A1.1: Würfelspiel Mäxchen

Bei dem Würfelspiel *Mäxchen* wird jeweils mit zwei Würfeln geworfen. Die höhere Augenzahl der beiden Würfel wird mit 10 multipliziert und dann die niedrigere Augenzahl dazu addiert. Beispielsweise liefert eine „2“ und eine „4“ das Spielresultat 42 und eine „5“ und eine „6“ das Ergebnis 65. Das kleinstmögliche Resultat eines Wurfes ist somit 31.

Ein Pasch (zweimal die gleiche Augenzahl) wird im Allgemeinen höher bewertet als zwei ungleiche Würfel. So ist ein Einser-Pasch höher als 65, aber niedriger als jeder andere Pasch. Eine Sonderstellung nimmt bei diesem Spiel das *Mäxchen* (eine „1” und eine „2”) ein. Diese im Bild dargestellte Kombination steht noch über dem Sechser-Pasch.

Der Spieler X beginnt. Er gewinnt, wenn der Spieler Y das vorgelegte Resultat nicht überbieten kann. Die weiteren vielfältigen Optionen dieses Spiels werden hier nicht berücksichtigt.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Lehrstoff von **Kapitel 1.1.** Der Inhalt dieses Abschnitts ist in einem Lernvideo zusammengefasst:

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit (Dauer 5:19)

Die Musterlösung für diese Aufgabe beinhaltet ebenfalls eine kurze Videosequenz:

Musterlösung zur Aufgabe A1.1(f): „Würfelspiel Mäxchen”

Fragebogen zu "A1.1: Würfelspiel Mäxchen"

a) Haben X und Y gleiche Gewinnchancen? Wenn Sie der Meinung sind, dass das Spiel unfair ist: Wie könnte man das Spiel fair gestalten?

- Die Spieler X und Y haben gleiche Chancen.
- Der Spieler X ist im Vorteil.
- Der Spieler Y ist im Vorteil.

b) Wieviele unterschiedliche Resultate (I) sind bei diesem Spiel möglich?

$\boldsymbol{I}$ =

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser-Pasch?

Pr[Sechser-Pasch] =

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man irgendeinen Pasch würfelt?

Pr[irgendein Pasch] =

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt ein Spieler ein Mäxchen?

Pr[Mäxchen] =

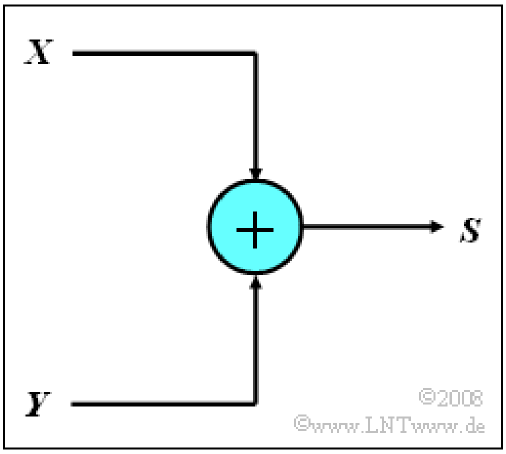
f) Der Spieler X hat eine „3" und eine „5" vorgelegt. Wie groß ist unter dieser Annahme die Gewinnchance von Spieler Y?

Pr[Y gewinnt] =

g) Welches Spielergebnis $R_{\rm min}$ muss der Spieler X mindestens erzielen, damit er eine größere Gewinnchance als 75% hat?

$\boldsymbol{R_{\rm min}}$ =

Z1.1: Summe zweier Ternärsignale



Gegeben seien zwei dreistufige Nachrichtenquellen X und Y, deren Ausgangssignale jeweils nur die Werte –1, 0 und +1 annehmen können. Die Signalquellen sind statistisch voneinander unabhängig. Eine einfache Schaltung bildet nun das Summensignal $S = X + Y$.

Bei der Signalquelle X treten die Werte –1, 0 und +1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf, während bei der Quelle Y der Signalwert 0 doppelt so wahrscheinlich ist wie die beiden anderen Werte –1 bzw. +1.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den gesamten Stoff von **Kapitel 1.1.** Der Inhalt dieses Abschnitts ist im nachfolgenden Lernvideo zusammengefasst:

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit (Dauer 5:19)

Fragebogen zu "Z1.1: Summe zweier Ternärsignale"

a) Wie groß sind die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Signalwerte von Y? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $Y = 0$ ist?

Pr(Y = 0) =

b) Wieviele unterschiedliche Signalwerte (I) kann das Summensignal S annehmen? Welche sind dies?

I =

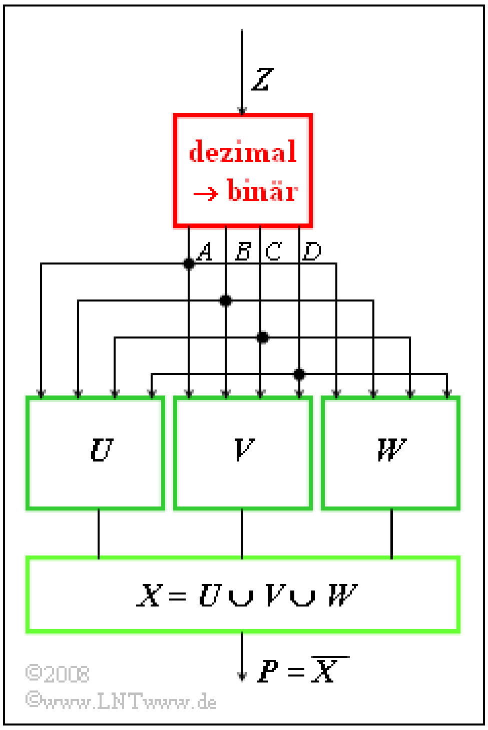
c) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten die in b) ermittelten Werte auf? Wie wahrscheinlich ist der Maximalwert S_{max}? *Hinweis:* Lösen Sie die Aufgabe nach der klassischen Definition. Berücksichtigen Sie trotzdem die unterschiedlichen Auftrittshäufigkeiten des Signals Y.

Pr($S = S_{max}$) =

d) Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, wenn nun anstelle der Summe die Differenz $D = X - Y$ betrachtet wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

- ○ Die Wahrscheinlichkeiten bleiben gleich.
- ○ Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich. Wie ändern sie sich?

A1.2: Schaltlogik (D/B-Wandler)



Ein Zahlengenerator Z liefert Dezimalwerte im Bereich von 1 bis 15. Diese werden in Binärzahlen umgewandelt (rot umrandeter Block). Der Ausgang besteht aus den vier Binärwerten A, B, C und D mit abnehmender Wertigkeit. Beispielsweise liefert Z = 11 die Binärwerte

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 1.$$

Mengentheoretisch lässt sich dies wie folgt darstellen:

$$Z = 11 \qquad \widehat{=} \qquad A \cap \overline{B} \cap C \cap D.$$

Aus den binären Größen A, B, C und D werden drei weitere **Boolsche Ausdrücke** gebildet, deren Vereinigungsmenge mit X bezeichnet wird:

$$U = A \cap \overline{D},$$

$$V = \overline{A} \cap B \cap \overline{D},$$

$$W, \text{ wobei } \overline{W} = \overline{A} \cup \overline{D} \cup (\overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{C}).$$

Für die folgenden Fragen ist zu berücksichtigen, dass Z = 0 $\Rightarrow$ $A = B = C = D = 0$ bereits durch den Zahlengenerator ausgeschlossen ist. Beachten Sie ferner, dass nicht alle Eingangsgrößen A, B, C und D zur Berechnung aller Zwischengrößen U, V und W herangezogen werden.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 1.2.** Eine Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen mit Beispielen bringt das nachfolgende Lernvideo:

Mengentheoretische Begriffe und Gesetzmäßigkeiten (2-teilig: Dauer 6:10 – 6:10)

Fragebogen zu "A1.2: Schaltlogik (D/B-Wandler)"

a) Welche Aussagen sind bezüglich der Zufallsgröße U zutreffend?

- ☐ U beinhaltet 2 Elemente.
- ☐ U beinhaltet 4 Elemente.
- ☐ Das kleinste Element von U ist 4.
- ☐ Das größte Element von U ist 14.

b) Welche Aussagen sind bezüglich der Zufallsgröße V zutreffend?

- ☐ V beinhaltet 2 Elemente.
- ☐ V beinhaltet 4 Elemente.
- ☐ Das kleinste Element von V ist 4.
- ☐ Das größte Element von V ist 14.

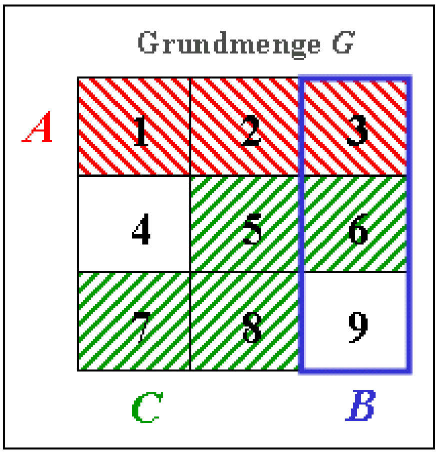
c) Welche Aussagen sind bezüglich der Zufallsgröße W zutreffend?

- ☐ W beinhaltet 2 Elemente.
- ☐ W beinhaltet 4 Elemente.
- ☐ Das kleinste Element von W ist 4.
- ☐ Das größte Element von W ist 14.

d) Welche Aussagen sind bezüglich der Zufallsgröße P zutreffend?

- ☐ P beinhaltet alle Zweierpotenzen.
- ☐ P beinhaltet alle Primzahlen.
- ☐ P beschreibt die leere Menge ϕ.
- ☐ P ist identisch mit der Grundmenge $G = \{1, 2, ... , 15\}$.

Z1.2: Ziffernmengen



Die Grundmenge G sei die Menge aller Ziffern zwischen 1 und 9. Gegeben sind dazu die folgenden Teilmengen:

$$A = [\text{die Ziffern} \le 3],$$

$$B = [\text{die durch 3 teilbaren Ziffern}],$$

$$C = [\text{die Ziffern } 5, 6, 7, 8].$$

Daneben seien noch weitere Mengen definiert:

$$D = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B),$$

$$E = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}),$$

$$F = (A \cup C) \cap \overline{B},$$

$$H = (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C).$$

Überlegen Sie sich zunächst, welche Ziffern zu den Mengen D, E, F und H gehören und beantworten Sie dann die folgenden Fragen. Begründen Sie Ihre Antworten mengentheoretisch.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 1.2.** Eine Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen mit Beispielen bringt das nachfolgende Lernvideo:

Mengentheoretische Begriffe und Gesetzmäßigkeiten (2-teilig: Dauer 6:10 – 6:10)

Fragebogen zu "Z1.2: Ziffernmengen"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ A und B sind disjunkte Mengen.
- ☐ A und C sind disjunkte Mengen.
- ☐ B und C sind disjunkte Mengen.

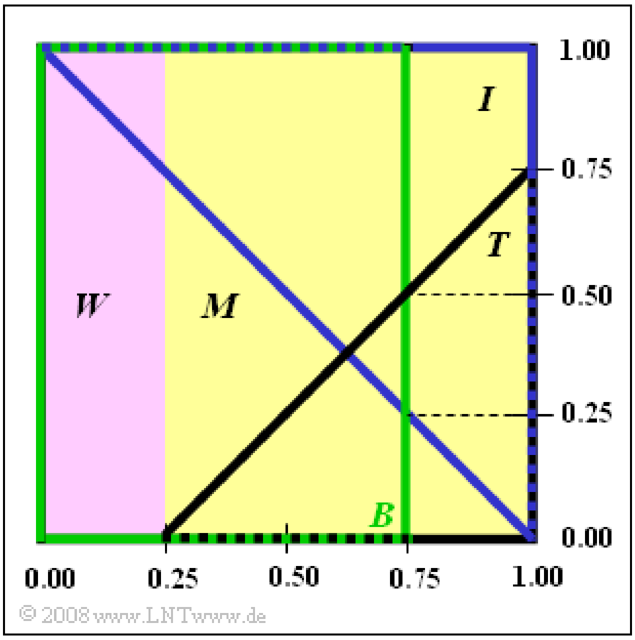
b) Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Die Vereinigungsmenge $A \cup B \cup C$ ergibt die Grundmenge.
- ☐ Die Komplementärmenge zu $A \cap B \cap C$ ergibt die Grundmenge.

c) Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Die Komplementärmengen von D und E sind identisch.
- ☐ F ist eine Teilmenge der Komplementärmenge von B.
- ☐ Die Mengen B, C und D bilden ein vollständiges System.
- ☐ Die Mengen A, C und H bilden ein vollständiges System.

A1.3: Fiktive Uni Irgendwo



Aus nebenstehender Grafik können Sie einige Informationen über die FUI (*Fiktive Universität Irgendwo*) ablesen. Das gesamte Quadrat steht für die Grundmenge *G* der 960 Studierenden. Von diesen sind

- 25% weiblich (Menge *W*, violettes Rechteck),
- 75% männlich (Menge *M*, gelbes Rechteck).

An der Universität gibt es die Fakultäten für

- Theologie (Menge *T*, schwarzes Dreieck),
- Informationstechnik (Menge *I*, blaues Dreieck),
- Betriebswirtschaft (Menge *B*, grünes Viereck).

Jeder Studierende muss mindestens einer dieser Fakultäten zugeordnet sein, kann jedoch auch gleichzeitig zwei oder drei Fakultäten angehören.

Die Flächen in der obigen Darstellung sind maßstäblich, so dass Sie anhand der angegebenen Zahlenwerte und einfachen geometrischen Überlegungen die (prozentualen) Belegungszahlen leicht angeben können.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 1.2.** Eine Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen mit Beispielen bringt das nachfolgende Lernvideo:

Mengentheoretische Begriffe und Gesetzmäßigkeiten (2-teilig: Dauer 6:10 – 6:10)

Fragebogen zu "A1.3: Fiktive Uni Irgendwo"

a) Berechnen Sie die Anzahl der in den Fakultäten Immatrikulierten. Geben Sie zur Kontrolle die Studierendenzahl in der theologischen Fakultät ein.

N_T =

b) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ I ist eine Teilmenge von M.
- ☐ W ist eine Teilmenge von B.
- ☐ W und M ergeben zusammen ein vollständiges System.
- ☐ B, I und T ergeben zusammen ein vollständiges System.
- ☐ W und T sind disjunkte Mengen.
- ☐ Die Vereinigungsmenge von B, I und T ergibt die Grundmenge.
- ☐ Die Schnittmenge von B, I und T ergibt die leere Menge.

c) Wie groß ist der IT–Studentinnen–Anteil bezogen auf alle Studierenden?

Pr[IT-Studentin] =

d) Wie groß ist der Anteil der Studierenden mit nur einem Studienfach?

Pr[ein Studienfach] =

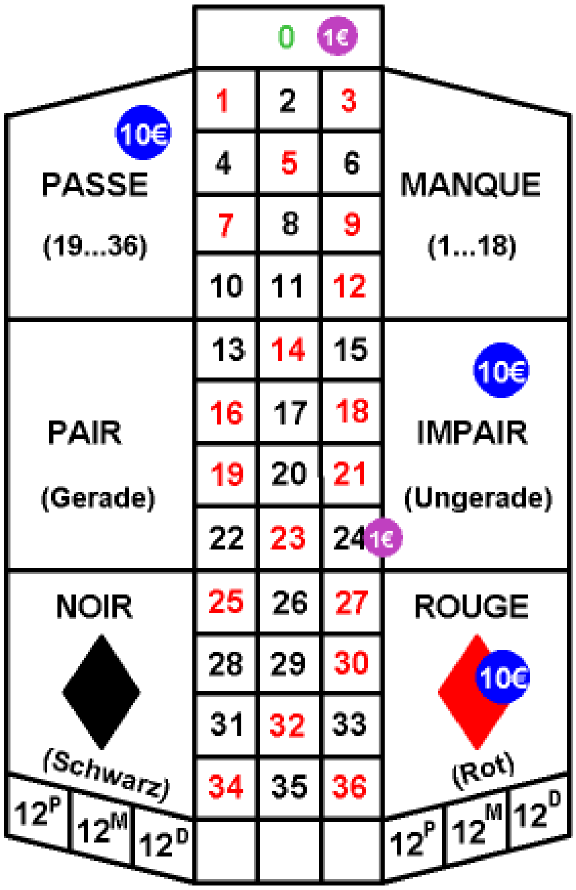
e) Wie groß ist der Anteil der Studierenden mit drei Studienfächern?

Pr[drei Studienfächer] =

f) Wie groß ist der Anteil der Studierenden mit zwei Studienfächern?

Pr[zwei Studienfächer] =

Z1.3: Gewinnen mit Roulette?



Beim Roulette wird bei jedem Spiel mittels einer Kugel und einer Roulettescheibe eine Gewinnzahl Z ermittelt, wobei wir davon ausgehen wollen, dass alle möglichen Zahlen $Z \in \{0, 1, 2, ... 36\}$ gleichwahrscheinlich sind.

Die Mitspieler können nun mit unterschiedlich wertvollen Chips auf eine einzelne Zahl oder auf eine Zahlengruppe setzen. Einige der Möglichkeiten und die dazugehörigen Gewinne sollen hier kurz anhand der von einem Spieler gesetzten Chips erläutert werden (siehe Grafik):

- Setzt ein Spieler auf eine Zahl (im Beispiel der Chip auf „0“), so bekäme er außer seinem Einsatz als Gewinn das 35-fache zurück.
- Setzt ein Spieler auf eine Zahlengruppe mit drei Feldern (im Beispiel der Euro-Chip für die Zahlen von „22“ bis „24“), so bekäme er außer seinem Einsatz noch den 11-fachen Einsatz als Gewinn ausbezahlt.
- Setzt ein Spieler auf eine Zahlengruppe mit 18 Feldern (beispielsweise die 10 Euro-Chips auf „Rot“, auf „Impair“ und auf „Passe“), so erhält er außer seinem Einsatz als Gewinn nochmals den gleichen Betrag zurück. Gehört die gezogene Zahl nicht zu einer der von ihm besetzten Felder, so ist sein Einsatz natürlich verloren.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 1.2.** Eine Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen mit Beispielen bringt das nachfolgende Lernvideo:

Mengentheoretische Begriffe und Gesetzmäßigkeiten (2-teilig: Dauer 6:10 – 6:10)

Fragebogen zu "Z1.3: Gewinnen mit Roulette?"

a) Ein Spieler setzt stets gleichzeitig je einen 1 Euro-Chip auf die Felder „0“, „Rot“ und „Schwarz“. Wie groß ist sein mittlerer Gewinn pro Spiel?
Hinweis: Eventuelle Verluste als negative Gewinne eingeben.

G_a = Euro

b) Wieviel gewinnt er im Mittel pro Spiel, wenn er stets je 1 Euro auf „Rot“ und „Schwarz“ setzt?

G_b = Euro

c) Wieviel gewinnt er im Mittel pro Spiel, wenn er stets 1 Euro auf „0“ und 10 Euro auf „Rot“ setzt?

G_c = Euro

d) Der Spieler setzt wie im Bild gezeigt. Auf welche Zahl Z sollte er hoffen? Wie groß wäre dann sein Gewinn?

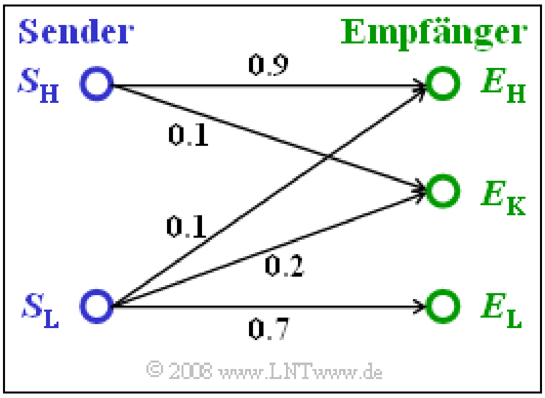
Z =

G_d = Euro

e) Gibt es eine Setzkombination, so dass der mittlere Gewinn positiv ist?

- Ja (Studium beenden, in die nächste Spielbank gehen).
- Nein (das bedeutet: Weitermachen mit *LNTwww*).

A1.4: 2S/3E-Kanalmodell



Ein Sender gibt die binären Symbole **L** (Ereignis S_L) und **H** (Ereignis S_H) ab. Bei guten Bedingungen entscheidet sich der Digitalempfänger ebenfalls nur für die Binärsymbole **L** (Ereignis E_L) oder **H** (Ereignis E_H). Kann der Empfänger allerdings vermuten, dass bei der Übertragung ein Fehler aufgetreten ist, so trifft er keine Entscheidung (Ereignis E_K; **K** steht dabei für „Keine Entscheidung”).

Die Grafik zeigt ein einfaches Kanalmodell in Form von Übergangswahrscheinlichkeiten. Es ist zu erkennen, dass ein gesendetes **L** durchaus als Symbol **H** empfangen werden kann. Dagegen ist der Übergang von **H** nach **L** nicht möglich.

Die Symbolauftrittswahrscheinlichkeiten am Sender seien $\Pr(S_L) = 0.3$ und $\Pr(S_H) = 0.7$.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 1.3.** Eine Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen mit Beispielen bringt das nachfolgende Lernvideo:

Statistische (Un-)Abhängigkeit (3-teilig: Dauer 4:20 – 3:40 – 3:40)

Fragebogen zu "A1.4: 2S/3E-Kanalmodell"

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Empfänger für das Symbol **L** entscheidet?

$\mathbf{Pr}(E_\mathrm{L})$ =

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Empfänger für das Symbol **H** entscheidet?

$\mathbf{Pr}(E_\mathrm{H})$ =

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Empfänger keine Entscheidung trifft?

$\mathbf{Pr}(E_\mathrm{K})$ =

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheidet der Empfänger falsch?

Pr(falsche Entscheidung) =

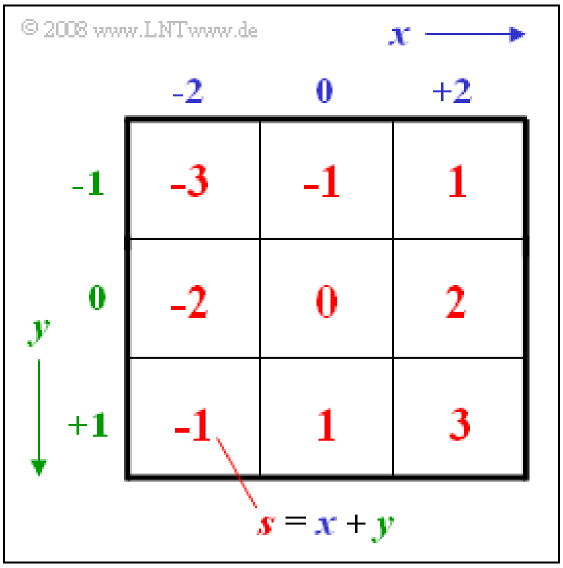
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Symbol **L** gesendet wurde, wenn sich der Empfänger für das Symbol **L** entschieden hat?

$\mathbf{Pr}(S_\mathrm{L}\,|\,E_\mathrm{L})$ =

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Symbol **L** gesendet wurde, wenn der Empfänger keine Entscheidung trifft?

$\mathbf{Pr}(S_\mathrm{L}\,|\,E_\mathrm{K})$ =

Z1.4: Summe von Ternärgrößen



Gegeben seien die ternären Zufallsgrößen

- $x \in \{-2, 0, +2\}$,
- $y \in \{-1, 0, +1\}$.

Diese beiden Ternärwerte treten jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Daraus wird als eine neue Zufallsgröße die Summe $s = x + y$ gebildet.

Nebenstehendes Schema zeigt, dass die Summe s alle ganzzahligen Werte zwischen –3 und +3 annehmen kann:

$$s \in \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3\}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 1.3.** Eine Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen mit Beispielen bringt das nachfolgende Lernvideo:

Statistische (Un-)Abhängigkeit (3-teilig: Dauer 4:20 – 3:40 – 3:40)

Fragebogen zu "Z1.4: Summe von Ternärgrößen"

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe s positv ist:

$\mathbf{Pr}(s > 0)$ =

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl die Eingangsgröße x als auch die Summe s positiv sind:

$\mathbf{Pr}((x > 0) \cap (s > 0))$ =

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Eingangsgröße $x > 0$ ist, wenn $s > 0$ gilt:

$\mathbf{Pr}(x > 0 \mid s > 0)$ =

d) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Summe s positiv ist, wenn die Eingangsgröße $x > 0$ ist:

$\mathbf{Pr}(s > 0 \mid x > 0)$ =

A1.5: Karten ziehen

Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten, darunter vier Asse, werden nacheinander drei Karten gezogen.

- Für die Frage (a) wird vorausgesetzt, dass nach dem Ziehen einer Karte diese in den Stapel zurückgelegt wird, danach der Kartenstapel neu gemischt und die nächste Karte gezogen wird.
- Dagegen sollen Sie für die weiteren Teilfragen ab (b) davon ausgehen, dass die drei Karten auf einmal gezogen werden („Ziehen ohne Zurücklegen“).

Im Folgenden bezeichnen wir mit A_i das Ereignis, dass die zum Zeitpunkt i gezogene Karte ein Ass ist. Hierbei ist i = 1, 2, 3 zu setzen. Das Komplementärereignis sagt dann aus, dass zum Zeitpunkt i irgend eine andere Karte gezogen wird.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 1.3.** Eine Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen mit Beispielen bringt das nachfolgende Lernvideo:

Statistische (Un-)Abhängigkeit (3-teilig: Dauer 4:20 – 3:40 – 3:40)

Fragebogen zu "A1.5: Karten ziehen"

a) Betrachten Sie zunächst den Fall „Ziehen mit Zurücklegen“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_a, dass drei Asse gezogen werden?

p_a =

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_b werden drei Asse gezogen, wenn man die Karten nicht zurücklegt? Warum ist p_b kleiner/gleich/größer als p_a?

p_b =

c) Betrachten Sie weiterhin den Fall „Ziehen ohne Zurücklegen“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_c, dass kein einziges Ass gezogen wird?

p_c =

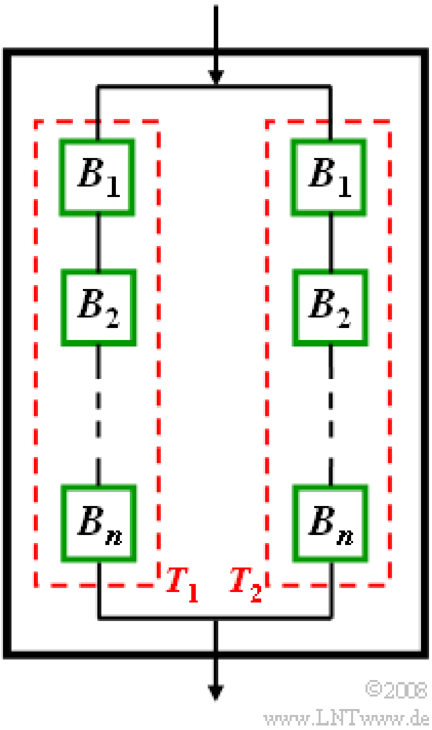
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_d, dass genau ein Ass gezogen wird?

p_d =

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei der gezogenen Karten Asse sind? *Hinweis*: Berücksichtigen Sie, dass die vier Ereignisse „genau i Asse werden gezogen” mit i = 0, 1, 2, 3 ein vollständiges System beschreiben.

p_e =

Z1.5: Ausfallwahrscheinlichkeiten



Ein Geräteteil ist aus den Bauteilen B_1, $B_2, \dots$, B_n aufgebaut, wobei die jeweilige Funktionsfähigkeit unabhängig von allen anderen angenommen werden kann. Das Teil T_1 funktioniert nur dann, wenn alle n Bauteile funktionsfähig sind. Gehen Sie davon aus, dass alle Bauteile mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p_{\rm A}$ ausfallen.

Zur Erhöhung der Zuverlässigkeit werden wichtige Baugruppen häufig dupliziert. Das Gerät G kann somit mengentheoretisch wie folgt beschrieben werden:

$$G = T_1 \cup T_2.$$

Das heißt: Das Gerät G ist bereits dann einsatzbereit, wenn zumindest eines der beiden baugleichen Teilgeräte (T_1 oder T_2) funktionsfähig ist.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 1.3.** Eine Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen mit Beispielen bringt das nachfolgende Lernvideo:

Statistische (Un-)Abhängigkeit (3-teilig: Dauer 4:20 – 3:40 – 3:40)

Fragebogen zu "Z1.5: Ausfallwahrscheinlichkeiten"

a) Die Ausfallwahrscheinlichkeit $p_{\rm G}$ des Gesamtgeräts darf nicht größer sein als 0.04%. Wie groß dürfen dann die Ausfallwahrscheinlichkeiten $p_{\rm T}$ der zwei parallel vorhandenen Geräteteile höchstens sein?

$\boldsymbol{p}_{\rm T,\ max}$ =

b) Die Ausfallwahrscheinlichkeit aller Bauteile sei $p_{\rm A}$ = 0.1. Jedes Teilgerät bestehe aus n = 3 Bauteilen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_{\rm T}$ exakt, dass ein Teilgerät ausfällt.

$\boldsymbol{p}_{\rm T}$ =

c) Welcher Wert ergibt sich für $p_{\rm A}$ = 0.01? In welcher Form kann man $p_{\rm T}$ für kleine Werte von $p_{\rm A}$ annähern?

$\boldsymbol{p}_{\rm T}$ =

d) Nun gelte für die Ausfallwahrscheinlichkeit aller Bauteile $p_{\rm A}$ = 0.4%. Wieviele Bauteile kann das Teilgerät höchstens enthalten, wenn $p_{\rm T} \le 2\%$ gelten soll?

$\boldsymbol{n}$ =

A1.6: Übergangswahrscheinlichkeiten

Rechts sehen Sie 20 Realisierungen einer binären homogenen Markovkette erster Ordnung mit den Ereignissen A und B. Man erkennt bereits aus dieser Darstellung, dass zu Beginn (ν = 0) das Ereignis A überwiegt, zu späteren Zeitpunkten – etwa ab ν = 4 – jedoch etwas häufiger das Ereignis B eintritt.

Durch Mittelung über Millionen von Realisierungen wurden einige Ereigniswahrscheinlichkeiten numerisch ermittelt:

$$\Pr(A_{\nu=0}) \approx 0.9; \quad \Pr(A_{\nu=1}) \approx 0.15; \quad \Pr(A_{\nu>4}) \approx 0.4.$$

Diese empirischen Zahlenwerte sollen herangezogen werden, um die Parameter (Übergangswahrscheinlichkeiten) der Markovkette zu ermitteln.

Fortlaufende Nummer	ν → 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...
1	B B A B B A B A B A ...
2	A B B B B A B A B B ...
3	A B B B A A B B B B ...
4	A B B A B A B B A B ...
5	A B A B A B A B A B ...
6	A B A B A B A B A B ...
7	A B B A B B B B B A ...
8	A B B A B B A B A A ...
9	B A B A B A B A B B ...
10	A B B B B A B B A B ...
11	A B B A B A B A B B ...
12	A B B B A B A B A B ...
13	A B B A B A B B B B ...
14	A B A B A B A B A B ...
15	B A B B A B A A B A ...
16	A B B A B A B B B A ...
17	A B B A B B A B B A ...
18	A B A B A B A B A B ...
19	A B B A B A B A B A ...
20	A B A B A B B B B A ...

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 1.4.** Sie können Ihre Ergebnisse mit dem nachfolgenden Berechnungstool überprüfen:

Ereigniswahrscheinlichkeiten einer Markovkette 1. Ordnung

Fragebogen zu "A1.6: Übergangswahrscheinlichkeiten"

a) Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich zu den Zeiten $\nu = 0$, $\nu = 1$ und $\nu = 9$, wenn man nur die 20 dargestellten Realisierungen berücksichtigt?

$\mathbf{Pr}(A_{\nu=0})$ =

$\mathbf{Pr}(A_{\nu=1})$ =

$\mathbf{Pr}(A_{\nu=9})$ =

b) Welche der Aussagen sind aufgrund der Musterfolgen zutreffend?

- ☐ Nach A ist B wahrscheinlicher als A.
- ☐ Sowohl nach A als auch nach B kann wieder A oder B folgen.
- ☐ Die Folge $B\ B\ B\ B$ ... ist nicht möglich.

c) Berechnen Sie alle Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette. Wie groß sind insbesondere $\Pr(A\,|\,A)$ und $\Pr(B\,|\,B)$?

$\mathbf{Pr}(A\,|\,A)$ =

$\mathbf{Pr}(B\,|\,B)$ =

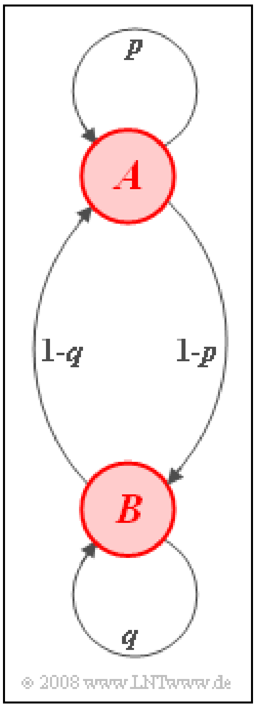
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten zehn Elemente der Folge jeweils B sind?

$\mathbf{Pr}(B_0, \ldots, B_9)$ =

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sehr lange nach Einschalten der Kette die Zeichenfolge $A\ B\ B\ A$ erzeugt wird?

$\mathbf{Pr}(A\ B\ B\ A)$ =

Z1.6: Ergodische Wahrscheinlichkeiten



Wir betrachten eine homogene stationäre Markovkette erster Ordnung mit den Ereignissen A und B und den Übergangswahrscheinlichkeiten entsprechend dem nebenstehenden Markovdiagramm:

Für die Teilaufgaben a) bis d) wird vorausgesetzt:

- Nach dem Ereignis A folgen A und B mit gleicher Wahrscheinlichkeit.
- Nach B ist das Ereignis A doppelt so wahrscheinlich wie B.

Ab Teilaufgabe e) sind p und q als freie Parameter zu verstehen, während die Ereigniswahrscheinlichkeiten $\Pr(A) = 2/3$ und $\Pr(B) = 1/3$ vorgegeben sind.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 1.4.** Zur Ergebniskontrolle können Sie das folgende Berechnungstool nutzen:

Ereigniswahrscheinlichkeiten bei einer Markovkette erster Ordnung

Fragebogen zu "Z1.6: Ergodische Wahrscheinlichkeiten"

a) Wie groß sind die Übergangswahrscheinlichkeiten p und q?

p =

q =

b) Berechnen Sie die ergodischen Wahrscheinlichkeiten.

$\Pr(A)$ =

$\Pr(B)$ =

c) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B auftritt, wenn zwei Takte vorher das Ereignis A aufgetreten ist?

$\Pr(B_\nu \,|\, A_{\nu\text{-}2})$ =

d) Wie groß ist die Rückschlusswahrscheinlichkeit, dass zwei Takte vorher das Ereignis A aufgetreten ist, wenn aktuell B auftritt?

$\Pr(A_{\nu\text{-}2} \,|\, B_\nu)$ =

e) Es gelte nun $p = 1/2$ und $\Pr(A) = 2/3$. Welcher Wert ergibt sich für q?

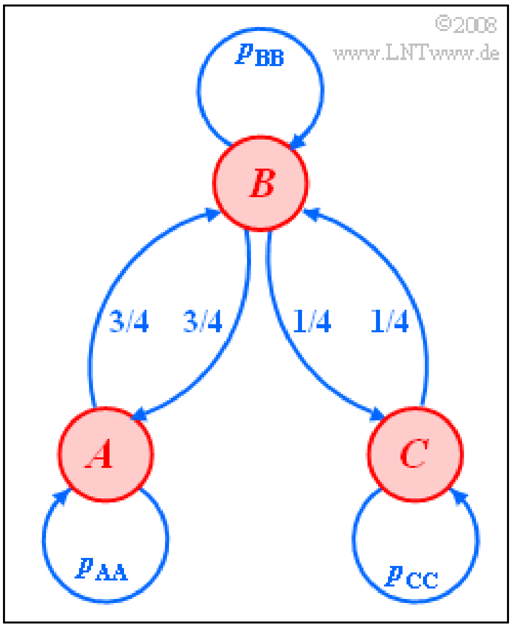
q =

f) Wie müssen die Parameter gewählt werden, damit die Folgenelemente der Markovkette statistisch unabhängig sind und zusätzlich $\Pr(A) = 2/3$ gilt?

p =

q =

A1.7: Ternäre Markovkette



Wir betrachten eine Markovkette mit den drei möglichen Ereignissen *A*, *B*, *C*. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind der Grafik zu entnehmen. Ein Übergang von *A* nach *C* und umgekehrt ist somit nicht möglich:

$$p_{\rm AC} = p_{\rm CA} = 0.$$

Die drei Ereigniswahrscheinlichkeiten zum Startzeitpunkt $\nu = 0$ sind wie folgt gegeben:

$$\Pr(A_0) = 0,$$

$$\Pr(B_0) = 1,$$

$$\Pr(C_0) = 0.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Abschnitt **Matrix-Vektordarstellung** im Kapitel 1.4.

Fragebogen zu "A1.7: Ternäre Markovkette"

a) Geben Sie die Übergangsmatrix **P** und die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{AA}, p_{BB} und p_{CC} an.

$\boldsymbol{p}_{\mathbf{AA}}$ =

$\boldsymbol{p}_{\mathbf{BB}}$ =

$\boldsymbol{p}_{\mathbf{CC}}$ =

b) Berechnen Sie die Ereigniswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt $\nu = 1$.

Pr(A_1) =

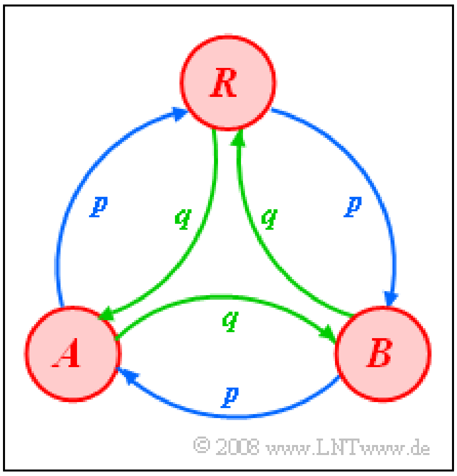
c) Berechnen Sie die Ereigniswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt $\nu = 2$.

Pr(A_2) =

d) Welche Wahrscheinlichkeiten werden sich sehr lange nach Einschalten der Markovkette einstellen ($\nu \to \infty$)? Wie groß ist insbesondere Pr(A)?

Pr(A) =

Z1.7: BARBARA-Generator



Betrachtet wird hier ein ternärer Zufallsgenerator mit den Symbolen A, B und R, der durch eine homogene und stationäre Markovkette erster Ordnung beschrieben werden kann.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten können dem skizzierten Markovdiagramm entnommen werden. Für die Teilaufgaben a) bis c) soll stets $p = 1/4$ gelten.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.4.**

Fragebogen zu "Z1.7: BARBARA-Generator"

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Die Werte von $p > 0$ und $q < 1$ sind weitgehend frei wählbar.
- ☐ Für die Übergangswahrscheinlichkeiten muss gelten: $p + q = 1$.
- ☐ Alle Symbole haben gleiche ergodische Wahrscheinlichkeiten.
- ☐ Es gilt hier: $\Pr(A) = 1/2$, $\Pr(B) = 1/3$, $\Pr(R) = 1/6$.

b) Wie groß sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten p_A, p_B und p_R, dass zu den Zeiten ν+1, ... , ν+7 „BARBARA" ausgegeben wird, wenn man sich zum Zeitpunkt ν im Zustand A, B bzw. R befindet? Es gelte $p = 1/4$.

$\boldsymbol{p}_\mathbf{A}$ =

$\boldsymbol{p}_\mathbf{B}$ =

$\boldsymbol{p}_\mathbf{R}$ =

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit insgesamt, dass der Generator zu sieben aufeinanderfolgenden Zeitpunkten *BARBARA* ausgibt ($p = 1/4$)?

Pr(*BARBARA*) =

d) Wie ist der Parameter p zu wählen, damit Pr(*BARBARA*) möglichst groß wird? Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich damit für *BARBARA*?

$\boldsymbol{p}$ =

Pr(*BARBARA*) =