

Musterlösung zur Aufgabe A4.1

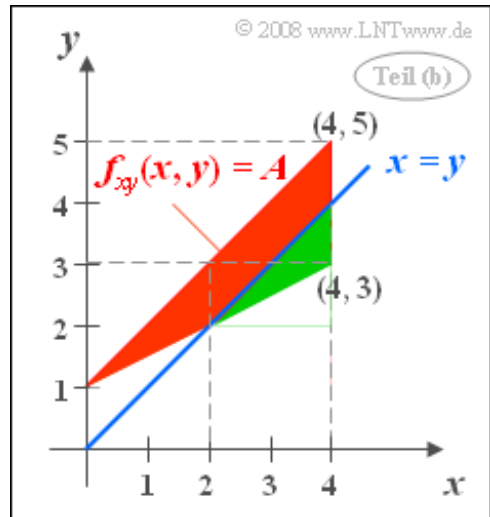
a) Das Volumen unter der zweidimensionalen WDF ist definitionsgemäß gleich 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y) dx dy = 1.$$

Die Dreiecksfläche ist $D = 0.5 \cdot 2 \cdot 4 = 4$. Da in diesem Definitionsgebiet die WDF konstant gleich A ist, erhält man $A = 1/D = 0.25$.

b) Zur Lösung gehen wir von nebenstehender Skizze aus. Das Gebiet „ $x > y$ “ liegt rechts von der Winkelhalbierenden $x = y$ und ist grün markiert.

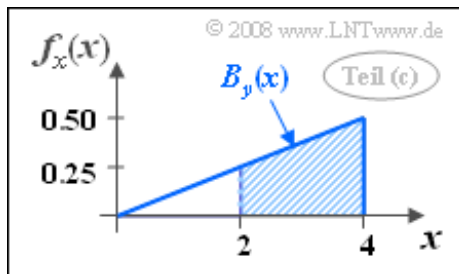
Die Dreiecksfläche ist $D_b = 0.5 \cdot 1 \cdot 2 = 1$, also genau ein Viertel der Gesamtfläche D des Definitionsgebietes. Daraus folgt $\Pr(x > y) = 0.25$.



c) Für die gesuchte Rand-WDF gilt in diesem Fall:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y) dy = A \cdot B_y(x).$$

Hierbei bezeichnet $B_y(x)$ die Breite des Gebietes „ $f_{xy} \neq 0$ “ in y -Richtung beim betrachteten x -Wert. Es gilt: $B_y(x) = x/2$. Mit $A = 0.25$ folgt für $0 \leq x \leq 4$: $f_x(x) = x/8$.



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht der schraffierten Fläche in nebenstehender Skizze. Man erhält:

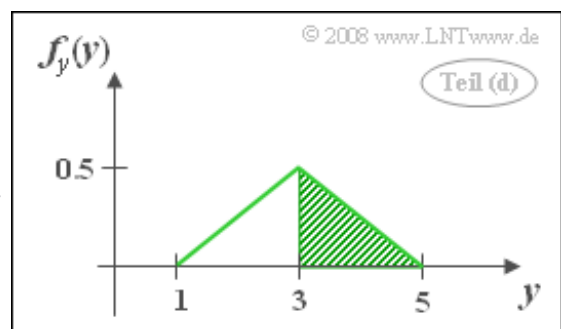
$$\begin{aligned} \Pr(x \geq 2) &= 1 - \Pr(x < 2) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0.25 = \underline{0.75}. \end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man anhand der 2D-WDF: Rechts von der Senkrechten $x = 2$ liegt $3/4$ des gesamten Definitionsgebietes.

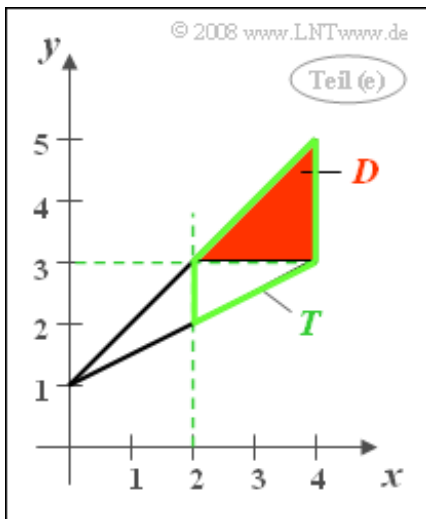
d) Analog der Musterlösung zu (c) gilt:

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y) dx = A \cdot B_x(y).$$

Die Ausbreitung des WDF-Gebietes in x -Richtung ist für $y \leq 1$ und $y \geq 5$ jeweils 0. Das Maximum liegt bei $y = 3$: $B_x(y = 3) = 2$. Dazwischen ist die Zu- und Abnahme von $B_x(y)$ linear und es ergibt sich eine dreieckförmige WDF.



Die Wahrscheinlichkeit, dass y größer oder gleich 3 ist, entspricht der grün schraffierten Fläche und ergibt aufgrund der Symmetrie den Wert 0.5. Zum gleichen Ergebnis kommt man anhand der 2D-WDF: Oberhalb der Horizontalen $y = 3$ liegt die Hälfte des gesamten Definitionsgebietes.



e) Wenn $y \geq 3$ (rot hinterlegtes Dreieck D) ist, gilt stets auch $x \geq 2$ (grün umrandetes Trapez T). Das bedeutet: In diesem Beispiel ist D eine Teilmenge von T , und es gilt:

$$\Pr((x \geq 2) \cap (y \geq 3)) = \Pr(y \geq 3) = \underline{0.50}.$$

f) Entsprechend der Lösung zur Aufgabe (e) folgt aus „ $y \geq 3$ “ mit Sicherheit auch „ $x \geq 2$ “. Somit ist die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit gleich 1.

g) Die Aufgabe kann man z. B. mit dem Satz von Bayes (siehe Kapitel 1.3) und den Ergebnissen aus (b) und (e) lösen:

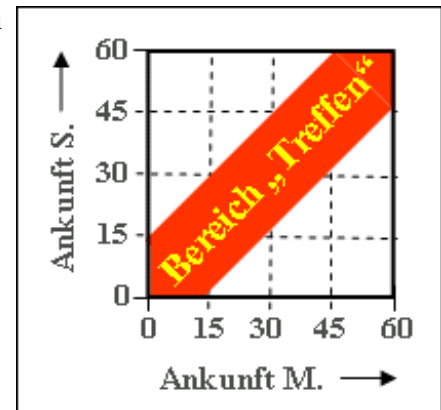
$$\Pr(y \geq 3 \mid x \geq 2) = \frac{\Pr((x \geq 2) \cap (y \geq 3))}{\Pr(x \geq 2)} = \underline{2/3}.$$

Oder anders ausgedrückt: Die Fläche D des rot hinterlegten Dreiecks macht $2/3$ der Fläche des grün umrandeten Trapezes aus.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.1

- a) Kommt Herr S. um 8 Uhr 30, so trifft er Frau M., wenn diese zwischen 8 Uhr 15 und 8 Uhr 45 ankommt. Damit ist die Wahrscheinlichkeit „S. trifft M.“ genau 50%.
- b) Kommt Frau M. um 8 Uhr, so trifft sie Herrn S. nur dann, wenn dieser vor 8 Uhr 15 kommt. Erscheint Frau M. um 9 Uhr, dann muss Herr S. nach 8 Uhr 45 angekommen sein, damit sich beide treffen können. Die Wahrscheinlichkeit für ein Zusammentreffen ist in beiden Fällen nur jeweils 25%.
- c) Von den beiden unter b) berechneten Ankunftszeiten ist 9 Uhr (Minute = 60) günstiger, da sie – wenn Herr S. nicht da ist – sofort wieder gehen kann.
- d) Die Wahrscheinlichkeit p_d ergibt sich als das Verhältnis der roten Fläche zur Gesamtfläche 1. Mit den Dreiecksflächen erhält man:

$$p_d = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16} = \underline{\underline{0.4375}}$$



Musterlösung zur Aufgabe A 4.2

a) Richtig ist der mittlere Vorschlag: Sowohl $y_1(x)$ als auch $y_2(x)$ schneiden die y -Achse bei $y = 1$. Die untere Begrenzungslinie hat die Steigung 0.5, die obere die Steigung 1.

b) Entsprechend den Hinweisen erhalten wir:

$$m_{xy} = \int_0^4 x \cdot \int_{x/2+1}^{x+1} \frac{1}{4} \cdot y \, dy \, dx = \frac{1}{8} \cdot \int_0^4 x \cdot [(x+1)^2 - (\frac{x}{2}+1)^2] \, dx.$$

Dies führt zum Integral bzw. Endergebnis:

$$m_{xy} = \frac{1}{8} \int_0^4 (\frac{3}{4}x^3 + x^2) \, dx = \frac{1}{8} \cdot (\frac{3}{16} \cdot 4^4 + \frac{4^3}{3}) = \frac{26}{3} \approx 8.667.$$

c) Da beide Zufallsgrößen jeweils einen Mittelwert ungleich 0 besitzen, folgt für die Kovarianz:

$$\mu_{xy} = m_{xy} - m_x \cdot m_y = \frac{26}{3} - \frac{8}{3} \cdot 3 = \frac{2}{3} \approx 0.667.$$

d) Mit den angegebenen Streuungen erhält man:

$$\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{2/3}{\sqrt{8/9} \cdot \sqrt{2/3}} = \sqrt{0.75} \approx 0.866.$$

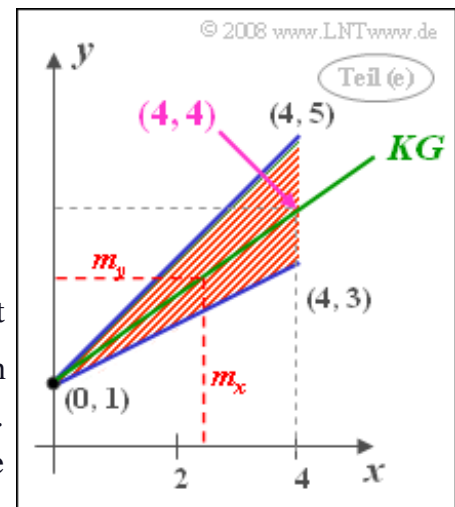
e) Für die Korrelationsgerade gilt allgemein:

$$y - m_y = \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - m_x).$$

Mit den oben berechneten Zahlenwerten erhält man

$$y = 3/4 \cdot x + 1.$$

Die Korrelationsgerade schneidet die y -Achse bei $y_0 = 1$ und geht auch durch den Punkt (4, 4). Jedes andere Ergebnis wäre auch nicht zu interpretieren, wenn man das Definitionsgebiet betrachtet. Setzt man $m_x = 8/3$ ein, so erhält man $y = m_y = 3$. Das heißt: Die berechnete Korrelationsgerade geht tatsächlich durch den Punkt (m_x, m_y) , wie es die Theorie besagt.



Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.2

a) Der Mittelwert m_y kann in bekannter Weise aus der WDF $f_y(y)$ ermittelt werden. Eine zweite Berechnungsmöglichkeit basiert direkt auf den Rechenregeln für Erwartungswerte:

$$m_y = E[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{1}{2} \cdot (e - e^{-1}) \underline{\underline{= 1.175}}.$$

b) Für den quadratischen Mittelwert der Zufallsgröße y gilt:

$$m_{2y} = E[y^2] = E[e^{2x}] = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} e^{2x} dx = \frac{1}{4} \cdot (e^2 - e^{-2}) = 1.813.$$

Daraus erhält man mit dem Satz von Steiner:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= m_{2y} - m_y^2 = \frac{1}{4} \cdot (e^2 - e^{-2}) - \frac{1}{4} \cdot (e^2 - 2 + e^{-2}) = \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-2}) = 0.432 \\ \Rightarrow \sigma_y &\underline{\underline{= 0.658}}. \end{aligned}$$

c) Außerhalb der Kurve $y = e^x$ ist die WDF natürlich 0. Da das Volumen unter der 2D-WDF gleich 1 sein muss, sind die WDF-Werte für den unendlich schmalen Bereich $y = e^x$ unendlich groß. Das heißt: Die WDF beschreibt eine gekrümmte Diracwand. Aufgrund des Abfalls der WDF $f_y(y)$ mit steigenden y nimmt die Höhe dieser Diracwand von $(-1, 1/e)$ bis zu $(+1, e)$ kontinuierlich ab \Rightarrow Richtig sind die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.

d) Für das gemeinsame Moment gilt:

$$m_{xy} = E[x \cdot y] = E[x \cdot e^x].$$

Mit der angegebenen Reihenentwicklung folgt daraus die Näherung:

$$m_{xy} \approx E[x] + E[x^2] + \frac{1}{2} \cdot E[x^3] + \frac{1}{6} \cdot E[x^4] + \frac{1}{24} \cdot E[x^5].$$

Aufgrund der Symmetrie der Zufallsgröße x gilt für alle ungeradzahligen Werte von k :

$$E[x^k] = 0.$$

Weiterhin gilt:

$$E[x^2] = \sigma_x^2 = \frac{1}{3}, \quad E[x^4] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^4 dx = \frac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow m_{xy} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{30} \underline{\underline{\approx 0.367}}.$$

e) Wegen $m_x = 0$ gilt $\mu_{xy} = m_{xy}$. Somit ergibt sich für den Korrelationskoeffizienten:

$$\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0.367}{0.577 \cdot 0.658} \underline{\underline{\approx 0.967}}.$$

Zwischen x und y besteht zwar ein eindeutiger deterministischer Zusammenhang. Da aber hierin auch viele nichtlineare Bindungen enthalten sind, ist der Korrelationskoeffizient $\rho_{xy} \neq 1$.

Musterlösung zur Aufgabe A4.3

a) Aus der Tabelle auf der Angabenseite ist ersichtlich, dass bei der Modulo-2-Summe die beiden Werte 0 und 1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit (also jeweils 0.5) auftreten.

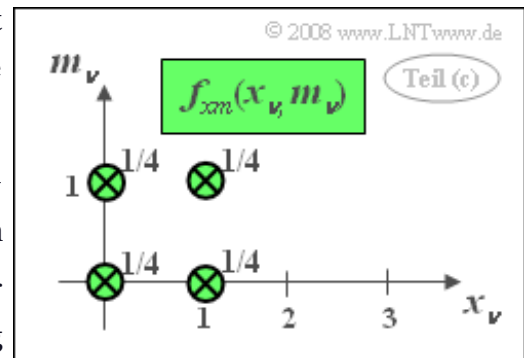
b) Die Tabelle zeigt, dass bei jeder Vorbelegung, – das heißt $(x_{v-1}, x_{v-2}) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ – die Werte $m_v = 0$ bzw. $m_v = 1$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Anders ausgedrückt:

$$\Pr(m_v | m_{v-1}) = \Pr(m_v).$$

Dies entspricht genau der Definition der statistischen Unabhängigkeit.

c) Die 2D-WDF besteht aus vier Diracfunktionen, jeweils mit dem Gewicht 1/4. Man erhält dieses Ergebnis beispielsweise durch Auswertung der Tabelle auf der Angabenseite.

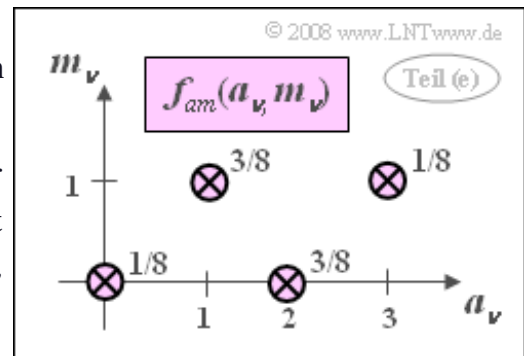
Da $f_{xm}(x_v, m_v)$ gleich dem Produkt $f_x(x_v) \cdot f_m(m_v)$ ist, sind die Größen x_v und m_v statistisch unabhängig. Statistisch unabhängige Zufallsgrößen sind aber natürlich auch linear statistisch unabhängig, also mit Sicherheit unkorreliert. Richtig sind also der zweite und der letzte Lösungsvorschlag.



d) Innerhalb der Folge $\langle a_v \rangle$ der algebraischen Summe gibt es statistische Bindungen \Rightarrow Vorschlag 2. Man erkennt dies daran, dass die unbedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr(a_v = 0) = 1/8$ ist, während zum Beispiel $\Pr(a_v = 0 | a_{v-1} = 3)$ gleich 0 ist.

e) Wie bei der Teilaufgabe (c) erhält man wieder vier Diracfunktionen, diesmal aber nicht mit jeweils gleichem Impulsgewicht 1/4.

Die zweidimensionale WDF lässt sich nicht als Produkt der zwei Randwahrscheinlichkeitsdichten schreiben. Das bedeutet aber, dass statistische Bindungen zwischen a_v und m_v bestehen müssen.



Für den gemeinsamen Erwartungswert erhält man:

$$E[a \cdot m] = \frac{1}{8} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 2 \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

Mit den linearen Mittelwerten $E[a] = 1.5$ und $E[m] = 0.5$ folgt damit für die Kovarianz:

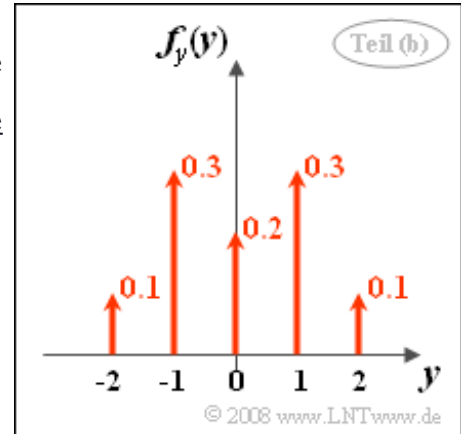
$$\mu_{am} = E[a \cdot m] - E[a] \cdot E[m] = 0.75 - 1.5 \cdot 0.5 = 0.$$

Damit ist auch der Korrelationskoeffizient $\rho_{am} = 0$. Das heißt: Die vorhandenen Abhängigkeiten sind nichtlinear. Die Größen a_v und m_v sind zwar statistisch abhängig, aber trotzdem unkorreliert. Richtig sind der erste und der letzte Lösungsvorschlag.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.3

a) Die Randwahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$ erhält man aus der 2D-WDF $f_{xy}(x, y)$ durch Integration über y . Für alle möglichen Werte $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ sind die Wahrscheinlichkeiten gleich 0.2, und es gilt $\Pr(x \leq 1) = 0.8$. Der Mittelwert ist $m_x = 0$. Richtig sind somit die beiden ersten Antworten.

b) Durch Integration über x erhält man die rechts skizzierte WDF. Aufgrund der Symmetrie ergibt sich der Mittelwert $m_y = 0$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\Pr(y \leq 1)$ ist 0.9. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 2 und 3.



c) Definitionsgemäß gilt:

$$F_{xy}(r_x, r_y) = \Pr((x \leq r_x) \cap (y \leq r_y)).$$

Für $r_x = r_y = 1$ folgt daraus:

$$F_{xy}(1, 1) = \Pr((x \leq 1) \cap (y \leq 1)).$$

Wie aus der 2D-WDF auf der Angabenseite zu ersehen, ist diese Wahrscheinlichkeit gleich 0.8.

d) Hierfür kann mit dem Satz von Bayes auch geschrieben werden:

$$\Pr(x \leq 1 | y \leq 1) = \frac{\Pr((x \leq 1) \cap (y \leq 1))}{\Pr(y \leq 1)} = \frac{F_{xy}(1, 1)}{F_y(1)}.$$

Mit den Ergebnissen aus (b) und (c) folgt daraus $\Pr(x \leq 1 | y \leq 1) = 0.8/0.9 = 8/9 = \underline{0.889}$.

e) Entsprechend der Definition gilt für das gemeinsame Moment:

$$m_{xy} = E[x \cdot y] = \sum_i \Pr(x_i \cap y_i) \cdot x_i \cdot y_i.$$

Es verbleiben fünf Diracfunktionen mit $x_i \cdot y_i \neq 0$:

$$m_{xy} = 0.1 \cdot (-2)(-1) + 0.2 \cdot (-1)(-1) + 0.2 \cdot 1 \cdot 1 + 0.1 \cdot 2 \cdot 1 + 0.1 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{1.2}.$$

f) Für den Korrelationskoeffizienten gilt:

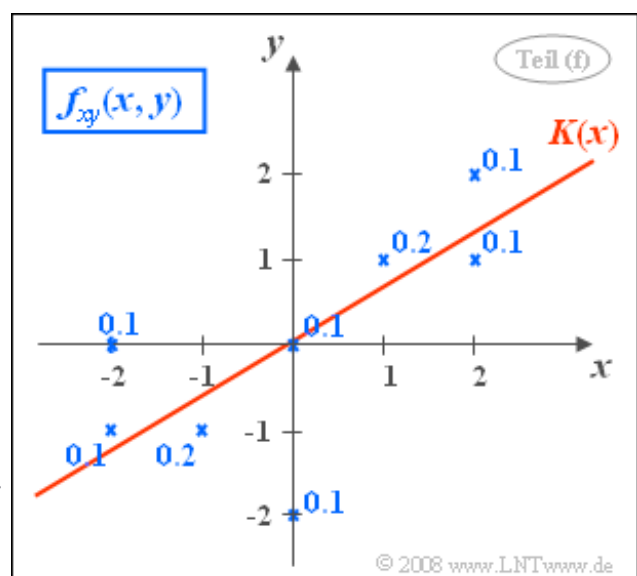
$$\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1.2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1.4}} = 0.717.$$

Hier ist berücksichtigt, dass wegen $m_x = m_y = 0$ die Kovarianz μ_{xy} gleich dem Moment m_{xy} ist.

Die Gleichung der Korrelationsgeraden lautet:

$$y = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \rho_{xy} \cdot x = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot x = 0.6 \cdot x.$$

Im Bild ist die Gerade $y = K(x)$ eingezeichnet. Der Winkel zwischen Korrelationsgerade und x -Achse beträgt $\theta_{y \rightarrow x} = \arctan(0.6) \approx 31^\circ$.



g) Bei statistischer Unabhängigkeit müsste $f_{xy}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$ gelten, was hier nicht erfüllt ist. Aus der Korreliertheit (folgt aus $\rho_{xy} = 0.6$) kann direkt auf die statistische Abhängigkeit geschlossen werden, denn Korrelation bedeutet eine Sonderform (nämlich linear) der statistischen Abhängigkeit. Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3.

Musterlösung zur Aufgabe A4.4

a) Beide Aussagen treffen zu. Vergleicht man die gegebene mit der allgemeingültigen 2D-WDF

$$f_{uv}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\sqrt{1-\rho_{uv}^2}} \cdot \exp\left[\frac{1}{2 \cdot (1-\rho_{uv}^2)} \left(\frac{u^2}{\sigma_u^2} + \frac{v^2}{\sigma_v^2} - 2\rho_{uv}\frac{u \cdot v}{\sigma_u \cdot \sigma_v}\right)\right],$$

so erkennt man, dass im Exponenten kein Term mit $u \cdot v$ auftritt, was nur bei $\rho_{uv} = 0$ möglich ist. Dies bedeutet aber, dass u und v unkorreliert sind. Bei Gaußschen Zufallsgrößen folgt aus der Unkorreliertheit aber auch stets die statistische Unabhängigkeit.

b) Bei statistischer Unabhängigkeit gilt:

$$f_{uv}(u, v) = f_u(u) \cdot f_v(v), \quad f_u(u) = \frac{e^{-u^2/(2\sigma_u^2)}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u}, \quad f_v(v) = \frac{e^{-v^2/(2\sigma_v^2)}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_v}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $\sigma_u = 0.5$ und $\sigma_v = 1$. Der Quotient ist somit $\sigma_u/\sigma_v = \underline{0.5}$.

c) Da u eine kontinuierliche Zufallsgröße ist, gilt:

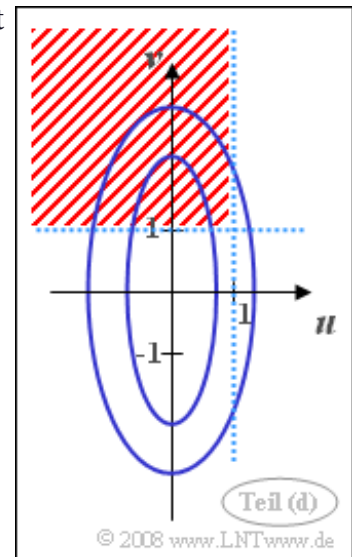
$$\Pr(u < 1) = \Pr(u \leq 1) = F_u(1).$$

Mit dem Mittelwert $m_u = 0$ und der Streuung $\sigma_u = 0.5$ erhält man:

$$\Pr(u < 1) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma_u}\right) = \Phi(2) = \underline{0.9772}.$$

d) Aufgrund der statistischen Unabhängigkeit zwischen u und v gilt:

$$\Pr((u < 1) \cap (v > 1)) = \Pr(u < 1) \cdot \Pr(v > 1).$$



Die Wahrscheinlichkeit $\Pr(u < 1) = 0.9772$ wurde bereits berechnet. Für die zweite Wahrscheinlichkeit $\Pr(v > 1)$ gilt aus Symmetriegründen:

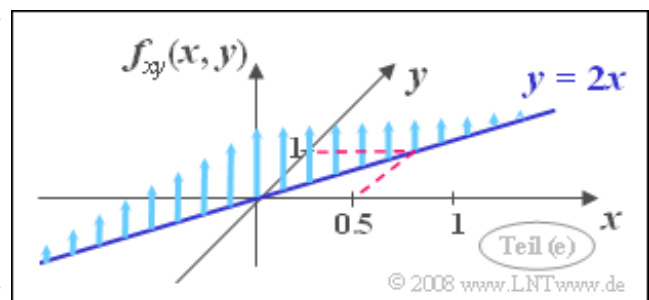
$$\Pr(v > 1) = \Pr(v \leq -1) = F_v(-1) = \Phi\left(\frac{-1}{\sigma_v}\right) = Q(1) = 0.1587$$

$$\Rightarrow \Pr((u < 1) \cap (v > 1)) = 0.9772 \cdot 0.1587 = \underline{0.1551}.$$

Die obige Skizze verdeutlicht die vorgegebene Konstellation. Die Höhenlinien der WDF (blau) sind wegen $\sigma_v > \sigma_u$ in vertikaler Richtung gestreckte Ellipsen. Rot schraffiert eingezeichnet ist das Gebiet, dessen Wahrscheinlichkeit in dieser Teilaufgabe berechnet werden sollte.

e) Wegen $\rho_{xy} = 1$ besteht ein deterministischer Zusammenhang zwischen x und $y \Rightarrow$ alle Werte liegen auf der Geraden $y = K \cdot x$. Aufgrund der Streuungen $\sigma_x = 0.5$ und $\sigma_y = 1$ gilt $K = 2$.

Auf dieser Geraden $y = 2x$ sind alle WDF-Werte unendlich groß. Das bedeutet: Die 2D-WDF ist hier eine „Diracwand“.



Wie aus der Skizze hervorgeht, sind die WDF–Werte auf der Geraden $y = 2x$, die gleichzeitig die Korrelationsgerade darstellt, gaußverteilt. Auch die beiden Randwahrscheinlichkeitsdichten sind hier Gaußfunktionen, jeweils mit dem Mittelwert 0. Da $\sigma_x = \sigma_u$ und $\sigma_y = \sigma_v$ ist, gilt auch:

$$f_x(x) = f_u(u), \quad f_y(y) = f_v(v).$$

Richtig sind somit der erste und der dritte Lösungsvorschlag.

f) Da die WDF der Zufallsgröße x identisch mit der WDF $f_u(u)$ ist, ergibt sich auch genau die gleiche Wahrscheinlichkeit wie in der Teilaufgabe (c) berechnet:

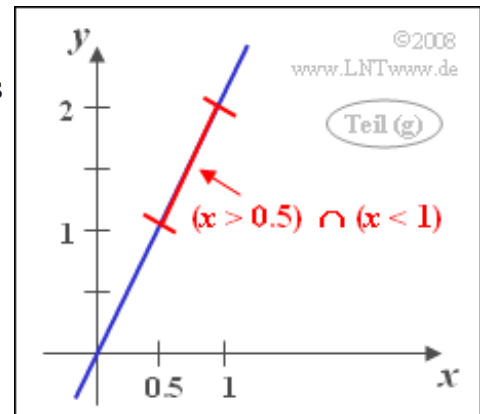
$$\Pr(x < 1) \equiv \underline{0.9772}.$$

g) Das Zufallsereignis „ $y > 1$ “ ist identisch mit dem Ereignis „ $x > 0.5$ “. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$p_g = \Pr((x > 0.5) \cap (x < 1)) = F_x(1) - F_x(0.5).$$

Mit der Streuung $\sigma_x = 0.5$ folgt weiter:

$$p_g = \phi(2) - \phi(1) = 0.9772 - 0.8413 \equiv \underline{0.1359}.$$



Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.4

a) Auch ohne die Angabe „ $\sigma_x = \sigma_y = 1$ “ könnte man erkennen, dass die beiden Streuungen gleich sind, da im Exponenten der 2D-WDF $f_{xy}(x, y)$ die Koeffizienten bei x^2 und y^2 gleich sind. Durch Koeffizientenvergleich erhält man mit $\sigma_x = \sigma_y = 1$:

$$\frac{-2\rho_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \sqrt{2} \Rightarrow \rho_{xy} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \approx -0.707.$$

b) Mit den unter Punkt (a) berechneten Zahlenwerten erhalten wir:

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} = \frac{1}{2\pi \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{0.5}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \approx 0.225.$$

c) Die allgemeine Gleichung lautet:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(2 \cdot \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x \cdot \sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}\right).$$

Gilt $\sigma_x = \sigma_y$ und $\rho_{xy} \neq 0$, so ist der Winkel α stets $\pm 45^\circ$. Das Vorzeichen ist abhängig vom Vorzeichen von ρ_{xy} . Im vorliegenden Fall gilt $\alpha = -45^\circ$.

d) Für die eingezeichnete Höhenlinie gilt:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot e^{-(x^2 + y^2 + \sqrt{2} \cdot x \cdot y)} = 0.2$$

$$\Rightarrow e^{-(x^2 + y^2 + \sqrt{2} \cdot x \cdot y)} = 0.8885 \Rightarrow x^2 + y^2 + \sqrt{2} \cdot x \cdot y = -\ln(0.8885) \approx 0.118.$$

Der Winkel der Ellipsenhauptachse ist -45° . Deshalb muss $y_0 = -x_0$ gelten. Daraus folgt weiter:

$$x_0^2 + (-x_0)^2 + \sqrt{2} \cdot x_0(-x_0) = 0.118$$

$$\Rightarrow (2 - \sqrt{2}) \cdot x_0^2 = 0.118 \Rightarrow x_0^2 \approx \frac{0.118}{0.585} \approx 0.202; \quad x_0 \approx \pm 0.450.$$

Die beiden Schnittpunkte der eingezeichneten Höhenlinien mit der Ellipsenhauptachse liegen somit bei $(0.45, -0.45)$ und $(-0.45, 0.45)$. Der Quotient x_0/y_0 ist in beiden Fällen -1 .

e) Vorweg das Ergebnis: Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3. Mit $\sigma_y = \sigma_x$ und dem Ergebnis aus (a) gilt für den Winkel der Korrelationsgeraden:

$$\theta_{y \rightarrow x} = \arctan(\rho_{xy}) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -35.3^\circ.$$

Das bedeutet: Die erste Aussage ist falsch und die zweite richtig. Nachfolgend der Beweis für die Richtigkeit der Aussage 3: Löst man die Ellipsengleichung (mit $z = 0.118$), also

$$x^2 + y^2 + \sqrt{2} \cdot x \cdot y - z = 0,$$

nach y auf, so erhält man nach Lösung einer quadratischen Gleichung

$$y_{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x \pm \sqrt{\frac{x^2}{2} - x^2 + z} \quad \Rightarrow \quad y_{1/2} = \frac{x}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{z - \frac{x^2}{2}}.$$

Die vertikale Tangente ergibt sich für den Fall, dass die beiden Lösungen $y_{1/2}$ identisch sind. Das heißt: der Wurzelausdruck muss den Wert 0 ergeben. Die Lösung für positives x lautet dann:

$$x_T = \sqrt{2 \cdot z} = 0,485.$$

Eingesetzt in die Ellipsengleichung erhält man für den y -Wert des Tangentialpunktes:

$$\begin{aligned} x_T^2 + y_T^2 + \sqrt{2} \cdot x_T \cdot y_T - z &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2z + y_T^2 + 2\sqrt{z} \cdot y_T - z = 0 \\ \Rightarrow y_T^2 + 2\sqrt{z} \cdot y_T + z &= 0 \quad \Rightarrow \quad (y_T + \sqrt{z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_T = -\sqrt{z} = -0,343. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$y_T = -\frac{x_T}{\sqrt{2}}.$$

Das bedeutet aber auch: Der Tangentialpunkt (x_T, y_T) liegt exakt auf der Korrelationsgeraden:

$$y = K(x) = -x/\sqrt{2}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.5

a) und b) Die Mittelwerte $m_t = 0.5$ und $m_p = 0.7$ können aus der Skizze abgeschätzt und aus der angegebenen Gleichung exakt ermittelt werden. Die 2D-WDF der mittelwertfreien Größe lautet:

$$f_{t'p'}(t', p') = 13.263 \cdot \exp\left(-\frac{t'^2}{0.0288} - \frac{p'^2}{0.0072} + \frac{t' \cdot p'}{0.0090}\right).$$

Zur Vereinfachung wird im Folgenden auf den Apostroph zur Kennzeichnung mittelwertfreier Größen verzichtet. Sowohl t als auch p sind bis einschließlich Aufgabe (d) als mittelwertfrei zu verstehen.

c) Die allgemeine Gleichung einer mittelwertfreien 2D-Zufallsgröße lautet:

$$f_{tp}(t, p) = \frac{1}{2\pi \sigma_t \sigma_p \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{2(1 - \rho^2)\sigma_t^2} - \frac{p^2}{2(1 - \rho^2)\sigma_p^2} + \frac{\rho \cdot t \cdot p}{(1 - \rho^2)\sigma_t \cdot \sigma_p}\right\}.$$

Die Größen σ_t , σ_p und ρ lassen sich durch Koeffizientenvergleich ermitteln. Ein Vergleich der beiden ersten Terme im Exponenten zeigt, dass $\sigma_t = 2 \cdot \sigma_p$ gelten muss. Damit lautet die WDF:

$$f_{tp}(t, p) = \frac{1}{4\pi \sigma_p^2 \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{8(1 - \rho^2)\sigma_p^2} - \frac{p^2}{2(1 - \rho^2)\sigma_p^2} + \frac{\rho \cdot t \cdot p}{2(1 - \rho^2) \cdot \sigma_p^2}\right\}.$$

Aus dem zweiten Term des Exponenten folgt:

$$2 \cdot (1 - \rho^2) \cdot \sigma_p^2 = 0.0072 \quad \Rightarrow \quad \sigma_p^2 = \frac{0.0036}{(1 - \rho^2)}.$$

Der Faktor $K = 13.263$ liefert nun das Ergebnis

$$K = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{4\pi \cdot 0.0036} = 13.263 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \rho^2} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\rho = 0.8}}.$$

Daraus ergeben sich die beiden Streuungen zu $\sigma_p = 0.1$ und $\sigma_t = 0.2$. Zur Kontrolle kann der letzte Term des Exponenten verwendet werden:

$$\frac{(1 - \rho^2) \cdot \sigma_t \cdot \sigma_p}{\rho} = \frac{0.36 \cdot 0.1 \cdot 0.2}{0.8} = 0.009.$$

Dies stimmt mit dem vorgegebenen Wert überein.

d) Der Lösungsvorschlag 1 ist richtig. Im Grunde genommen ist (t, p) keine echte Gaußsche Zufallsgröße, da beide Komponenten begrenzt sind. Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $t < 0$, $t > 1$, $p < 0$ und $p > 1$ sind somit Null. Bei Gaußschen Größen mit den hier vorliegenden Mittelwerten und Streuungen ergeben sich jedoch

$$\Pr(t < 0) = \Pr(t > 1) = Q(2.5) \approx 6 \cdot 10^{-3},$$

$$\Pr(p > 1) = Q(3) \approx 1.3 \cdot 10^{-3},$$

$$\Pr(p < 0) = Q(7) \approx 10^{-12}.$$

Der Korrelationskoeffizient $\rho = 0.8$ ist hier positiv. Hat der Prüfling im theoretischen Teil eher gut abgeschnitten, so ist (zumindest bei dieser Aufgabe) zu erwarten, dass auch der praktische Teil gut läuft. Hier ist der Lösungsvorschlag 2 somit falsch. In der Praxis ist das sicher nicht immer so.

e) Für diese Wahrscheinlichkeit gilt mit $\Delta t = \Delta p = 0.02$:

$$\Pr\left(\left(0.5 - \frac{\Delta t}{2} \leq t \leq 0.5 + \frac{\Delta t}{2}\right) \cap \left(0.5 - \frac{\Delta p}{2} \leq p \leq 0.5 + \frac{\Delta p}{2}\right)\right) \\ \approx \Delta t \cdot \Delta p \cdot f_{tp}(t = 0.5, p = 0.5).$$

Für die 2D-WDF gilt unter Berücksichtigung der Mittelwerte $m_t = 0.5$ und $m_p = 0.7$:

$$f_{tp}(t = 0.5, p = 0.5) = 13.263 \cdot \exp\left(-\frac{(-0.2)^2}{0.0072}\right) \approx 0.0513.$$

Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu $0.02 \cdot 0.02 \cdot 0.0513 \approx \underline{2 \cdot 10^{-5}}$.

Musterlösung zur Aufgabe A4.6

a) Aus $\xi = x + y$ und $\eta = -x + y$ folgt direkt:

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad y = \frac{1}{2}(\xi + \eta).$$

Setzt man diese Werte für den negativen Exponenten ein, so erhält man:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = \frac{1}{8}(\xi - \eta)^2 + \frac{1}{32}(\xi + \eta)^2.$$

Ausmultipliziert ergibt dies:

$$\frac{5}{32} \cdot \xi^2 + \frac{5}{32} \cdot \eta^2 - \frac{3}{16} \cdot \xi \cdot \eta.$$

Da die Koeffizienten bei ξ^2 und η^2 gleich sind, gilt $\sigma_\xi = \sigma_\eta$. Der gesuchte Quotient ist somit 1.

b) Durch Koeffizientenvergleich erhält man für $\sigma_\xi = \sigma_\eta$ das Gleichungssystem:

$$2 \cdot \sigma_\xi^2 \cdot (1 - \rho_{\xi\eta}^2) = \frac{32}{5}, \quad \frac{\sigma_\xi^2 \cdot (1 - \rho_{\xi\eta}^2)}{\rho_{\xi\eta}} = \frac{16}{3}.$$

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, so ergibt sich $\rho_{\xi\eta} = 0.6$ und $\sigma_\xi = 5^{1/2} \approx 2.236$.

c) Nach Koordinatentransformation kann man für diese Wahrscheinlichkeit schreiben:

$$\Pr(|x + y| \leq C) = \Pr(|\xi| \leq C) = 1 - 2 \cdot \Pr(\xi > C).$$

Mit dem komplementären Gaußschen Fehlerintegral folgt daraus weiter:

$$\Pr(|x + y| \leq C) = 1 - 2 \cdot Q\left(\frac{C}{\sigma_\xi}\right) = 0.99 \Rightarrow Q\left(\frac{C}{\sigma_\xi}\right) = 0.005.$$

Mit dem angegebenen Wert $Q(2.6) \approx 0.005$ erhält man somit das Ergebnis: $C \approx 2.6 \cdot \sigma_\xi = 5.814$.

Musterlösung zur Aufgabe A4.7

a) Da die Zufallsgrößen u und v mittelwertfrei sind ($m = 0$), ist auch die Zufallsgröße x mittelwertfrei: $m_x = (A + B) \cdot m = 0$. Für die Varianz und die Streuung gelten:

$$\sigma_x^2 = (A^2 + B^2) \cdot \sigma^2 = 5; \quad \sigma_x = \sqrt{5} \approx 2.236.$$

b) Da u und v die gleiche Streuung besitzen, gilt auch $\sigma_y = \sigma_x \approx 2.236$. Wegen $m = 0$ gilt zudem $m_y = 0$. Bei mittelwertbehafteten Zufallsgrößen u und v ergäbe sich für $m_y = (A - B) \cdot m$ dagegen ein anderer Wert als für $m_x = (A + B) \cdot m$.

c) Wir gehen hier von dem allgemeineren Fall $m \neq 0$ aus. Dann gilt für das gemeinsame Moment:

$$m_{xy} = E[x \cdot y] = E[(A \cdot u + B \cdot v)(A \cdot u - B \cdot v)].$$

Nach den allgemeinen Rechenregeln für Erwartungswerte folgt daraus:

$$m_{xy} = A^2 \cdot E[u^2] - B^2 \cdot E[v^2] = (A^2 - B^2)(m^2 + \sigma^2).$$

Die Kovarianz ergibt sich dann zu

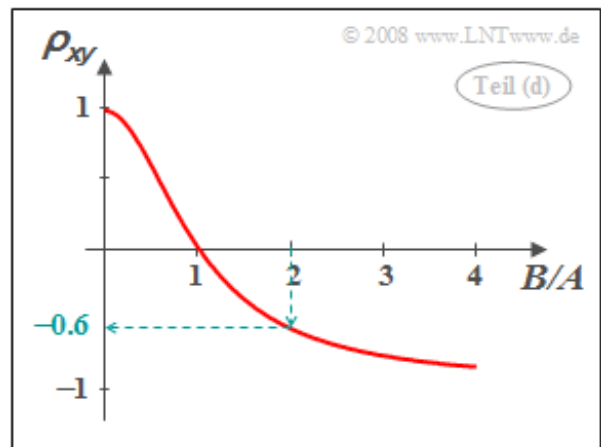
$$\begin{aligned} \mu_{xy} &= m_{xy} - m_x \cdot m_y = \\ &= (A^2 - B^2)(m^2 + \sigma^2) - (A + B)(A - B) \cdot m^2 = (A^2 - B^2) \cdot \sigma^2. \end{aligned}$$

Mit $A = 1, B = 2, \sigma = 1$ erhält man $\mu_{xy} = -3$, unabhängig vom Mittelwert m der Größen u und v .

d) Der Korrelationskoeffizient ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \rho_{xy} &= \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{(A^2 - B^2) \cdot \sigma^2}{(A^2 + B^2) \cdot \sigma^2} \\ \Rightarrow \rho_{xy} &= \frac{1 - (B/A)^2}{1 + (B/A)^2}. \end{aligned}$$

Mit $B/A = 2$ folgt daraus $\rho_{xy} = -0.6$.



e) Aus $B = 0$ folgt $\rho_{xy} = 1$ (strenge Korrelation). Aus den Gleichungen für x und y erkennt man weiter, dass in diesem Fall x und y identische Zufallsgrößen sind.

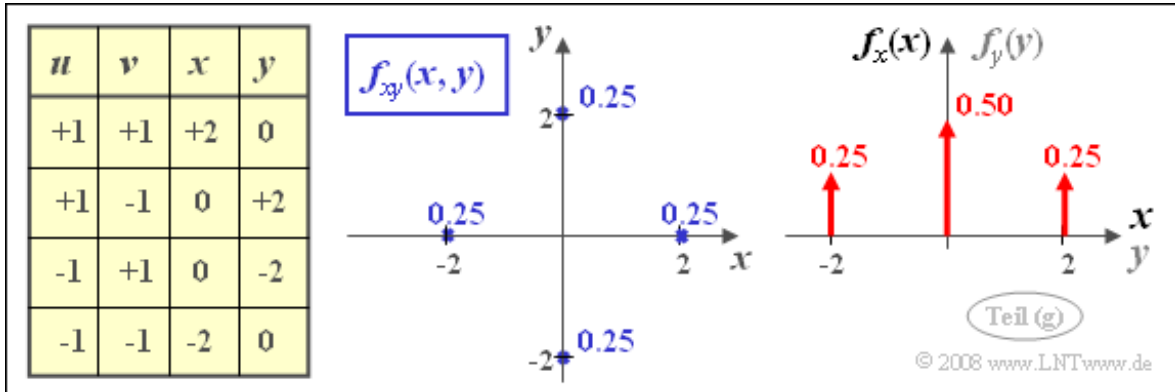
Die zweite Aussage ist nicht zutreffend: Für $A = 1$ und $B = -2$ ergibt sich ebenfalls $\rho_{xy} = -0.6$. Das Vorzeichen des Quotienten spielt also keine Rolle, weil in der unter (d) berechneten Gleichung B/A nur quadratisch auftritt.

Ist B sehr viel größer als A , so werden sowohl x als auch y fast ausschließlich durch die Zufallsgröße v bestimmt und es ist $y \approx -x$. Dies entspricht dem Korrelationskoeffizienten $\rho_{xy} = -1$. Dagegen ergibt sich für $B/A = 1$ stets der Korrelationskoeffizient $\rho_{xy} = 0$ und damit die Unkorreliertheit zwischen x und y .

Richtig sind somit die Aussagen 1, 3 und 4.

f) Bei $A = B$ sind x und y stets (d. h. bei jeder beliebigen WDF der Größen u und v) unkorreliert. Die neuen Zufallsgrößen x und y sind ebenfalls gaußverteilt. Bei Gaußschen Zufallsgrößen folgt aber aus der Unkorreliertheit auch die statistische Unabhängigkeit und umgekehrt. Also sind beide Aussagen richtig.

g) Der Korrelationskoeffizient ergibt sich mit $A = B = 1$ auch hier zu $\rho_{xy} = 0$. Das heißt, dass x und y unkorreliert sind. Dagegen erkennt man aus der nachfolgend skizzierten 2D-WDF, dass die Bedingung der statistischen Unabhängigkeit im nun vorliegenden Fall nicht mehr gegeben ist. Vielmehr gilt: $f_{xy}(x, y) \neq f_x(x) \cdot f_y(y)$. Hier ist also nur die Aussage 1 zutreffend.



Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.7

a) Aufgrund der angegebenen Mittelwerte muss gelten: $C = m_x = 0$ und $F = m_y = 1$.

b) Unter Berücksichtigung von $\sigma^2 = 2/3$ gilt:

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 \cdot (A^2 + B^2) = \frac{2}{3} \cdot (A^2 + B^2).$$

Wegen $\sigma_x^2 = 4$ folgt daraus $A^2 + B^2 = 6$. Eine dreieckförmige WDF bedeutet, dass $A = \pm B$ gelten muss.

Somit erhält man $A = B = 3^{1/2} = 1.732$ (negative Koeffizienten wurden ausgeschlossen).

c) Mit A und B entsprechend Punkt b) verbleiben zwei Bestimmungsgleichungen für D und E :

$$\sigma_y^2 = \sigma^2 \cdot (D^2 + E^2) = 10 \quad \Rightarrow \quad D^2 + E^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sigma^2} = \frac{10}{2/3} \stackrel{!}{=} 15,$$

$$\rho_{xy} = \frac{A \cdot D + B \cdot E}{\sqrt{(A^2 + B^2)(D^2 + E^2)}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (D + E)}{\sqrt{6 \cdot (D^2 + E^2)}} \stackrel{!}{=} \sqrt{0.9}.$$

Daraus folgt weiter:

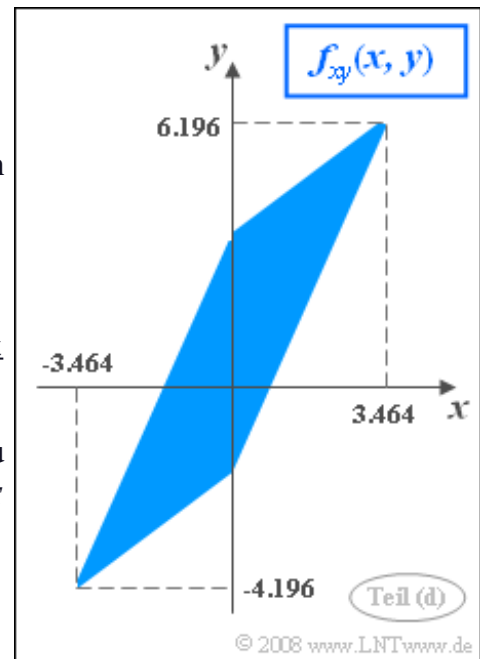
$$D + E = \sqrt{1.8 \cdot (D^2 + E^2)} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Die Gleichung führt in Verbindung mit $D^2 + E^2 = 15$ und der oben angegebenen Nebenbedingung ($D > E$) zum Ergebnis:

$$D = 2\sqrt{3} = 3.464, \quad E = \sqrt{3} = 1.732.$$

d) Mit $A = B = 1.732$ kann die Zufallsgröße x maximal den Wert 3.464 annehmen (wenn jeweils $u = 1$ und $v = 1$ gilt).

Das Maximum von y ergibt sich mit diesen Parameterwerten zu $y_{\max} = D + E + F = 6.196$, der Minimalwert zu $y_{\min} = -D - E + F = -4.196$ (siehe Skizze der 2D-WDF).



Musterlösung zur Aufgabe A4.8

a) Die Fläche des Parallelogramms kann aus zwei gleich großen Dreiecken zusammengesetzt werden. Die Fläche des Dreiecks $(1,0)(1,4)(-1,3)$ ergibt $0.5 \cdot 4 \cdot 2 = 4$. Somit ist die Gesamtfläche $F = 8$. Da das WDF-Volumen stets 1 ist, gilt $H = 1/F = 0.125$.

b) Der minimale Wert von x ergibt sich für $u = 0$ und $v = 1$. Daraus folgen aus obigen Gleichungen die Ergebnisse $x = -1$ und $y = 3$.

c) Die im Theorieteil angegebene Gleichung gilt allgemein, d. h. für jede beliebige WDF der beiden statistisch unabhängigen Größen u und v , so lange diese gleiche Streuungen aufweisen.

Mit $A = 2$, $B = -2$, $D = 1$ und $E = 3$ erhält man:

$$\rho_{xy} = \frac{A \cdot D + B \cdot E}{\sqrt{(A^2 + B^2)(D^2 + E^2)}} = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 3}{\sqrt{(4 + 4)(1 + 9)}} = \frac{-4}{\sqrt{80}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \approx -0.447.$$

d) Die Korrelationsgerade lautet allgemein:

$$y = K(x) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \rho_{xy} \cdot (x - m_x) + m_y.$$

Aus den linearen Mittelwerten $m_u = m_v = 0.5$ und den in der Aufgabenstellung angegebenen Gleichungen erhält man $m_x = 1$ und $m_y = 2$.

Die Varianzen von u und v betragen jeweils $1/12$. Daraus folgt:

$$\sigma_x^2 = 4 \cdot \sigma_u^2 + 4 \cdot \sigma_v^2 = 2/3,$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_u^2 + 9 \cdot \sigma_v^2 = 5/6.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung der Korrelationsgeraden ein, so ergibt sich:

$$y = K(x) = \frac{\sqrt{5/6}}{\sqrt{2/3}} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \cdot (x - 1) + 2 = -\frac{x}{2} + 2.5.$$

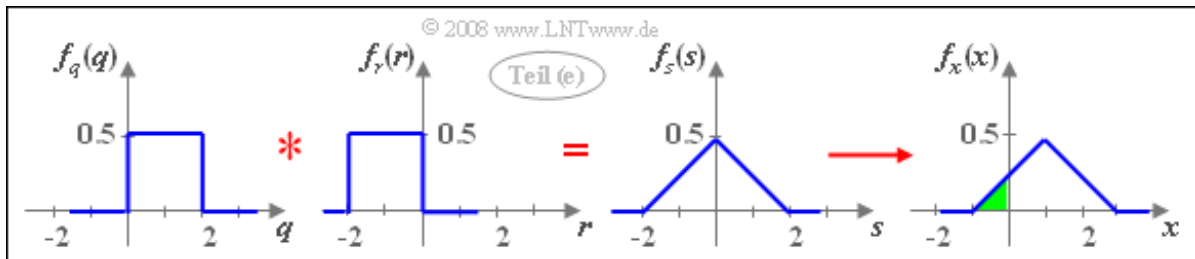
Daraus folgt der Wert $y_0 = 2.5$.

e) Mit den Hilfsgrößen $q = 2u$, $r = -2v$ und $s = x - 1$ gilt der Zusammenhang: $s = q + r$. Da u und v jeweils zwischen 0 und 1 gleichverteilt sind, besitzt q eine Gleichverteilung im Bereich von 0 bis 2 und r eine Gleichverteilung zwischen -2 und 0.

Da zudem q und r nicht statistisch voneinander abhängen, gilt für die WDF der Summe:

$$f_s(s) = f_q(q) \star f_r(r).$$

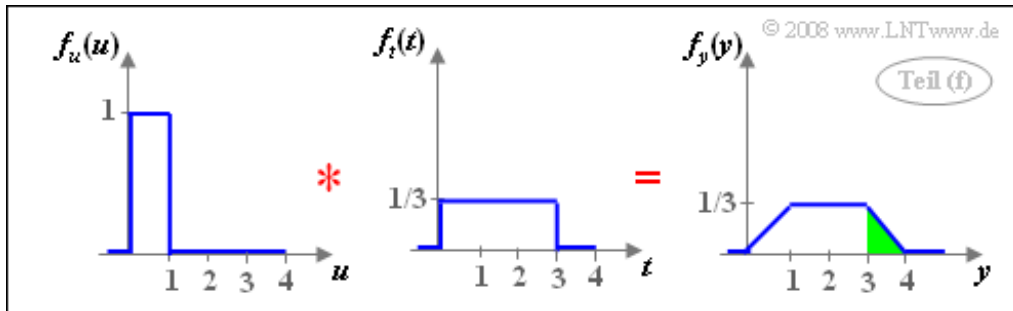
Die Addition $x = s + 1$ führt zu einer Verschiebung der Dreieck-WDF um 1 nach rechts. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit (im folgenden Bild grün hinterlegt) gilt deshalb: $\Pr(x < 0) = 0.125$.



f) Analog zur Musterlösung für die Teilaufgabe e) gilt mit $t = 3v$:

$$f_y(y) = f_u(u) \star f_t(t).$$

Die Faltung zwischen zwei unterschiedlich breiten Rechteckfunktionen ergibt ein Trapez. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man $\Pr(y > 3) = 1/6$. Diese ist im nachfolgenden Bild grün hinterlegt.



Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.8

a) Es gilt $r(t) = s(t) + n(t)$. Somit kann $f_r(r)$ aus der Faltung der beiden Dichtefunktionen $f_s(s)$ und $f_n(n)$ berechnet werden. Da beide Signale gaußverteilt sind, liefert die Faltung ebenfalls eine Gaußfunktion:

$$f_r(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_r} \cdot e^{-r^2/(2\sigma_r^2)}.$$

Die Varianzen von $s(t)$ und $n(t)$ addieren sich. Deshalb erhält man mit $\sigma_s = 1$ V und $\sigma_n = 0.75$ V:

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_n^2} = \sqrt{(1 \text{ V})^2 + (0.75 \text{ V})^2} \underline{\underline{= 1.25 \text{ V}}}.$$

b) Für den Korrelationskoeffizienten gilt mit dem gemeinsamen Moment m_{sr} :

$$\rho_{sr} = \frac{m_{sr}}{\sigma_s \cdot \sigma_r}.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass $s(t)$ und auch $r(t)$ mittelwertfrei sind, so dass $\mu_{sr} = m_{sr}$ gilt. Da $s(t)$ und $n(t)$ als statistisch unabhängig voneinander – und damit unkorreliert – vorausgesetzt wurden, gilt weiter:

$$m_{sr} = E[s(t) \cdot r(t)] = E[s^2(t)] + E[s(t) \cdot n(t)] = E[s^2(t)] = \sigma_s^2.$$

Daraus folgt:

$$\rho_{sr} = \frac{\sigma_s}{\sigma_r} = \sqrt{\frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2}} = \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}\right)^{-1/2}.$$

Mit $\sigma_s = 1$ V, $\sigma_n = 0.75$ V und $\sigma_r = 1.25$ V erhält man $\underline{\underline{\rho_{sr} = 0.8}}$.

c) Der in b) berechnete Ausdruck kann mit der Abkürzung $SNR = \sigma_s^2/\sigma_n^2$ wie folgt dargestellt werden:

$$\rho_{sr} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{SNR}}} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2 \cdot SNR}} \approx 1 - \frac{1}{2 \cdot SNR}.$$

Der Signal-zu-Stör-Abstand $10 \cdot \lg(SNR) = 30$ dB führt zum absoluten Wert $SNR = 1000$. In die obige Gleichung eingesetzt ergibt dies näherungsweise einen Korrelationskoeffizienten von 0.9995.

Musterlösung zur Aufgabe A4.9

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ (und allen Vielfachen der Periodendauer T_0) hat jedes Mustersignal $x_i(t)$ einen Wert zwischen 1V und 2V (Mittelwert: 1.5V). Dagegen ist bei $t = T_0/4$ der Signalwert des gesamten Ensembles identisch 0. Das heißt: Bereits der lineare Mittelwert erfüllt die Bedingung der Stationarität nicht; der Prozess $\{x_i(t)\}$ ist nicht stationär und kann deshalb auch nicht ergodisch sein.

Dagegen sind beim Prozess $\{y_i(t)\}$ aufgrund der gleichverteilten Phase zu allen Zeitpunkten die gleichen Momente zu erwarten; der Prozess ist stationär. Da bei der AKF-Berechnung die Phasenbeziehungen verloren gehen, steht jede einzelne Musterfunktion stellvertretend für den gesamten Prozess. Deshalb kann hier hypothetisch von Ergodizität ausgegangen werden. Am Ende der Aufgabe ist zu überprüfen, ob diese Annahme gerechtfertigt ist. Das heißt: Richtig sind die Lösungsvorschläge 3 und 4.

b) Aufgrund der Ergodizität kann jede Musterfunktion zur AKF-Berechnung herangezogen werden. Wir benutzen hier willkürlich die Phase $\varphi_i = 0$. Aufgrund der Periodizität genügt die Mitteilung über nur eine Periodendauer T_0 . Dann gilt:

$$\varphi_y(\tau) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} y(t) \cdot y(t + \tau) dt = \frac{x_0^2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_0(t + \tau)) dt.$$

Mit der trigonometrischen Beziehung

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

folgt daraus weiter:

$$\varphi_y(\tau) = \frac{x_0^2}{2T_0} \cdot \int_0^{T_0} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) dt + \frac{x_0^2}{2T_0} \cdot \int_0^{T_0} \cos(-2\pi f_0 \tau) dt.$$

Das erste Integral ist 0 (Integration über zwei Perioden der Cosinusfunktion), der zweite Integrand ist unabhängig von der Integrationsvariablen t . Daraus folgt:

$$\varphi_y(\tau) = \frac{x_0^2}{2} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau).$$

Für die angegebenen Zeitpunkte gilt mit $x_0 = 2V$:

$$\varphi_y(0) \equiv \underline{2V^2}; \quad \varphi_y(0.25 \cdot T_0) \equiv \underline{0}; \quad \varphi_y(1.5 \cdot T_0) \equiv \underline{-2V^2}.$$

c) Der Mittelwert m_y kann aus dem Grenzwert der AKF für $\tau \rightarrow \infty$ ermittelt werden, wenn man die periodischen Anteile ausschließt. Daraus folgt $m_y = 0$.

Die Varianz (Leistung) ist gleich dem AKF-Wert an der Stelle $\tau = 0$, also $2V^2$. Der Effektivwert ist die Quadratwurzel daraus: $\sigma_y \approx 1.414 V$.

Die Periodendauer eines periodischen Zufallsprozesses bleibt in der AKF erhalten, das heißt, auch die Periodendauer der AKF beträgt T_0 . Richtig ist also nur der erste Lösungsvorschlag.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.9

- a) Die Periodendauer beträgt $T_0 = 5T$.
- b) Aufgrund der Periodizität genügt die Mittelung über eine Periodendauer T_0 :

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t) dt \\ &= \frac{1}{5T} (2V \cdot 2T - 1V \cdot 2T) \underline{\underline{= 0.4V}}. \end{aligned}$$

- c) In analoger Weise zu Aufgabe b) erhält man für die mittlere Leistung:

$$P_x = \frac{2T}{5T} ((2V)^2 + (-1V)^2) \underline{\underline{= 2V^2}}.$$

- d) Die Bilder zeigen das Produkt $x(t) \cdot x(t + T)$ bzw. $x(t) \cdot x(t + 2T)$, jeweils im Bereich von 0 bis $T_0 = 5T$.

Zu beachten ist, dass $x(t + T)$ eine Verschiebung des Signals $x(t)$ um T nach links bedeutet. Aus den beiden Grafiken folgen die Beziehungen:

$$\varphi_x(T) = \frac{1}{5} (4V^2 + 1V^2 - 2V^2) \underline{\underline{= 0.6V^2}},$$

$$\varphi_x(2T) = \frac{1}{5} (-2V^2 \cdot 3) \underline{\underline{= -1.2V^2}}.$$

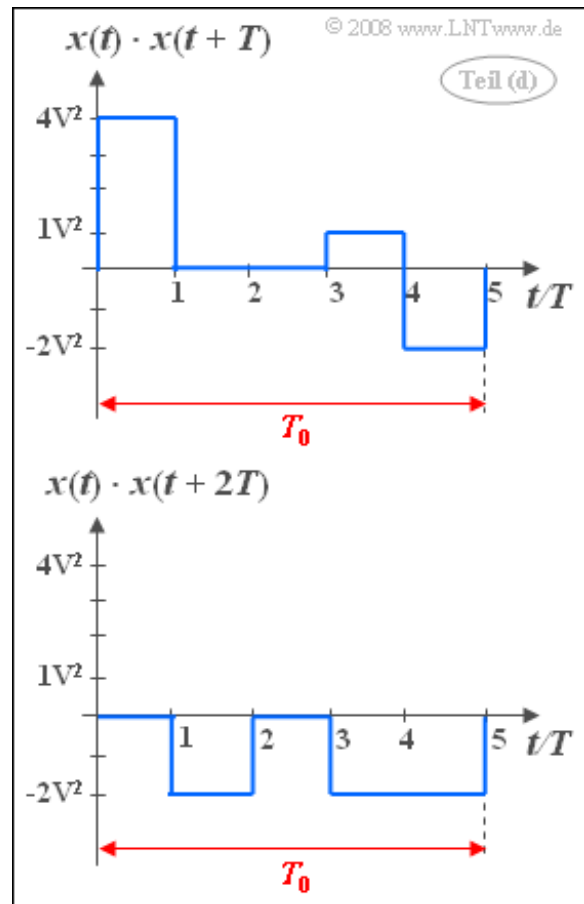
- e) Eine Autokorrelationsfunktion ist stets gerade: $\varphi_x(-\tau) = \varphi_x(\tau)$. Bei periodischen Prozessen ist die AKF zudem ebenfalls periodisch und zwar mit genau der gleichen Periodendauer T_0 wie die einzelnen Musterfunktionen. Daraus folgt:

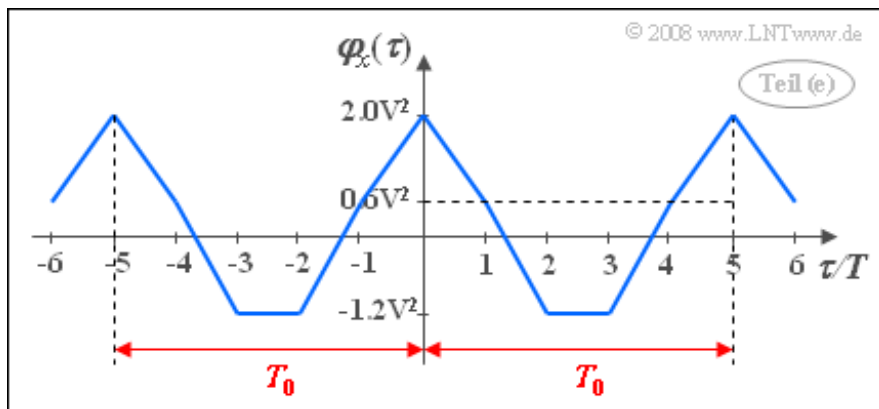
$$\varphi_x(0) = \varphi_x(5T) = \varphi_x(10T) = \dots = P_x = 2V^2,$$

$$\varphi_x(3T) = \varphi_x(-3T) = \varphi_x(2T) = \dots = \underline{\underline{-1.2V^2}},$$

$$\varphi_x(4T) = \varphi_x(-4T) = \varphi_x(T) = \dots = \underline{\underline{0.6V^2}}.$$

Die berechneten AKF-Werte können durch Geradenabschnitte miteinander verbunden werden, da die Integration über Rechteckfunktionen stets lineare Teilabschnitte ergibt.





f) Die Mittelung über die 5 Intervalle 0 bis T , T bis $2T$, ... , $4T$ bis $5T$ liefern (jeweils mit der Einheit V^2): 1.3; -0.3, -1.2, -0.3, 1.3. Daraus ergibt sich der Erwartungswert $E[\varphi_x(\tau)] = 0.16 V^2$. Dies entspricht dem Quadrat des Mittelwertes m_x (siehe Teilaufgabe b).

Musterlösung zur Aufgabe A4.10

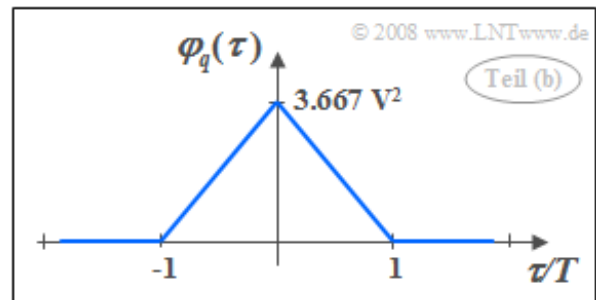
a) Der AKF-Wert an der Stelle $\tau = 0$ entspricht der mittleren Signalleistung, also dem quadratischen Mittelwert von $q(t)$. Für diesen gilt:

$$\varphi_q(\tau = 0) = \frac{1}{6}(3 \text{ V})^2 + \frac{2}{6}(1 \text{ V})^2 + \frac{2}{6}(-1 \text{ V})^2 + \frac{1}{6}(-3 \text{ V})^2 = \frac{22}{6} \text{ V}^2 \underline{\underline{= 3.667 \text{ V}^2}}.$$

b) Die einzelnen Symbole wurden als statistisch unabhängig vorausgesetzt. Deshalb und wegen des fehlenden Gleichanteils gilt hier für jeden ganzzahligen Wert von ν :

$$E[q(t) \cdot q(t + \nu T)] = E[q(t)] \cdot E[q(t + \nu T)] \underline{\underline{= 0}}.$$

Somit hat die gesuchte AKF den rechts skizzierten Verlauf. Im Bereich $-T \leq \tau \leq T$ ist die AKF aufgrund der rechteckförmigen Impulsform abschnittsweise linear, also dreieckförmig.



c) Die AKF $\varphi_b(\tau)$ des Binärsignals ist aufgrund der statistisch unabhängigen Symbole im Bereich $|\tau| > T$ ebenfalls identisch 0, und für $-T \leq \tau \leq T$ ergibt sich ebenfalls eine Dreiecksform.

Für den quadratischen Mittelwert erhält man:

$$\varphi_b(\tau = 0) = b_0^2.$$

Mit $b_0 = 1.915 \text{ V}$ sind die beiden Autokorrelationsfunktionen $\varphi_q(\tau)$ und $\varphi_b(\tau)$ identisch.

d) Aus der Autokorrelationsfunktion lassen sich ermitteln:

- die Periodendauer T_0 (diese ist für die Mustersignale und die AKF gleich),
- der lineare Mittelwert (Wurzel aus dem Endwert der AKF für $\tau \rightarrow \infty$), und
- die Varianz (Differenz der AKF-Werte von $\tau = 0$ und $\tau \rightarrow \infty$).

Nicht ermittelt werden können:

- die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (siehe Punkt b und c),
- die Momente höherer Ordnung (für deren Berechnung benötigt man die WDF), sowie
- alle Phasenbeziehungen und Symmetrieeigenschaften.

Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.10

a) Der quadratische Mittelwert ergibt sich zu $R \cdot P_x = 50 \Omega \cdot 5 \text{ mW} = 0.25 \text{ V}^2$. Daraus folgt der Effektivwert $\sigma_x \equiv 0.5 \text{ V}$.

b) Wegen $P_x = \varphi_x(\tau = 0)$ gilt für die AKF allgemein:

$$\varphi_x(\tau) = 5 \text{ mW} \cdot e^{-\pi \cdot (\tau / \nabla \tau_x)^2}.$$

Daraus erhält man:

$$\varphi_x(\tau = 2 \mu\text{s}) = 5 \text{ mW} \cdot e^{-0.16\pi} \approx 3.025 \text{ mW},$$

$$\varphi_x(\tau = 5 \mu\text{s}) = 5 \text{ mW} \cdot e^{-\pi} \approx 0.216 \text{ mW}.$$

c) Hier gilt folgende Bestimmungsgleichung:

$$e^{-\pi \cdot (T_K / \nabla \tau_x)^2} \stackrel{!}{=} 0.5 \quad \Rightarrow \quad (T_K / \nabla \tau_x)^2 = \sqrt{\ln(2) / \pi}.$$

Daraus folgt $T_K \approx 2.35 \mu\text{s}$. Bei anderer AKF-Form erhält man ein anderes Verhältnis für $T_K / \nabla \tau_x$.

d) Wegen $P_x = P_y$ sind die quadratischen Mittelwerte von x und y gleich, und zwar jeweils 0.25 V^2 .

Unter Berücksichtigung des Mittelwertes $m_y = -0.3 \text{ V}$ gilt:

$$m_y^2 + \sigma_y^2 = 0.25 \text{ V}^2.$$

Daraus folgt $\sigma_y \approx 0.4 \text{ V}$.

e) Bezogen auf den Einheitswiderstand $R = 1 \Omega$ lautet die AKF des Prozesses $\{y_i(t)\}$:

$$\varphi_y(\tau) = m_y^2 + \sigma_y^2 \cdot e^{-\pi \cdot (\tau / \nabla \tau_y)^2}.$$

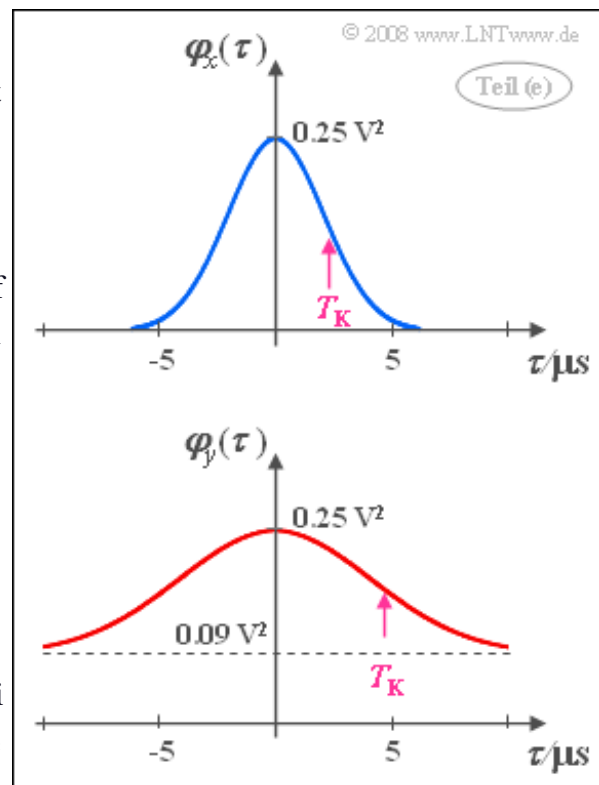
Rechts sehen Sie den Funktionsverlauf. Bezogen auf den Widerstand $R = 50 \Omega$ ergeben sich die nachfolgend angegebenen AKF-Werte:

$$\begin{aligned} \varphi_y(\tau = 0) &= 5 \text{ mW}, \\ \varphi_y(\tau \rightarrow \infty) &= 1.8 \text{ mW}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

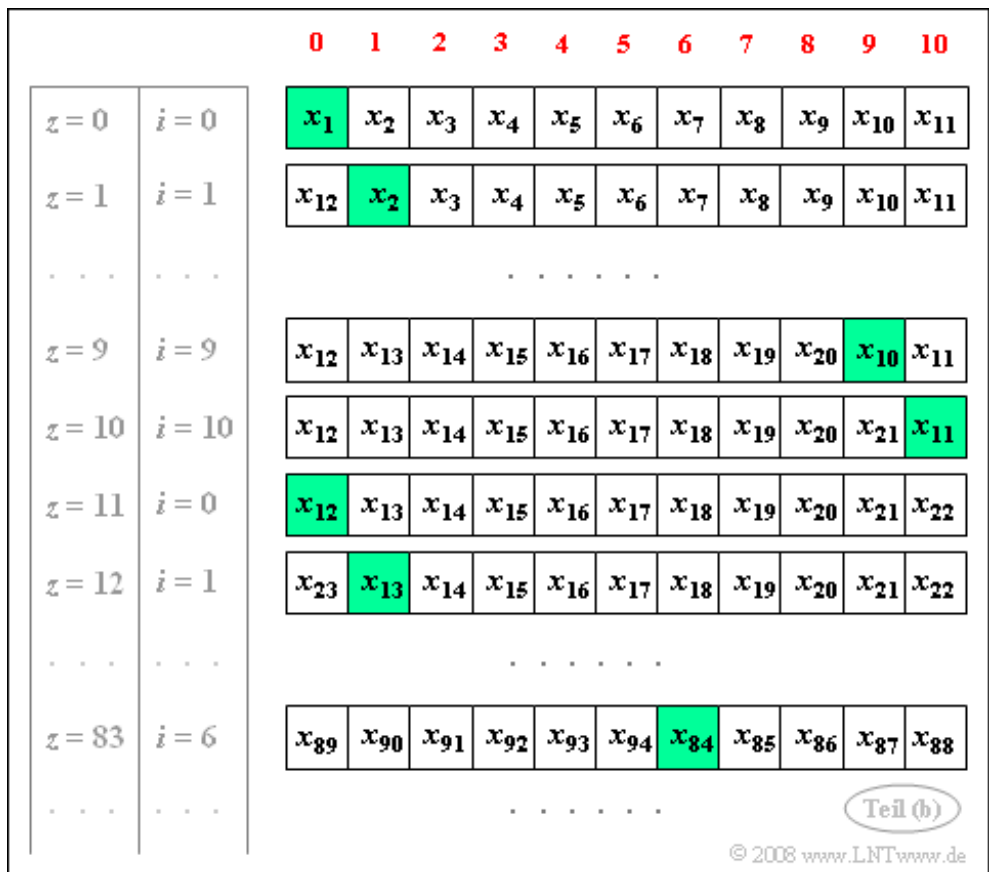
$$\varphi_y(\tau) = 1.8 \text{ mW} + 3.2 \text{ mW} \cdot e^{-\pi \cdot (\tau / \nabla \tau_y)^2}$$

mit dem Zahlenwert 1.938 mW bei $\tau = 10 \mu\text{s}$. Bei positivem Mittelwert m_y (mit gleichem Betrag) würde sich an der AKF nichts ändern, da m_y in die AKF-Gleichung quadratisch eingeht.



Musterlösung zur Aufgabe A4.11

- a) Aus $z = 0$ und $k = 6$ ergibt sich gemäß dem Programm: $i = 0$ und $j = 6$. Die entsprechenden Speicherinhalte sind $H[0] = x_1$ und $H[6] = x_7$.
- b) In das Feld $H[0]$ wird die Zufallsgröße x_{12} eingetragen: $i = 0$, Index $v = 12$.
- c) Das nachfolgende Bild zeigt die Belegung des Hilfsfeldes $H[0] \dots H[10]$ mit den Zufallswerten x_v . Jeweils grün hinterlegt ist die Speicherzelle $H[i]$. In diesen Speicherplatz wird jeweils am Ende der Schleife (Zeile 18) die neue Zufallsgröße eingetragen.



Für $z = 83$ und $k = 6$ ergibt sich $i = 83 \bmod 11 = 6$ und $j = (i + k) \bmod 11 = 1$. In diesen Speicherzellen liegen die Zufallsgrößen x_{84} und x_{90} . Am Ende des Schleifendurchlaufs $z = 83$ wird in $H[6]$ der Wert x_{84} durch x_{95} ersetzt.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.11

a) Zur Berechnung des AKF-Wertes $\varphi_x(0)$ wird über $N = 10000$ Summanden gemittelt, für $\varphi_x(10)$ nur über $N - l = 9990$.

b) Die Rechenzeit steigt mit N und $l + 1$ näherungsweise linear an, wie aus der rot hervorgehobenen AKF-Berechnung hervorgeht. Die Rechenzeit für die weiteren Programmteile kann demgegenüber vernachlässigt werden. Natürlich wird die Berechnung mit steigendem N auch genauer. Dies geht hier – im Gegensatz zum Programm „akf1“ von Aufgabe A4.11 – allerdings auf Kosten des erforderlichen Speicherbedarfs. Da jede Float-Variable genau vier Byte beansprucht, benötigt alleine das Hilfsfeld $H[10000]$ einen Speicher von 40 kByte. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.

c) Je stärker die statistischen Bindungen innerhalb des Zufallsprozesses sind, desto ungenauer ist bei gegebenem N die AKF-Berechnung. Diesen Sachverhalt kann man sich beispielsweise anhand der Leistungsberechnung (AKF-Wert an der Stelle $k = 0$) verdeutlichen: Sind alle N Abtastwerte statistisch unabhängig, so liefern alle Beiträge die maximale Information über den AKF-Wert $\varphi_x(k = 0)$.

Bestehen jedoch statistische Bindungen zwischen x_v und x_{v+1} , nicht jedoch zwischen x_v und x_{v+2} , so liefern nur die Hälfte aller Abtastwerte die volle Information über $\varphi_x(k = 0)$ und alle anderen nur eingeschränkte Informationen. Dieser auf Korrelationen beruhende Informationsverlust kann in diesem Beispiel nur durch eine Verdopplung von N ausgeglichen werden.

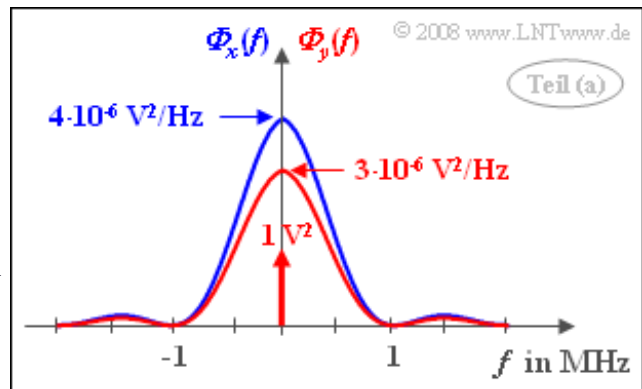
Die letzte Aussage trifft ebenfalls zu, wie im Kapitel 4.4 auf der Seite **Genauigkeit der numerischen AKF-Berechnung** im Theorieteil ausführlich erläutert wird. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 3.

Musterlösung zur Aufgabe A4.12

a) Das LDS ist die Fouriertransformierte der AKF. Mit der Fourierkorrespondenz auf der Angabenseite und $x_0 = 2 \text{ V}$ erhält man:

$$\Phi_x(f) = x_0^2 \cdot T \cdot \text{si}^2(\pi f T).$$

Der LDS-Wert bei $f = 0$ ist $4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$. Bei $f = 500 \text{ kHz}$ ist das LDS um den Faktor $\text{si}^2(\pi/2) = 4/\pi^2 \approx 0.405$ kleiner ($1.62 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$). Bei $f = 1 \text{ MHz}$ besitzt $\Phi_x(f)$ die erste Nullstelle.



b) Aufgrund des rechteckigen Signalverlaufs ändert sich an der Dreiecksform der AKF prinzipiell nichts. Der AKF-Wert bei $\tau = 0$ gibt wieder das Moment 2. Ordnung an. Mit $p = 0.25$ erhält man:

$$\varphi_y(0) = \frac{1}{4} \cdot (4\text{V})^2 + \frac{3}{4} \cdot (0\text{V})^2 = 4 \text{ V}^2.$$

Ab $\tau = T$ ist die AKF konstant gleich m_y^2 . Mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.25$ und

$$m_y = p \cdot 4\text{V} + (1 - p) \cdot 0\text{V} = 1 \text{ V}$$

erhält man ab $\tau = T$ den konstanten Wert $\varphi_y(\tau \geq T) = 1 \text{ V}^2$.

c) Die AKF kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$\varphi_y(\tau) = 1\text{V}^2 + 3\text{V}^2 \cdot \Delta(\tau).$$

Der AKF-Gleichanteil (mit 1V^2) führt im LDS zu einer Diracfunktion bei $f = 0$ (siehe Skizze zu a). Der dreieckförmige AKF-Term bewirkt einen kontinuierlichen LDS-Anteil entsprechend der si^2 -Form:

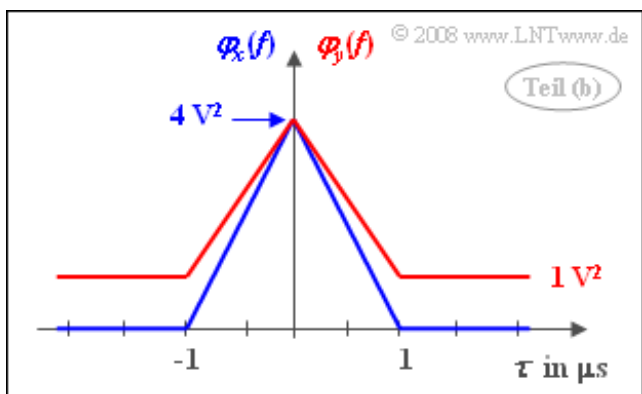
$$\Phi_y(f) = 1\text{V}^2 \cdot \delta(f) + 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \cdot \text{si}^2(\pi f T).$$

Für $f = 500 \text{ kHz}$ ($f \cdot T = 0.5$) ergibt sich der LDS-Wert zu $1.216 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$.

d) Die Leistung ist als Integral über das LDS berechenbar. Unter Berücksichtigung der spektralen Begrenzung auf 1 MHz erhält man mit der Substitution $u = f \cdot T$:

$$\begin{aligned} P_M &= 1\text{V}^2 + 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \cdot \int_{-1\text{MHz}}^{1\text{MHz}} \text{si}^2(\pi f T) \, df = \\ &= 1\text{V}^2 + 3\text{V}^2 \cdot 2 \cdot \int_0^1 \text{si}^2(\pi u) \, du = (1 + 3 \cdot 2 \cdot 0.456) \text{V}^2 = 3.736 \text{ V}^2. \end{aligned}$$

Würden dagegen alle Spektralanteile erfasst, ergäbe sich die Leistung $\varphi_y(\tau = 0) = 4 \text{ V}^2$.



Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.12

a) Richtig sind die Lösungsvorschläge 2, 3 und 4. Die Autokorrelationsfunktion (AKF) ist nämlich die Fouriertransformierte des Leistungsdichtespektrums (LDS). Dabei gilt:

$$\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad \varphi_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau).$$

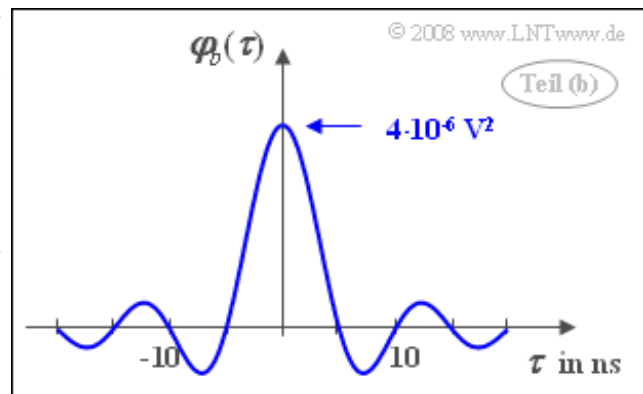
„Echt“ weißes Rauschen gibt es in der Physik allerdings nicht, da ein solches eine unendlich große Signalleistung aufweisen müsste (das Integral über das LDS und der AKF-Wert bei $\tau = 0$ sind jeweils unendlich groß). *Thermisches Rauschen* hat bis zu Frequenzen von etwa 6000 GHz ein konstantes LDS. Da alle (derzeitigen) Übertragungssysteme in einem sehr viel niedrigeren Frequenzbereich arbeiten, kann man thermisches Rauschen mit guter Näherung als „weiß“ bezeichnen.

Die statistische Eigenschaft „weiß“ sagt nichts über die Amplitudenverteilung aus, die allein durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) festgelegt ist. Betrachtet man beispielsweise die Phase eines bandpassförmigen Signals als die stochastische Größe, so wird diese oft als gleichverteilt zwischen 0 und 2π modelliert. Bestehen zwischen den jeweiligen Phasenwinkeln zu unterschiedlichen Zeiten keine statistischen Bindungen, so ist auch dieser Zufallsprozess „weiß“.

b) Das LDS ist ein Rechteck der Breite $2B$ und der Höhe $N_0/2$. Die Fourierrücktransformation ergibt eine si-Funktion:

$$\varphi_b(\tau) = N_0 \cdot B \cdot \text{si}(2\pi B\tau).$$

Der AKF-Wert an der Stelle $\tau = 0$ entspricht der Rechteckfläche: $(N_0/2) \cdot 2B = 4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2$.



c) Der AKF-Wert an der Stelle $\tau = 0$ ergibt die Leistung; die Wurzel hieraus bezeichnet man als den Effektivwert: $\sigma_b = 2 \text{ mV}$.

d) Die bei (b) berechnete AKF hat Nullstellen im äquidistanten Abstand von $1/(2B) = 5 \text{ ns} = T_A$. Das bedeutet: Es bestehen somit keine statistischen Bindungen zwischen den beiden Signalwerten $b(t)$ und $b(t + v \cdot T_A)$, wobei v alle ganzzahligen Werte annehmen kann.

e) Der AKF-Wert bei $\tau = T_A = 1 \text{ ns}$ beträgt

$$\varphi_b(\tau = T_A) = 4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2 \cdot \text{si}(\pi/5) \approx 3.742 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2$$

und ist damit positiv. Dieses Ergebnis besagt: Zwei um $T_A = 1$ Nanosekunde auseinander liegende Signalwerte sind positiv korreliert \Rightarrow Lösungsvorschlag 2. Ist $b(t)$ positiv und groß, dann ist mit großer Wahrscheinlichkeit auch $b(t + 1 \text{ ns})$ positiv und groß. Dagegen besteht zwischen $b(t)$ und $b(t + 7 \text{ ns})$ eine negative Korrelation: Ist $b(t)$ positiv, so ist $b(t + 7 \text{ ns})$ wahrscheinlich negativ.

Musterlösung zur Aufgabe A4.13

a) Die äquivalente LDS-Bandbreite ist der Kehrwert der äquivalenten AKF-Dauer:

$$\nabla f_x = 1/\nabla \tau_x = 200 \text{ kHz.}$$

b) Die angegebene Fourierkorrespondenz kann man wie folgt an die Aufgabenstellung anpassen:

$$K \cdot e^{-\pi(\tau/\nabla \tau_x)^2} \circ \longrightarrow \bullet \frac{K}{\nabla f_x} \cdot e^{-\pi(f/\nabla f_x)^2}.$$

Mit $K = 0.25 \text{ V}^2$ und $\nabla f_x = 200 \text{ kHz}$ erhält man:

$$\Phi_x(f) = 1.25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \cdot e^{-\pi(f/\nabla f_x)^2}.$$

Bei der Frequenz $f = 0$ ergibt sich somit $1.25 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$. Der LDS-Wert bei $f = 200 \text{ kHz} = \nabla f_x$ ist um den Faktor $e^{-\pi}$ kleiner, beträgt also $5.4 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2/\text{Hz}$.

c) Ein mittelwertfreier Prozess hat stets ein kontinuierliches LDS zur Folge. Dieses ist um so schmaler, je breiter die AKF ist (Reziprozitätsgesetz). Da die Prozessleistung gleich dem Integral über das LDS ist, muss bei konstanter Prozessleistung eine breitere AKF (schmaleres LDS) durch höhere LDS-Werte ausgeglichen werden. Ein Gleichanteil oder periodische Anteile führen stets zu Diracfunktionen im LDS; ansonsten ist das LDS stets wertkontinuierlich. Richtig sind die Lösungsvorschläge 1, 2 und 4.

d) Analog zu Teilaufgabe (b) gilt mit $\nabla f_y = 100 \text{ kHz}$:

$$\Phi_y(f) = \frac{0.09 \text{ V}^2}{\nabla f_y} \cdot e^{-\pi(f/\nabla f_y)^2} + m_y^2 \cdot \delta(f).$$

Aufgrund des Gleichanteils gibt es zusätzlich zum kontinuierlichen LDS-Anteil noch einen Dirac bei der Frequenz $f = 0$. Der kontinuierliche LDS-Anteil bei $f = 0$ beträgt $0.9 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$. Der Anteil bei $f = 2 \cdot \nabla f_y = 200 \text{ kHz}$ ist deutlich, nämlich um den Faktor $e^{-4} \approx 7 \cdot 10^{-18}$ geringer. Hier lautet das LDS-Ergebnis: $6.44 \cdot 10^{-24} \text{ V}^2/\text{Hz}$.

e) Das LDS eines mittelwertbehafteten Prozesses beinhaltet allgemein eine Diracfunktion bei $f = 0$ mit Gewicht m_y^2 ; im vorliegenden Fall ist dieser Wert gleich 0.16 V^2 . Da $\delta(f)$ die Einheit $1/\text{Hz} = \text{s}$ besitzt, unterscheiden sich die Einheiten des kontinuierlichen und des diskreten LDS-Anteils. Richtig ist also nur der zweite Lösungsvorschlag.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.13

a) Der diskrete AKF-Wert für $k = 0$ gibt den quadratischen Mittelwert (hier gleich der Varianz) der Quellensymbole an. Da q_v nur die Werte -1 und $+1$ annehmen kann, ist $\varphi_q(k = 0) \equiv 1$.

b) Die zeitdiskrete AKF und deren Fouriertransformierte lauten:

$$A\{\varphi_q(\tau)\} = \varphi_q(k = 0) \cdot T \cdot \delta(\tau) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad P\{\Phi_q(f)\} = \varphi_q(k = 0) \cdot T = T.$$

Es ist berücksichtigt, dass $\varphi_q(k = 0) = \sigma_q^2 = 1$ ist. Das bedeutet: Die periodische Fortsetzung von $\Phi_q(f)$ ergibt für alle Frequenzen den gleichen Wert.

Dagegen kann die zeitkontinuierliche AKF wie folgt dargestellt werden:

$$\varphi_q(\tau) = A\{\varphi_q(\tau)\} \star (\Delta(\tau)/T).$$

Das dazugehörige Leistungsdichtespektrum (Fouriertransformierte der AKF) ist dann das Produkt der Fouriertransformierten der beiden Faltungsterme:

$$\Phi_q(f) = P\{\Phi_q(f)\} \cdot \text{si}^2(\pi f T) = T \cdot \text{si}^2(\pi f T).$$

Aufgrund der gewählten AKF-Interpolation (mit Geradenabschnitten) aus ihren Abtastwerten ergibt sich ein si^2 -förmiges LDS. Ein rechteckförmiges Spektrum (Lösungsvorschlag 2) würde sich nur bei si -förmiger Interpolation einstellen. Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 3.

c) Die codierte Folge lautet: $+1, 0, -1, +1, 0, -1, +1, 0, 0, 0$. Das 6. Symbol ist somit $c_6 \equiv -1$.

d) Die Auftretswahrscheinlichkeiten der Werte $-1, 0$ und $+1$ sind $0.25, 0.5, 0.25$. Daraus folgt:

$$\varphi_c(k = 0) = 0.25 \cdot (-1)^2 + 0.5 \cdot 0^2 + 0.25 \cdot (+1)^2 \equiv 0.5.$$

e) Für den AKF-Wert bei $k = 1$ betrachtet man das Produkt $c_v \cdot c_{v+1}$. Es ergeben sich die unten gezeigten Kombinationen. Einen Beitrag liefern nur Produkte $c_v \cdot c_{v+1} \neq 0$ mit $\Pr[c_v \cap c_{v+1}] \neq 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_c(k = 1) &= \Pr((c_v = +1) \cap (c_{v+1} = -1)) \cdot (+1) \cdot (-1) \\ &+ \Pr((c_v = -1) \cap (c_{v+1} = +1)) \cdot (-1) \cdot (+1). \end{aligned}$$

c_v	0	0	0	+1	+1	+1	-1	-1	-1
c_{v+1}	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	-1
$c_v \cdot c_{v+1}$	0	0	0	0	+1	-1	0	-1	+1
$\Pr[c_v \cap c_{v+1}]$			Teil (e)		0	1/8		1/8	0

© 2008 www.LNTwww.de

In der Tabelle sind diese Terme rot gekennzeichnet. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \Pr((c_v = +1) \cap (c_{v+1} = -1)) &= \Pr(c_v = +1) \cdot \Pr(c_{v+1} = -1 \mid c_v = +1) \\ &= 1/4 \cdot 1/2 = 1/8. \end{aligned}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass „+1“ mit der Wahrscheinlichkeit 0.25 auftritt und danach „-1“ nur in der Hälfte der Fälle folgt. Das gleiche Ergebnis erhält man für den zweiten Beitrag. Damit gilt:

$$\varphi_c(k=1) = \frac{1}{8} \cdot (+1) \cdot (-1) + \frac{1}{8} \cdot (-1) \cdot (+1) = \underline{-0.25}.$$

Für $k = -1$ ergibt sich aus Symmetriegründen der gleiche Wert. Zur Berechnung von $\varphi_c(k=2)$ muss über $3^3 = 27$ Kombinationen gemittelt werden. Das Ergebnis ist jedoch Null.

f) Die Fouriertransformierte der zeitdiskreten AKF $A\{\varphi_c(\tau)\}$ lautet:

$$P\{\Phi_c(f)\} = T \cdot \varphi_c(k=0) + 2T \cdot \varphi_c(k=1) \cdot \cos(2\pi fT).$$

Mit dem Ergebnis von e) folgt daraus:

$$P\{\Phi_c(f)\} = \frac{T}{2}(1 - \cos(2\pi fT)) = T \cdot \sin^2(\pi fT).$$

Wie unter Punkt (b) gezeigt, gilt dann für das LDS – also die Fouriertransformierte von $\varphi_c(\tau)$:

$$\Phi_c(f) = T \cdot \sin^2(\pi fT) \cdot \text{si}^2(\pi fT) = T \cdot \frac{\sin^4(\pi fT)}{(\pi fT)^2}.$$

Bei der Frequenz $f = 0$ ergibt sich der Wert 0. Für $f = 500$ kHz erhält man $f \cdot T = 0.5$ und somit:

$$\Phi_c(f = 500 \text{ kHz}) = T \cdot \frac{\sin^4(\pi/2)}{(\pi/2)^2} = \frac{4T}{\pi^2} = \underline{0.405 \cdot 10^{-6} \text{ 1/Hz}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.14

a) Der AKF-Wert bei $\tau = 0$ gibt die mittlere Leistung an:

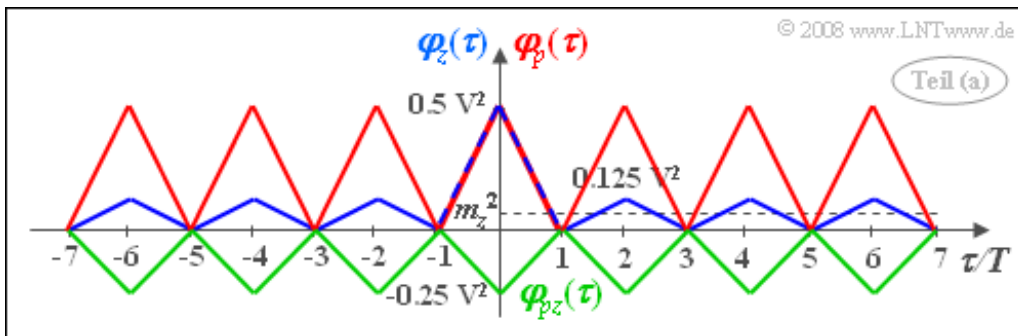
$$\varphi_z(\tau = 0) = \frac{1}{2} \cdot (1V)^2 \equiv \underline{0.5V^2}.$$

Für $\tau = \pm T, \pm 3T, \dots$ ergibt sich $\varphi_z(\tau) = 0$, während für die Zwischenwerte $\tau = \pm 2T, \pm 4T, \dots$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_z(\tau = \pm 2T) &= \varphi_z(\tau = \pm 4T) = \dots = \\ &= \frac{1V^2}{2} (p \cdot p + p \cdot (p-1) + (p-1) \cdot p + (p-1) \cdot (p-1)) \\ &= 0.5 V^2 (p^2 - 2p \cdot (1-p) + (1-p)^2) = 0.5 V^2 \cdot (1-2p)^2. \end{aligned}$$

Hierbei steht p für $p \cdot (+1)$ und $(p-1)$ für $(1-p) \cdot (-1)$, also jeweils Wahrscheinlichkeit mal normierter Amplitudenwert. Für $p = 0.25$ ergeben sich diese Zwischenwerte zu $0.125 V^2$.

Die nachfolgende Skizze zeigt den Verlauf von $\varphi_z(\tau)$ für $p = 0.25$ im Bereich von $-7T \leq \tau \leq 7T$ als blaue Kurve. Aufgrund des rechteckförmigen Signalverlaufs ergeben sich eine Summe von Dreieckfunktionen. Für $p = 0.5$ würden die äußeren (kleineren) Dreiecke verschwinden.



b) Das Ergebnis ist in der allgemeingültigen Darstellung von (a) als Sonderfall für $p = 1$ enthalten. Man erhält nun eine periodische AKF (siehe roter Kurvenverlauf in obiger Skizze) mit

$$\begin{aligned} \varphi_p(\tau = 0) &= \varphi_p(\tau = \pm 2T) = \varphi_p(\tau = \pm 4T) = \dots \equiv \underline{0.5V^2}, \\ \varphi_p(\tau = \pm T) &= \varphi_p(\tau = \pm 3T) = \dots \equiv \underline{0}. \end{aligned}$$

c) Auch für die KKF ergibt sich für $\tau = \pm T, \pm 3T, \dots$ stets der Wert 0. Dagegen sind die KKF-Werte für $\tau = \pm 2T, \pm 4T, \dots$ identisch mit denen bei $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_{pz}(\tau = 0) &= \varphi_{pz}(\tau = \pm 2T) = \varphi_{pz}(\tau = \pm 4T) = \dots = \\ &= \frac{1V^2}{2} (p - (1-p)) = \frac{2p-1}{2} V^2. \end{aligned}$$

Man erhält mit $p = 0.25$ folgende Ergebnisse (siehe grüne Kurve in obiger Skizze):

$$\varphi_{pz}(\tau = 0) \equiv \underline{-0.25V^2}, \quad \varphi_{pz}(\tau = 3T) \equiv \underline{0}, \quad \varphi_{pz}(\tau = 6T) \equiv \underline{-0.25V^2}.$$

Mit $p = 1$ würde dagegen $z(t) \equiv p(t)$ gelten und damit natürlich auch $\varphi_{pz}(\tau) \equiv \varphi_p(\tau) \equiv \varphi_z(\tau)$. Für den Sonderfall $p = 0.5$ ergäbe sich keine Korrelation zwischen $p(t)$ und $z(t)$: $\varphi_{pz}(\tau) = 0$.

d) Durch Einsetzen von $c(t) = a(t) + b(t)$ in die allgemeine AKF-Definition erhält man:

$$\varphi_c(\tau) = \overline{c(t) \cdot c(t + \tau)} = \overline{a(t) \cdot a(t + \tau)} + \overline{a(t) \cdot b(t + \tau)} + \overline{b(t) \cdot a(t + \tau)} + \overline{b(t) \cdot b(t + \tau)}$$

$$\Rightarrow \varphi_c(\tau) = \varphi_a(\tau) + \varphi_{ab}(\tau) + \varphi_{ba}(\tau) + \varphi_b(\tau).$$

Richtig ist der Lösungsvorschlag 2. Der Lösungsvorschlag 1 trifft nur zu, wenn $a(t)$ und $b(t)$ unkorreliert sind. Der letzte Vorschlag, die Faltungsoperation, ist immer falsch. Eine ähnliche Gleichung würde sich nur dann ergeben, wenn wir die WDF $f_c(c)$ der Summe $c(t) = a(t) + b(t)$ betrachten und $a(t)$ und $b(t)$ statistisch unabhängig sind:

$$f_c(c) = f_a(a) \star f_b(b).$$

e) Mit dem Ergebnis von (d) und unter Berücksichtigung des Faktors 1/2 erhält man:

$$\varphi_s(\tau) = \frac{1}{4} (\varphi_p(\tau) + \varphi_z(\tau) + 2 \cdot \varphi_{pz}(\tau)).$$

Hierbei ist bereits berücksichtigt, dass die KKF zwischen p und z eine gerade Funktion ist, so dass auch $\varphi_{pz}(\tau) = \varphi_{zp}(\tau)$ gilt. Für $\tau = 0$ erhält man deshalb mit den obigen Ergebnissen allgemein:

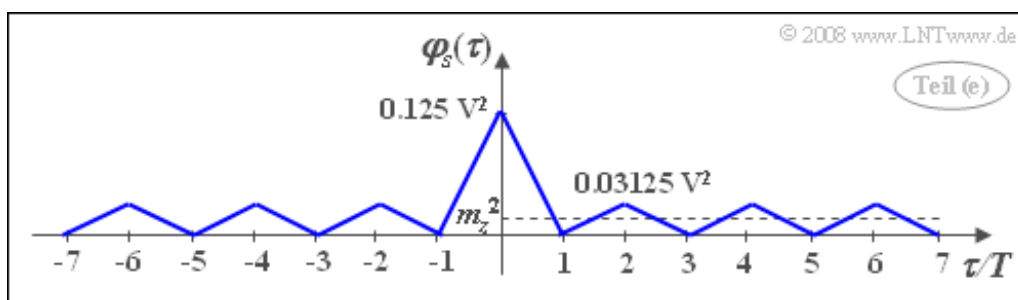
$$\varphi_s(\tau = 0) = \frac{1}{4} \left(0.5V^2 + 0.5V^2 + 2 \cdot \frac{2p - 1}{2} V^2 \right).$$

Mit $p = 0.25$ ergibt sich $\varphi_{zp}(\tau = 0) = 0.125 V^2$. Dieses Ergebnis ist plausibel. Im Mittel ist nur in jedem achten Intervall $s(t) = 1 V$; ansonsten ist $s(t) = 0 V$.

Für geradzahlige Vielfache von T gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_s(\tau = \pm 2T) &= \varphi_s(\tau = \pm 4T) = \dots = \\ &= \frac{0.5V^2}{4} ((1 - 2p)^2 + 1 + 2 \cdot (2p - 1)) = 0.5 V^2 \cdot p^2. \end{aligned}$$

Mit $p = 0.25$ erhält man hierfür den Wert $0.03125 V^2$. Alle AKF-Werte bei ungeradzahligen Vielfachen von T sind wieder 0. Damit ergibt sich folgende AKF:



Die gesuchten Zahlenwerte sind somit:

$$\varphi_s(\tau = 0) \equiv \underline{0.125V^2}, \quad \varphi_s(\tau = 3T) \equiv \underline{0}, \quad \varphi_s(\tau = 6T) \equiv \underline{-0.03125V^2}.$$

Ein Vergleich mit der Skizze zur Aufgabe (a) zeigt, dass das binäre Signal $s(t)$ bis auf den Faktor 1/4 die gleiche AKF aufweist wie das Ternärsignal $z(t)$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.14

a) Das zweiseitige Leistungsdichtespektrum $\Phi_x(f)$ ist im Bereich von $-B_x$ bis B_x konstant gleich $N_0/2$. Dessen Fouriertransformierte ergibt die AKF:

$$\varphi_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot 2B_x \cdot \text{si}(2\pi B_x \tau) = 0.02 \text{ W} \cdot \text{si}(2\pi B_x \tau).$$

Umgerechnet von $R = 50 \Omega$ auf $R = 1 \Omega$ erhält man somit (Multiplikation mit $R = 50 \Omega$):

$$\varphi_x(\tau) = 0.02 \text{ VA} \cdot 50 \text{ V/A} \cdot \text{si}(2\pi B_x \tau) = 1 \text{ V}^2 \cdot \text{si}(2\pi B_x \tau).$$

Der Effektivwert ist die Wurzel aus dem AKF-Wert bei $\tau = 0$:

$$\sigma_x \equiv \underline{1 \text{ V}}.$$

b) Für die KKF gilt im vorliegenden Fall:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \overline{x(t) \cdot y(t + \tau)} = \overline{x(t) \cdot [\alpha_1 \cdot x(t - t_1 + \tau) + \alpha_2 \cdot x(t - t_2 + \tau)]}.$$

Nach Aufspaltung der Mittelwertbildung auf die beiden Terme erhält man hieraus:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \alpha_1 \cdot \overline{x(t) \cdot x(t - t_1 + \tau)} + \alpha_2 \cdot \overline{x(t) \cdot x(t - t_2 + \tau)}.$$

Unter Verwendung der AKF kann hierfür auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}(\tau) &= \alpha_1 \cdot \varphi_x(\tau - t_1) + \alpha_2 \cdot \varphi_x(\tau - t_2) = \\ &= 1 \text{ V}^2 \cdot [\alpha_1 \cdot \text{si}(2\pi B_x(\tau - t_1)) + \alpha_2 \cdot \text{si}(2\pi B_x(\tau - t_2))]. \end{aligned}$$

Die si-Funktion weist äquidistante Nulldurchgänge bei allen Vielfachen von $1/(2B_x) = 25 \mu\text{s}$ auf, jeweils bezogen auf deren Mittellagen bei $t_1 = 200 \text{ ms}$ bzw. $t_2 = 250 \text{ ms}$.

Daraus ergeben sich die KKF-Werte zu:

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}(\tau = 0) &\equiv \underline{0}, \\ \varphi_{xy}(\tau = t_1) &= \alpha_1 \cdot \varphi_x(\tau = 0) \equiv \underline{0.5 \text{ V}^2}, \\ \varphi_{xy}(\tau = t_2) &= \alpha_2 \cdot \varphi_x(\tau = 0) \equiv \underline{0.1 \text{ V}^2}. \end{aligned}$$

c) Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist die Fouriertransformierte der KKF, ebenso wie das LDS die Fouriertransformierte der AKF angibt. Mit den Ergebnissen aus b) und c) gilt deshalb:

$$\Phi_{xy}(f) = \alpha_1 \cdot \Phi_x(f) \cdot e^{-j2\pi f t_1} + \alpha_2 \cdot \Phi_x(f) \cdot e^{-j2\pi f t_2}.$$

Außerhalb des Bereichs $|f| \leq B_x$ ist das LDS $\Phi_x(f)$ – und dementsprechend auch das KLDS $\Phi_{xy}(f)$ – identisch 0. Innerhalb dieses Intervalls gilt $\Phi_x(f) = N_0/2$. Daraus folgt in diesem Bereich:

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{N_0}{2} (\alpha_1 \cdot e^{-j2\pi f t_1} + \alpha_2 \cdot e^{-j2\pi f t_2}).$$

Es ist ersichtlich, dass $\Phi_{xy}(f)$ im Gegensatz zu $\Phi_x(f)$ eine komplexe Funktion ist. Bei $f = 0$ gilt:

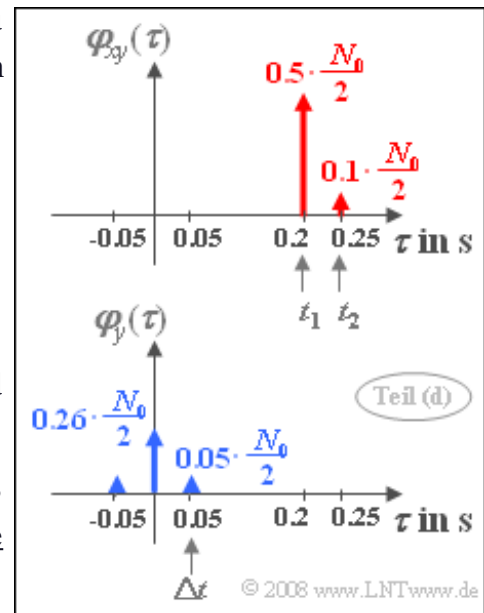
$$\Phi_{xy}(f = 0) = \frac{N_0}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) = 0.3 \cdot 10^{-6} \text{ W/Hz} \equiv \underline{15 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}.$$

d) Die Fouriertransformierte einer diracförmigen AKF führt zu einem für alle Frequenzen f konstanten LDS, das heißt tatsächlich zu echt „Weißem Rauschen“. Dieses besitzt eine unendlich große Leistung, und für die KKF kann dann geschrieben werden:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{\alpha_1 N_0}{2} \cdot \delta(\tau - t_1) + \frac{\alpha_2 N_0}{2} \cdot \delta(\tau - t_2).$$

Dieser Verlauf ist in der Grafik oben skizziert.

Im Frequenzbereich ist für $|f| \leq B_x$ tatsächlich kein Unterschied gegenüber Teilaufgabe c) feststellbar. Da nun aber echt weißes Rauschen vorliegt, ist hier im Gegensatz zu Punkt c) das KLDS nicht auf diesen Bereich beschränkt. Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 1 und 3.



e) Die AKF des echobehafteten Signals lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_y(\tau) &= \overline{y(t) \cdot y(t + \tau)} \\ &= \alpha_1^2 \cdot \overline{x(t - t_1) \cdot x(t - t_1 + \tau)} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \overline{x(t - t_1) \cdot x(t - t_2 + \tau)} \\ &\quad + \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot \overline{x(t - t_2) \cdot x(t - t_1 + \tau)} + \alpha_2^2 \cdot \overline{x(t - t_2) \cdot x(t - t_2 + \tau)}. \end{aligned}$$

Für den ersten und den letzten Mittelwert gilt:

$$\overline{x(t - t_1) \cdot x(t - t_1 + \tau)} = \overline{x(t - t_2) \cdot x(t - t_2 + \tau)} = \overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \varphi_x(\tau).$$

Dagegen erhält man für den zweiten und den dritten Mittelwert mit $\Delta t = t_2 - t_1 = 50$ ms:

$$\overline{x(t - t_1) \cdot x(t - t_2 + \tau)} = \overline{x(t) \cdot x(t + t_1 - t_2 + \tau)} = \varphi_x(\tau - \Delta t),$$

$$\overline{x(t - t_2) \cdot x(t - t_1 + \tau)} = \overline{x(t) \cdot x(t + t_2 - t_1 + \tau)} = \varphi_x(\tau + \Delta t).$$

Insgesamt ergibt sich somit wieder eine symmetrische AKF (siehe unteres Bild):

$$\varphi_y(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot ((\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cdot \delta(\tau) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta(\tau - \Delta t) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta(\tau + \Delta t)).$$

$$\Rightarrow \varphi_y(\tau = 0) = \underline{13 \cdot 10^{-8} \text{ W/Hz}}, \quad \varphi_y(\tau = \Delta t) = \underline{2.5 \cdot 10^{-8} \text{ W/Hz}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.15

a) Anhand der Kovarianzmatrix \mathbf{K}_x ist keine Aussage darüber möglich, ob die zugrunde liegende Zufallsgröße x mittelwertfrei oder mittelwertbehaftet ist, da ein eventueller Mittelwert \mathbf{m} herausgerechnet wird. Um Aussagen über den Mittelwert machen zu können, müsste die Korrelationsmatrix \mathbf{R}_x bekannt sein. Aus $K_{22} = (\sigma_2)^2 = 0$ folgt zwingend, dass alle Elemente in der zweiten Zeile (K_{21}, K_{23}) und der zweiten Spalte (K_{12}, K_{32}) ebenfalls 0 sind. Dagegen ist die dritte Aussage falsch: Die Elemente sind symmetrisch zur Hauptdiagonalen, so dass stets $K_{31} = K_{13}$ gelten muss. Richtig ist nur der Vorschlag 2.

b) Aus $K_{11} = 1$ und $K_{33} = 0.25$ folgen direkt $\sigma_1 = 1$ und $\sigma_3 = 0.5$. Zusammen mit dem Korrelationskoeffizienten $\rho_{13} = 0.8$ (siehe Angabenblatt) erhält man somit:

$$\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0.40 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.40 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Teil (a) © 2008 www.LNTwww.de

$$K_{13} = K_{31} = \sigma_1 \cdot \sigma_3 \cdot \rho_{13} \underline{\underline{= 0.4}}$$

c) Die Determinante der Matrix \mathbf{K}_y lautet:

$$|\mathbf{K}_y| = 1 \cdot 0.25 - 0.4 \cdot 0.4 \underline{\underline{= 0.09}}$$

d) Entsprechend den Angaben auf der Seite „Determinante und inverse Matrix“ gilt:

$$\mathbf{I}_y = \mathbf{K}_y^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{K}_y|} \cdot \begin{bmatrix} 0.25 & -0.4 \\ -0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit $|\mathbf{K}_y| = 0.09$ gilt deshalb weiter:

$$I_{11} = \frac{25}{9} \underline{\underline{= 2.777}}; \quad I_{12} = I_{21} = -\frac{40}{9} \underline{\underline{= -4.447}}; \quad I_{22} = \frac{100}{9} \underline{\underline{= 11.111}}$$

e) Ein Vergleich der Matrizen \mathbf{K}_y und \mathbf{K}_x unter der Nebenbedingung $K_{22} = 0$ zeigt, dass x und y identische Zufallsgrößen sind, wenn man $y_1 = x_1$ und $y_2 = x_3$ setzt. Somit gilt für die WDF-Parameter:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0.5, \quad \rho = 0.8.$$

Der Vorfaktor entsprechend Kapitel 4.2 ist somit:

$$C = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 0.6} = \frac{1}{0.6 \cdot \pi} \underline{\underline{\approx 0.531}}$$

Mit der in der Teilaufgabe c) berechneten Determinante ergibt sich das gleiche Ergebnis:

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{K}_y|}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.09}} = \frac{1}{0.6 \cdot \pi}$$

f) Die unter Punkt d) berechnete inverse Matrix kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{I}_y = \frac{5}{9} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 20 \end{bmatrix}$$

Somit lautet das Argument A der Exponentialfunktion:

$$A = \frac{5}{18} \cdot \mathbf{y}^T \cdot \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 20 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y} = \frac{5}{18} (5 \cdot y_1^2 + 20 \cdot y_2^2 - 16 \cdot y_1 \cdot y_2).$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\gamma_1 = \frac{25}{18} \approx 1.389; \quad \gamma_2 = \frac{100}{18} \approx 5.556; \quad \gamma_{12} = -\frac{80}{18} \approx -4.444.$$

Entsprechend der herkömmlichen Vorgehensweise ergeben sich die gleichen Zahlenwerte:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2 \cdot \sigma_1^2 \cdot (1 - \rho^2)} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 0.36} \approx \underline{1.389},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2 \cdot \sigma_2^2 \cdot (1 - \rho^2)} = \frac{1}{2 \cdot 0.25 \cdot 0.36} = 4 \cdot \gamma_1 \approx \underline{5.556},$$

$$\gamma_{12} = -\frac{\rho}{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot (1 - \rho^2)} = -\frac{0.8}{1 \cdot 0.5 \cdot 0.36} \approx \underline{-4.444}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.15

a) Die zweite und die letzte Aussage treffen zu. Aussage 2 beschreibt den in der Grafik betrachteten Fall, dass zwei Größen (hier: x_1 und x_2) unkorreliert sind, während x_3 statistische Bindungen bezüglich x_1 (über die Größe u) und auch in Bezug zu x_2 (bedingt durch die Zufallsgröße v) aufweist.

Die Kombination $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0$ ist bei der hier gegebenen Struktur dagegen nicht möglich. Dazu würde man eine dritte statistisch unabhängige Zufallsgröße w benötigen und es müsste beispielsweise $x_1 = u$, $x_2 = v$ und $x_3 = w$ gelten.

Die dritte Aussage ist ebenfalls nicht zutreffend: Sind x_1 und x_2 unkorreliert und gleichzeitig auch x_1 und x_3 , so können auch zwischen x_2 und x_3 keine statistischen Bindungen bestehen.

Im Allgemeinen werden allerdings sowohl ρ_{12} als auch ρ_{13} und ρ_{23} von 0 verschieden sein. Ein ganz einfaches Beispiel hierfür wird in der Teilaufgabe b) betrachtet.

b) In diesem Fall sind die Größen $x_1 = x_2$ vollständig (zu 100%) korreliert. Mit $A_2 = A_1$ und $B_2 = B_1$ erhält man für den gemeinsamen Korrelationskoeffizienten:

$$\rho_{12} = A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = A_1^2 + B_1^2 \underline{\underline{= 1}}.$$

In gleicher Weise gilt mit $A_3 = -A_1$ und $B_3 = -B_1$:

$$\rho_{13} = A_1 \cdot A_3 + B_1 \cdot B_3 = -(A_1^2 + B_1^2) \underline{\underline{= -1}} (= \rho_{23}).$$

c) Mit diesem Parametersatz ist x_1 identisch mit der Zufallsgröße u , während $x_2 = v$ gilt. Da u und v statistisch voneinander unabhängig sind, ergibt sich $\underline{\underline{\rho_{12} = 0}}$. Demgegenüber gilt für die beiden weiteren Korrelationskoeffizienten:

$$\rho_{13} = A_1 \cdot A_3 + B_1 \cdot B_3 = 1 \cdot 0.8 + 0 \cdot 0.6 \underline{\underline{= 0.8}}.$$

$$\rho_{23} = A_2 \cdot A_3 + B_2 \cdot B_3 = 0 \cdot 0.8 + 1 \cdot 0.6 \underline{\underline{= 0.6}}.$$

Für ein (sehr gut) geschultes Auge ist aus der Grafik auf der Angabenseite zu erkennen, dass das Signal $x_3(t)$ mehr Ähnlichkeiten mit $x_1(t)$ aufweist als mit $x_2(t)$. Diese Tatsache drücken auch die berechneten Korrelationskoeffizienten aus.

Musterlösung zur Aufgabe A4.16

a) \mathbf{K}_y ist tatsächlich die allgemeinste Kovariationmatrix einer 2D-Zufallsgröße mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Der zweite Parameter gibt den Korrelationskoeffizienten an. Nach Abschnitt 4.1 kann ρ alle Werte zwischen ± 1 inclusive dieser Randwerte annehmen. Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 2.

b) In diesem Fall lautet die Bestimmungsgleichung:

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_{1/2} = 1}.$$

c) Bei positivem ρ lautet die Bestimmungsgleichung der Eigenwerte:

$$(1 - \lambda)^2 - \rho^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \rho^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm \rho.$$

Für $\rho = 0.5$ erhält man $\lambda_1 = \underline{1.5}$ und $\lambda_2 = \underline{0.5}$. Die Gleichung gilt übrigens im gesamten Definitionsbereich $-1 \leq \rho \leq 1$. Für $\rho = 0$ ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (siehe Teilaufgabe b). Bei $\rho = \pm 1$ ergibt sich $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$.

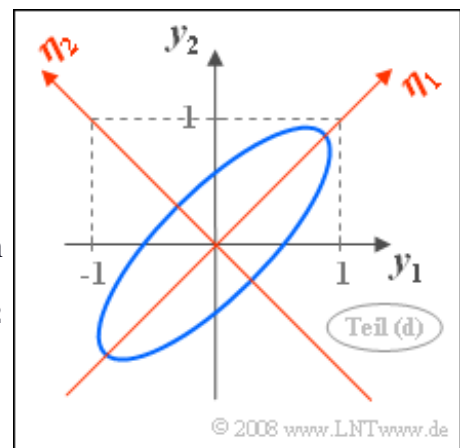
d) Die Eigenvektoren erhält man durch Einsetzen der Eigenwerte λ_1, λ_2 in die Kovarianzmatrix:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 - (1 + \rho) & \rho \\ \rho & 1 - (1 + \rho) \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\eta}_1 &= \begin{bmatrix} -\rho & \rho \\ \rho & -\rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{bmatrix} = 0 \\ \Rightarrow -\rho \cdot \eta_{11} + \rho \cdot \eta_{12} = 0 &\Rightarrow \eta_{11} = \text{const} \cdot \eta_{12} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_1 = \text{const} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 - (1 - \rho) & \rho \\ \rho & 1 - (1 - \rho) \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\eta}_2 &= \begin{bmatrix} \rho & \rho \\ \rho & \rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_{21} \\ \eta_{22} \end{bmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \rho \cdot \eta_{21} + \rho \cdot \eta_{22} = 0 &\Rightarrow \eta_{21} = -\text{const} \cdot \eta_{22} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_2 = \text{const} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bringt man diese in die so genannte Orthonormalform, so gilt:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

In nebenstehender Skizze ist das Ergebnis verdeutlicht. Das neue, durch $\boldsymbol{\eta}_1$ und $\boldsymbol{\eta}_2$ festgelegte Koordinatensystem liegt tatsächlich in Richtung der Hauptachsen des ursprünglichen Systems. Mit $\sigma_1 = \sigma_2$ ergibt sich stets (Ausnahme: $\rho = 0$) der Drehwinkel $\alpha = 45$ Grad. Dies folgt auch aus der Gleichung auf Seite 3 von Kapitel 4.2:



$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(2 \cdot \rho \cdot \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan(\infty) \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Die Eigenwerte λ_1 und λ_2 kennzeichnen nicht die Streuungen bezüglich der neuen Achsen, sondern die entsprechenden Varianzen. Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 2.

e) Durch Vergleich der Matrizen \mathbf{K}_x und \mathbf{K}_z erhält man $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1$ und $\rho = 1$.

f) Nach dem inzwischen altbekannten Schema gilt:

$$(4 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0.}$$

g) Nach der auf dem Angabenblatt vorgegebenen Gleichung gilt:

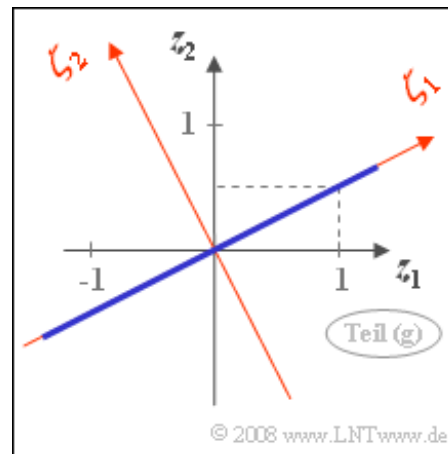
$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(2 \cdot 1 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2^2 - 1^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 26.56^\circ.$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man über den Eigenvektor:

$$\begin{bmatrix} 4 - 5 & 2 \\ 2 & 1 - 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_{11} \\ \zeta_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\zeta_{11} = 2\zeta_{12} = 0 \Rightarrow \zeta_{12} = \frac{\zeta_{11}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{\zeta_{12}}{\zeta_{11}}\right) = \arctan(0.5) = \underline{26.56^\circ}.$$



Die nebenstehende Skizze zeigt die 2D-WDF der Zufallsgröße z .

Wegen $\rho = 1$ liegen alle Werte auf der Korrelationsgeraden mit den

Koordinaten $z_2 = z_1/2$. Durch die Drehung um den Winkel $\alpha = \arctan(0.5) = 26.56$ Grad entsteht ein

neues Koordinatensystem. Die Varianz entlang der Achse ζ_1 beträgt $\lambda_1 = 5$ (Streuung $\sigma_1 = 2.236$),

während in der dazu orthogonalen Richtung ζ_2 die Zufallsgröße nicht ausgedehnt ist ($\lambda_2 = \sigma_2 = 0$).

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.16

a) Aus der Bedingung $\mathbf{K}_y - \lambda \cdot \mathbf{E} = 0$ folgt:

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 - \frac{1}{9} = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = 1 \pm \frac{1}{3}.$$

Die Eigenwerte dieser 2×2 -Matrix sind somit $\lambda_1 = \underline{4/3}$ und $\lambda_2 = \underline{2/3}$.

b) Ohne Berücksichtigung von Korrelationen gibt es

$$N_2 = \left(\frac{8}{\Delta_x} \right)^2 = 256^2 = 65536$$

verschiedene Wertepaare. Unter Berücksichtigung der Korrelationen und des Sachverhaltes, dass die beiden durch Koordinatendrehung entstandenen Komponenten η_1 und η_2 jeweils im Bereich von $-4\sigma_1$ bis $+4\sigma_1$ (bzw. von $-4\sigma_2$ bis $+4\sigma_2$) zu quantisieren sind, erhält man

$$N'_2 = \frac{8\sigma_1}{\Delta_x} \cdot \frac{8\sigma_2}{\Delta_y} = N_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2.$$

Der Quotient lautet somit mit $\sigma_1^2 = \lambda_1$ und $\sigma_2^2 = \lambda_2$:

$$\frac{N'_2}{N_2} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sqrt{4/3} \cdot \sqrt{2/3} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \approx \underline{0.943}.$$

c) Die Bestimmungsgleichung der Eigenwerte von \mathbf{K}_z lautet:

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 - \lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow (1 - \lambda) \left[(1 - \lambda)^2 - \frac{1}{9} \right] - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}(1 - \lambda) - \frac{1}{9} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{3}(1 - \lambda) \right] = 0$$
$$\Rightarrow (1 - \lambda) \left(\lambda^2 - 2\lambda + \frac{8}{9} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3} - \lambda \right) + \frac{1}{9} \left(\lambda - \frac{2}{3} \right) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + \frac{8}{9} - \lambda^3 + 2\lambda^2 - \frac{8}{9}\lambda - \frac{4}{27} + \frac{2}{9}\lambda = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + \frac{24}{9}\lambda - \frac{20}{27} = 0.$$

Diese Gleichung wurde bereits als Lösungshinweis angegeben, ebenso wie eine der Lösungen: $\lambda_1 = 5/3$.

Damit ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die weiteren Eigenwerte λ_2 und λ_3 zu

$$\frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 24/9\lambda - 20/27}{\lambda - 5/3} = \lambda^2 - 4/3 \cdot \lambda + 4/9 = 0.$$

Diese Bestimmungsgleichung lässt sich wie folgt umformen:

$$(\lambda - 2/3)^2 = 0.$$

Die weiteren Eigenwerte neben $\lambda_1 = 5/3$ sind somit gleich und ergeben sich zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 2/3$.

d) Analog zur Vorgehensweise unter Punkt b) ergibt sich hier:

$$\frac{N'_3}{N_3} = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3} = \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{20}{27}} \approx \underline{0.861}.$$