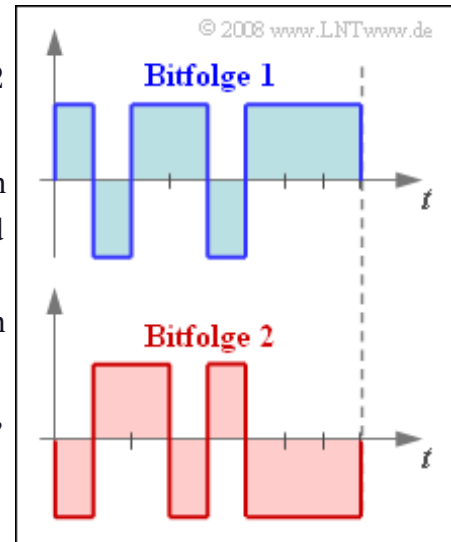


## A4.1: PCM-System 30/32

Über viele Jahre wurde in Deutschland das PCM-System 30/32 eingesetzt, das wie folgt charakterisiert werden kann:

- Es erlaubt die digitale Übertragung von 30 Sprachkanälen im Zeitmultiplex zusammen mit je einem Synchronisations- und Wählzeichenkanal  $\Rightarrow$  die Gesamtkanalzahl ist  $Z = 32$ .
- Jeder einzelne Sprachkanal ist auf den Frequenzbereich von 300 Hz bis 3400 Hz bandbegrenzt.
- Jeder einzelne Abtastwert wird durch  $N = 8$  Bit dargestellt, wobei vom so genannten Dualcode ausgegangen wird.
- Die Gesamtbitrate beträgt  $R_B = 2.048$  Mbit/s.



Die Grafik zeigt die Binärdarstellung zweier willkürlich ausgewählter Abtastwerte.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 4.1**. Für die Lösung der Teilaufgabe b) ist vorauszusetzen, dass alle Sprachsignale normiert und auf den Bereich  $\pm 1$  amplitudenbegrenzt sind.

### Fragebogen zu "A4.1: PCM-System 30/32"

a) Wie groß ist die Quantisierungsstufenzahl?

$$M =$$

b) Wie wird der Abtastwert  $-0.182$  dargestellt? Mit

- Bitfolge 1,
- Bitfolge 2,
- keiner von beiden.

c) Wie groß ist die Bitdauer?

$$T_B = \quad \mu\text{s}$$

d) In welchem Abstand  $T_A$  werden die Sprachsignale abgetastet?

$$T_A = \quad \mu\text{s}$$

e) Wie groß ist die Abtastrate?

$$f_A = \quad \text{kHz}$$

f) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- Das Abtasttheorem wird nicht erfüllt.
- Das Abtasttheorem wird gerade noch erfüllt.
- Die Abtastfrequenz ist größer als der kleinstmögliche Wert.

## A4.2: Tiefpass zur Signalrekonstruktion

Wir betrachten in dieser Aufgabe zwei verschiedene Quellensignale  $q_{\text{kon}}(t)$  und  $q_{\text{dis}}(t)$ , deren Spektralfunktionen  $|Q_{\text{kon}}(f)|$  und  $|Q_{\text{dis}}(f)|$  grafisch dargestellt sind. Die höchste in den Signalen vorkommende Frequenz ist jeweils 4 kHz.

- Von der Spektralfunktion  $Q_{\text{kon}}(f)$  ist nicht mehr bekannt, als dass es sich um ein kontinuierliches Spektrum handelt, wobei:  
 $Q_{\text{kon}}(|f| \leq 4 \text{ kHz}) \neq 0$ .
- Das Spektrum  $Q_{\text{dis}}(f)$  beinhaltet Spektrallinien bei  $\pm 1$  kHz,  $\pm 2$  kHz,  $\pm 3$  kHz und  $\pm 4$  kHz. Somit gilt:

$$q_{\text{dis}}(t) = \sum_{i=1}^4 C_i \cdot \cos(2\pi \cdot f_i \cdot t - \varphi_i)$$

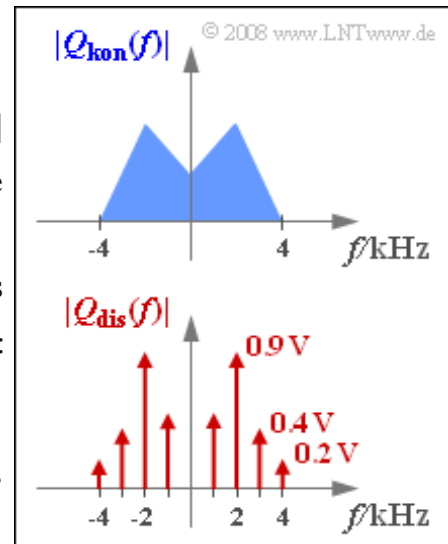
mit  $C_1 = 1.0 \text{ V}$ ,  $C_2 = 1.8 \text{ V}$ ,  $C_3 = 0.8 \text{ V}$ ,  $C_4 = 0.4 \text{ V}$ . Die Phasenwerte  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\varphi_3$  liegen jeweils im Bereich  $\pm 180^\circ$  und es gilt  $\varphi_4 = 90^\circ$ .

Die Signale werden jeweils mit der Frequenz  $f_A$  abgetastet und sofort einem idealen, rechteckförmigen Tiefpass mit der Grenzfrequenz  $f_G$  zugeführt. Dieses Szenario gilt zum Beispiel für

- die störungsfreie Pulsamplitudenmodulation (PAM) und
- die störungsfreie Pulsmodulation (PCM) bei unendlich großer Quantisierungsstufenzahl  $M$ .

Das Ausgangssignal des (rechteckförmigen) Tiefpasses wird als Sinkensignal  $v(t)$  bezeichnet, und für das Fehlersignal gilt  $\varepsilon(t) = v(t) - q(t)$ . Dieses ist nur dann von 0 verschieden, wenn die Parameter der Abtastung ( $f_A$ ) und/oder der Signalrekonstruktion ( $f_G$ ) nicht bestmöglich dimensioniert sind.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 4.1**.



### Fragebogen zu "A4.2: Tiefpass zur Signalrekonstruktion"

a) Welche Aussagen treffen für  $f_A = 8$  kHz und für  $f_G = 4$  kHz zu?

- Das Signal  $q_{\text{kon}}(t)$  lässt sich vollständig rekonstruieren:  $\varepsilon_{\text{kon}}(t) = 0$ .
- Das Signal  $q_{\text{dis}}(t)$  lässt sich vollständig rekonstruieren:  $\varepsilon_{\text{dis}}(t) = 0$ .

b) Welche Aussagen treffen für  $f_A = 10$  kHz und  $f_G = 5$  kHz zu?

- Das Signal  $q_{\text{dis}}(t)$  lässt sich vollständig rekonstruieren:  $\varepsilon_{\text{dis}}(t) = 0$ .
- $\varepsilon_{\text{dis}}(t)$  ist eine harmonische Schwingung mit 4 kHz.
- $\varepsilon_{\text{dis}}(t)$  ist eine harmonische Schwingung mit 6 kHz.

c) Welche Aussagen treffen für  $f_A = 10$  kHz und  $f_G = 3.5$  kHz zu?

- Das Signal  $q_{\text{dis}}(t)$  lässt sich vollständig rekonstruieren:  $\varepsilon_{\text{dis}}(t) = 0$ .
- $\varepsilon_{\text{dis}}(t)$  ist eine harmonische Schwingung mit 4 kHz.
- $\varepsilon_{\text{dis}}(t)$  ist eine harmonische Schwingung mit 6 kHz.

d) Welche Aussagen treffen für  $f_A = 10$  kHz und  $f_G = 6.5$  kHz zu?

- Das Signal  $q_{\text{dis}}(t)$  lässt sich vollständig rekonstruieren:  $\varepsilon_{\text{dis}}(t) = 0$ .
- $\varepsilon_{\text{dis}}(t)$  ist eine harmonische Schwingung mit 4 kHz.
- $\varepsilon_{\text{dis}}(t)$  ist eine harmonische Schwingung mit 6 kHz.

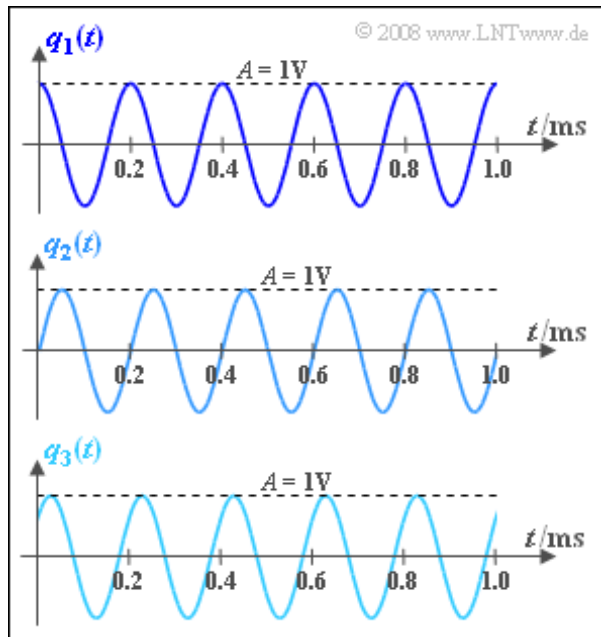
## Z4.2: Abtasttheorem

Das Abtasttheorem besagt, dass die Abtastfrequenz  $f_A = 1/T_A$  mindestens doppelt so groß sein muss wie die größte im Quellsignal  $q(t)$  enthaltene Frequenz  $f_{N,max}$ :

$$f_A \geq 2 \cdot f_{N,max} \Rightarrow T_A \leq \frac{1}{2 \cdot f_{N,max}}$$

Wird diese Bedingung erfüllt, so kann beim Empfänger das Nachrichtensignal durch einen rechteckförmigen (idealen) Tiefpass mit dem Frequenzgang

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < f_G, \\ 1/2 & \text{für } |f| = f_G, \\ 0 & \text{für } |f| > f_G \end{cases}$$



vollständig rekonstruiert werden, das heißt, es gilt dann  $v(t) = q(t)$ . Die Grenzfrequenz  $f_G$  ist dabei gleich der halben Abtastfrequenz zu wählen. Das Gleichheitszeichen gilt allgemein nur dann, wenn das Spektrum  $Q(f)$  keine diskrete Spektrallinie bei der Frequenz  $f_{N,max}$  beinhaltet.

In dieser Aufgabe werden drei verschiedene Quellsignale betrachtet, die sich jeweils als harmonische Schwingung

$$q(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_N \cdot t - \varphi)$$

mit der Amplitude  $A = 1 \text{ V}$  und der Frequenz  $f_N = 5 \text{ kHz}$  darstellen lassen. Für die Spektralfunktion  $Q(f)$  aller dargestellten Zeitsignale gilt allgemein:

$$Q(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f - f_N) \cdot e^{-j \cdot \varphi} + \frac{A}{2} \cdot \delta(f + f_N) \cdot e^{+j \cdot \varphi}$$

Die in der Grafik skizzierten Schwingungen unterscheiden sich allein durch die Phase  $\varphi$ :

- $\varphi_1 = 0 \Rightarrow$  Cosinussignal  $q_1(t)$ ,
- $\varphi_2 = \pi/2 (= 90^\circ) \Rightarrow$  Sinussignal  $q_2(t)$ ,
- $\varphi_3 = \pi/4 (= 45^\circ) \Rightarrow$  Signal  $q_3(t)$ .

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.1** Das abgetastete Quellsignal wird mit  $q_A(t)$  bezeichnet und dessen Spektralfunktion mit  $Q_A(f)$ . Die Abtastung erfolgt stets bei  $\nu \cdot T_A$ .

### Fragebogen zu "Z4.2: Abtasttheorem"

a) Welche Aussagen gelten mit  $f_A = 11$  kHz?

- Das Abtasttheorem wird stets erfüllt.
- Alle Signale können durch einen Tiefpass rekonstruiert werden.
- Es gilt stets  $Q_A(f = 5 \text{ kHz}) = Q(f = 5 \text{ kHz})$ .

b) Welcher Abtastabstand ergibt sich mit  $f_A = 10$  kHz?

$$T_A = \quad \text{ms}$$

c) Welche Aussagen gelten für das Signal  $q_1(t)$  und  $f_A = 10$  kHz?

- Es gilt  $Q_A(f = 5 \text{ kHz}) = Q_1(f = 5 \text{ kHz})$ .
- Eine vollständige Signalrekonstruktion ist möglich  $\Rightarrow v_1(t) = q_1(t)$ .
- Das rekonstruierte Signal ist  $v_1(t) = 0$ .

d) Welche Aussagen gelten für das Signal  $q_2(t)$  und  $f_A = 10$  kHz?

- Es gilt  $Q_A(f = 5 \text{ kHz}) = Q_2(f = 5 \text{ kHz})$ .
- Eine vollständige Signalrekonstruktion ist möglich  $\Rightarrow v_2(t) = q_2(t)$ .
- Das rekonstruierte Signal ist  $v_2(t) = 0$ .

e) Welche Aussagen gelten für das Signal  $q_3(t)$  und  $f_A = 10$  kHz?

- Es gilt  $Q_A(f = 5 \text{ kHz}) = Q_3(f = 5 \text{ kHz})$ .
- Eine vollständige Signalrekonstruktion ist möglich  $\Rightarrow v_3(t) = q_3(t)$ .
- Das rekonstruierte Signal ist  $v_3(t) = 0$ .

### A4.3: Abtastung natürlich/diskret

Die ideale Abtastung lässt sich im Zeitbereich durch Multiplikation des analogen Quellensignals  $q(t)$  mit einem Diracpuls  $p_\delta(t)$  beschreiben:

$$q_A(t) = p_\delta(t) \cdot q(t).$$

Diracimpulse – unendlich schmal und unendlich hoch – und dementsprechend auch der Diracpuls  $p_\delta(t)$  lassen sich in der Praxis jedoch nicht realisieren. Hier muss statt dessen vom Rechteckpuls  $p_R(t)$  ausgegangen werden, wobei folgender Zusammenhang gilt:

$$p_R(t) = \left[ \frac{1}{T_A} \cdot p_\delta(t) \right] \star g_R(t)$$

mit

$$g_R(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < T_R/2, \\ 1/2 & \text{für } |t| = T_R/2, \\ 0 & \text{für } |t| > T_R/2. \end{cases}$$

Die Dauer  $T_R$  eines Rechteckimpulses sollte dabei (deutlich) kleiner sein als der Abstand  $T_A$  zweier Abtastwerte. In der Grafik ist dieses Verhältnis mit  $T_R/T_A = 0.5$  sehr groß gewählt, um den Unterschied zwischen der sog. natürlichen und der sog. diskreten Abtastung besonders deutlich werden zu lassen:

- Bei natürlicher Abtastung ist das abgetastete Signal  $q_A(t)$  gleich dem Produkt aus Rechteckpuls  $p_R(t)$  und analogem Quellensignal  $q(t)$ :

$$q_A(t) = p_R(t) \cdot q(t) = \left[ \frac{1}{T_A} \cdot p_\delta(t) \star g_R(t) \right] \cdot q(t).$$

- Dagegen lautet die entsprechende Gleichung für die diskrete Abtastung:

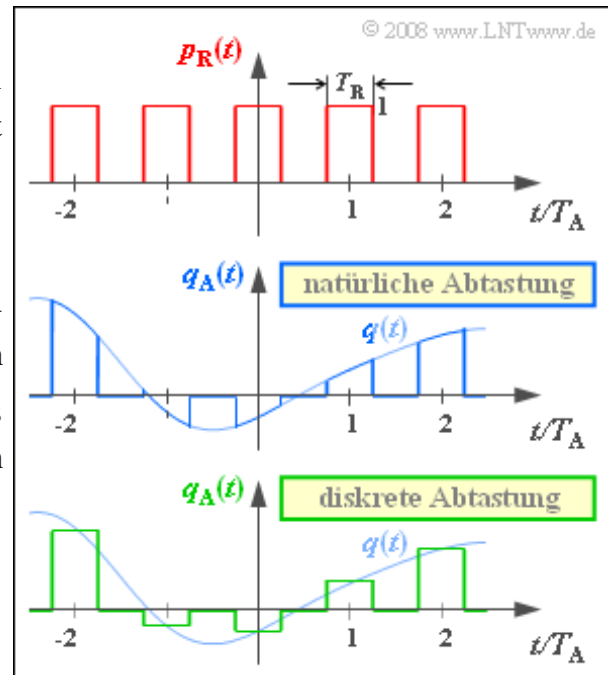
$$q_A(t) = \left[ \frac{1}{T_A} \cdot p_\delta(t) \cdot q(t) \right] \star g_R(t).$$

In der Grafik sind diese Signale in blau (natürliche Abtastung) bzw. grün (diskrete Abtastung) skizziert.

Zur Signalrekonstruktion wird ein rechteckförmiger Tiefpass  $H(f)$  mit der Grenzfrequenz  $f_G = f_A/2$  und der Verstärkung  $T_A/T_R$  im Durchlassbereich eingesetzt:

$$H(f) = \begin{cases} T_A/T_R & \text{für } |f| < f_A/2, \\ 0 & \text{für } |f| > f_A/2. \end{cases}$$

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.1** dieses Buches.



### Fragebogen zu "A4.3: Abtastung natürlich/diskret "

a) Es gelte  $T_R/T_A = 0.5$ . Geben Sie hierfür das normierte Spektrum  $G_R(f)/T_A$  an.  
Welcher Spektralwert tritt bei  $f = 0$  auf?

$$G_R(f=0)/T_A =$$

b) Wie lautet das Spektrum  $Q_A(f)$  bei natürlicher Abtastung? Vorschläge:

- $Q_A(f) = P_\delta(f) * Q(f)$ ,
- $Q_A(f) = [P_\delta(f) \cdot (G_R(f)/T_A)] * Q(f)$ ,
- $Q_A(f) = [P_\delta(f) * Q(f)] \cdot (G_R(f)/T_A)$ .

c) Eignet sich bei natürlicher Abtastung der angegebene Tiefpass zur Interpolation?

- ja,
- nein.

d) Wie lautet das Spektrum  $Q_A(f)$  bei diskreter Abtastung? Vorschläge:

- $Q_A(f) = P_\delta(f) * Q(f)$ ,
- $Q_A(f) = [P_\delta(f) \cdot (G_R(f)/T_A)] * Q(f)$ ,
- $Q_A(f) = [P_\delta(f) * Q(f)] \cdot G_R(f)/T_A$ .

e) Eignet sich bei diskreter Abtastung der angegebene Tiefpass zur Interpolation?

- ja,
- nein.



## A4.4: Quantisierungsrauschen

Zur Berechnung der Quantisierungsrauschleistung  $P_Q$  gehen wir von einem periodischen sägezahnförmigen Quellensignal  $q(t)$  mit dem Wertebereich  $\pm q_{\max}$  und der Periodendauer  $T_0$  aus.

Im mittleren Zeitbereich  $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$  gilt:

$$q(t) = q_{\max} \cdot (2 \cdot t / T_0).$$

Dessen Leistung wird hier mit  $P_S$  bezeichnet.

Dieses Signal wird entsprechend der Grafik mit  $M = 6$

Stufen quantisiert. Der lineare Quantisierer ist für den Amplitudenbereich  $\pm Q_{\max}$  ausgelegt, so dass jedes Quantisierungsintervall die Breite  $\Delta = 2/M \cdot Q_{\max}$  aufweist. Die Grafik zeigt diesen Sachverhalt für  $Q_{\max} = q_{\max} = 6 \text{ V}$ . Von diesen Zahlenwerten soll bis einschließlich Teilaufgabe e) ausgegangen werden.

Die so genannte **Quantisierungsrauschleistung** ist als der quadratische Mittelwert des Differenzsignals  $\varepsilon(t) = q_Q(t) - q(t)$  definiert. Es gilt

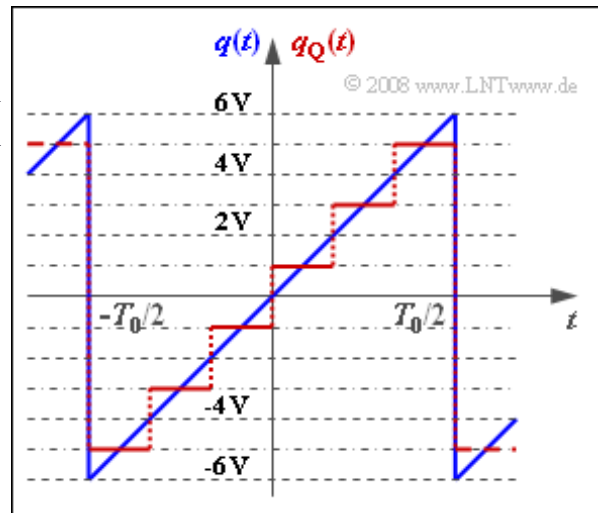
$$P_Q = \frac{1}{T_0'} \cdot \int_0^{T_0'} \varepsilon(t)^2 dt,$$

wobei die Zeit  $T_0'$  geeignet zu wählen ist. Als Quantisierungs-SNR bezeichnet man das Verhältnis

$$\rho_Q = \frac{P_S}{P_Q},$$

das meist in dB angegeben wird.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.1**.



### Fragebogen zu "A4.4: Quantisierungsrauschen"

a) Berechnen Sie die Signalleistung  $P_S$  (auf  $1 \Omega$  bezogen):

$$P_S = \quad \quad \quad V^2$$

b) Welche Aussagen treffen für das Fehlersignal  $\varepsilon(t)$  zu?

- $\varepsilon(t)$  hat einen sägezahnförmigen Verlauf.
- $\varepsilon(t)$  hat einen stufenförmigen Verlauf.
- $\varepsilon(t)$  ist auf den Bereich  $\pm\Delta/2 = \pm 1V$  beschränkt.
- $\varepsilon(t)$  besitzt die Periodendauer  $T_0' = T_0/M$ .

c) Wie groß ist die Quantisierungsrauschleistung?

$$M = 6: P_Q = \quad \quad \quad V^2$$

d) Berechnen Sie den Quantisierungsrauschabstand für  $M = 6$ .

$$M = 6: 10 \cdot \lg \rho_Q = \quad \quad \quad \text{dB}$$

e) Welche Werte ergeben sich bei Quantisierung mit  $N = 8$  bzw.  $N = 16$  Bit?

$$N = 8: 10 \cdot \lg \rho_Q = \quad \quad \quad \text{dB}$$

$$N = 16: 10 \cdot \lg \rho_Q = \quad \quad \quad \text{dB.}$$

f) Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die abgeleitete Gleichung für  $\rho_Q$  angewandt werden kann?

- Alle Amplitudenwerte sind gleichwahrscheinlich.
- Es liegt ein linearer Quantisierer vor.
- Der Quantisierer ist genau an das Signal angepasst ( $Q_{\max} = q_{\max}$ ).

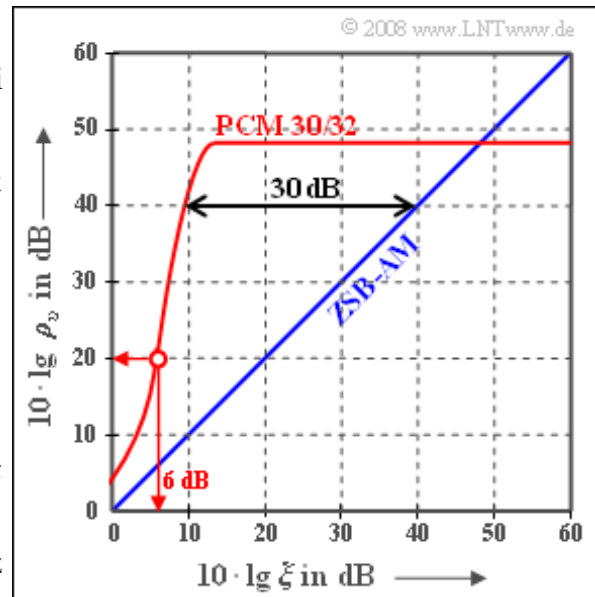
## Z4.4: Störabstand bei PCM

Die Grafik zeigt den Sinken–Störabstand  $10 \cdot \lg \rho_v$  bei Pulsmodulation (PCM) im Vergleich zur analogen Zweiseitenband–Amplitudenmodulation, abgekürzt mit ZSB–AM. Für letztere gilt  $\rho_v = \xi$ , wobei

$$\xi = \frac{\alpha^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_N}.$$

folgende Systemparameter zusammenfasst:

- den frequenzunabhängigen Dämpfungsfaktor  $\alpha$  des Übertragungskanals,
- die Leistung  $P_S$  des Sendesignals  $s(t)$ , auch kurz Sendeleistung genannt,
- die Nachrichtenfrequenz  $f_N$  (Bandbreite) des cosinusförmigen Quellensignals  $q(t)$ ,
- die Rauschleistungsdichte  $N_0$  des AWGN–Rauschens.



Für das PCM–System wurde auf der Seite **Einfluss von Übertragungsfehlern (4)** folgende Näherung für das Sinken–SNR angegeben, die auch Bitfehler aufgrund des AWGN–Rauschens berücksichtigt:

$$\rho_v = \frac{1}{2^{-2N} + 4 \cdot p_B}.$$

Hierbei bezeichnet  $N$  die Anzahl der Bit pro Abtastwert und  $p_B$  die Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Da  $\xi$  bei digitaler Modulation auch als die Signalenergie pro Bit bezogen auf die Rauschleistungsdichte ( $E_B/N_0$ ) interpretiert werden kann, gilt mit dem komplementären Gaußschen Fehlersignal  $Q(x)$  näherungsweise:

$$p_B = Q\left(\sqrt{2\xi}\right).$$

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.1** Bei der hier betrachteten PCM handelt es sich um die PCM 30/32, deren Systemparameter zum Beispiel in der **Aufgabe A4.1** angegeben sind.

### Fragebogen zu "Z4.4: Störabstand bei PCM"

a) Wieviele Bit pro Abtastwert verwendet das betrachtete PCM-System?

$$N_a =$$

b) Wieviele Bit pro Abtastwert müsste man verwenden, damit  $10 \cdot \lg \rho_v > 64$  dB (Musikqualität) erreicht wird?

$$N_b =$$

c) Welche (logarithmierte) Leistungskenngröße  $\xi_{40\text{dB}}$  ist erforderlich, damit bei 8-Bit-PCM der Sinkenstörabstand gleich 40 dB ist?

$$10 \cdot \lg \xi_{40\text{ dB}} = \quad \text{dB}$$

d) Um welchen Faktor könnte man bei PCM die Sendeleistung gegenüber der AM reduzieren, um trotzdem  $10 \cdot \lg \rho_v = 40$  dB zu erreichen?

$$K_{\text{AM} \rightarrow \text{PCM}} =$$

e) Welche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für  $10 \cdot \lg \xi = 6$  dB?

$$N = N_a: p_B =$$

f) Welches SNR würde sich bei gleichem  $\xi$  mit einer 3-Bit-PCM ergeben?

$$N = 3: 10 \cdot \lg \rho_v = \quad \text{dB}$$

## A4.5: Nichtlineare Quantisierung

Zur Untersuchung der nichtlinearen Quantisierung gehen wir vom skizzierten Systemmodell aus, wobei wir den Einfluss des Kanals und der PCM-Codierung bzw. -Decodierung außer Acht lassen. Somit gilt stets  $v_Q(v \cdot T_A) = q_Q(v \cdot T_A)$ , wobei im Weiteren auf die Zeitangabe  $v \cdot T_A$  verzichtet wird.

Durch den Vergleich von jeweils einer Ausgangsgröße mit einer Eingangsgröße kann man den Einfluss

- des Kompressors  $\Rightarrow q_K(q_A)$ ,
- des linearen Quantisierers  $\Rightarrow q_Q(q_K)$ ,
- des nichtlinearen Quantisierers  $\Rightarrow q_Q(q_A)$ ,
- des Expanders  $\Rightarrow v_E(v_Q)$  sowie
- des Gesamtsystems  $\Rightarrow v_E(q_A)$

analysieren. Dabei wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

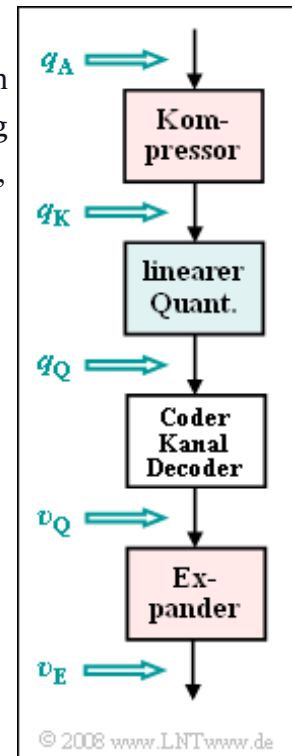
- Alle Abtastwerte  $q_A$  liegen im Wertebereich  $\pm 1$  vor.
- Der (lineare) Quantisierer arbeitet mit  $M = 256$  Quantisierungsstufen, die mit  $\mu = 0$  bis  $\mu = 255$  gekennzeichnet werden.
- Zur Kompression wird die sogenannte 13-Segment-Kennlinie verwendet.

Im Bereich  $|q_A| \leq 1/64$  gilt  $q_K = q_A$ . Für  $q_A > 1/64$  ergeben sich mit  $k = 1, \dots, 6$  folgende sechs weitere Bereiche der Kompressorkennlinie:

$$q_K(q_A) = 2^{4-k} \cdot q_A + \frac{k}{8} \quad \text{im Bereich} \quad 2^{k-7} < q_A \leq 2^{k-6}.$$

Weitere sechs Bereiche gibt es für die negativen  $q_A$ -Werte mit  $k = -1, \dots, -6$ , die punktsymmetrisch zum Ursprung liegen. Diese werden in dieser Aufgabe jedoch nicht weiter betrachtet.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.1**.



### Fragebogen zu "A4.5: Nichtlineare Quantisierung"

a) Es gelte  $q_A = 0.4$ . Welchen Ausgangswert  $q_K$  liefert der Kompressor?

$$q_A = 0.4: q_K =$$

b) Zu welchem Quantisierungsintervall  $\mu$  gehört  $q_A = 0.4$ ?

$$q_A = 0.4: \mu =$$

c) Welcher Quantisierungswert  $q_Q$  gehört zu  $q_A = 0.4$ ?

$$q_A = 0.4: q_Q =$$

d) Welcher Quantisierungswert  $q_Q$  gehört dagegen zu  $q_A = 0.04$ ?

$$q_A = 0.04: q_Q =$$

e) Beim Empfänger liegt der Eingangswert  $v_Q = 211/256 \approx 0.824$  an. Welchen Wert  $v_E$  liefert der Expander?

$$v_Q = 211/256: v_E =$$

f) Welche Eigenschaften weist die Kennlinie  $q_Q(q_A)$  auf?

- $q_Q(q_A)$  approximiert die Kompressorkennlinie in Stufen.
- $q_Q(q_A)$  approximiert die Winkelhalbierende in Stufen.
- Die Stufenbreite ist in allen Segmenten (außer  $k = 0$ ) gleich groß.
- Die Stufenhöhe ist in allen Segmenten (außer  $k = 0$ ) gleich groß.

g) Welche Eigenschaften weist die Kennlinie  $v_E(q_A)$  auf?

- $v_E(q_A)$  approximiert die Kompressorkennlinie in Stufen.
- $v_E(q_A)$  approximiert die Winkelhalbierende in Stufen.
- Die Stufenbreite ist in allen Segmenten (außer  $k = 0$ ) gleich groß.
- Die Stufenhöhe ist in allen Segmenten (außer  $k = 0$ ) gleich groß.

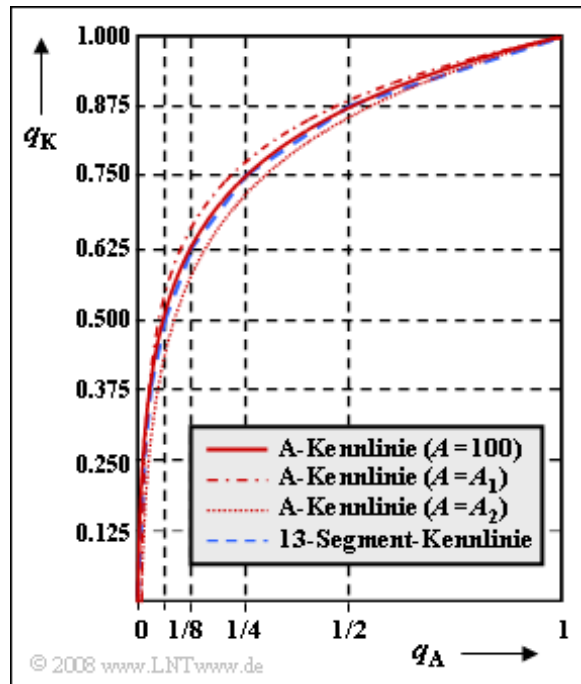
## Z4.5: Quantisierungskennlinien

Es wird die nichtlineare Quantisierung betrachtet und es gilt weiterhin das Systemmodell gemäß **Aufgabe A4.5**. Die Grafik zeigt zwei Kompressorkennlinien  $q_K(q_A)$ :

- Rot eingezeichnet ist die sogenannte A-Kennlinie, die vom CCITT für das Standardsystem PCM 30/32 empfohlen wurde. Für  $0 \leq q_A \leq 1$  gilt:

$$q_K(q_A) = \begin{cases} \frac{1 + \ln(A \cdot q_A)}{1 + \ln(A)} & \frac{1}{A} \leq q_A \leq 1, \\ \frac{A \cdot q_A}{1 + \ln(A)} & q_A < \frac{1}{A}. \end{cases}$$

- Der blau-gestrichelte Kurvenzug gilt für die sog. 13-Segment-Kennlinie. Diese ergibt sich aus der A-Kennlinie durch stückweise Linearisierung; sie wird in der Aufgabe A4.5 ausführlich behandelt.



Für die durchgehend rot gezeichnete A-Kennlinie ist der Quantisierungsparameter  $A = 100$  gewählt. Mit dem vom CCITT vorgeschlagenen Wert  $A = 87.56$  ergibt sich näherungsweise der gleiche Verlauf. Für die beiden weiteren Kurven gilt  $A = A_1$  (oberer Kurvenzug) bzw.  $A = A_2$  (punktierte Kurve), wobei für  $A_1$  bzw.  $A_2$  die beiden möglichen Zahlenwerte 50 und 200 vorgegeben sind. In der Teilaufgabe c) sollen Sie entscheiden, welche Kurve zu welchem Wert gehört.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf die **letzte Theorieweite** von Kapitel 4.1.

### Fragebogen zu "Z4.5: Quantisierungskennlinien"

a) Welche Argumente sprechen für die nichtlineare Quantisierung?

- Das größere SNR – auch bei gleichwahrscheinlichen Amplituden.
- Bei Audio sind kleine Amplituden wahrscheinlicher als große.
- Die Verfälschung kleiner Amplituden ist subjektiv störender.

b) Welche Unterschiede gibt es zwischen der A- und der 13-Segment-Kennlinie?

- Die A-Kennlinie beschreibt einen kontinuierlichen Verlauf.
- Die 13-Seg-Kurve nähert die A-Kennlinie stückweise linear an.
- Bei der Realisierung zeigt die A-Kennlinie wesentliche Vorteile.

c) Lässt sich allein aus  $q_A = 1 \Rightarrow q_K = 1$  der Parameter A ableiten?

- ja,
- nein.

d) Lässt sich A bestimmen, wenn man vorgibt, dass der Übergang zwischen den beiden Bereichen kontinuierlich sein soll?

- ja,
- nein.

e) Bestimmen Sie A aus der Bedingung  $q_K(q_A = 1/2) = 0.875$ .

$$q_K(q_A = 1/2) = 0.875: A =$$

f) Welche Parameterwerte werden für die weiteren Kurven verwendet?

- Es gilt  $A_1 = 50$  und  $A_2 = 200$ .
- Es gilt  $A_1 = 200$  und  $A_2 = 50$ .



## A4.6: Spektren von ASK und BPSK

Die Sendesignale von ASK (*Amplitude Shift Keying*) und BPSK (*Binary Phase Shift Keying*) können beide in der Form  $s(t) = q(t) \cdot z(t)$  dargestellt werden, wobei  $z(t)$  eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $f_T$  und der Amplitude 1 darstellt. Die Trägerphase  $\phi_T$  ist für die hier betrachteten Leistungsdichtespektren nicht von Bedeutung.

Bei ASK sind unipolare Amplitudenkoeffizienten – das heißt:  $a_\nu \in \{0, 1\}$  – des Quellsignals

$$q(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_q(t - \nu \cdot T)$$

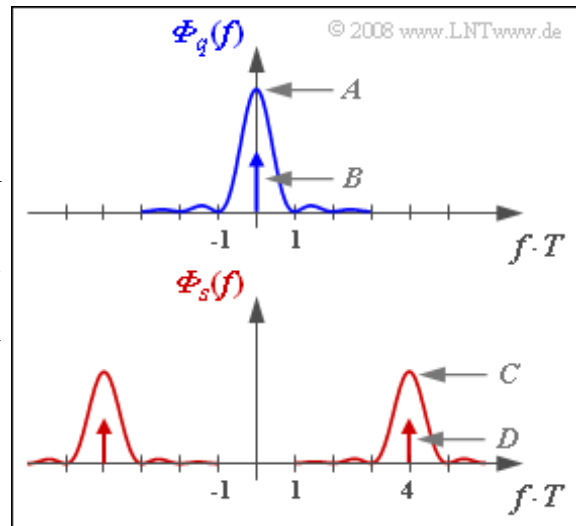
anzusetzen, während im Fall der BPSK  $a_\nu \in \{-1, +1\}$  zu berücksichtigen ist. Die Quelle ist jeweils redundanzfrei, was bedeutet, dass die beiden möglichen Symbole  $\pm 1$  gleichwahrscheinlich sind und die Symbole statistisch voneinander unabhängig.

In der Grafik sind die Leistungsdichtespektren  $\Phi_q(f)$  und  $\Phi_s(f)$  von Quellsignal und Sendesignal angegeben, die sich bei einem NRZ-Rechteckimpuls  $g_q(t)$  mit der Amplitude  $s_0 = 2 \text{ V}$  und der Dauer  $T = 1 \text{ }\mu\text{s}$  ergeben. Damit lautet die Spektralfunktion:

$$G_q(f) = s_0 \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T).$$

Zu bestimmen sind in dieser Aufgabe die Konstanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  für ASK und BPSK.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.2** dieses Buches sowie auf das **Kapitel 2.1** im Buch „Digitalsignalübertragung“.



### Fragebogen zu "A4.6: Spektren von ASK und BPSK"

a) Wie groß sind der Parameter  $A = \Phi_q(f=0)$  und das Diracgewicht  $B$  bei ASK?

$$\text{ASK: } A = \quad \quad \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

$$B = \quad \quad \quad \text{V}^2$$

b) Bestimmen Sie die Parameter  $C = \Phi_s(f=f_T)$  und  $D$  des ASK-Sendesignals.

$$\text{ASK: } C = \quad \quad \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

$$D = \quad \quad \quad \text{V}^2$$

c) Wie groß sind die Parameter  $A = \Phi_q(f=0)$  und  $B$  bei BPSK?

$$\text{BPSK: } A = \quad \quad \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

$$B = \quad \quad \quad \text{V}^2$$

d) Bestimmen Sie die Parameter  $C = \Phi_s(f=f_T)$  und  $D$  des BPSK-Sendesignals.

$$\text{BPSK: } C = \quad \quad \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

$$D = \quad \quad \quad \text{V}^2$$

e) Welche Aussagen treffen zu, auch wenn  $g_q(t)$  kein NRZ-Rechteckimpuls ist?

- Der kontinuierliche Anteil von  $\Phi_q(f)$  ist formgleich mit  $|G_q(f)|^2$ .
- $\Phi_q(f)$  beinhaltet bei ASK genau eine Diraclinie bei  $f=0$ .
- $\Phi_q(f)$  beinhaltet bei BPSK genau eine Diraclinie bei  $f=0$ .

## Z4.6: ASK, BPSK und DPSK

Die Abbildung zeigt jeweils ausgehend vom gleichen Quellensignal  $q(t)$  die Sendesignale bei

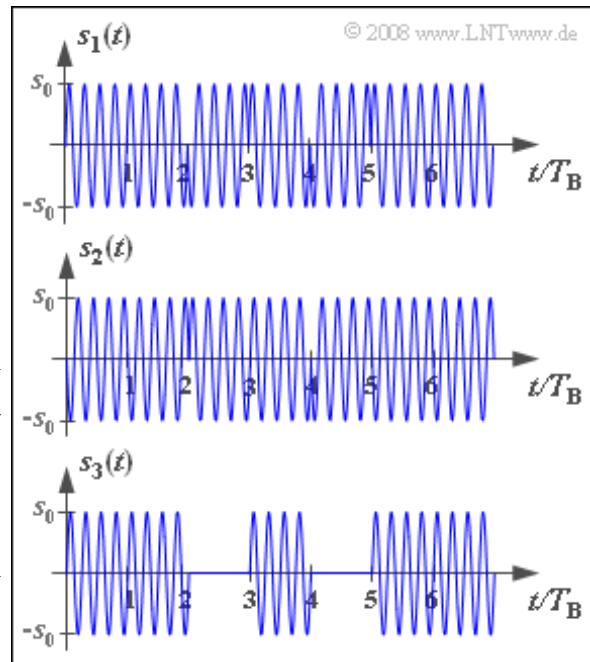
**Amplitude Shift Keying (ASK),**

**Binary Phase Shift Keying (BPSK),**

**Differential Phase Shift Keying (DPSK).**

Die Beschreibung dieser digitalen Modulationsverfahren finden Sie über die angegebenen Links im Theorieteil zu Kapitel 4.2.

Die Sendesignale sind hier allgemein mit  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  und  $s_3(t)$  bezeichnet. Die Zuordnung zu den vorgegebenen Modulationsverfahren soll in der Versuchsdurchführung von Ihnen vorgenommen werden.



Außerdem soll für alle Signale die jeweilige mittlere Energie pro Bit ( $E_B$ ) in Watt (W) angegeben werden, wobei folgende Annahmen getroffen werden können:

- Die (maximale) Hüllkurve aller trägerfrequenzmodulierten Signale ist  $s_0 = 2 \text{ V}$ .
- Die Bitrate des redundanzfreien Quellensignals beträgt  $R_B = 1 \text{ Mbit/s}$ .
- Die Modulatoren arbeiten mit einem Arbeitswiderstand von  $R = 50 \Omega$ .

Beispielsweise würde bei (bipolarer) **Basisbandübertragung** mit  $T_B = 1/R_B$  gelten:

$$E_B = \frac{s_0^2 \cdot T_B}{R} = \frac{(2 \text{ V})^2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{50 \text{ V/A}} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ Ws} = 0.08 \mu\text{Ws}.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.2**.

**Fragebogen zu "Z4.6: ASK, BPSK und DPSK"**

a) Welcher Signalverlauf beschreibt die ASK?

- $s_1(t)$ ,
- $s_2(t)$ ,
- $s_3(t)$ .

b) Welche mittlere Energie pro Bit ergibt sich bei der ASK?

**ASK:**  $E_B =$   $\mu\text{Ws}$

c) Welcher Signalverlauf beschreibt die BPSK?

- $s_1(t)$ ,
- $s_2(t)$ ,
- $s_3(t)$ .

d) Welche mittlere Energie pro Bit ergibt sich bei der BPSK?

**BPSK:**  $E_B =$   $\mu\text{Ws}$

e) Welcher Signalverlauf beschreibt die DPSK?

- $s_1(t)$ ,
- $s_2(t)$ ,
- $s_3(t)$ .

f) Welche mittlere Energie pro Bit ergibt sich bei DPSK?

**DPSK:**  $E_B =$   $\mu\text{Ws}$

## A4.7: Fehlerwahrscheinlichkeiten

Hier werden die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten  $p_B$  der digitalen Modulationsverfahren ASK und BPSK ohne weitere Herleitung angegeben. Beispielsweise erhält man mit der so genannten Q-Funktion

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

für den AWGN-Kanal – gekennzeichnet durch  $E_B/N_0$  – und weiteren optimalen Voraussetzungen (zum Beispiel kohärente Demodulation) für

- Amplitude Shift Keying (ASK):

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right),$$

- Binary Phase Shift Keying (BPSK):

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right).$$

Die entsprechende Gleichung für „Differential Phase Shift Keying“ (DPSK) mit differentiell-kohärenter Demodulation lautet:

$$p_B = 1/2 \cdot e^{-E_B/N_0}.$$

Aber auch die ASK könnte nichtkohärent demoduliert werden. In diesem Fall würde gelten:

$$p_B = 1/2 \cdot e^{-E_B/(2N_0)}.$$

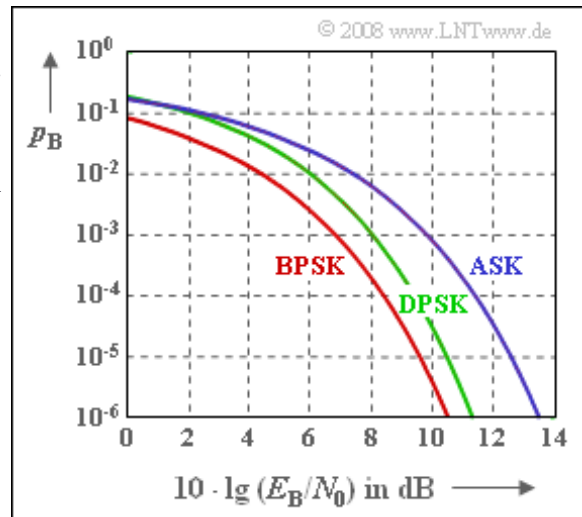
Die drei ersten Fehlerwahrscheinlichkeiten sind in der Grafik dargestellt. Für  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10$  dB erhält man beispielsweise entsprechend den exakten Funktionen:

$$p_B = 7.83 \cdot 10^{-4} \text{ (ASK)}, \quad p_B = 3.87 \cdot 10^{-6} \text{ (BPSK)},$$

Um bei BPSK  $p_B = 10^{-5}$  zu erreichen, muss  $10 \cdot \lg E_B/N_0 \geq 9.6$  dB sein.

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.2** des vorliegenden Buches. Die Herleitungen finden Sie im **Kapitel 1.5** von „Digitalsignalübertragung“. Für die numerischen Auswertungen können Sie die folgende obere Schranke verwenden:

$$Q_S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x} \cdot e^{-x^2/2} \geq Q(x).$$



**Fragebogen zu "A4.7: Fehlerwahrscheinlichkeiten"**

a) Berechnen Sie die ASK–Bitfehlerwahrscheinlichkeit für  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10$  dB unter Verwendung der oberen Schranke  $Q_S(x)$ .

**ASK,  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10$  dB:  $p_B =$**

b) Berechnen Sie die BPSK–Bitfehlerwahrscheinlichkeit für  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10$  dB unter Verwendung der oberen Schranke  $Q_S(x)$ .

**BPSK,  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10$  dB:  $p_B =$**

c) Geben Sie für die ASK den minimalen Wert für  $E_B/N_0$  (in dB) an, damit die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B = 10^{-5}$  erreicht wird.

**ASK:  $10 \cdot \lg E_B/N_0 =$  dB**

d) Berechnen Sie die DPSK–Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei gleichen Bedingungen:  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10$  dB.

**DPSK,  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10$  dB:  $p_B =$**

e) Geben Sie für DPSK den minimalen Wert von  $E_B/N_0$  (in dB) an, mit dem die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B = 10^{-5}$  erreicht wird.

**DPSK:  $10 \cdot \lg E_B/N_0 =$  dB**

f) Welches „ $E_B/N_0$ “ (in dB) benötigt man dagegen bei inkohärenter ASK, um wieder  $p_B = 10^{-5}$  zu erreichen?

**inkohärente ASK:  $10 \cdot \lg E_B/N_0 =$  dB**

## Z4.7: BPSK–Fehlerwahrscheinlichkeit

Wir gehen von dem optimalen Basisbandübertragungssystem für Binärsignale aus mit

- bipolaren Amplitudenkoeffizienten  $a_v \in \{-1, +1\}$ ,
- rechteckförmigem Sendesignal mit den Signalwerten  $\pm s_0$  und der Bitdauer  $T_B$ ,
- AWGN–Rauschen mit der Rauschleistungsdichte  $N_0$ ,
- Empfangsfilter gemäß dem Matched–Filter–Prinzip,
- Entscheider mit optimalem Schwellenwert  $E = 0$ .

Wenn nichts anderes angegeben ist, so sollten Sie von den folgenden Zahlenwerten ausgehen:

$$s_0 = 4 \text{ V}, \quad T_B = 1 \text{ ns}, \quad N_0 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}.$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit dieses Basisbandsystems ist

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) \quad \text{mit} \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{2 \cdot T_B}}.$$

$x$	$20 \cdot \lg x$	$Q(x)$
0	$-\infty$ dB	$0.500 \cdot 10^0$
1	0.000 dB	$0.159 \cdot 10^0$
2	6.021 dB	$0.227 \cdot 10^{-1}$
3	9.542 dB	$0.135 \cdot 10^{-2}$
4	12.041 dB	$0.317 \cdot 10^{-4}$
5	13.979 dB	$0.287 \cdot 10^{-6}$
6	15.563 dB	$0.987 \cdot 10^{-9}$
7	16.902 dB	$0.128 \cdot 10^{-11}$
8	18.062 dB	$0.622 \cdot 10^{-15}$
9	19.085 dB	$0.113 \cdot 10^{-18}$
10	20.000 dB	$0.762 \cdot 10^{-23}$

© 2008 www.LNTwww.de

Hierbei bezeichnet  $\sigma_d$  den Rauscheffektivwert am Entscheider und  $Q(x)$  die komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion, die hier tabellarisch gegeben ist. Diese Fehlerwahrscheinlichkeit kann auch in der Form

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right)$$

geschrieben werden, wobei  $E_B$  die „Signalenergie pro Bit“ angibt. Die Fehlerwahrscheinlichkeit eines vergleichbaren Übertragungssystems mit *Binary Phase Shift Keying* (BPSK) lautet:

$$p_{\text{BPSK}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) \quad \text{mit} \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{T_B}}.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.2**.

**Fragebogen zu "Z4.7: BPSK–Fehlerwahrscheinlichkeit"**

a) Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit des Basisbandsystems?

$$s_0 = 4V: p_{BB} =$$

b) Wie groß ist die Energie pro Bit beim Basisbandsystem?

$$s_0 = 4V: E_B = \quad V^2_s$$

c) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei halber Sendeamplitude?

$$s_0 = 2V: p_{BB} =$$

d) Geben Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit der BPSK abhängig vom Quotienten  $E_B/N_0$  an. Welches Ergebnis stimmt?

$p_{BPSK} = Q[(E_B/N_0)^{1/2}]$ ,

$p_{BPSK} = Q[(2E_B/N_0)^{1/2}]$ ,

$p_{BPSK} = Q[(4E_B/N_0)^{1/2}]$ .

e) Welche Fehlerwahrscheinlichkeiten ergeben sich bei der BPSK für  $E_B/N_0 = 8$  und  $E_B/N_0 = 2$ ?

$$E_B/N_0 = 8: p_{BPSK} =$$

$$E_B/N_0 = 2: p_{BPSK} =$$



## A4.8: Costas-Regelschleife

Eine wichtige Voraussetzung für kohärente Demodulation ist die phasenrichtige Trägerrückgewinnung. Eine Möglichkeit hierfür bietet die sog. Costas-Regelschleife, die vereinfacht durch das nebenstehende Blockschaltbild dargestellt ist.

Das Empfangssignal kann bei der binären Phasenmodulation (BPSK) als

$$r(t) = \pm s_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi)$$

geschrieben werden. Die Phasendrehung  $\phi$  auf dem Übertragungskanal muss dabei stets als unbekannt angenommen werden. „±“ beschreibt die Phasensprünge des BPSK-Signals.

Aufgabe der durch die Grafik angegebenen Schaltung ist es, ein Trägersignal

$$z(t) = \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \theta)$$

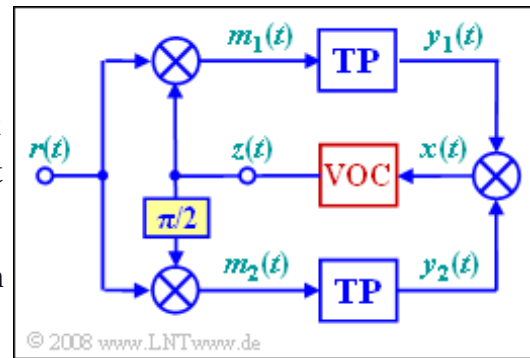
zu generieren, wobei der Phasenfehler  $\phi - \theta$  zwischen dem BPSK-Empfangssignal  $r(t)$  und der am Empfänger generierten Schwingung  $z(t)$  ausgeregelt werden muss. Hierzu wird mit einem regelbaren Oszillator (VCO, *Voltage Controlled Oscillator*) eine Schwingung der Frequenz  $f_T$  erzeugt, zunächst mit beliebiger Phase  $\theta$ . Durch die Costas-Regelschleife wird jedoch iterativ das Wunschergebnis  $\theta = \phi$  erreicht.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.2**. „TP“ bezeichnet als ideal angenommene Tiefpässe. Das mit  $\pi/2$  beschriftete Quadrat kennzeichnet eine Phasendrehung um  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ), so dass beispielsweise aus einem Cosinus-Signal ein Minus-Sinus-Signal wird:

$$\cos(\omega_0 \cdot t) \Rightarrow \cos(\omega_0 \cdot t + 90^\circ) = -\sin(\omega_0 \cdot t).$$

Weiter gelten folgende trigonometrischen Beziehungen:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$



### Fragebogen zu "A4.8: Costas-Regelschleife"

a) Berechnen Sie das Signal  $y_1(t)$  nach dem Tiefpass im oberen Zweig. Welche der nachfolgenden Aussagen ist richtig?

- $y_1(t) = \pm s_0/2 \cdot [\cos(\phi - \theta) + \cos(4\pi \cdot f_T \cdot t + \phi + \theta)],$
- $y_1(t) = \pm s_0/2 \cdot \cos(\phi - \theta),$
- $y_1(t) = \pm s_0/2 \cdot \sin(\phi - \theta).$

b) Berechnen Sie das Signal  $y_2(t)$  nach dem Tiefpass im unteren Zweig. Welche der nachfolgenden Aussagen ist richtig?

- $y_2(t) = \pm s_0/2 \cdot [\cos(\phi - \theta) + \cos(4\pi \cdot f_T \cdot t + \phi + \theta)],$
- $y_2(t) = \pm s_0/2 \cdot \cos(\phi - \theta),$
- $y_2(t) = \pm s_0/2 \cdot \sin(\phi - \theta).$

c) Berechnen Sie das Regelsignal  $x(t)$  und geben Sie eine Näherung für kleine Phasenabweichung  $\phi - \theta$  an. Welche Gleichungen sind richtig?

- $x(t) = s_0^2/8 \cdot \cos(\phi + \theta),$
- $x(t) = s_0^2/8 \cdot \sin(2\phi - 2\theta),$
- $x(t) \approx s_0^2/4 \cdot (\phi - \theta),$
- $x(t) \approx s_0^2/4 \cdot (\phi - \theta)^2.$

### A4.9: 16-QAM-Signal

Wir betrachten das 16-QAM-Verfahren gemäß dem **Blockschaltbild** im Theorieteil. In aller Kürze lässt sich dieses wie folgt beschreiben:

- Jeweils vier Bit des binären redundanzfreien Quellensignals  $q(t)$  am Eingang ergeben nach Seriell-Parallel-Wandlung und der folgenden Signalraumzuordnung einen komplexwertigen Amplitudenkoeffizienten  $a = a_I + j \cdot a_Q$ .
- Mit dem rechteckförmigen Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  im Bereich von 0 bis  $T$  und der Höhe  $g_0$  erhält man nach den Multiplikationen mit der Cosinus-Funktion bzw. Minus-Sinus-Funktion im betrachteten Zeitintervall:

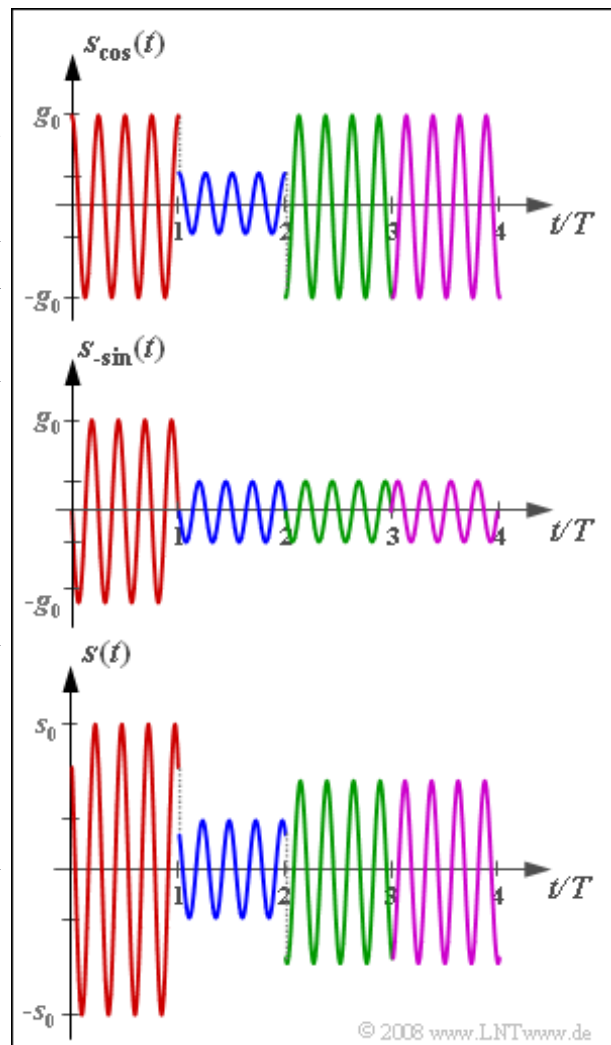
$$s_{\cos}(t) = a_I \cdot g_0 \cdot \cos(2\pi f_T t),$$
$$s_{-\sin}(t) = -a_Q \cdot g_0 \cdot \sin(2\pi f_T t).$$

- Das 16-QAM-Sendesignal ergibt sich dann als Summe dieser beiden Komponentensignale:

$$s(t) = s_{\cos}(t) + s_{-\sin}(t).$$

Die Grafik zeigt für vier ausgewählte Symbole die Signale  $s_{\cos}(t)$ ,  $s_{-\sin}(t)$  und  $s(t)$ . Daraus sollen die Amplitudenkoeffizienten ermittelt werden.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.3**. Die betrachtete Signalraumzuordnung ist im Angabenblatt zur **Aufgabe Z4.9** zu sehen. Auch die farblichen Hervorhebungen passen zusammen. Verwenden Sie ab der Teilaufgabe f) die Zahlenwerte  $g_0 = 1 \text{ V}$  und  $T = 1 \mu\text{s}$ .



### Fragebogen zu "A4.9: 16-QAM-Signal"

a) Wie lautet der Amplitudenkoeffizient im roten Zeitintervall ( $0 < t < T$ )?

$$0 < t < T: a_I =$$

$$a_Q =$$

b) Welches Verhältnis besteht zwischen  $s_0$  (maximale Hüllkurve des Sendesignals) und  $g_0$  (maximale Hüllkurven der Teilsignale) ?

$$s_0/g_0 =$$

c) Wie lautet der Amplitudenkoeffizient im blauen Zeitintervall ( $T < t < 2T$ )?

$$T < t < 2T: a_I =$$

$$a_Q =$$

d) Wie lautet der Amplitudenkoeffizient im grünen Zeitintervall ( $2T < t < 3T$ )? Ermitteln Sie auch dessen Betrag und die Phasenlage.

$$2T < t < 3T: a_I =$$

$$a_Q =$$

e) Wie lautet der Amplitudenkoeffizient im violetten Zeitintervall ( $3T < t < 4T$ )?

$$3T < t < 4T: a_I =$$

$$a_Q =$$

f) Welche maximale Energie  $E_{S, \max}$  wird pro Symbol aufgewendet? Unter welcher Voraussetzung ist die mittlere Energie pro Symbol gleich  $E_{S, \max}$ ?

$$E_{S, \max} = \quad V^2_s$$

g) Wie groß ist die maximale Energie pro Bit?

$$E_{B, \max} = \quad V^2_s$$

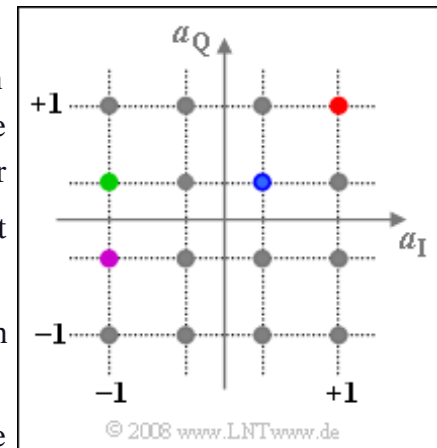
h) Wie groß ist die minimale Energie  $E_{B, \min}$  pro Bit?

$$E_{B, \min} = \quad V^2_s$$

### Z4.9: 16-QAM-Signalraumkonstellation

Wir betrachten weiter das 16-QAM-Verfahren entsprechend dem im Theorieteil angegebenen **Blockschaltbild**. Die Grafik zeigt die möglichen komplexen Amplitudenkoeffizienten  $a = a_I + j \cdot a_Q$ . Für diese Aufgabe soll ebenso wie für die **Aufgabe A4.9** vorausgesetzt werden:

- Die möglichen Amplitudenkoeffizienten  $a_I$  und  $a_Q$  der beiden Komponentensignale sind jeweils  $\pm 1$  und  $\pm 1/3$ .
- Der Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  ist rechteckförmig und weist die Amplitude  $g_0 = 1$  V und die Dauer  $T = 1 \mu\text{s}$  auf.
- Das Quellensignal  $q(t)$  vor dem Seriell-Parallel-Wandler ist binär und redundanzfrei.



**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.3**. Die zu den farbigen Punkten gehörigen Signale sind auf der Angabenseite zur **Aufgabe A4.9** in gleicher Farbe dargestellt.

**Fragebogen zu "Z4.9: 16-QAM-Signalraumkonstellation"**

a) Wie groß ist die Bitrate des binären Quellsymbols?

$$R_B = \text{Mbit/s}$$

b) Geben Sie den Betrag und die Phase (zwischen  $\pm 180^\circ$ ) für das rote Symbol an.

$$a = 1 + j: |a| =$$
$$\text{arc } a = \text{Grad}$$

c) Geben Sie den Betrag und die Phase für das blaue Symbol an.

$$a = 1/3 + j/3: |a| =$$
$$\text{arc } a = \text{Grad}$$

d) Geben Sie den Betrag und die Phase für das grüne Symbol an.

$$a = -1 + j/3: |a| =$$
$$\text{arc } a = \text{Grad}$$

e) Geben Sie den Betrag und die Phase für das violette Symbol an.

$$a = -1 - j/3: |a| =$$
$$\text{arc } a = \text{Grad}$$

f) Wieviele unterschiedliche Beträge ( $N_{|a|}$ ) = und Phasenlagen ( $N_{\text{arc}}$ ) sind möglich?

$$N_{|a|} =$$
$$N_{\text{arc}} =$$

### A4.10: 4-QAM im Frequenzbereich

Ausgehend von der binären Phasenmodulation (BPSK) mit rechteckförmigem Grundimpuls  $g_s(t)$  der Breite  $T_B = 1 \mu s$  und der Amplitude  $s_0 = 2 V$  soll nun in dieser Aufgabe das Leistungsdichtespektrum (LDS) der 4-QAM schrittweise ermittelt werden.

In Aufgabe A4.6 wurde das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_s(f)$  der BPSK für genau diese Parameterwerte ermittelt. Mit

$$A = s_0^2 \cdot T_B = 4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$$

erhält man für das tatsächliche LDS (im Bandpassbereich):

$$\Phi_s(f) = \frac{A}{4} \cdot [\text{si}^2(\pi \cdot T_B \cdot (f - f_T)) + \text{si}^2(\pi \cdot T_B \cdot (f + f_T))].$$

In der oberen Grafik ist allerdings das LDS des äquivalenten TP-Signals dargestellt. Dieses ergibt sich aus  $\Phi_s(f)$  durch Abschneiden aller Anteile bei negativen Frequenzen, Vervielfachen der Anteile bei positiven Frequenzen (beachten Sie: ein Spektrum muss verdoppelt werden, ein Leistungsdichtespektrum vervierfacht) und Verschieben um  $f_T$  nach links:

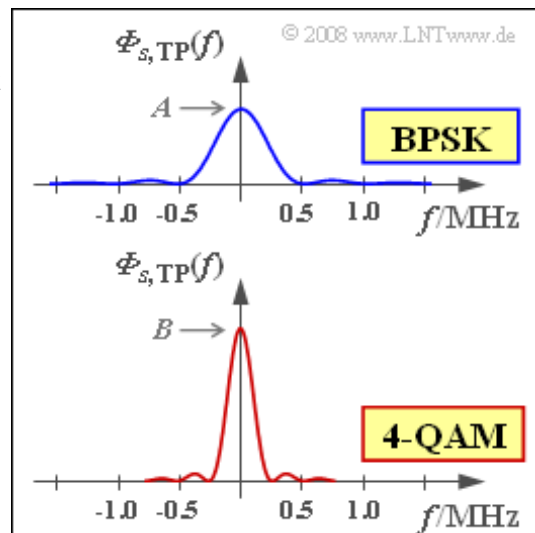
$$\Phi_{s,TP}(f) = A \cdot \text{si}^2(\pi f T_B).$$

Die 4-QAM unterscheidet sich von der BPSK in folgenden Details:

- Aufspaltung des binären Quellensignals in zwei Teilsignale mit jeweils halber Bitrate, das heißt mit der Symboldauer  $T = 2 \cdot T_B$ .
- Multiplikation der Teilsignale mit Cosinus und Minus-Sinus, deren Amplituden  $g_0$  jeweils um den Faktor „Wurzel aus 2“ kleiner sind als  $s_0$ . Die Signale werden mit  $s_{\cos}(t)$  und  $s_{-\sin}(t)$  bezeichnet.
- Summation der beiden Teilsignale:

$$s(t) = s_{\cos}(t) + s_{-\sin}(t).$$

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 4.2** (BPSK) und **Kapitel 4.3** (QAM) dieses Buches.



Fragebogen zu "A4.10: 4-QAM im Frequenzbereich"

a) Wie groß ist die Energie pro Bit bei der BPSK?

$$\text{BPSK: } E_B = \quad \quad \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

b) Wie lautet das Leistungsdichtespektrum des 4-QAM-Teilsignals  $s_{\cos}(t)$  in der äquivalenten Tiefpassdarstellung? Welcher Wert ergibt sich bei  $f = 0$ ?

$$\text{4-QAM: } A = \Phi_{s, \cos, \text{TP}}(f=0) = \quad \quad \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

c) Wie lautet das Leistungsdichtespektrum des gesamten 4-QAM-Signals  $s(t)$ ? Welcher Wert  $B$  ergibt sich hier bei der Frequenz  $f = 0$ ?

$$\text{4-QAM: } B = \Phi_{s, \text{TP}}(f=0) = \quad \quad \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$

d) Wie groß ist die Energie pro Bit bei der 4-QAM?

$$\text{4-QAM: } E_B = \quad \quad \quad \text{V}^2/\text{Hz}$$



## Z4.10: QAM-Fehlerwahrscheinlichkeit

Wir gehen von den folgenden Voraussetzungen aus:

- binäre bipolare Amplitudenkoeffizienten  $a_v \in \{\pm 1\}$ ,
- rechteckförmiger Sendegrundimpuls mit Amplitude  $s_0$  und Bitdauer  $T_B$ ,
- AWGN-Rauschen mit der Rauschleistungsdichte  $N_0$ ,
- Empfänger gemäß dem Matched-Filter-Prinzip,
- bestmögliche Demodulation und Detektion.

Wie mehrfach gezeigt, kann man die Fehlerwahrscheinlichkeit der binären Phasenmodulation bei diesen Randbedingungen mit den folgenden Gleichungen berechnen:

$$p_{B, \text{BPSK}} = Q(s_0/\sigma_d), \quad E_B = 1/2 \cdot s_0^2 \cdot T_B, \quad \sigma_d^2 = N_0/T_B$$

$$\Rightarrow p_{B, \text{BPSK}} = Q\left(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}\right) = 1/2 \cdot \text{erfc}\left(\sqrt{E_B/N_0}\right).$$

Die entsprechenden Gleichungen der 4-QAM lauten:

$$p_{B, \text{4-QAM}} = Q(g_0/\sigma_d), \quad g_0 = s_0/\sqrt{2}, \quad E_B = 1/2 \cdot s_0^2 \cdot T_B, \quad \sigma_d^2 = N_0/(2 \cdot T_B).$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass man – um die gleiche Sendeenergie pro Bit wie bei der BPSK zu erreichen – die Impulsamplitude  $g_0$  der Rechteckimpulse in den beiden Teilzweigen der 4-QAM um den Faktor „Wurzel aus 2“ herabsetzen muss. Die Hüllkurve ist dann bei beiden Systemen gleich  $s_0$ .

**Hinweis:** Die Aufgabe basiert auf der Seite 5 im Kapitel 4.3 dieses Buches. Gehen Sie stets von den folgenden Zahlenwerten aus:

$$s_0 = 2 \text{ V}, \quad N_0 = 0.25 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}.$$

Die Bitdauer beträgt  $T_B = 1 \mu\text{s}$  (Teilaufgabe a) bzw.  $T_B = 2 \mu\text{s}$  (ab Teilaufgabe b). In der Tabelle sind die beiden gebräuchlichen Gaußschen Fehlerfunktionen angegeben.

$x$	$Q(x)$	$0.5 \cdot \text{erfc}(x)$
0	$0.500 \cdot 10^0$	$0.500 \cdot 10^0$
1	$0.159 \cdot 10^0$	$0.786 \cdot 10^{-1}$
2	$0.227 \cdot 10^{-1}$	$0.234 \cdot 10^{-2}$
3	$0.135 \cdot 10^{-2}$	$0.110 \cdot 10^{-4}$
4	$0.317 \cdot 10^{-4}$	$0.771 \cdot 10^{-8}$
5	$0.287 \cdot 10^{-6}$	$0.769 \cdot 10^{-12}$
6	$0.987 \cdot 10^{-9}$	$0.108 \cdot 10^{-16}$

© 2008 www.LNTwww.de

### Fragebogen zu "Z4.10: QAM-Fehlerwahrscheinlichkeit"

a) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei BPSK mit  $T_B = 1 \mu\text{s}$ ?

$$\text{BPSK, } T_B = 1 \mu\text{s: } p_B =$$

b) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei BPSK mit  $T_B = 2 \mu\text{s}$ ?

$$\text{BPSK, } T_B = 2 \mu\text{s: } p_B =$$

c) Welches Ergebnis erhält man für die 4-QAM mit  $E_B = 4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s}$ ?

$$\text{4-QAM, } E_B = 4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s: } p_B =$$

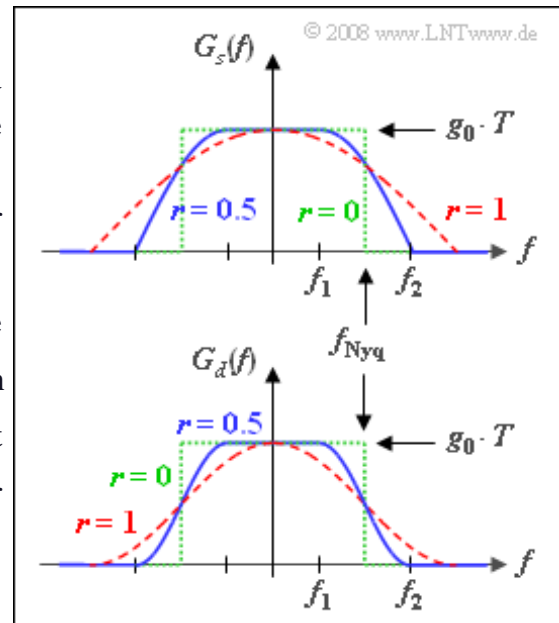
d) Was trifft zu, wenn man nur den I-Zweig der 4-QAM betrachtet?

- Es ergibt sich das gleiche Ergebnis wie für die gesamte 4-QAM.
- Der Abstand der Nutzabstastwerte ist wie bei der BPSK gleich  $s_0$ .
- Es ergibt sich die gleiche Rauschleistung wie bei der BPSK.

## A4.11: Wurzel-Nyquist-Systeme

Bei den Quadraturamplitudenmodulationssystemen wird häufig anstelle eines rechteckigen Sendegrundimpulses die Wurzel-Nyquist-Variante gewählt, wobei dieser Name aus dem Spektralbereich abgeleitet ist. Der Grund hierfür ist die signifikant kleinere Bandbreite.

In diesem Fall erfüllt der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$  die erste Nyquistbedingung, da  $G_d(f)$  punktsymmetrisch um die so genannte Nyquistfrequenz  $f_{Nyq} = 1/T$  ist.  $G_d(f)$  ist ein Cosinus-Rolloff-Spektrum, wobei der Rolloff-Faktor  $r$  Werte zwischen 0 und 1 (einschließlich dieser Grenzen) annehmen kann.



Weiterhin gilt für den Nyquist-Frequenzgang:

- Für  $|f| < f_1 = f_{Nyq} \cdot (1 - r)$  ist  $G_d(f)$  konstant gleich  $g_0 \cdot T$ .
- Bei Frequenzen größer als  $f_2 = f_{Nyq} \cdot (1 + r)$  hat  $G_d(f)$  keine Anteile.
- Dazwischen verläuft die Flanke cosinusförmig.

Die Optimierung digitaler Nachrichtenübertragungssysteme ergibt, dass der Empfängerfrequenzgang  $H_E(f)$  formgleich mit dem Sendespektrum  $G_s(f)$  sein sollte. Um dimensionsrichtige Spektralfunktionen zu erhalten, wird für diese Aufgabe und die Grafik vorausgesetzt:

$$G_s(f) = \sqrt{g_0 \cdot T \cdot G_d(f)}, \quad H_E(f) = \frac{1}{g_0 \cdot T} \cdot G_s(f).$$

Die obere Grafik zeigt das Sendespektrum  $G_s(f)$  für die Rolloff-Faktoren  $r = 0$ ,  $r = 0.5$  und  $r = 1$ . Unten ist das Spektrum  $G_d(f)$  vor dem Entscheider dargestellt. Der dazugehörige Impuls  $g_d(t)$  ist für alle gültigen Rolloff-Faktoren ( $0 \leq r \leq 1$ ) ein Nyquistimpuls im Gegensatz zum Sendegrundimpuls  $g_s(t)$ . Für diesen wird in der Literatur – zum Beispiel in [Kam04] – folgende Gleichung angegeben:

$$g_s(t) = g_0 \cdot \frac{4rt/T \cdot \cos[\pi \cdot (1 + r) \cdot t/T] + \sin[\pi \cdot (1 - r) \cdot t/T]}{[1 - (4rt/T)^2] \cdot \pi \cdot t/T}.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf die vorletzte Seite von **Kapitel 4.3** dieses Buches. Alle Details über Nyquistsysteme erfahren Sie im **Kapitel 1.3** des Buches „Digitalsignalübertragung“.

### Fragebogen zu "A4.11: Wurzel-Nyquist-Systeme"

a) Wie lautet der Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  für den Rolloff-Faktor  $r = 0$ ? Welcher Signalwert ergibt sich zum Zeitpunkt  $t = 0$ ?

$$r = 0: g_s(t = 0) = \quad \cdot g_0$$

b) Wie lautet der Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  für den Rolloff-Faktor  $r = 1$ ? Welcher Signalwert ergibt sich zum Zeitpunkt  $t = 0$ ?

$$r = 1: g_s(t = 0) = \quad \cdot g_0$$

c) Es gelte weiter  $r = 1$ . Zu welchen Zeiten hat  $g_s(t)$  Nulldurchgänge?

- Bei allen Vielfachen der Symboldauer  $T$ ,
- Bei  $t = \pm 0.25 T, \pm 0.75 T, \pm 1.25 T, \pm 1.75 T, \dots$
- Bei  $t = \pm 0.75 T, \pm 1.25 T, \pm 1.75 T, \dots$

d) Welche Impulsamplitude  $g_s(t = 0)$  ergibt sich für  $r = 0.5$ ? Welcher Signalwert ergibt sich zum Zeitpunkt  $t = 0$ ?

$$r = 0.5: g_s(t = 0) = \quad \cdot g_0$$

e) Welche Aussagen sind für die Signalamplitude unabhängig von  $r$  gültig? Lösen Sie diese Aufgabe im Frequenzbereich.

- Es gilt  $0 \leq g_s(t = 0) \leq g_0$ ,
- Es gilt  $g_0 \leq g_s(t = 0) \leq 2 g_0$ ,
- Es gilt  $g_0 \leq g_s(t = 0) \leq 4 g_0/\pi$ .

f) Wie groß ist die Energie des Sendegrundimpulses  $g_s(t)$  für  $r = 0$  und  $r = 1$ ?

$$r = 0: E_{gs} = \quad \cdot g_0^2 T$$

$$r = 1: E_{gs} = \quad \cdot g_0^2 T$$

## Z4.11: Nochmals 4-QAM-Systeme

Die Grafik (A) zeigt das Phasendiagramm der 4-QAM nach dem Matched-Filter, wobei eine bei AWGN-Rauschen optimale Realisierungsform gewählt wurde:

- rechteckförmiger Sendegrundimpuls der Symboldauer  $T$ ,
- rechteckförmige MF-Impulsantwort gleicher Breite  $T$ .

Dieses Phasendiagramm (A) bezieht sich ebenso wie die beiden anderen (B), (C) ausschließlich auf die Detektionszeitpunkte. Die Übergänge zwischen den einzelnen zeitdiskreten Punkten sind in diesem Phasendiagrammen dagegen nicht eingezeichnet.

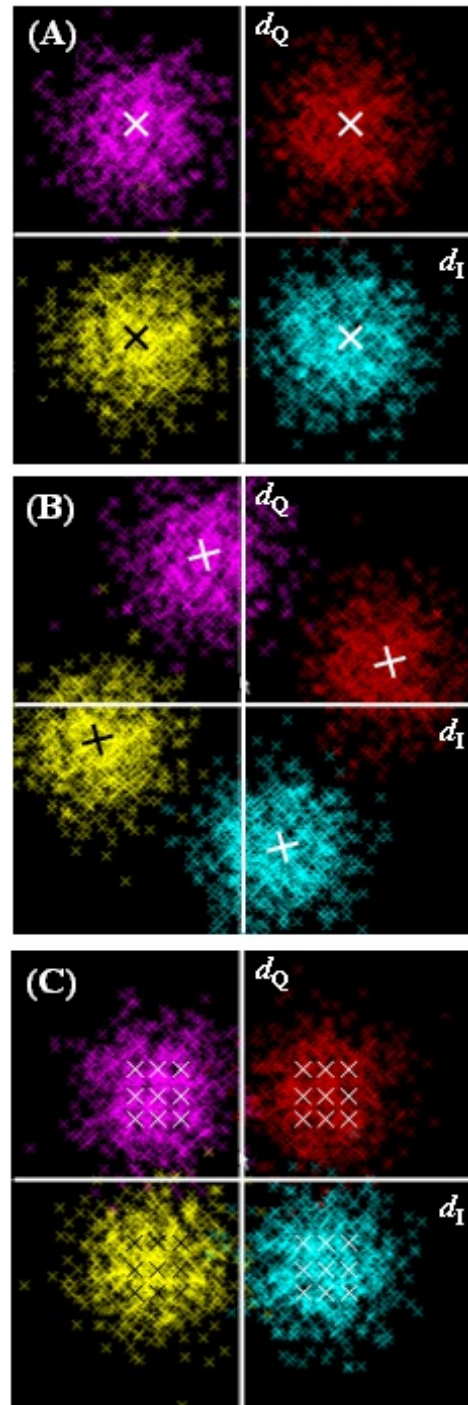
Es liegt hier ein AWGN-Kanal mit  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9$  dB vor. Entsprechend gilt für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des zunächst betrachteten Systems (A):

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{E_B/N_0} \right).$$

Die Phasendiagramme (B) und (C) gehören zu zwei Systemen, bei denen die 4-QAM nicht optimal realisiert wurde. Auch hier ist AWGN-Rauschen mit  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9$  dB vorausgesetzt.

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf das Themengebiet von Kapitel 4.3. Die Kreuze in den Grafiken markieren mögliche Punkte in den Phasendiagrammen, wenn kein AWGN-Rauschen vorhanden wäre. Als eine hinreichend gute Näherung für das komplementäre Gaußsche Fehlerintegral können Sie verwenden:

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot x} \cdot e^{-x^2}.$$



© 2008 www.LNTwww.de

### Fragebogen zu "Z4.11: Nochmals 4-QAM-Systeme"

a) Berechnen Sie mit der angegebenen Näherung die Fehlerwahrscheinlichkeit von System (A).

System (A):  $p_B =$

b) Welche Eigenschaften weist das System (B) auf?

- Es besteht ein Phasenversatz zwischen Sender und Empfänger.
- Das Empfangsfilter führt zu Impulsinterferenzen.
- Es ergibt sich keine Degradation gegenüber System (A).

c) Welche Eigenschaften weist das System (C) auf?

- Es besteht ein Phasenversatz zwischen Sender und Empfänger.
- Das Empfangsfilter führt zu Impulsinterferenzen.
- Es ergibt sich keine Degradation gegenüber System (A).

d) Welche Aussagen sind bezüglich den Fehlerwahrscheinlichkeiten richtig?

- (A), (B) und (C) haben gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit.
- Die Fehlerwahrscheinlichkeit von System (A) ist am kleinsten.
- (B) besitzt eine größere Fehlerwahrscheinlichkeit als System (C).

## A4.12: FSK–Demodulation

Im Theorieteil wurde bereits das **Blockschaltbild** des kohärenten FSK–Demodulators angegeben, wobei wir in dieser Aufgabe von der unteren Systemvariante ausgehen. Rauschanteile werden hier nicht betrachtet.

Die Grafik zeigt die Signalverläufe an verschiedenen Stellen des Blockschaltbildes, wobei jeweils drei Symbole gezeichnet sind, im Bild getrennt durch gestrichelte Linien.

- Oben ist das Empfangssignal  $r(t)$  dargestellt, das identisch mit dem FSK–Sendesignal ist. Die höhere Frequenz  $f_{+1}$  gehört zum Amplitudenkoeffizienten  $a_v = +1$ , während  $a_v = -1$  mit der Frequenz  $f_{-1}$  dargestellt ist. Bezogen auf die Symbolmitten  $T, 2T, 3T, \dots$  liegt jeweils ein sinusförmiger Verlauf vor. Der konstante Betrag der Hüllkurve ist  $s_0$ .

- Das mittlere Diagramm zeigt die Signale nach der Multiplikation mit den jeweiligen Sinussignalen:

$$b_{+1}(t) = r(t) \cdot 2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_{+1} \cdot t),$$

$$b_{-1}(t) = r(t) \cdot 2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_{-1} \cdot t).$$

Das Signal  $b_{+1}(t)$  im oberen Demodulatorzweig ist gelb und das Signal  $b_{-1}(t)$  im unteren Zweig blau dargestellt. Der grüne Verlauf gilt entsprechend der Farbenlehre für beide Kurven. Die Signale sind gegenüber  $r(t)$  niedriger als dargestellt.

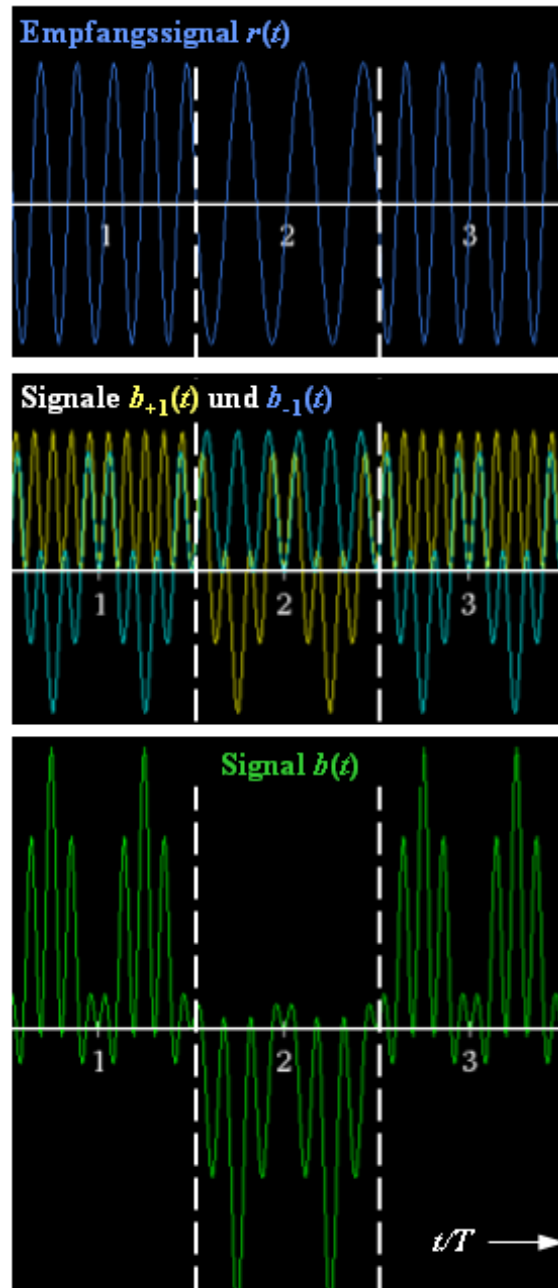
- Der untere Signalverlauf zeigt das Differenzsignal  $b(t) = b_{+1}(t) - b_{-1}(t)$ . Das folgende Matched–

Filter kann auch als Integrator realisiert werden. Damit ist der (normierte) Entscheidungswert für das  $v$ -te Symbol wie folgt gegeben:

$$E_v = \frac{1}{s_0} \cdot d(\nu \cdot T + T/2) = \frac{1}{s_0 \cdot T} \cdot \int_{(\nu-1/2)T}^{(\nu+1/2)T} b(t) dt.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.4**. Gegeben ist die trigonometrische Beziehung

$$2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$



© 2008 www.LNTwww.de

**Fragebogen zu "A4.12: FSK–Demodulation"**

a) Wie lauten die Amplitudenkoeffizienten:

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

b) Geben Sie die beiden Frequenzen  $f_{+1}$  und  $f_{-1}$  an.

$$f_{+1} = \quad \cdot 1/T$$

$$f_{-1} = \quad \cdot 1/T$$

c) Welche Aussagen treffen für das Signal  $b_{+1}(t)$  im ersten Zeitintervall zu?

- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $2/T$ .
- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $4/T$ .
- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $6/T$ .
- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $8/T$ .
- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $10/T$ .
- Das Signal beinhaltet einen Gleichanteil.

d) Welche Aussagen treffen für das Signal  $b_{-1}(t)$  im ersten Zeitintervall zu?

- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $2/T$ .
- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $4/T$ .
- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $6/T$ .
- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $8/T$ .
- Das Signal beinhaltet die Frequenz  $10/T$ .
- Das Signal beinhaltet einen Gleichanteil.

e) Welche normierten Entscheidungswerte ergeben sich für die einzelnen Symbole?

$$E_1 =$$

$$E_2 =$$

$$E_3 =$$



### A4.13: Phasenverlauf der MSK

Eine Realisierungsmöglichkeit für die MSK bietet die Offset-QPSK, wie aus dem **Blockschaltbild** im Theorieteil hervorgeht. Hierzu ist zunächst eine Umcodierung der Quellsymbole  $q_k \in \{+1, -1\}$  in die ebenfalls binären Amplitudenkoeffizienten  $a_k \in \{+1, -1\}$  vorzunehmen. Diese Umcodierung wird in der **Aufgabe Z4.13** eingehend behandelt.

Die Grafik zeigt unten die beiden äquivalenten Tiefpass-Signale  $s_I(t)$  und  $s_Q(t)$  in den beiden Zweigen, die sich nach dieser Umcodierung

$$a_k = (-1)^{k+1} \cdot a_{k-1} \cdot q_k$$

aus dem oben skizzierten Quellsignal  $q(t)$  für den Inphase- und den Quadraturzweig ergeben.

Berücksichtigt ist hierbei der MSK-Grundimpuls

$$g_{\text{MSK}}(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) & \text{für } -T \leq t \leq +T, \\ 0 & \text{für sonst.} \end{cases}$$

Dieser ist ebenso wie die Signale  $s_I(t)$  und  $s_Q(t)$  auf 1 normiert. Für das äquivalente Tiefpass-Signal gilt entsprechend dem **Kapitel 4.3** im Buch „Signaldarstellung“:

$$s_{\text{TP}}(t) = s_I(t) + j \cdot s_Q(t) = |s_{\text{TP}}(t)| \cdot e^{j \cdot \phi(t)}$$

mit dem Betrag

$$|s_{\text{TP}}(t)| = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)}$$

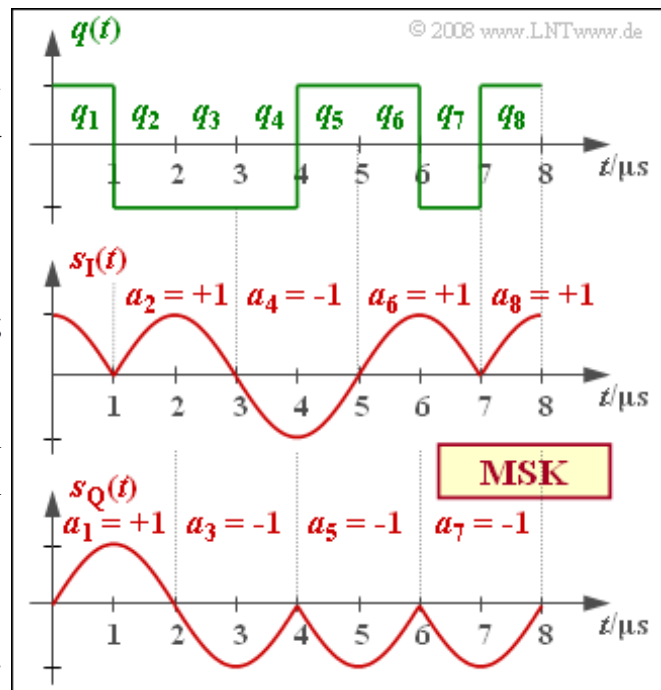
und der Phase

$$\phi(t) = \arcsin \frac{s_Q(t)}{|s_{\text{TP}}(t)|} = \arctan \frac{s_Q(t)}{s_I(t)}.$$

Das physikalische MSK-Sendesignal ergibt sich dann zu

$$s(t) = |s_{\text{TP}}(t)| \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi(t)).$$

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.4**. Gehen Sie davon aus, dass  $\phi(t=0) = \phi_0 = 0$  ist.



### Fragebogen zu "A4.13: Phasenverlauf der MSK"

a) Welche Aussagen gelten für die Hüllkurve  $|s_{TP}(t)|$ ?

- Die Hüllkurve schwankt cosinusförmig.
- Die Hüllkurve ist konstant.
- Die Hüllkurve ist unabhängig von der gesendeten Folge.

b) Es gelte  $T = 1 \mu\text{s}$ . Berechnen Sie den Phasenverlauf im Intervall  $0 \leq t \leq T$ . Welche Phasenwerte ergeben sich bei  $t = T/2$  und  $t = T$ ?

$$\phi(t = T/2) = \text{Grad}$$

$$\phi(t = T) = \text{Grad}$$

c) Bestimmen Sie die Phasenwerte bei  $t = 2T$ ,  $t = 3T$  und  $t = 4T$ .

$$\phi(t = 2T) = \text{Grad}$$

$$\phi(t = 3T) = \text{Grad}$$

$$\phi(t = 4T) = \text{Grad}$$

d) Skizzieren und interpretieren Sie den Phasenverlauf  $\phi(t)$  im Bereich von 0 bis  $8T$ . Welche Phasenwerte ergeben sich zu den folgenden Zeiten?

$$\phi(5T) = \text{Grad}$$

$$\phi(6T) = \text{Grad}$$

$$\phi(7T) = \text{Grad}$$

$$\phi(8T) = \text{Grad}$$

### Z4.13: Offset-QPSK vs. MSK

Eine Realisierungsmöglichkeit für die MSK bietet die Offset-QPSK (kurz: O-QPSK), wie aus den **Blockschaltbildern** im Theorieteil hervorgeht.

Beim normalen O-QPSK-Betrieb werden jeweils zwei Bit der Quellensymbolfolge  $\langle q_k \rangle$  einem Bit  $a_{Iv}$  im Inphasezweig und sowie einem Bit  $a_{Qv}$  im Quadraturzweig zugeordnet.

Die Grafik zeigt diese Seriell-Parallel-Wandlung in den drei oberen Diagrammen für die ersten vier Bit des grün gezeichneten Quellensignals. Dabei ist zu beachten:

- Die Darstellung der O-QPSK gilt für einen rechteckigen Grundimpuls. Mögliche Werte der Koeffizienten  $a_{Iv}$  und  $a_{Qv}$  sind  $\pm 1$ .
- Durchläuft der Index  $k$  der Quellensymbole die Werte 1 bis 8, so nimmt die Variable  $v$  nur die Werte 1 ... 4 an.
- Die Skizze berücksichtigt den Zeitversatz (Offset) für den Quadraturzweig.

Bei der MSK-Realisierung mittels O-QPSK ist eine Umcodierung erforderlich. Hierbei gilt mit  $q_k \in \{+1, -1\}$  und  $a_k \in \{+1, -1\}$ :

$$a_k = (-1)^{k+1} \cdot a_{k-1} \cdot q_k.$$

Beispielsweise erhält man unter der Annahme  $a_0 = +1$ :

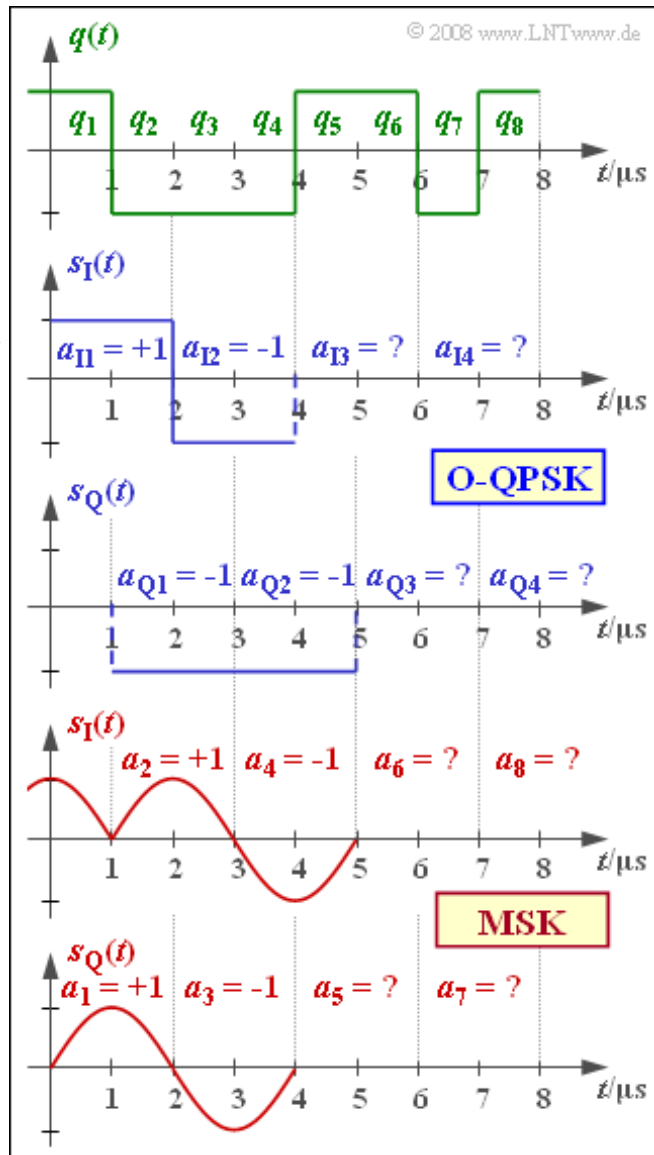
$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \cdot q_1 = +1, & a_2 &= -a_1 \cdot q_2 = +1, \\ a_3 &= a_2 \cdot q_3 = -1, & a_4 &= -a_3 \cdot q_4 = -1. \end{aligned}$$

Weiter ist zu berücksichtigen:

- Die Koeffizienten  $a_0 = +1, a_2 = +1, a_4 = -1$  sowie die noch zu berechnenden Koeffizienten  $a_6$  und  $a_8$  werden dem Signal  $s_I(t)$  zugeordnet.
- Dagegen werden die Koeffizienten  $a_1 = +1$  und  $a_3 = -1$  sowie alle weiteren Koeffizienten mit ungeradem Index dem Signal  $s_Q(t)$  beaufschlagt.

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 4.4**. In **Aufgabe A4.13** wird die zugehörige Phasenfunktion  $\phi(t)$  ermittelt, wobei wiederum der (auf 1 normierte) MSK-Grundimpuls zugrunde gelegt wird:

$$g_{\text{MSK}}(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) & \text{für } -T \leq t \leq +T, \\ 0 & \text{für sonst.} \end{cases}$$



**Fragebogen zu "Z4.13: Offset-QPSK vs. MSK"**

a) Wie groß ist die Bitdauer des Quellensignals?

$$T_B = \quad \mu\text{s}$$

b) Wie groß ist die Symboldauer der Offset-QPSK?

$$\text{O-QPSK: } T = \quad \mu\text{s}$$

c) Geben Sie nachfolgende Amplitudenkoeffizienten der Offset-QPSK an.

$$\text{O-QPSK: } a_{I3} =$$

$$a_{Q3} =$$

$$a_{I4} =$$

$$a_{Q4} =$$

d) Wie groß ist die Symboldauer der MSK?

$$\text{MSK: } T = \quad \mu\text{s}$$

e) Geben Sie die nachfolgenden Amplitudenkoeffizienten der MSK an.

$$\text{MSK: } a_5 =$$

$$a_6 =$$

$$a_7 =$$

$$a_8 =$$

### A4.14: BPSK – QPSK – MSK

Verglichen werden hier die Leistungsdichtespektren (im äquivalenten Tiefpassbereich) von

- Binary Phase Shift Keying (BPSK),
- Quaternary Phase Shift Keying (QPSK),
- Minimum Shift Keying (MSK).

Diese sind in der Grafik logarithmisch dargestellt, wobei die Frequenz auf den Kehrwert der Bitdauer  $T_B$  normiert ist. Für die BPSK und die QPSK ist jeweils ein rechteckförmiger Grundimpuls der Höhe  $s_0$  und der Symboldauer  $T$  vorausgesetzt.

Damit gilt für die BPSK und die QPSK (bzw. die 4-QAM und die Offset-QPSK) gleichermaßen:

$$\Phi_s(f) = \frac{s_0^2 \cdot T}{4} \cdot [\text{si}^2(\pi T \cdot (f - f_T)) + \text{si}^2(\pi T \cdot (f + f_T))] ,$$

und in den äquivalenten Tiefpassbereich transformiert:

$$\Phi_{s,TP}(f) = \frac{s_0^2 \cdot T}{2} \cdot \text{si}^2(\pi f T) .$$

Bei der BPSK (graue Kurve) ist die Symboldauer  $T$  gleich der Bitdauer  $T_B$  und es gilt mit der Energie pro Bit ( $E_B = s_0^2 \cdot T_B/2$ ):

$$\Phi_{s,TP}(f) = E_B \cdot \text{si}^2(\pi f T_B) .$$

Dagegen ist bei der QPSK (blaue Kurve) bei gleichem  $E_B$  die Symboldauer  $T$  doppelt so groß:

$$\Phi_{s,TP}(f) = 2 \cdot E_B \cdot \text{si}^2(2\pi f T_B) .$$

Bei der Berechnung des MSK-Spektrums (rote Kurve) kann berücksichtigt werden, dass die MSK als Offset-QPSK entsprechend dem **Blockschaltbild** im Theorieteil realisiert werden kann, wenn der folgende Grundimpuls verwendet wird:

$$g(t) = \begin{cases} g_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) & \text{für } -T \leq t \leq +T , \\ 0 & \text{für } \text{sonst} . \end{cases}$$

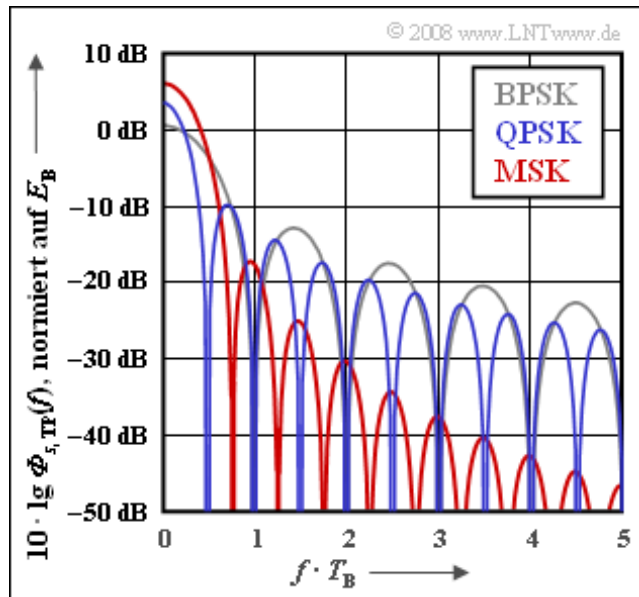
In der **Aufgabe Z4.14** wird die zugehörige Spektralfunktion berechnet:

$$G(f) = \frac{4}{\pi} \cdot g_0 \cdot T \cdot \frac{\cos(2\pi f T)}{1 - (4f T)^2} .$$

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 4.4**. Zur Berechnung des Leistungsdichtespektrums im äquivalenten Tiefpassbereich eines Zweiges – zum Beispiel der Inphasekomponente – gilt:

$$\Phi_{s,I,TP}(f) = \frac{1}{2T} \cdot E [a_\nu^2] \cdot |G(f)|^2 .$$

Berücksichtigen Sie weiterhin:



- Die beiden Signale  $s_I(t)$  und  $s_Q(t)$  sind trotz der Vorcodierung unkorreliert.
- Bei MSK ist entgegen der QPSK wie bei der BPSK  $T = T_B$  zu setzen.
- Auch bei MSK ist die Energie pro Bit  $E_B = s_0^2 \cdot T/2$ .
- Der Betrag des Tiefpass-Signals  $|s_{TP}(t)| = s_0$  ist gleich dem Maximalwert  $g_0$  des Grundimpulses.

### Fragebogen zu "A4.14: BPSK – QPSK – MSK"

a) Bei welcher Frequenz  $f_1$  hat das BPSK–Leistungsdichtespektrum seine erste Nullstelle? Der Bezugswert ist die Bitrate  $1/T_B$ .

$$\text{BPSK: } f_1 = \quad \cdot 1/T_B$$

b) Bei welcher Frequenz  $f_1$  hat das QPSK–LDS seine erste Nullstelle?

$$\text{QPSK: } f_1 = \quad \cdot 1/T_B$$

c) Wie lautet das MSK–Leistungsdichtespektrum im äquivalenten TP–Bereich? Welcher LDS–Wert (normiert auf  $E_B$ ) tritt bei  $f = 0$  auf?

$$\text{MSK: } \Phi_{s, \text{TP}}(f=0) = \quad \cdot E_B$$

d) Welche Aussagen treffen hinsichtlich des asymptotischen Spektralverhaltens zu?

- Die erste LDS–Nullstelle kommt bei MSK früher als bei QPSK.
- Das MSK–Leistungsdichtespektrum klingt schneller ab.
- Das Integral über  $\Phi_{s, \text{TP}}(f)$  (nicht logarithmiert) ist bei MSK größer.

## Z4.14: MSK–Grundimpuls/Spektrum

Der zur Realisierung der MSK mittels Offset–QPSK stets erforderliche Grundimpuls hat die Form:

$$g_{\text{MSK}}(t) = \begin{cases} g_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi-t}{2T}\right) & |t| \leq T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

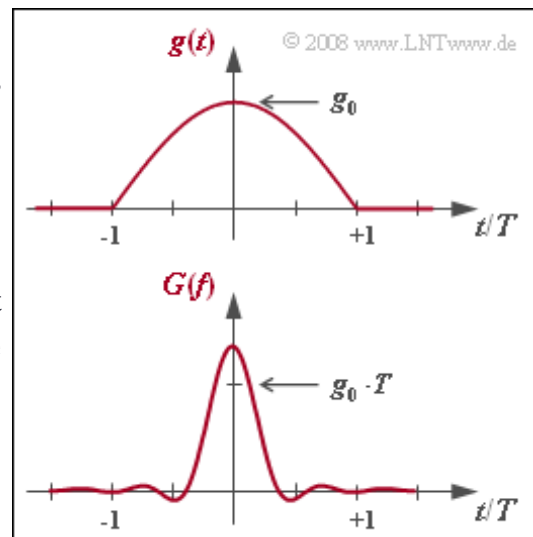
Dieser ist in der Grafik oben dargestellt. Darunter gezeichnet ist die Spektralfunktion  $G(f)$ , also die Fouriertransformierte von  $g(t)$ . Die dazugehörige Gleichung soll in dieser Aufgabe ermittelt werden, wobei zu berücksichtigen ist:

$$g(t) = c(t) \cdot r(t).$$

Hierbei bezeichnet

- $c(t)$  eine Cosinusschwingung mit Amplitude 1 und (noch zu bestimmender) Frequenz  $f_0$ ,
- $r(t)$  eine Rechteckfunktion mit der Amplitude  $g_0$  und der Dauer  $2T$ .

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.4**. Das hier gewonnene Ergebnis wird auch in der **Aufgabe A4.14** verwendet.





### Fragebogen zu "Z4.14: MSK–Grundimpuls/Spektrum"

a) Wie ist die Frequenz  $f_0$  von  $c(t)$  zu wählen, damit  $g(t) = c(t) \cdot r(t)$  gilt?

$$f_0 = \quad \cdot 1/T$$

b) Wie lautet das Spektrum  $R(f)$  von  $r(t)$ ? Welcher Spektralwert tritt bei  $f = 0$  auf?

$$R(f=0) = \quad \cdot g_0 T$$

c) Berechnen Sie das Spektrum  $G(f)$ , insbesondere den Spektralwert bei  $f = 0$ .

$$G(f=0) = \quad \cdot g_0 T$$

d) Fassen Sie das Ergebnis aus c) in einem Term zusammen. Bei welcher Frequenz  $f_1$  besitzt  $G(f)$  seine erste Nullstelle?

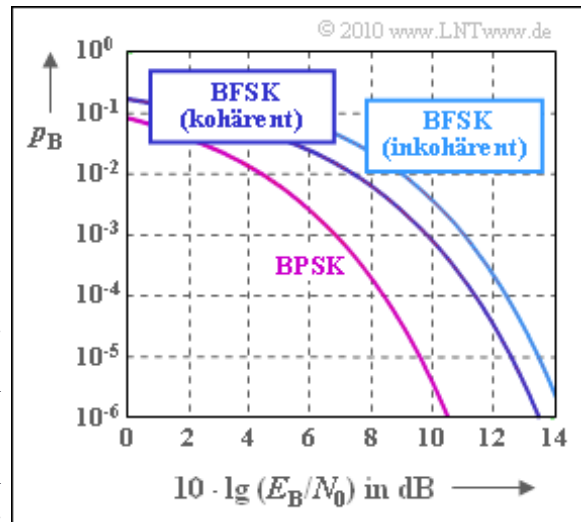
$$f_1 = \quad \cdot 1/T$$

## A4.15: Vergleich BPSK – BFSK

Die Grafik zeigt die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für eine binäre FSK-Modulation bei

- kohärenter Demodulation bzw.
- inkohärenter Demodulation

im Vergleich zur binären Phasenmodulation (BPSK). Es wird stets Orthogonalität vorausgesetzt. Bei kohärenter Demodulation kann hierbei der Modulationsindex  $h$  ein Vielfaches von 0.5 sein, so dass die mittlere Kurve auch für *Minimum Shift Keying* (MSK) gültig ist. Dagegen muss bei nichtkohärenter Demodulation einer FSK der Modulationsindex  $h$  ein Vielfaches von 1 sein.



Diesem Systemvergleich liegt wieder der sog. AWGN-Kanal zugrunde, gekennzeichnet durch das Verhältnis  $E_B/N_0$ . Die Gleichungen für die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten lauten bei

- *Binary Phase Shift Keying* (BPSK):

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right),$$

- *Binary Frequency Shift Keying* (BFSK) mit kohärenter Demodulation:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2 \cdot N_0}}\right),$$

- *Binary Frequency Shift Keying* (BFSK) mit inkohärenter Demodulation:

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot e^{-E_B/(2N_0)}.$$

In **Aufgabe A4.7** wurde gezeigt, dass bei BPSK das logarithmierte Verhältnis  $10 \cdot \lg E_B/N_0$  mindestens 9.6 dB betragen muss, damit die Bitfehlerwahrscheinlichkeit den Wert  $p_B = 10^{-5}$  nicht überschreitet.

**Hinweis:** Die Aufgabe behandelt die Thematik von **Kapitel 4.2** und **Kapitel 4.4**. Verwenden Sie die Näherung  $\lg(2) \approx 0.3$ .

**Fragebogen zu "A4.15: Vergleich BPSK – BFSK"**

a) Welches  $E_B/N_0$  ist bei MSK und kohärenter Demodulation erforderlich, damit  $p_B \leq 10^{-5}$  erfüllt ist?

**MSK, kohärent:**  $10 \cdot \lg E_B/N_0 =$  dB

b) Sind folgende Aussagen richtig: Das gleiche Ergebnis erhält man bei

- einer FSK mit Modulationsindex  $\eta = 0.7$ ,
- einer FSK mit Modulationsindex  $\eta = 1$ ?

c) Welches  $E_B/N_0$  ist bei FSK mit dem Modulationsindex  $h = 1$  und inkohärenter Demodulation erforderlich, damit  $p_B \leq 10^{-5}$  erfüllt ist?

**FSK, inkohärent:**  $10 \cdot \lg E_B/N_0 =$  dB

d) Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12.6$  dB und inkohärenter Demodulation?

**FSK, inkohärent:**  $p_B =$