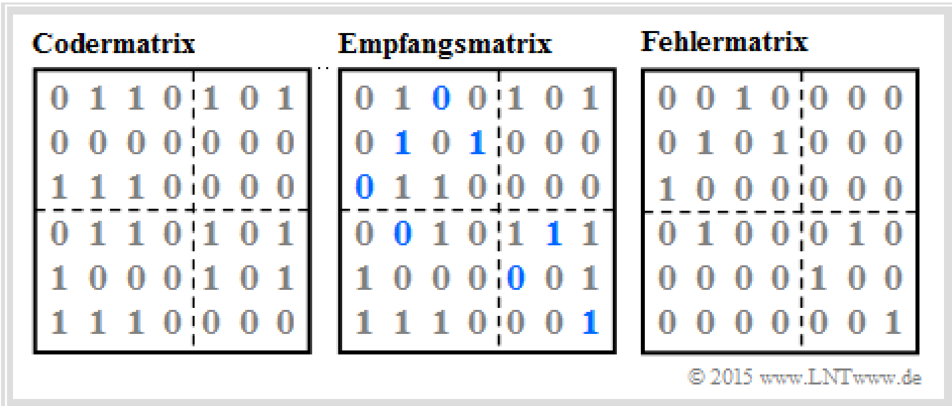


Trotz nur geringfügigen Modifikationen gegenüber **A** gibt es nun gravierende Unterschiede:

- Durch die erste Horizontaldecodierung lauten nun die „korrigierten" Zeilen 2 und 4 gleichermaßen: (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1), das heißt, das letzte Bit dieser Zeilen wird jeweils fehlkorrigiert.
- Die Vertikaldecodierung führt zu gleichlautenden Spalten 2, 4 und 6, nämlich (0, 1, 0, 1, 0, 1). Danach gibt es in jeder Zeile und in jeder Spalte drei Einsen (oder keine einzige).
- Diese Konstellation bleibt für beliebig weitere (horizontale oder vertikale) Decodierungen erhalten, weil sich für $d_{\rm min} = 3$ stets das Syndrom $\underline{s}_0 = (0, 0, 0)$ ergibt.

Richtig ist also der Lösungsvorschlag 5.

c) Vergleicht man die Coder– und Empfangsmatrizen (Unterschiede sind blau markiert), so kann man entsprechend der folgenden Grafik durch Modulo–2–Additionen die Fehlermatrix erstellen.



Die Fehlermatrix ist gleich der Empfangsmatrix von **A** $\Rightarrow$ auch hier ist der Lösungsvorschlag 3 richtig.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.7

a) Aus der **Syndromtabelle** auf der Angabenseite – gültig für den (7, 4, 3) Hammingcode – kann man ablesen, dass das Syndrom $\underline{s} = \underline{s}_3 = (0,\ 1,\ 1)$ mit dem Fehlermuster $\underline{e} = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ korrespondiert. Damit ist das Codewort

$$\underline{x} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0) \ + \ (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \ = \ (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$$

am wahrscheinlichsten und der Syndromdecoder gibt dieses als Ergebnis aus ⇒ Lösungsvorschlag 2.

b) Die Prüfmatrix **H** des verkürzten (6, 3)–Hammingcodes C_2 hat $m = n - k = 3$ Zeilen und n Spalten. Es handelt sich demzufolge un eine 3×6–Matrix ⇒ die Aussage 1 ist falsch.

Da es sich auch bei C_2 um einen systematischen Code handelt, kann die Generatormatrix **G** in folgender Form dargestellt werden:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{I}_3;\ \mathbf{P}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit kann für die Prüfmatrix geschrieben werden:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{P}^{\rm T};\ \mathbf{I}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{I}_3$ eine 3×3–Diagonalmatrix, die typisch ist für den systematischen Code.

Die Lösungsvorschläge 2, 3 und 4 sind somit richtig:

- Zeile 1: 110100,
- Zeile 2: 101010,
- Zeile 3: 011001.

c) Nach den Aussagen in **Kapitel 1.5** kann für das Syndrom auch $\underline{s} = \underline{e} \cdot \mathbf{H}^{\rm T}$ geschrieben werden. Damit erhält man für den fehlerfreien Fall ⇒ $\underline{e} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$:

$$\underline{s} = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) = \underline{s}_0.$$

Richtig ist somit der Lösungsvorschlag 1.

d) Alle Aussagen stimmen, wie aus der Musterlösung zur letzten Teilaufgabe zu ersehen ist: Die Zeilen der transponierten Prüfmatrix ergeben von oben nach unten gelesen, die jeweiligen Syndrome für die Fehlermuster $\underline{e} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, ... , $\underline{e} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

e) Die erste Aussage ist falsch, da die beiden ersten Zeilen der transponierten Prüfmatrix $\mathbf{H}^{\rm T}$ aufsummiert $(1, 1, 0) + (1, 0, 1) = (0, 1, 1) = \underline{s}_3 \ne \underline{s}_7$ ergibt. Die Aussagen 2, 3 und 4 sind richtig:

- Erste und letzte Zeile: $(1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1) = \underline{s}_7$,
- zweite und fünfte Zeile: $(1, 0, 1) + (0, 1, 0) = (1, 1, 1) = \underline{s}_7$,
- Die Summe über alle Zeilen ergibt ebenfalls $\underline{s}_7$, da es in jeder Matrixspalte genau drei Einsen gibt.

Musterlösung zur Aufgabe A4.8

a) Die Impulsantwort $\underline{g}$ ist gleich der Ausgangsfolge $\underline{p}$ für die Eingangsfolge $\underline{u}$ = (1, 0, 0, 0, ...). Ausgehend vom Zustand S_0 ergeben sich im Zustandsübergangsdiagramm folgende Übergänge:

$$S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow \quad \Rightarrow \quad \text{Impulsantwort: } \underline{g} = (1, 0, 1, 0, 0, \text{ ... }).$$

Richtig ist der Lösungsvorschlag 2. Für ein nichtrekursives Filter mit Gedächtnis m gilt $g_i \equiv 0$ für $i > m$. In unserem Beispiel ist $m = 2$. Der Lösungsvorschlag 1 gilt dagegen für das rekursive Filter (RSC) entsprechend der **Aufgabe A4.9.**

b) Es sei $\underline{u}$ = (1, 0, 0, 1, 0, 0, u_7) und $\underline{g}$ = (1, 0, 1, 0, 0, 0, ...). Dann gilt für die Paritysequenz aufgrund der Linearität:

$$\begin{aligned}
\underline{p} &= (1, 0, 0, 1, 0, 0, u_7) * (1, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots) = \\
&= (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots) \oplus \\
&\oplus\ (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots) \oplus \\
&\oplus\ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ u_7,\ 0,\ u_7,\ \ldots) = \\
&= (1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ u_7,\ 0,\ u_7,\ \ldots).
\end{aligned}$$

Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 1 und 2 im Gegensatz zur Antwort 3: Für $u_7 = 1$ gilt $p_7 = 1$, $p_8 = 0$, $p_9 = 1$ und $p_i \equiv 0$ für $i > 9$.

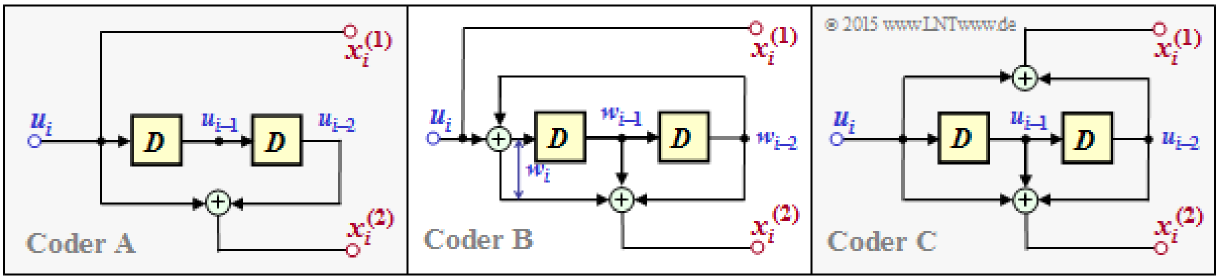
c) Aus dem Zustandsübergangsdiagramm erkennt man die Codeparameter $k = 1$ und $n = 2$. Das heißt: Die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(D)$ besteht aus zwei Elementen $\Rightarrow$ der Vorschlag 3 ist falsch.

- Die erste Komponente von $\mathbf{G}(D)$ ist tatsächlich 1, da ein systematischer Code vorliegt: $\underline{x}^{(1)} \equiv \underline{u}$.
- Die zweite Komponente von $\mathbf{G}(D)$ ist gleich der D–Transformierten der Impulsantwort $\underline{g}$, wobei die Dummy–Variable D eine Verzögerung um ein Bit angibt:

$$\underline{g} = (1\,,0\,,1\,,0\,,0\,,\ldots) \quad \circ\!\!\stackrel{D}{-\!\!-}\!\!\bullet \quad G^{(2)}(D) = 1 + D^2\,.$$

Richtig ist demnach der Lösungsvorschlag 2.

Über die Fragestellung hinausgehend betrachten wir hier auch noch die vorliegende Filterstruktur:



In der Grafik ist der hier betrachtete Coder als **Coder A** links dargestellt. Der Coder A

- ist ebenso wie der Coder B systematisch,
- basiert im Gegensatz zu Coder B aber auf einem nichtrekursiven Filter.

Der Coder C hat ebenfalls eine nichtrekursive Struktur, ist aber nicht systematisch. Die äquivalente systematische Repräsentation von Coder C ist der Coder B.

d) Die Aufgabe könnte in gleicher Weise gelöst werden wie die Teilaufgabe (b). Wir wählen hier aber zur Abwechslung den Weg über die D–Transformation:

$$\underline{u} = (1\,,0\,,1\,,0\,,0\,,1) \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad U(D) = 1 + D^2 + D^5$$

$$\Rightarrow \quad P(D) \;=\; U(D) \cdot G(D) = (1 + D^2 + D^5) \cdot (1 + D^2) =$$

$$= \; 1 + D^2 + D^5 + D^2 + D^4 + D^7 = 1 + D^4 + D^5 + D^7$$

$$\Rightarrow \quad \underline{p} = (1\,,0\,,0\,,0\,,1\,,1\,,0\,,1)\,.$$

Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3.

e) Die freie Distanz d_F eines Faltungscoders ist gleich der Anzahl der Bits, durch die sich zwei beliebige Sequenzen dieses Codes mindestens unterscheiden. Gehen wir wie allgemein üblich als Bezugsgröße von der Nullsequenz $\underline{0}$ $\Rightarrow S_0 \to S_0 \to S_0 \to S_0 \to ...$ aus, so ergibt sich d_F gleichzeitig als das minimale Hamming–Gewicht (Anzahl der Einsen) einer zulässigen Codesequenz $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Aus dem Zustandsübergangsdiagramm erkennt man, dass die freie Distanz zum Beispiel durch den Pfad

$$S_0 \to S_0 \to S_1 \to S_2 \to S_0 \to S_0 \to ...$$

gekennzeichnet ist, also durch die Codesequenz

00 11 00 01 00 . . . .

Dementsprechend gilt für die freie Distanz dieses nichtrekursiven Codes: $d_F = 3$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.8

a) Aus der regelmäßigen Struktur der dargestellten Funktion $I_{\rm Out}(I_{\rm In})$ erkennt man, dass es sich um einen Blockinterleaver handelt ⇒ Antwort 1.

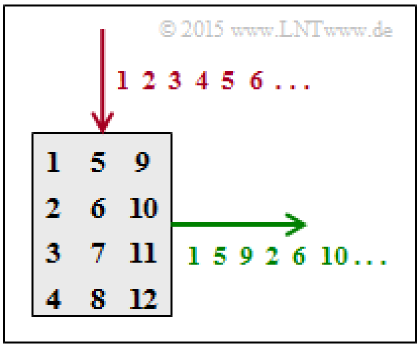
b) Der Index 1 wird als erstes Zeichen ausgegeben. Weiter gilt:

- Der Index 5 wird als zweites Zeichen ausgegeben ⇒ $Z = 4$.
- Der Index 2 wird als viertes Zeichen ausgegeben ⇒ $S = 3$.

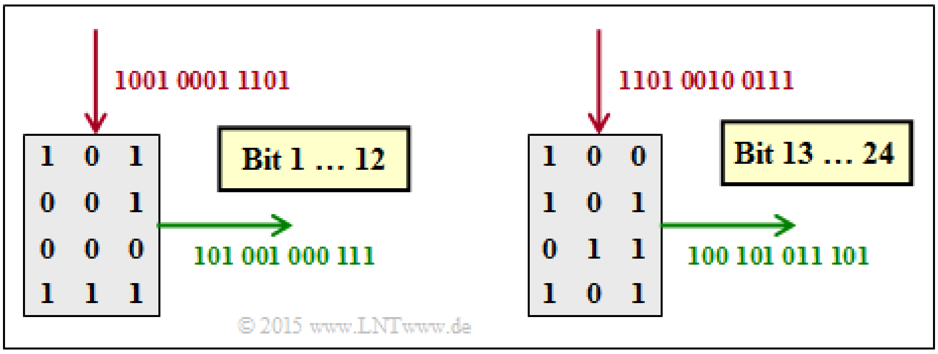
Die Grafik zeigt

- das spaltenweise Beschreiben (rot), und
- das zeilenweise Auslesen (grün)

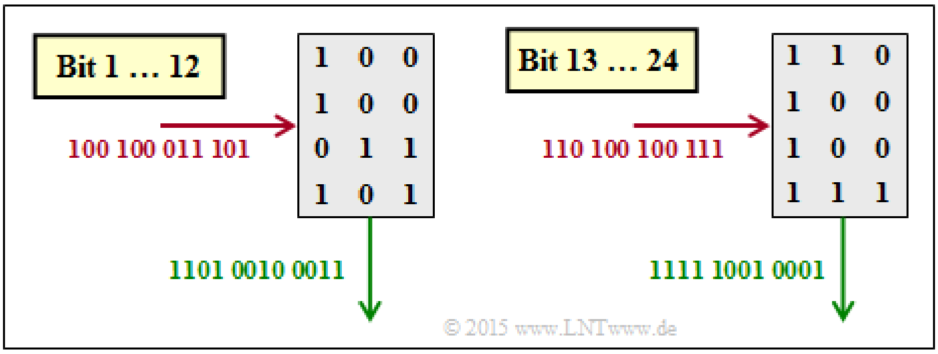
der Interleaver–Matrix.



c) Die Matrix wird spaltenweise beschrieben und zeilenweise ausgelesen. Nach 12 Bit wird die Matrix gelöscht und die Prozedur beginnt von Neuem. Die Grafik zeigt, dass der Lösungsvorschlag 2 richtig ist.



d) Beim De–Interleaving wird die Matrix zeilenweise beschrieben und spaltenweise ausgelesen. Die Grafik zeigt, dass nun der Lösungsvorschlag 1 richtig ist.



Musterlösung zur Aufgabe A4.9

a) Verfolgt man die Übergänge im Zustandsdiagramm für die Sequenz $\underline{u} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ am Eingang, so erhält man den Weg

$$S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \ldots$$

Bei jedem Übergang ist das erste Codesymbol $x_i^{(1)}$ gleich dem Informationsbit u_i und das Codesymbol $x_i^{(2)}$ gibt das Paritybit p_i an. Damit erhält man das Ergebnis entsprechend dem Lösungsvorschlag 1:

$$\underline{p} = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots) = \underline{g}\,.$$

Bei einem jeden RSC–Code ist die Impulsantwort $\underline{g}$ unendlich lang und wird irgendwann periodisch, hier mit der Periode $P = 3$ und „0, 1, 1".

b) Die Grafik zeigt die Lösung dieser Aufgabe entsprechend der Gleichung $\underline{p} = \underline{u}^{\rm T} \cdot \mathbf{G}$. Hierbei ist die Generatormatrix $\mathbf{G}$ nach unten und rechts unendlich weit ausgedehnt. Richtig ist der Lösungsvorschlag 2.

© 2015 www.LNTwww.de

$\underline{u}^{\rm T}$:	Generatormatrix $\mathbf{G}$																	
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	.	.	.
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	.	.	.
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	.	.	.
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{p}$:	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	.	.	.

c) Zwischen der Impulsantwort $\underline{g}$ und der D–Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(D)$ besteht der Zusammenhang

$$\underline{g} = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots) \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad G(D) = 1 + D + D^2 + D^4 + D^5 + D^7 + D^8 + \ldots .$$

entsprechend dem ersten Lösungsvorschlag. Überprüfen wir nun den zweiten Vorschlag:

$$G(D) = \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \quad \Rightarrow \quad G(D) \cdot [1 + D + D^2] = 1 + D^2\,.$$

Die folgende Rechnung zeigt, dass diese Gleichung tatsächlich stimmt:

$$\begin{aligned}
&(1 + D + D^2 + D^4 + D^5 + D^7 + D^8 + \ldots) \cdot (1 + D + D^2) = \\
&= 1 + D + D^2 \quad + D^4 + D^5 \quad + D^7 + D^8 \quad + D^{10} + \ldots \\
&+ \quad D + D^2 + D^3 \quad + D^5 + D^6 \quad + D^8 + D^9 \quad + \ldots \\
&+ \quad D^2 + D^3 + D^4 \quad + D^6 + D^7 \quad + D^9 + D^{10} + \ldots \\
&= \underline{1 \quad + D^2}\,.
\end{aligned}$$

Richtig sind die Vorschläge 1 und 2. Da Gleichung (2) stimmt, muss die letzte Gleichung falsch sein.

d) Aus $\underline{u} = (1, 1, 1)$ folgt $U(D) = 1 + D + D^2$. Damit gilt auch:

$$P(D) = U(D) \cdot G(D) = (1 + D + D^2) \cdot \frac{1+D^2}{1+D+D^2} = 1 + D^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{p} = (1, 0, 1, 0, 0, \ldots)\,.$$

Richtig ist somit nur der Lösungsvorschlag 1. Insbesondere ist anzumerken:

- Wären die Größen u_i und g_i reellwertig, so würde die (diskrete) Faltung $\underline{p} = \underline{u} * \underline{g}$ stets zu einer Verbreiterung führen $\Rightarrow$ $\underline{p}$ wäre in diesem Fall breiter als $\underline{u}$ und auch breiter als $\underline{g}$.
- Bei $u_i \in GF(2)$ und $g_i \in GF(2)$ kann es (muss es aber nicht) dagegen vorkommen, dass auch bei unbegrenztem $\underline{u}$ oder bei unbegrenztem $\underline{g}$ das Faltungsprodukt $\underline{p} = \underline{u} * \underline{g}$ begrenzt ist.

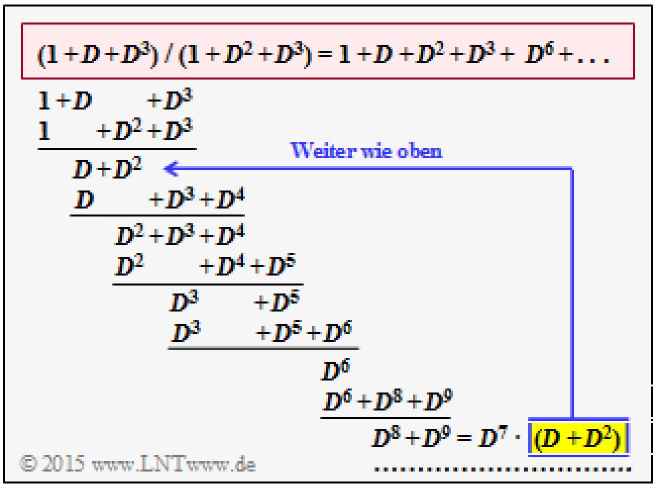
Das Ergebnis wird nun noch entsprechend der Gleichung $\underline{p} = \underline{u}^{\rm T} \cdot \mathbf{G}$ überprüft.

Generatormatrix G © 2015 www.LNTwww.de

$\underline{u}^{\rm T}$:																		
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	.	.	.
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	.	.	.
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	.	.	.
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{p}$:	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.	.	.

e) In ähnlicher Vorgehensweise wie in der **Aufgabe A4.8d** wird auch hier die freie Distanz zum Beispiel durch den Pfad $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow$ ... bestimmt. Die zugehörige Codesequenz $\underline{x}$ ist nun aber „00 11 10 11 00 ....". Damit ergibt sich die freie Distanz zu $d_{\rm F} \underline{= 5}$. Beim nichtrekursiven Code von Aufgabe A4.8 wurde dagegen nur die freie Distanz $d_{\rm F} = 3$ ermittelt.

Musterlösung zur Aufgabe A4.10



a) Die Codeparameter sind k = 1 und n = 3 $\Rightarrow$ Coderate $\underline{R = 1/3}$.

Das Gedächtnis (englisch: *Memory*) ist $\underline{m = 3}$.

Die Einflusslängen ergeben sich zu $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$ und $\nu_3 = 4$ $\Rightarrow$ Gesamteinflusslänge $\underline{\nu = 9}$.

b) Wie der Vergleich des **rekursiven Filters** auf der Angabenseite mit der **Filterstruktur** im Theorieteil für gebrochen–rationales $G(D)$ zeigt, ist der Lösungsvorschlag 1 richtig.

c) Die Grafik verdeutlicht die Polynomdivision $G(D) = (D + D + D^3) / (D + D^2 + D^3)$. Zur Erläuterung:

- Abgebrochen ist die Darstellung mit dem Rest $D^8 + D^9 = D^7 \cdot (D + D^2)$. Damit gilt:

$$(D^8 + D^9) / (1 + D^2 + D^3) \; = \; D^7 \cdot (D + D^2 + D^3 + D^6) + \text{Rest} = \\ = \; D^8 + D^9 + D^{10} + D^{13} + \text{Rest}\,.$$

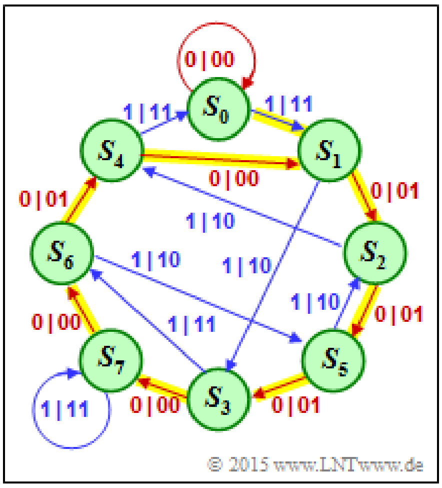
- Die D–Rücktransformierte ergibt den Lösungsvorschlag 2:

$$\underline{g} = (1\,,\,1\,,\,1\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,1\,,\,1\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,...\,)\,.$$

- Die Impulsantwort setzt sich bis ins Unendliche fort $\Rightarrow$ Lösungsvorschlag 3 ist ebenfalls richtig.

d) Die Impulsantwort kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\underline{g} = \Big(1,\,[1,\,1,\,1,\,0,\,0,\,1,\,0]_{\text{per}}\Big) \;\Rightarrow\; \underline{P = 7}\,.$$



Im Zustandsübergangsdiagramm (rechts) ist die Impulsantwort $\underline{g}$ gelb hinterlegt. Die Impulsantwort ergibt sich als die Paritysequenz $\underline{p}$ für die Informationssequenz $\underline{u}$ = (1, 0, 0, 0, ...).

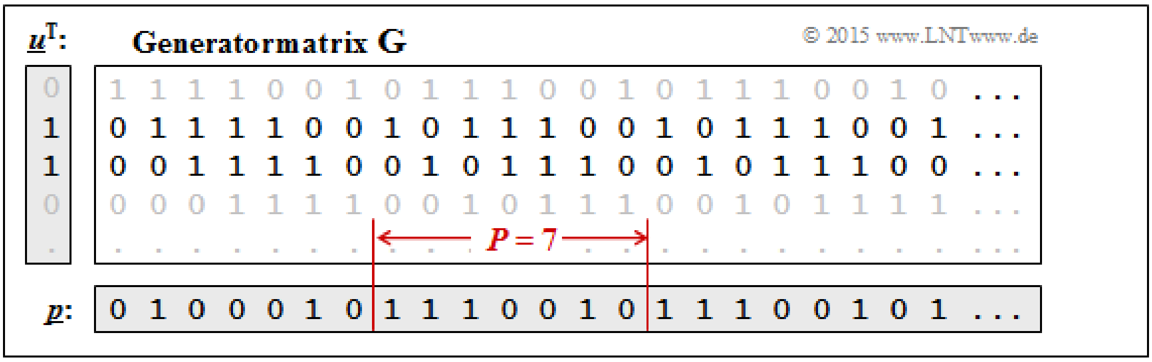
- Die Übergänge im Diagramm sind mit „$u_i|\underline{x}_i$" beschriftet, was gleichbedeutend ist mit „$u_i|u_ip_i$". Die Paritysequenz $\underline{p}$ (= Impulsantwort $\underline{g}$) ergibt sich somit aus dem jeweiligen zweiten Coderausgangssymbol.
- $\underline{g}$ wird durch folgende Zustände repräsentiert:

$$S_0 \rightarrow [\,S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_3 \rightarrow S_7 \rightarrow S_6 \rightarrow S_4\,] \rightarrow [S_1 \rightarrow \;...\; \rightarrow S_4\,] \rightarrow \;...$$

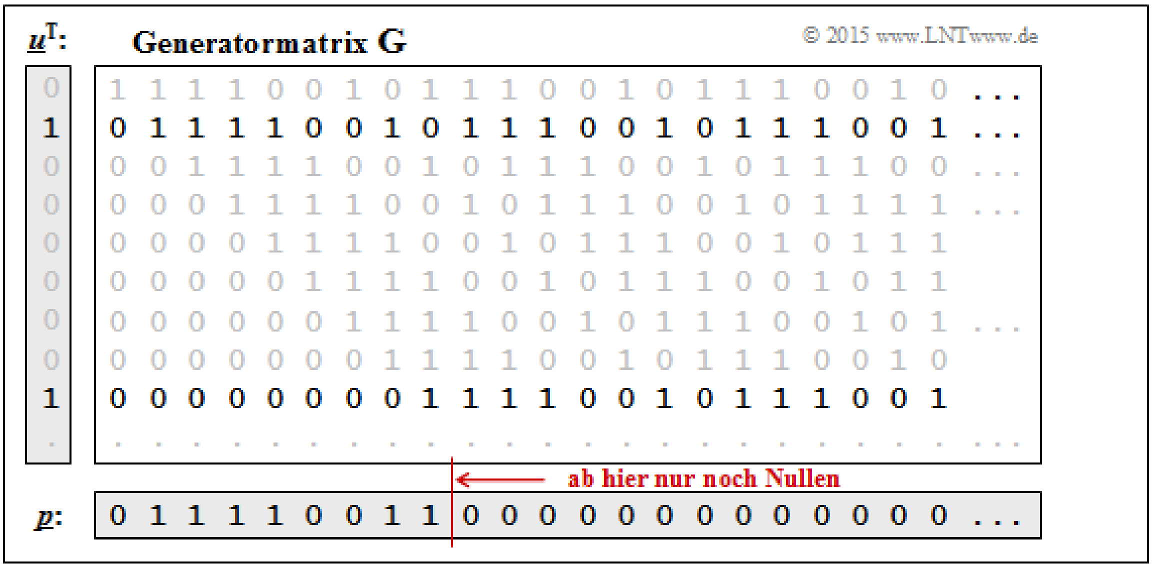
e) Die folgende Grafik zeigt die Lösung anhand der Generatormatrix **G**. Es gilt $\underline{u}$ = (0, 1, 1, 0, 0, ...). Man erkennt, dass die Lösungsvorschläge 1, 2 und 3 richtig sind:

- Die vorliegende Paritysequenz $\underline{p}$ hat die gleiche Periode P = 7 wie die Impulsantwort $\underline{g}$.
- Das Hamming–Gewicht der (begrenzten) Eingangsfolge ist tatsächlich $w_{\rm H}(\underline{u}) = 2$.
- Der Vorschlag 4 ist falsch. Vielmehr gilt hier für die semi–infinite Ausgangssequenz: $w_{\rm H}(\underline{p}) \rightarrow \infty$.

Im Übergangsdiagramm werden zunächst die Zustände $S_0 \to S_0 \to S_1 \to S_3 \to S_7 \to S_6 \to S_4 \to S_1$ durchlaufen. Danach folgt (unendlich oft) der periodische Anteil $S_1 \to S_2 \to S_5 \to S_3 \to S_7 \to S_6 \to S_4 \to S_1$.



f) Die letzte Grafik zeigt die Lösung für $U(D) = D + D^8 \Rightarrow \underline{u} = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$.



Nun ist die Ausgangssequenz $\underline{p}$ ab der Position 10 identisch $\underline{0}$ $\Rightarrow$ die Vorschläge 1 und 2 treffen also nicht zu. Dagegen sind die <u>Lösungsvorschläge 3 und 4</u> richtig: Die Eingangssequenz $\underline{u}$ beinhaltet zwei Einsen und die Ausgangssequenz $\underline{p}$ sechs Einsen.

Hinweis: Für einen Turbocode sind insbesondere solche Eingangsfolgen $\underline{u}$, deren D–Transformierte als $U(D) = f(D) \cdot [1 + D^P]$ darstellbar sind, äußerst ungünstig. Sie bewirken den *Error Floor*, wie er auf **Seite 5** im Theorieteil zu erkennen ist. P gibt dabei die Periode der Impulsantwort $\underline{g}$ an. In unserem Beispiel gilt $f(D) = D$ und $P = 7$.

Musterlösung zur Aufgabe A4.11

a) Mit der Codewortdefinition $\underline{x} = (u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3, p_4)$ bezeichnet die Prüfmatrix $\mathbf{H}_1$ folgende Prüfgleichungen:

$$u_1 \oplus u_2 \oplus p_1 = 0\,, \quad u_3 \oplus u_4 \oplus p_2 = 0\,, \quad u_1 \oplus u_3 \oplus p_3 = 0\,, \quad u_2 \oplus u_4 \oplus p_4 = 0\,.$$

Dies entspricht genau den vorne getroffenen Annahmen. Das gleiche Ergebnis erhält man für $\mathbf{H}_2$ und der Codewortdefinition $\underline{x} = (u_1, p_1, u_2, p_2, u_3, p_3, u_4, p_4)$ ⇒ Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 3.

Dagegen liefern bei gleicher Codewortdefinition $\underline{x} = (u_1, p_1, u_2, p_2, u_3, p_3, u_4, p_4)$ die beiden anderen Prüfmatrizen keinen sinnvollen Gleichungssatz.

- Entsprechend Prüfmatrix $\mathbf{H}_1$:

$$u_1 \oplus p_1 \oplus u_3 = 0\,, \quad u_2 \oplus p_2 \oplus p_3 = 0\,, \quad u_1 \oplus u_2 \oplus u_4 = 0\,, \quad p_1 \oplus p_2 \oplus p_4 = 0\,,$$

- entsprechend Prüfmatrix $\mathbf{H}_3$:

$$u_1 \oplus p_2 \oplus u_3 \oplus p_4 = 0\,, \quad u_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus u_4 = 0\,, \quad p_1 \oplus u_2 \oplus u_3 \oplus u_4 = 0\,, \quad p_1 \oplus u_2 \oplus p_3 \oplus p_4 = 0\,.$$

b) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 4:

- Der Code ist systematisch, weil $\mathbf{H}_1$ mit einer 4×4–Diagonalmatrix endet.
- Bei einem regulären (LDPC)–Code müssten in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich viele Einsen sein. Die erste Bedingung ist erfüllt ($w_Z = 3$), nicht aber die zweite. Vielmehr gibt es (gleich oft) eine Eins bzw. zwei Einsen pro Spalte ⇒ $\mathrm{E}[w_S] = 1.5$.
- Bei einem irregulären Code lautet die untere Schranke für die Coderate:

$$R \ge 1 - \frac{\mathrm{E}[w_{\rm S}]}{\mathrm{E}[w_{\rm Z}]} = 1 - \frac{1.5}{3} = 1/2\,.$$

- Wegen der gegebenen Codestruktur ($k = 4$ Informationsbits, $m = 4$ Prüfbits ⇒ $n = 8$ Codebits) ist hier die Coderate auch in der herkömmlichen Form angebbar: $R = k/n$ ⇒ Richtig ist der Lösungsvorschlag 4 im Gegensatz zur Antwort 3.

c) Die $\mathbf{H}_3$–Zeilen ergeben sich aus Linearkombinationen von $\mathbf{H}_1$–Zeilen:

- Die erste $\mathbf{H}_3$–Zeile ist die Summe von Zeile 1 und Zeile 4.
- Die zweite $\mathbf{H}_3$–Zeile ist die Summe von Zeile 2 und Zeile 3.
- Die dritte $\mathbf{H}_3$–Zeile ist die Summe von Zeile 1 und Zeile 3.
- Die vierte $\mathbf{H}_3$–Zeile ist die Summe von Zeile 2 und Zeile 4.

Durch Linearkombinationen werden aus den vier linear unabhängigen Gleichungen bezüglich $\mathbf{H}_1$ nun vier linear unabhängige Gleichungen bezüglich $\mathbf{H}_3$. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 2 und 3.

d) Hier sind die Lösungsvorschläge 2, 3 und 4 richtig:

- Wäre der durch $\mathbf{H}_3$ beschriebene Code systematisch, müsste $\mathbf{H}_3$ mit einer 4×4–Diagonalmatrix enden. Dies ist hier nicht der Fall.

- Die Hamming–Gewichte aller Zeilen sind gleich ($w_{\rm Z} = 4$) und auch alle Spalten haben jeweils das gleiche Hamming–Gewicht ($w_{\rm S} = 2$) $\Rightarrow$ der Code ist regulär.
- Daraus ergibt sich für die Coderate $R \ge 1 - 2/4 = 1/2$. Da aber auch die vier Zeilen von $\mathbf{H}_3$ vier unabhängige Gleichungen beschreiben, gilt ebenfalls das Gleichheitszeichen $\Rightarrow R = 1/2$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.11

a) Die Matrix $\mathbf{H}_1$ endet mit einer 3×3–Diagonalmatrix. Dies ist das Kennzeichen eines systematischen Codes mit $\underline{m = 3}$ Prüfgleichungen. Die Codelänge ist $\underline{n = 7}$. Damit beinhaltet ein Codewort $\underline{k = 4}$ Informationsbits. *Hinweis*: Es handelt sich um den **systematischen (7, 4, 3)–Hamming–Code.**

b) Die Coderate des (7, 4, 3)–Hamming–Codes ist $\underline{R = 4/7 = 0.571}$. Das Hamming–Gewicht für alle $m = 3$ Zeilen ist $w_Z = 4$ und für das mittlere Hamming–Gewicht über alle Spalten gilt:

$$\mathrm{E}[w_S] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} w_S(j) = 1/7 \cdot [2+3+2+2+1+1+1] = 12/7\,.$$

Damit gilt für die angegebene untere Schranke der Coderate:

$$R \ge 1 - \frac{\mathrm{E}[w_S]}{w_Z} = 1 - \frac{12/7}{4} \underline{= 4/7 \approx 0.571}\,.$$

Das bedeutet: Die tatsächliche Coderate ist gleich der unteren Schranke ⇒ die $m = 3$ Prüfgleichungen von $\mathbf{H}_1$ sind linear unabhängig.

c) Die erste Zeile von $\mathbf{H}_2$ ist die Summe aus der ersten Zeile (z_1) und der zweiten Zeile (z_2) von $\mathbf{H}_1$. Die zweite Zeile ist gleich $z_2 + z_3$ und die dritte Zeile ist $z_1 + z_3$. Es handelt sich um den identischen Code ⇒ Rate $\underline{R = 4/7 = 0.571}$. Weiterhin gilt $w_Z = 4$ und $\mathrm{E}[w_S] = 1/7 \cdot [\,0 + 6 \cdot 2] = 12/7$.

d) Für diesen Code mit $n = 7$ (Spaltenzahl) und $m = 4$ (Zeilenzahl) gilt:

$$w_Z = 4\,, \quad \mathrm{E}[w_S] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} w_S(j) = 1/7 \cdot [3+1+2+3+2+2+3] = 16/7$$

$$\Rightarrow \quad R \ge 1 - \frac{16/7}{4} = 3/7\,.$$

Das Gleichheitszeichen würde nur bei linear unabhängigen Prüfgleichungen gelten, was hier nicht zutrifft: Die dritte Zeile von $\mathbf{H}_3$ wurde von $\mathbf{H}_1$ übernommen. Streicht man diese Zeile, so ist $\mathbf{H}_3 = \mathbf{H}_2$ und deshalb gilt ebenfalls: $\underline{R = 4/7 = 0.571}$.

e) Hier gilt $n = 7$ und $m = 4$, sowie

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[w_S] &= 1/8 \cdot [4+3+4+3+3+2+2+2] = 23/8\,,\\ \mathrm{E}[w_Z] &= 1/4 \cdot [8+5+5+5] = 23/4\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad R \ge 1 - \frac{\mathrm{E}[w_S]}{\mathrm{E}[w_Z]} = 1 - \frac{23/8}{23/4} = 1/2\,.$$

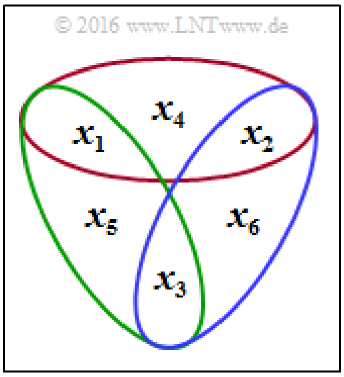
Da alle vier Gleichungen linear unabhängig sind, ist die Coderate gleich der unteren Schranke: $\underline{R = 1/2}$.
Hinweis: Es handelt sich um den **erweiterten (8, 4, 4)–Hamming–Code.**

Musterlösung zur Aufgabe A4.12

a) Die Anzahl der $\mathbf{H}_\text{A}$–Zeilen ist gleich der Anzahl der *Check Nodes* C_j im Tanner–Graphen $\Rightarrow$ $\underline{m = 3}$, und die Anzahl $\underline{n = 6}$ der *Variable Nodes* V_i ist gleich der Spaltenzahl.

b) Richtig sind die Antworten 1 und 3 im Gegensatz zur Aussage 2: Die zweite $\mathbf{H}_\text{A}$–Zeile lautet vielmehr „1 0 1 0 1 0". Somit liegt dieser Aufgabe die folgende Prüfgleichung zugrunde:

$$\mathbf{H}_\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



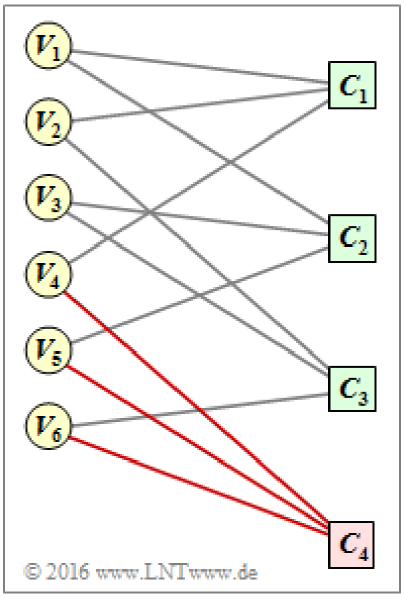
Im Schaubild sind die Prüfgleichungen als rote (Zeile 1), grüne (Zeile 2) bzw. blaue (Zeile 3) Gruppierung veranschaulicht.

c) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 3:

- Die $\mathbf{H}$–Matrix endet mit einer 3×3–Diagonalmatrix $\Rightarrow$ systematischer Code.
- Damit sind die Hamming–Gewichte der drei letzten Spalten $w_\text{S}(4) = w_\text{S}(5) = w_\text{S}(6) = 1$, während für die ersten drei Spalten gilt: $w_\text{S}(1) = w_\text{S}(2) = w_\text{S}(3) = 2$ $\Rightarrow$ irregulärer Code.
- Die drei Matrixzeilen sind linear unabhängig. Damit gilt $k = n - m = 6 - 3 = 3$ und $R = k/n = 1/2$.

d) Betrachtet man den bisherigen Tanner–Graphen, so erkennt man, dass der Lösungsvorschlag 1 richtig ist. Durch Hinzufügen der Zeile „0 0 0 1 1 1" zur $\mathbf{H}_\text{A}$–Matrix erhält man:

$$\mathbf{H}_\text{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Die Modifikationen sind in nebenstehender Grafik rot markiert: Durch den neu hinzugefügten *Check Node* C_4 und die Verbindungen mit V_4, V_5 und V_6 gehen nun

- von allen *Variable Nodes* V_i zwei Linien ab, und
- von allen *Check Nodes* C_j einheitlich vier.

e) Die der Konstruktion in Teilaufgabe (d) liefert einen regulären Code. Die Hamming–Gewichte der Zeilen bzw. Spalten sind $w_\text{Z} = 3$ und $w_\text{S} = 2$. Damit ergibt sich als untere Schranke für die Coderate:

$$R \ge 1 - \frac{w_\text{S}}{w_\text{Z}} = 1 - 2/3 = 1/3\,.$$

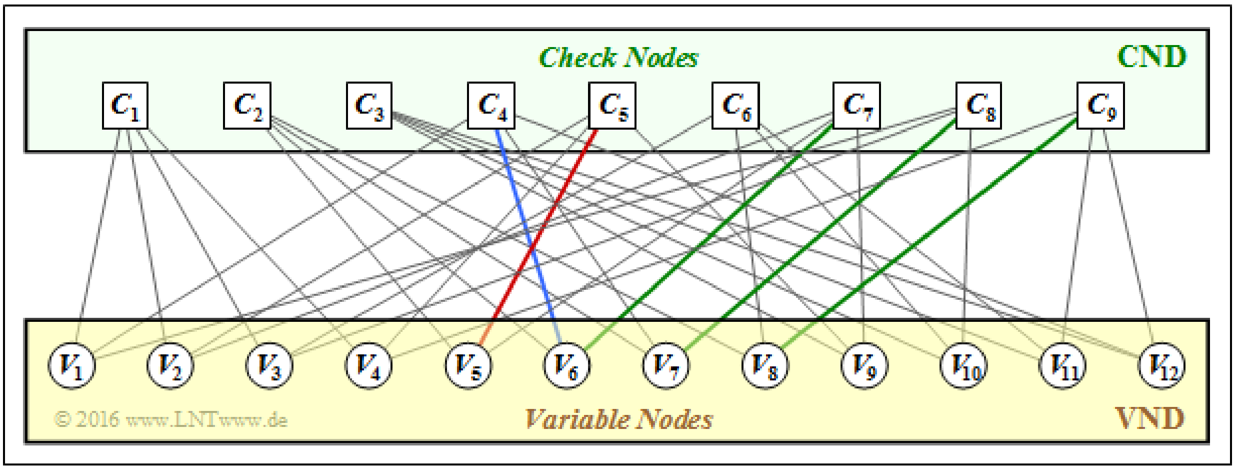
Durch die $\mathbf{H}$–Manipulation ändert sich nichts an der Generatormatrix $\mathbf{G}$. Gesendet wird weiterhin der gleiche Code mit der Coderate $R = 1/2$. Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 2 und 3.

Musterlösung zur Aufgabe A4.13

a) Der *Varible Node* (VN) V_i steht für das i–te Codewortbit, so dass $I_{\rm VN}$ gleich der Codewortlänge n ist. Aus der Spaltenzahl der **H**–Matrix erkennt man $I_{\rm VN} = n = \underline{12}$. Für die Menge aller *Variable Nodes* kann man somit allgemein schreiben: VN = $\{V_1, ..., V_i, ..., V_n\}$.

Der *Check Node* (CN) C_j steht für die j–Prüfgleichung, und für die Menge aller *Check Nodes* gilt: CN = $\{C_1, ..., C_j, ..., C_m\}$. Aus der Zeilenzahl der **H**–Matrix ergibt sich $I_{\rm CN} \underline{= m = 9}$.

b) Die Ergebnisse können aus dem nachfolgend skizzierten Tanner–Graphen abgelesen werden.



Richtig sind <u>die Lösungsvorschläge 1, 2 und 5</u>:

- Das Matrixelement $h_{5,5}$ (Spalte 5, Zeile 5) ist 1 ⇒ rote Verbindung.
- Das Matrixelement $h_{4,6}$ (Spalte 4, Zeile 6) ist 1 ⇒ blaue Verbindung.
- Das Matrixelement $h_{6,4}$ (Spalte 6, Zeile 4) ist 0 ⇒ keine Verbindung.
- Es gilt $h_{6,10} = h_{6,11} = 1$. Aber $h_{6,12} = 0$ ⇒ es bestehen nicht alle drei Verbindungen.
- Es gilt $h_{7,6} = h_{8,7} = h_{9,8} = 1$ ⇒ grüne Verbindungen.

c) Es handelt sich um einen regulären LDPC–Code mit

- $w_{\rm Z}(j) = 4 = w_{\rm Z}$ für $1 \le j \le 9$,
- $w_{\rm S}(i) = 3 = w_{\rm S}$ für $1 \le i \le 12$.

Die Antworten 1 und 4 können schon allein deshalb nicht richtig sein, da

- die Nachbarschaft $N(V_i)$ eines jeden *Variable Nodes* V_i genau $w_{\rm S} = 3$ Elemente beinhaltet, und
- die Nachbarschaft $N(C_j)$ eines jeden *Check Nodes* C_j genau $w_{\rm Z} = 4$ Elemente.

Die <u>Antworten 2 und 3</u> sind richtig, wie aus der ersten Zeile bzw. der neunten Spalte der Prüfmatrix **H** hervorgeht. Der Tanner–Graph bestätigt diese Ergebnisse:

- Von C_1 gibt es Verbindungen zu V_1, V_2, V_3, und V_4 .
- Von V_9 gibt es Verbindungen zu C_3, C_5, und C_7 .

d) Richtig sind die <u>Lösungsvorschläge 1 und 2</u>, wie aus der **entsprechenden Theorieseite** hervorgeht:

- Zu Beginn der Decodierung (sozusagen: Iteration 0) werden die L–Werte der *Variable Nodes*

$\Rightarrow$ $L(V_i)$ entsprechend den Kanaleingangswerten vorbelegt.

- Später (ab der Iteration I = 1) wird im VND das vom CND übermittelte Log–Likelihood–Verhältnis $L(C_j \rightarrow V_i)$ als Apriori–Information berücksichtigt.
- Antwort 3 ist falsch. Richtig wäre vielmehr: Es gibt Analogien zwischen dem VND–Algorithmus und der Decodierung eines *Repetition Codes*.

f) Richtig ist nur der Lösungsvorschlag 3, weil

- die endgültigen Aposteriori–L–Werte vom VND abgeleitet werden, nicht vom CND,
- der L–Wert $L(C_j \rightarrow V_i)$ für den CND extrinsische Information darstellt, und
- es tatsächlich Analogien zwischen dem CND–Algorithmus und der SPC–Decodierung gibt.