

Überblick zu Kapitel 4 des Buches „LZI-Systeme“

Ein Sonderfall kausaler und zeitinvarianter Systeme sind **elektrische Leitungen**. Hier muss aufgrund der Hilbert-Transformation stets von einem komplexwertigen Frequenzgang $H(f)$ und stark unsymmetrischen Impulsantworten $h(t)$ ausgegangen werden. Das vierte Kapitel bringt eine zusammenfassende Darstellung der Beschreibung leitungsgebundener Übertragungskanäle, wobei im einzelnen behandelt werden:

- wichtige Ergebnisse und Beschreibungsgrößen der *Leitungstheorie*, insbesondere Leitungsbeläge, Übertragungsmaß, Dämpfungsmaß, Phasenmaß, Wellenwiderstand und die Betriebsdämpfung zur Berücksichtigung von Fehlanpassungen und Reflexionen,
- die Frequenzgänge und die Impulsantworten von *Koaxialkabeln*, bei denen aufgrund der guten Schirmung alle anderen Störungen gegenüber dem Thermischen Rauschen (gaußverteilt und weiß) vernachlässigbar sind, und
- die Beschreibung *symmetrischer Kupferleitungen*, die das wichtigste Übertragungsmedium im Zugangsnetz von Telekommunikationssystemen darstellen. Da viele Doppeladern in einem Kabel parallel laufen, kommt es aufgrund kapazitiver und induktiver Kopplungen zu Nebensprechen.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 27 Seiten mit Gleichungen, Beispielen sowie 29 Grafiken verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch acht Aufgaben und drei Zusatzaufgaben mit insgesamt 53 Teilaufgaben. Mit den folgenden Interaktionsmodulen wird die gesamte Thematik dieses Kapitels zusammenfassend dargestellt:

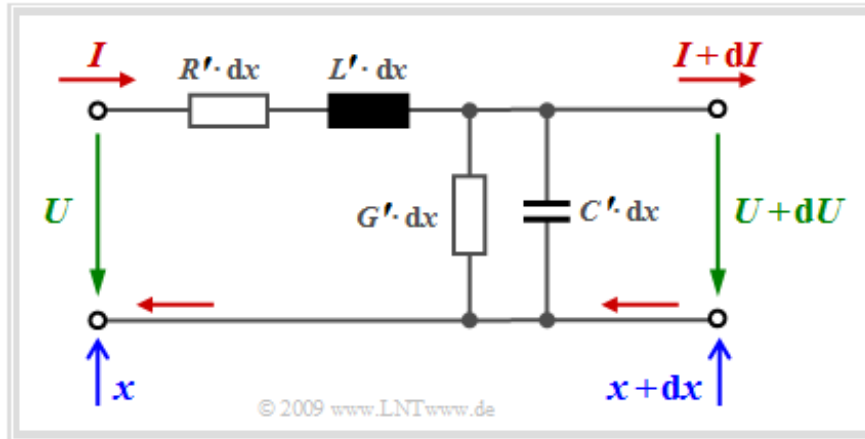
Dämpfung von Kupferkabeln

Zeitverhalten von Kupferkabeln

Literatur: [Die04] – [Han08] – [Kam04] – [PW95] – [ST85] – [We177]

Ersatzschaltbild eines kurzen Leitungsabschnitts (1)

Zur Herleitung der Leitungsgleichungen wird zunächst ein sehr kurzer Leitungsabschnitt der Länge dx betrachtet, so dass sich die Werte für Spannung und Strom am Leitungsanfang (U bzw. I bei x) und am Leitungsende ($U + dU$ sowie $I + dI$ bei $x + dx$) nur geringfügig unterscheiden. Die Grafik zeigt das zugrundeliegende Modell.



Anders ausgedrückt: Die Leitungslänge dx sei sehr klein gegenüber der Wellenlänge der sich entlang der Leitung ausbreitenden elektromagnetischen Welle, die sich ergibt, da

- mit dem Strom ein magnetisches Feld verbunden ist,
- die Spannung zwischen den Leitern ein elektrisches Feld bewirkt.

Alle infinitesimalen „Bauelemente“ im oben skizzierten Ersatzschaltbild sind bei homogenen Leitungen ortsunabhängig:

- Die Induktivität des betrachteten Leitungsabschnitts beträgt $L' \cdot dx$, wobei man die auf die Länge dx bezogene Größe als **Induktivitätsbelag** bezeichnet.
- Ebenso ist der **Kapazitätsbelag** C' eine infinitesimal kleine Größe, der ebenso wie L' nur relativ wenig von der Frequenz abhängt.
- Der **Ableitungsbelag** G' berücksichtigt die Verluste des Dielektrikums zwischen den Drähten. Er nimmt etwa proportional mit der Frequenz zu.
- Den weitaus größten Einfluss auf die Signalübertragung hat der **Widerstandsbelag** R' , der für hohe Frequenzen aufgrund des dann dominanten **Skinneffekts** nahezu proportional mit der Wurzel der Frequenz ansteigt.

Ersatzschaltbild eines kurzen Leitungsabschnitts (2)

Aus den **Maschen- und Knotengleichungen** des Leitungsabschnitts ergeben sich mit $\omega = 2\pi f$ die beiden Differenzgleichungen

$$\begin{aligned} U &= I \cdot (R' + j \cdot \omega L') \cdot dx + (U + dU), \\ I &= (U + dU) \cdot (G' + j \cdot \omega C') \cdot dx + (I + dI). \end{aligned}$$

Für einen sehr kurzen Leitungsabschnitt (infinitesimal kleines dx) und bei Vernachlässigung der kleinen Größen zweiter Ordnung (zum Beispiel $dU \cdot dx$) kann man nun zwei Differentialquotienten bilden, deren gemeinsame Betrachtung zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung führt:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= -(R' + j \cdot \omega L') \cdot I, & \frac{dI}{dx} &= -(G' + j \cdot \omega C') \cdot U \\ \Rightarrow \frac{d^2 U}{dx^2} &= (R' + j \cdot \omega L') \cdot (G' + j \cdot \omega C') \cdot U. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$U(x) = U_{\rightarrow}(x=0) \cdot e^{-\gamma \cdot x} + U_{\leftarrow}(x=0) \cdot e^{\gamma \cdot x}.$$

Der Spannungsverlauf hängt außer vom Ort x auch von der Frequenz f ab, was hier nicht explizit vermerkt ist. Formelmäßig erfasst wird diese Frequenzabhängigkeit durch das **Übertragungsmaß**

$$\gamma(f) = \sqrt{(R' + j \cdot 2\pi f \cdot L') \cdot (G' + j \cdot 2\pi f \cdot C')} = \alpha(f) + j \cdot \beta(f).$$

Die beiden letzten Gleichungen beschreiben gemeinsam den Spannungsverlauf entlang der Leitung, der sich aus der Überlagerung einer in positiver x -Richtung laufenden Welle $U_{\rightarrow}(x)$ und der Welle $U_{\leftarrow}(x)$ in Gegenrichtung zusammensetzt.

Der Realteil $\alpha(f)$ des komplexen Übertragungsmaßes $\gamma(f)$ dämpft die sich ausbreitende Welle und wird daher **Dämpfungsmaß** genannt. Diese stets gerade Funktion $\Rightarrow \alpha(-f) = \alpha(f)$ ergibt sich aus obiger $\gamma(f)$ -Gleichung wie folgt:

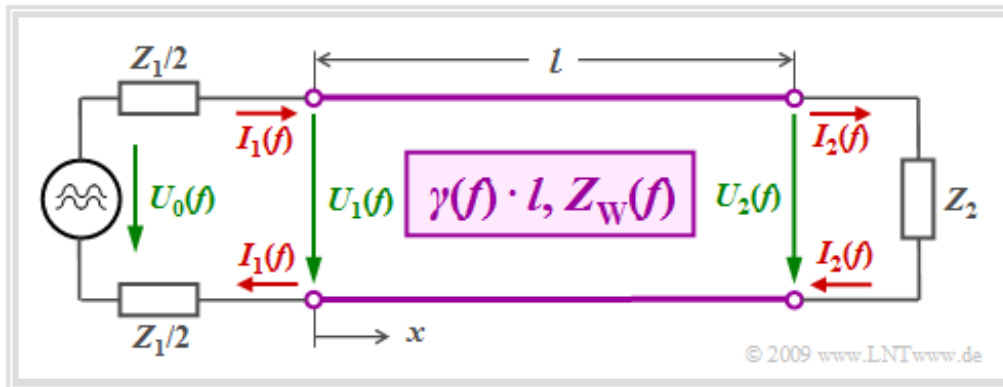
$$\alpha(f) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (R'G' - \omega^2 \cdot LC') + \frac{1}{2} \sqrt{(R'^2 + \omega^2 \cdot L'^2) \cdot (G'^2 + \omega^2 \cdot C'^2)}} \Bigg|_{\omega = 2\pi f}.$$

Der ungerade Imaginärteil $\Rightarrow \beta(-f) = -\beta(f)$ heißt **Phasenmaß** und beschreibt die Phasendrehung der Welle entlang der Leitung:

$$\beta(f) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (-R'G' + \omega^2 \cdot LC') + \frac{1}{2} \sqrt{(R'^2 + \omega^2 \cdot L'^2) \cdot (G'^2 + \omega^2 \cdot C'^2)}} \Bigg|_{\omega = 2\pi f}.$$

Wellenwiderstand und Reflexionen (1)

Betrachten wir nun eine homogene Leitung der Länge l , an dessen Eingang eine harmonische Schwingung $U_0(f)$ mit variabler Frequenz f angelegt wird. Der Sender besitzt den Innenwiderstand Z_1 , der Empfänger den Eingangswiderstand Z_2 , der gleichzeitig den Abschlusswiderstand der Leitung bildet. Wir gehen vereinfachend davon aus, dass Z_1 und Z_2 reelle Widerstände sind.



Strom und Spannung von hinlaufender und rücklaufender Welle sind jeweils über den Wellenwiderstand $Z_W(f)$ miteinander verknüpft:

$$I_{\rightarrow}(x, f) = \frac{U_{\rightarrow}(x, f)}{Z_W(f)}, \quad I_{\leftarrow}(x, f) = \frac{U_{\leftarrow}(x, f)}{Z_W(f)}.$$

Für den **Wellenwiderstand** gilt dabei:

$$Z_W(f) = \sqrt{\frac{R' + j \cdot \omega L'}{G' + j \cdot \omega C'}} \Big|_{\omega = 2\pi f}.$$

Die in positiver x -Richtung laufende Welle wird durch die Wechselspannungsquelle am Leitungsanfang (also bei $x = 0$) erzeugt. Die rücklaufende Welle entsteht erst durch Reflexion der Vorwärtswelle am Leitungsende ($x = l$). An dieser Stelle wird durch den Abschlusswiderstand Z_2 ein festes Verhältnis zwischen Spannung und Strom entsprechend $U_2(f) = Z_2 \cdot I_2(f)$ erzwungen.

Die rücklaufende Welle entsteht bei Fehlanpassung durch **Reflexion** am Leitungsende:

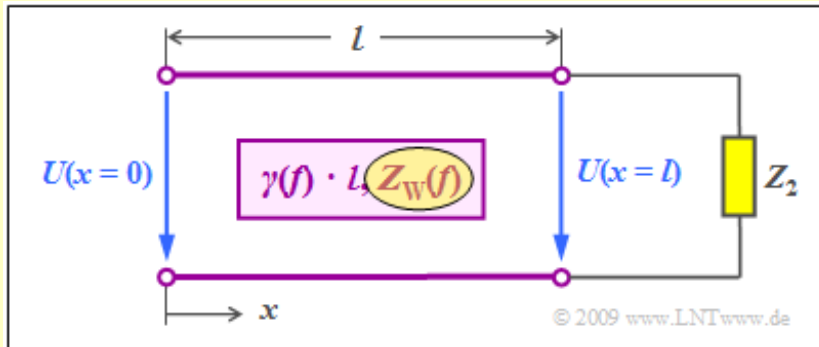
$$U_{\leftarrow}(x = l) = U_{\rightarrow}(x = l) \cdot \frac{Z_2 - Z_W(f)}{Z_2 + Z_W(f)}.$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, dass nur für $Z_2 = Z_W(f)$ keine rücklaufende Welle entsteht. Eine solche **Widerstandanpassung** wird in der Nachrichtentechnik stets angestrebt. Allerdings ist diese Anpassung wegen der Frequenzabhängigkeit des Wellenwiderstandes bei festem Abschluss Z_2 nicht über einen größeren Frequenzbereich möglich.

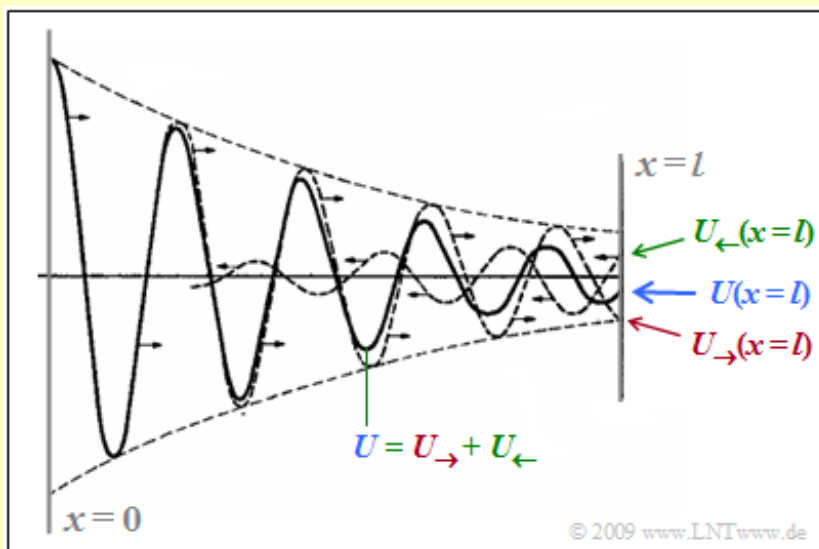
Auf der nächsten Seite werden diese Gleichungen an einem Beispiel erläutert

Wellenwiderstand und Reflexionen (2)

Beispiel: Wir betrachten den Fall, dass sich der Abschlusswiderstand Z_2 der Leitung (gleichzeitig der Eingangswiderstand des nachfolgenden Empfängers) vom Wellenwiderstand $Z_W(f)$ unterscheidet. Die Fehlanpassung am Leitungsanfang lassen wir außer Betracht.



Die untere Grafik aus [Han08] soll deutlich machen, wie sich die resultierende Welle $U(x)$ – als durchgezogene Kurve dargestellt – von der hinlaufenden Welle $U_{\rightarrow}(x)$ unterscheidet.



- Rot markiert ist die hinlaufende Welle $U_{\rightarrow}(x)$, die ausgehend vom Sender $\Rightarrow U_{\rightarrow}(x=0)$ sich längs der Leitung abschwächt. $U_{\rightarrow}(x=l)$ bezeichnet die Welle am Leitungsende.
- Aufgrund der Fehlanpassung kommt es zur rücklaufenden Welle (Reflexion) $U_{\leftarrow}(x)$ vom Leitungsende zum Sender, in der Grafik grün markiert. Für diese gilt am Ausgangspunkt $x=l$:

$$U_{\leftarrow}(x=l) = U_{\rightarrow}(x=l) \cdot \frac{Z_2 - Z_W(f)}{Z_2 + Z_W(f)}$$

- Die resultierende (blaue) Welle $U(x)$ ergibt sich aus der phasenrichtigen Addition dieser beiden für sich allein nicht sichtbaren Anteile. Mit zunehmendem x wird $U(x)$ ebenso wie $U_{\rightarrow}(x)$ wegen der Leitungsdämpfung kleiner. Auch die rücklaufende Welle $U_{\leftarrow}(x)$ wird mit zunehmender Länge gedämpft, allerdings von rechts nach links.

Verlustlose und verlustarme Leitungen

Für sehr kurze Koaxialleitungen, wie sie für Verbindungen von HF-Messgeräten im Labor verwendet werden, kann von $R' = G' \approx 0$ ausgegangen werden. Man spricht dann von einer **verlustlosen Leitung**. Für eine solche vereinfachen sich die obigen Gleichungen zu

$$\alpha(f) = 0, \quad \beta(f) = 2\pi \cdot f \cdot \sqrt{L' \cdot C'}, \quad Z_W(f) = \sqrt{L'/C'}.$$

Sind L' und C' im betrachteten Frequenzbereich konstant, so ist der (reelle) Wellenwiderstand $Z_W(f)$ ebenfalls frequenzunabhängig und das Phasenmaß $\beta(f)$ proportional zur Frequenz. Das bedeutet, dass eine verlustlose Leitung stets verzerrungsfrei ist. Das Ausgangssignal weist gegenüber dem Eingangssignal lediglich eine Laufzeit auf. Üblich sind Wellenwiderstände von 50Ω , 75Ω und 150Ω .

Betrachten wir nun nochmals die Formel für das Dämpfungsmaß, also die Dämpfungsfunktion pro Länge,

$$\alpha(f) = a(f)/l,$$

wenn die Leitung etwas länger ist, aber noch nicht als lang bezeichnet werden kann. Man spricht in diesem Fall von einer **verlustarmen Leitung**.

Die vorne angegebene Formel für das Dämpfungsmaß soll nun für den nicht ganz der Wirklichkeit entsprechenden Fall konstanter Leitungsbeläge ausgewertet werden. Oberhalb einer **charakteristischen Frequenz** f_* , die von R' , L' , G' und C' abhängt, kann R' als sehr klein gegenüber $\omega L'$ und G' als sehr klein gegenüber $\omega C'$ angenommen werden. Damit ergibt sich die Näherungsformel

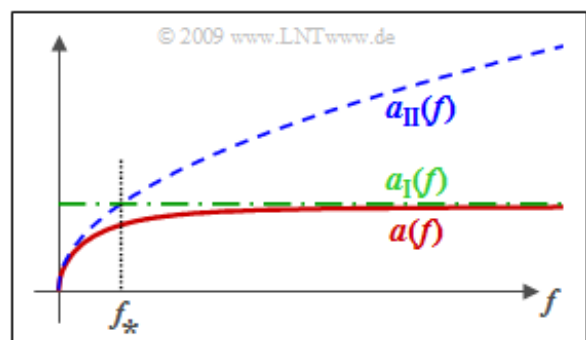
$$\alpha_1(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[R' \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}} + G' \cdot \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right],$$

die in der Literatur häufig als **schwache Dämpfung** bezeichnet wird.

Für kleine Frequenzen ($f < f_*$) ist dagegen $R' \gg \omega L'$ und $G' \gg \omega C'$ zu berücksichtigen und man erhält eine zweite obere Schranke, die man oft als **starke Dämpfung** bezeichnet:

$$\alpha_{II}(f) = \sqrt{\omega \cdot \frac{R' C'}{2}} \Big|_{\omega = 2\pi f}.$$

Die Grafik zeigt das Dämpfungsmaß $\alpha(f)$ bei konstanten Leitungsbelägen nach der exakten, aber komplizierten Formel und die beiden Schranken $\alpha_1(f)$ und $\alpha_{II}(f)$.



Man erkennt aus dieser Darstellung:

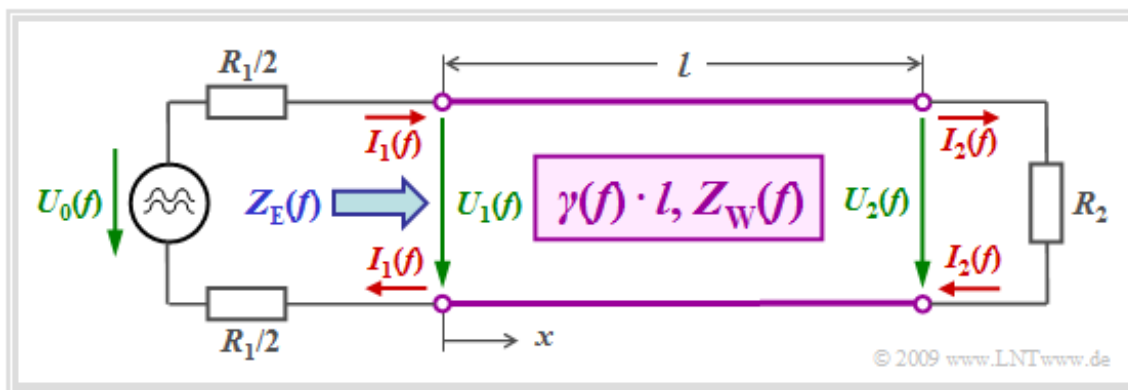
- Sowohl $\alpha_1(f)$ als auch $\alpha_{II}(f)$ sind obere Schranken für $\alpha(f)$.
- Die charakteristische Frequenz f_* ist der Schnittpunkt von $\alpha_1(f)$ und $\alpha_{II}(f)$.
- Für $f \gg f_*$ gilt $\alpha(f) \approx \alpha_1(f)$, für $f \ll f_*$ dagegen $\alpha(f) \approx \alpha_{II}(f)$.

Einfluss von Reflexionen – Betriebsdämpfung (1)

Die Wahl des Abschlusswiderstandes $Z_2(f) = Z_W(f)$ verhindert die Entstehung einer reflektierten Welle am Leitungsende. Eine exakte Anpassung dieser Widerstände ist aber in der Praxis meist nur in einem sehr eingeschränkten Frequenzbereich möglich, zum Beispiel

- wegen der komplizierten Frequenzabhängigkeit des Wellenwiderstandes,
- bei Kabeln unterschiedlicher Bauform entlang einer Verbindung,
- bei Berücksichtigung fertigungsbedingter Toleranzen

Daher werden in realen Systemen der Innenwiderstand der Quelle und der Abschlusswiderstand reell und konstant gewählt: Zum Beispiel wurde für **ISDN** (*Integrated Services Digital Network*) für den Innenwiderstand R_1 und den Abschlusswiderstand R_2 jeweils 150Ω festgelegt.



Dies hat folgende Auswirkungen:

- Der Eingangswiderstand der Leitung aus Sicht der Quelle hängt vom Übertragungsmaß $\gamma(f)$, der Leitungslänge l , dem Wellenwiderstand $Z_W(f)$ sowie dem Abschlusswiderstand R_2 ab:

$$Z_E(f) = Z_W(f) \cdot \frac{R_2 + Z_W(f) \cdot \tanh(\gamma(f) \cdot l)}{Z_W(f) + R_2 \cdot \tanh(\gamma(f) \cdot l)},$$

$$\text{mit } \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathcal{C}.$$

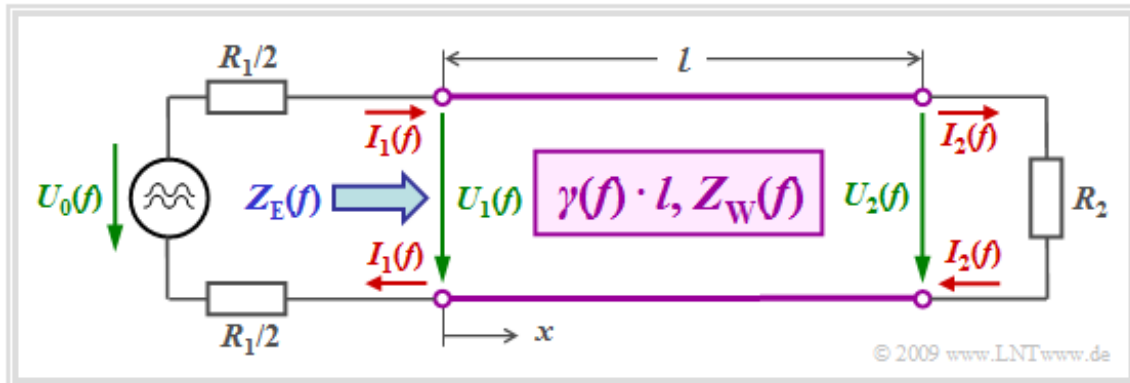
- Durch diese schaltungsbedingte Vereinfachung kommt es zu **Reflexionen** am Leitungsende. Diese reduzieren die am Empfänger verfügbare Leistung und erhöhen so die Leitungsdämpfung.
- Zur Bewertung eines solchen fehlangepassten Systems wurde die **Betriebsdämpfung** (Dämpfung im Betrieb) definiert, die die tatsächliche vom Sender zum Empfänger übertragene Wirkleistung in Bezug zum bestmöglichen Fall (vernachlässigbare Leitungslänge, vollständige Anpassung) setzt:

$$\begin{aligned} a_B(f) \text{ in Neper (Np)} &= \ln \frac{|U_0(f)|}{2 \cdot |U_2(f)|} \cdot \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \\ &= \alpha(f) \cdot l + \ln |q_1(f)| + \ln |q_2(f)| + \ln |1 - r_1(f) \cdot r_2(f) \cdot e^{-\gamma(f) \cdot l}|. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird auf der nächsten Seite ausführlich diskutiert.

Einfluss von Reflexionen – Betriebsdämpfung (2)

Zur Bewertung eines fehlangepassten Systems $\Rightarrow Z_2(f) \neq Z_W(f)$ wurde auf der letzten Seite die *Betriebsdämpfung* (Dämpfung im Betrieb) definiert.



Die **Betriebsdämpfung** setzt die tatsächliche vom Sender zum Empfänger übertragene Wirkleistung in Bezug zum bestmöglichen Fall (vernachlässigbare Leitungslänge, vollständige Anpassung). Für diese gilt:

$$a_B(f) \text{ in Neper (Np)} = \ln \frac{|U_0(f)|}{2 \cdot |U_2(f)|} \cdot \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} =$$

$$= \alpha(f) \cdot l + \ln |q_1(f)| + \ln |q_2(f)| + \ln |1 - r_1(f) \cdot r_2(f) \cdot e^{-\gamma(f) \cdot l}|.$$

- Bei Widerstandsanpassung ist die Betriebsdämpfung gleich der **Wellendämpfung**, das heißt, in diesem anzustrebenden Fall ist nur der erste Term obiger Gleichung wirksam:

$$a_B(f) = \alpha(f) \cdot l.$$

- Der zweite und der dritte Term berücksichtigen die Leistungsverluste durch Reflexion an den Übergängen Sender–Leitung und Leitung–Empfänger. Für diese beiden **Stoßdämpfungen** gilt:

$$q_1(f) = \frac{R_1 + Z_W(f)}{2 \cdot \sqrt{R_1 \cdot Z_W(f)}}, \quad q_2(f) = \frac{R_2 + Z_W(f)}{2 \cdot \sqrt{R_2 \cdot Z_W(f)}}.$$

- Die **Wechselwirkungs dämpfung** (vierter Term) beschreibt die Auswirkung einer mehrfach reflektierten Welle, die sich – je nach Leitungslänge – dem Nutzsignal am Empfänger konstruktiv oder destruktiv überlagert. Für die Reflexionsfaktoren gilt:

$$r_1(f) = \frac{R_1 - Z_W(f)}{R_1 + Z_W(f)}, \quad r_2(f) = \frac{R_2 - Z_W(f)}{R_2 + Z_W(f)}.$$

Die verschiedenen Anteile der Betriebsdämpfung $a_B(f)$ werden in der **Aufgabe A4.3** für ein praktisches Beispiel berechnet. In den folgenden Kapiteln 4.2 und 4.3 wird nur noch die Wellendämpfung $\alpha(f) \cdot l$ weiter betrachtet und damit die Auswirkung einer Fehleranpassung vernachlässigt.

Übertragungsmaß von Koaxialkabeln

Koaxialkabel bestehen aus einem Innenleiter und – durch ein Dielektrikum getrennt – einem Außenleiter. Es wurden zwei unterschiedliche Kabeltypen standardisiert, wobei zur Kennzeichnung die Durchmesser von Innen- und Außenleiter herangezogen werden:

- das **Normalkoaxialkabel**, dessen Innenleiter einen Durchmesser von 2.6 mm besitzt und der Außendurchmesser 9.5 mm beträgt,
- das **Kleinkoaxialkabel** mit den Abmessungen 1.2 mm und 4.4 mm.

Der Kabelfrequenzgang $H_K(f)$ ergibt sich aus der Kabellänge l und dem Übertragungsmaß

$$\gamma(f) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot \sqrt{f} + j \cdot (\beta_1 \cdot f + \beta_2 \cdot \sqrt{f})$$
$$\Rightarrow H_K(f) = e^{-\gamma(f) \cdot l} \Rightarrow |H_K(f)| = e^{-\alpha(f) \cdot l}.$$

Die kabelaufspezifischen Konstanten für das Normalkoaxialkabel 2.6/9.5 mm sind:

$$\alpha_0 = 0.00162 \frac{\text{Np}}{\text{km}}, \quad \alpha_1 = 0.000435 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \text{MHz}}, \quad \alpha_2 = 0.2722 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}},$$
$$\beta_1 = 21.78 \frac{\text{rad}}{\text{km} \cdot \text{MHz}}, \quad \beta_2 = 0.2722 \frac{\text{rad}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}}.$$

Entsprechend lauten die kilometrischen Dämpfungs- und Phasenkonstanten für das Kleinkoaxialkabel:

$$\alpha_0 = 0.00783 \frac{\text{Np}}{\text{km}}, \quad \alpha_1 = 0.000443 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \text{MHz}}, \quad \alpha_2 = 0.5984 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}},$$
$$\beta_1 = 22.18 \frac{\text{rad}}{\text{km} \cdot \text{MHz}}, \quad \beta_2 = 0.5984 \frac{\text{rad}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}}.$$

Diese Werte können aus den geometrischen Abmessungen der Kabel berechnet werden und wurden durch Messungen am Fernmeldetechnischen Zentralamt in Darmstadt bestätigt – siehe [Wel77]. Sie gelten für eine Temperatur von 20°C (293 K) und Frequenzen größer als 200 kHz. Es besteht folgender Zusammenhang zu den **Leitungsbelägen**:

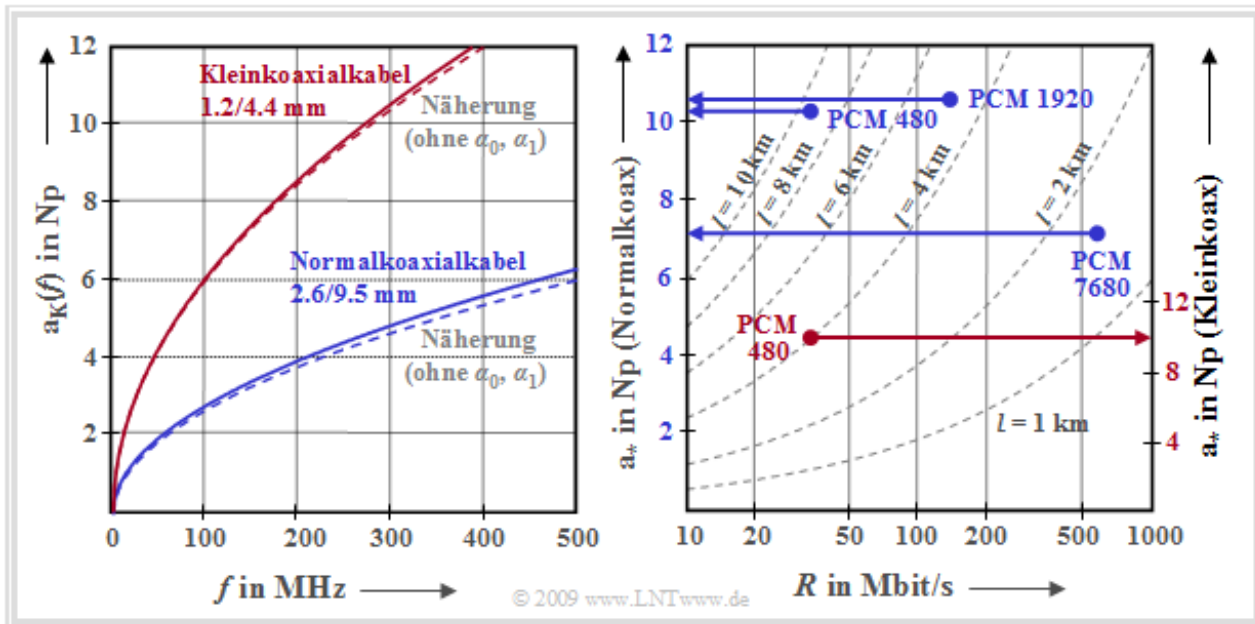
- Die vom frequenzunabhängigem Anteil R herrührenden **Ohmschen Verluste** werden durch α_0 modelliert und verursachen eine (bei Koaxialkabeln geringe) frequenzunabhängige Dämpfung.
- Der Anteil $\alpha_1 \cdot f$ des Dämpfungsmaßes ist auf die **Ableitungsverluste** (G) zurückzuführen und der frequenzproportionale Term $\beta_1 \cdot f$ bewirkt nur eine **Phasenlaufzeit**, aber keine Verzerrungen.
- Die Anteile α_2 und β_2 gehen auf den **Skinneffekt** zurück, der bewirkt, dass bei höherfrequentem Wechselstrom die Stromdichte im Leiterinneren niedriger ist als an der Oberfläche. Dadurch steigt der Widerstandsbelag R einer elektrischen Leitung mit der Wurzel aus der Frequenz an.

Charakteristische Kabeldämpfung (1)

Wir betrachten zunächst die linke Grafik; das rechte Diagramm wird auf der nächsten Seite beschrieben. Links dargestellt ist das Dämpfungsmaß der zwei Koaxialkabeltypen im Frequenzbereich bis 500 MHz:

$$a_K(f) = \left[\alpha_0 + \alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot \sqrt{f} \right] \cdot l.$$

Die Ordinatenbeschriftung ist hierbei in Np/km angegeben. Oft erfolgt sie auch in dB/km, wobei die Umrechnung $1 \text{ dB} = \ln(10)/20 = 0.11513 \text{ Np}$ gilt.



Man erkennt aus dieser Darstellung, dass der Fehler bei Vernachlässigung des frequenzunabhängigen Anteils α_0 und des frequenzproportionalen Terms ($\alpha_1 f$) noch tolerabel ist. Im Folgenden gehen wir deshalb von der folgenden vereinfachten Dämpfungsfunktion aus:

$$a_K(f) = \alpha_2 \cdot \sqrt{f} \cdot l = a_* \cdot \sqrt{2f/R} \Rightarrow |H_K(f)| = e^{-a_K(f)}, \quad a_K(f) \text{ in Np}.$$

Beachten Sie, dass das Dämpfungsmaß mit „alpha“ bezeichnet wird und die Dämpfungsfunktion (nach Multiplikation mit der Länge) mit „a“, was beim verwendeten Zeichensatz schwer zu erkennen ist.

Die **charakteristische Kabeldämpfung** a_* eignet sich insbesondere für den Vergleich verschiedener leitungsgebundener Übertragungssysteme mit unterschiedlichen Bitraten (R), Kabeltypen (zum Beispiel Normal- oder Kleinkoaxialkabel) und Kabellängen l . Bei all diesen Übertragungssystemen beschreibt a_* die Dämpfung bei der halben Bitrate unter Vernachlässigung des α_0 - und des α_1 -Terms:

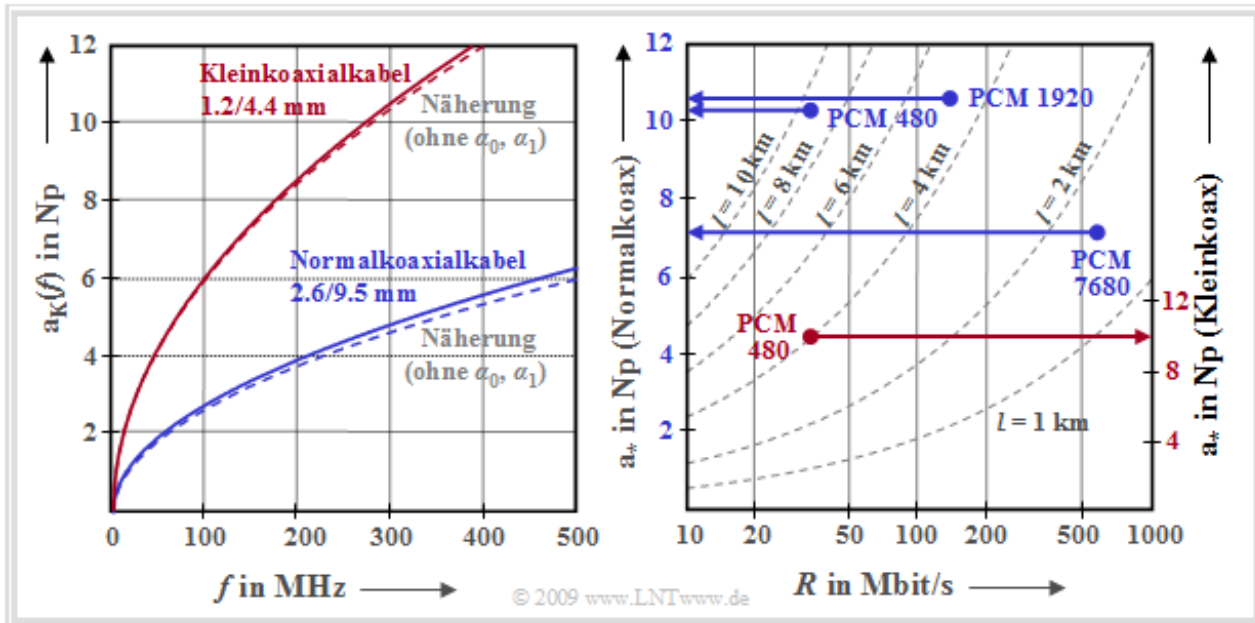
$$a_* = a_K(f = R/2) = \alpha_2 \cdot \sqrt{R/2} \cdot l.$$

Die Beschreibung des rechten Diagramms folgt auf der nächsten Seite.

Charakteristische Kabeldämpfung (2)

Das rechte Diagramm zeigt die charakteristische Kabeldämpfung a_* in Neper (Np) in Abhängigkeit der Bitrate R und der Kabellänge l

- beim Normalkoaxialkabel (linke Ordinatenbeschriftung) und
- beim Kleinkoaxialkabel (rechte Ordinatenbeschriftung).



In der Grafik eingezeichnet sind die vom CCITT in den 1970-Jahren vorgeschlagenen PCM-Systeme der Hierarchiestufen 3 bis 5. Man erkennt:

- Bei all diesen Systemen zur PCM-Sprachübertragung nimmt die charakteristische Kabeldämpfung Werte zwischen 7 Np (≈ 61 dB) und 10.6 Np (≈ 92 dB) an.
- Das System PCM 480 – ausgelegt für 480 gleichzeitige Telefonate – mit der Bitrate $R \approx 35$ Mbit/s wurde sowohl für das Normalkoaxialkabel (mit der Leitungslänge $l = 9.3$ km) als auch für das Kleinkoaxialkabel (mit 4 km Länge) spezifiziert. Die a_* -Werte 10.4 Np bzw. 9.9 Np liegen in der gleichen Größenordnung.
- Das Übertragungssystem PCM 1920 der vierten Hierarchiestufe ($R \approx 140$ Mbit/s, $l = 4.65$ km, Normalkoaxialkabel) wird durch $a_* = 10.6$ Np bzw. $10.6 \cdot 8.688$ dB/Np ≈ 92 dB parametrisiert.
- Obwohl das System PCM 7680 demgegenüber zwar die vierfache Kapazität ($R \approx 560$ Mbit/s) aufweist, ist die charakteristische Kabeldämpfung mit $a_* \approx 61$ dB aufgrund der um den Faktor 3 kürzeren Kabelabschnitte ($l = 1.55$ km, Normalkoaxialkabel) deutlich geringer.
- Aus diesen Zahlenwerten geht auch hervor, dass bei Koaxialkabelsystemen die Kabellänge l kritischer ist als die Bitrate R . Will man die Kabellänge verdoppeln, muss man die Bitrate um den Faktor 4 herabsetzen.

Die hier beschriebene Thematik können Sie sich auch mit folgendem Interaktionsmodul verdeutlichen:

Dämpfung von Kupferkabeln

Impulsantworten von Koaxialkabeln (1)

Zur Berechnung der Impulsantwort können von den fünf Anteilen des Übertragungsmaßes die beiden ersten Dämpfungsanteile vernachlässigt werden (Begründung siehe vorherige Seite):

$$\begin{aligned} \gamma(f) &= \alpha_0 + \alpha_1 \cdot f + j \cdot \beta_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot \sqrt{f} + j \cdot \beta_2 \cdot \sqrt{f} \approx \\ &\approx j \cdot \beta_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot \sqrt{f} + j \cdot \beta_2 \cdot \sqrt{f}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung

- der Kabellänge l ,
- der charakteristischen Kabeldämpfung a_* und
- der Tatsache, dass α_2 (in Np) und β_2 (in rad) zahlenmäßig gleich sind,

gilt somit für den Frequenzgang des Koaxialkabels:

$$\begin{aligned} H_K(f) &= e^{-j \cdot b_1 f} \cdot e^{-a_* \cdot \sqrt{2f/R}} \cdot e^{-j \cdot a_* \cdot \sqrt{2f/R}} = \\ &= e^{-j \cdot b_1 f} \cdot e^{-2a_* \cdot \sqrt{j \cdot f/R}}, \end{aligned}$$

wobei b_1 (in rad) = $\beta_1 \cdot l$, a_* (in Np) = $\alpha_2 \cdot \sqrt{R/2} \cdot l$.

Zur Zeitbereichsdarstellung kommt man durch Anwendung der **Fourierücktransformation** und des Faltungssatzes:

$$h_K(t) = F^{-1} \{ e^{-j \cdot b_1 f} \} \star F^{-1} \left\{ e^{-2a_* \cdot \sqrt{j \cdot f/R}} \right\}.$$

Hierbei ist zu berücksichtigen:

- Der erste Term liefert die um die Phasenlaufzeit $\tau_P = b_1/2\pi$ verschobene Diracfunktion $\delta(t - \tau_P)$.
- Der zweite Term lässt sich analytisch geschlossen angeben. Wir schreiben hierfür $h_K(t + \tau_P)$. Im Gegensatz zu $h_K(t)$ ist hier die Phasenlaufzeit τ_P nicht berücksichtigt.

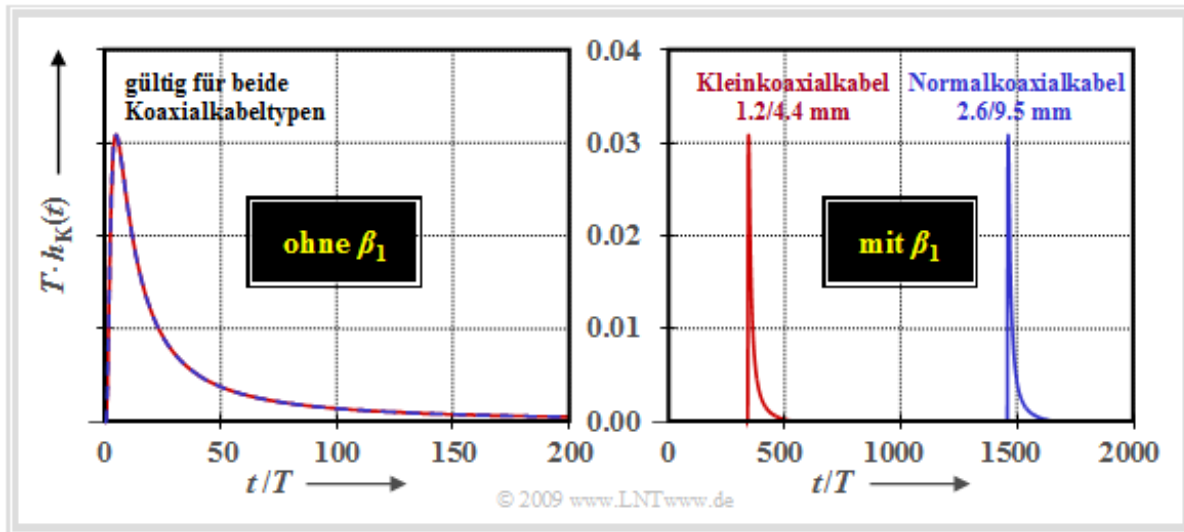
$$h_K(t + \tau_P) = \frac{a_*}{\pi \cdot \sqrt{2 R t^3}} \cdot \exp \left[-\frac{a_*^2}{2\pi R t} \right], \quad a_* \text{ in Np}.$$

- Da die Bitrate R bereits bei der Definition der charakteristischen Kabeldämpfung a_* berücksichtigt wurde, lässt sich diese Gleichung mit der normierten Zeit $t' = t/T$ einfach darstellen, wobei $T = 1/R$ die Symboldauer eines Binärsystems angibt. Desweiteren gilt $\tau_P' = \tau_P/T$:

$$h_K(t' + \tau_P') = \frac{1}{T} \cdot \frac{a_*}{\pi \cdot \sqrt{2 t'^3}} \cdot \exp \left[-\frac{a_*^2}{2\pi t'} \right], \quad a_* \text{ in Np}.$$

Impulsantworten von Koaxialkabeln (2)

Dargestellt wird die normierte Impulsantwort $T \cdot h_K(t)$ eines Koaxialkabels mit $a_* = 60 \text{ dB}$ (6.9 Np) $\Rightarrow \alpha_0$ und α_1 werden hier vernachlässigt. Für die linke Grafik wurde zudem der Parameter β_1 zu 0 gesetzt.



Wegen der Parametrisierung mittels der charakteristischen Kabeldämpfung a_* und der Normierung der Zeit auf die Symboldauer T gilt diese linke Kurve für Systeme mit Klein- bzw. Normalkoaxialkabel, für unterschiedliche Längen und verschiedene Bitraten gleichermaßen, zum Beispiel für ein

- Normalkoaxialkabel 2.6/9.5 mm, Bitrate $R = 140 \text{ Mbit/s}$, Kabellänge $l = 3 \text{ km} \Rightarrow$ **System A**,
- Kleinkoaxialkabel 1.2/4.4 mm, Bitrate $R = 35 \text{ Mbit/s}$, Kabellänge $l = 2.8 \text{ km} \Rightarrow$ **System B**.

Man erkennt, dass sich selbst bei dieser moderaten Kabeldämpfung $a_* = 60 \text{ dB}$ die Impulsantwort aufgrund des Skineffektes ($\alpha_2 = \beta_2 \neq 0$) schon über mehr als 200 Symboldauern erstreckt. Da das Integral über $h_K(t)$ gleich $H_K(f=0) = 1$ ist, wird der Maximalwert von $h_K(t)$ sehr klein (≈ 0.03).

In der rechten Grafik sind die Auswirkungen des Phasenparameters β_1 zu sehen. Beachten Sie bitte auch die unterschiedlichen Zeitmaßstäbe in der linken und der rechten Darstellung:

- Beim System A ($\beta_1 = 21.78 \text{ rad}/(\text{km} \cdot \text{MHz})$, $T = 7.14 \text{ ns}$) führt β_1 zu einer Laufzeit von

$$\tau_A = \frac{\beta_1 \cdot l}{2\pi} = \frac{21.78 \text{ rad}/(\text{km} \cdot \text{MHz}) \cdot 3 \text{ km}}{2\pi} = 10.4 \mu\text{s} \Rightarrow \tau'_A = \tau_A/T \approx 1457.$$

- Dagegen erhält man für das System B ($\beta_1 = 22.18 \text{ rad}/(\text{km} \cdot \text{MHz})$, $T = 30 \text{ ns}$):

$$\tau_B = \frac{\beta_1 \cdot l}{2\pi} = \frac{22.18 \text{ rad}/(\text{km} \cdot \text{MHz}) \cdot 2.8 \text{ km}}{2\pi} = 9.9 \mu\text{s} \Rightarrow \tau'_B = \tau_B/T \approx 330.$$

Obwohl bei den getroffenen Annahmen $\tau_A \approx \tau_B$ gilt, ergeben sich wegen der Zeitnormierung auf $T = 1/R$ völlig unterschiedliche Verhältnisse.

Bei der Simulation und Optimierung von Nachrichtensystemen verzichtet man meist auf den Phasenterm mit $b_1 = \beta_1 \cdot l$, da dieser ausschließlich eine Laufzeit, aber keine Signalverzerrung zur Folge hat.

Empfangsgrundimpuls

Mit dem Sendegrundimpuls $g_s(t)$ und der Impulsantwort $h_K(t)$ ergibt sich für den Empfangsgrundimpuls:

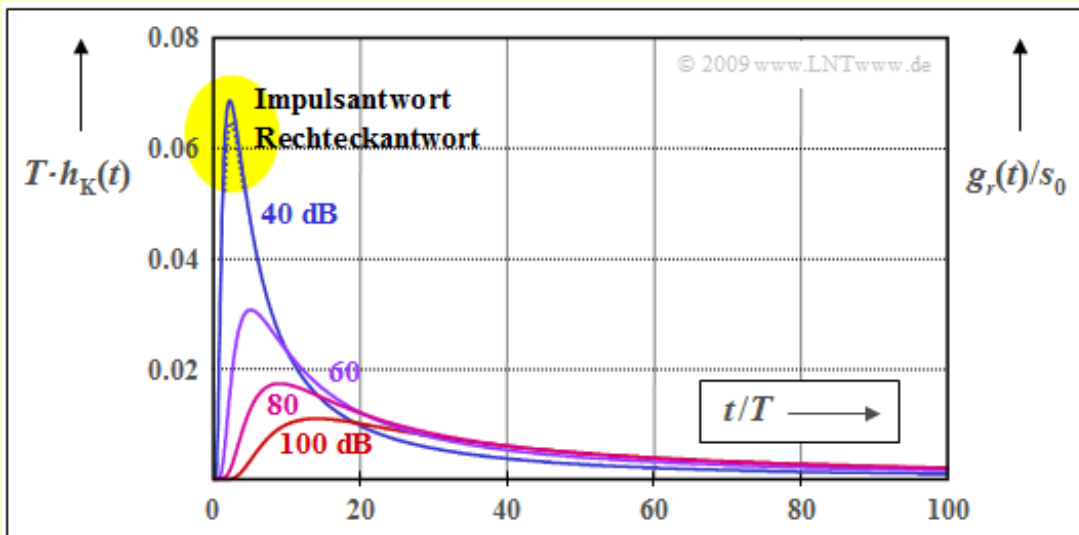
$$g_r(t) = g_s(t) \star h_K(t).$$

Verwendet man am Sender einen NRZ-Rechteckimpuls $g_s(t)$ mit der Amplitude s_0 und Dauer $\Delta t_s = T$, so ergibt sich für den Grundimpuls am Ausgang des Koaxialkabels:

$$g_r(t) = 2s_0 \cdot \left[Q\left(\frac{a_*/\sqrt{\pi}}{\sqrt{(t/T) - 0.5}}\right) - Q\left(\frac{a_*/\sqrt{\pi}}{\sqrt{(t/T) + 0.5}}\right) \right],$$

mit a_* : charakteristische Kabeldämpfung in Neper, $Q(x)$: komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion.

Beispiel: Die Abbildung zeigt die normierte Koaxialkabelimpulsantwort $T \cdot h_K(t)$ und den auf die Sendeamplitude s_0 normierten Empfangsgrundimpuls $g_r(t)$ für die charakteristischen Kabeldämpfungen $a_* = 40 \text{ dB}$, 60 dB , 80 dB und 100 dB . Kleinere Werte von a_* sind für die Praxis nicht relevant.



Man erkennt aus dieser Darstellung:

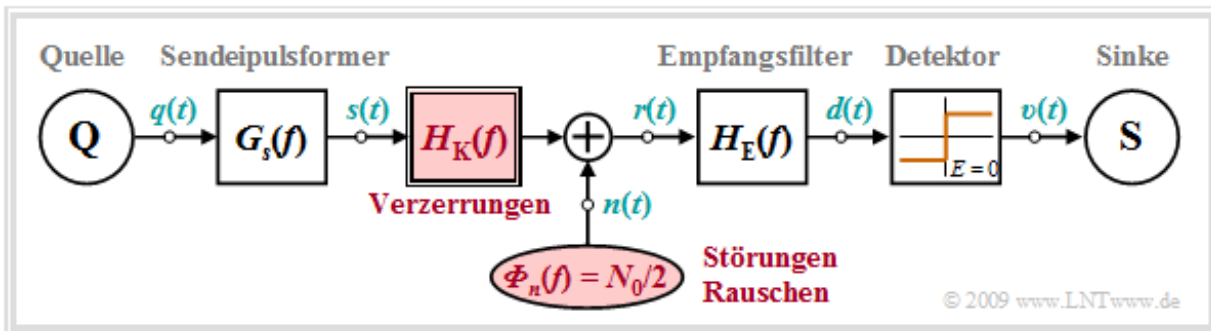
- Mit $a_* = 40 \text{ dB}$ ist $g_r(t)/s_0$ an der Spitze geringfügig (etwa um den Faktor 0.95) kleiner als die normierte Impulsantwort $T \cdot h_K(t)$.
- Dagegen sind für den Fall $a_* \geq 60 \text{ dB}$ die Rechteckantwort und die Impulsantwort innerhalb der Zeichengenauigkeit nicht zu unterscheiden.
- Bei einem RZ-Impuls ist die obige Gleichung für den Empfangsgrundimpuls noch mit dem Tastverhältnis $\Delta t_s/T$ zu multiplizieren. In diesem Fall ist $g_r(t)/s_0$ deutlich kleiner als $T \cdot h_K(t)$.
- Die so modifizierte Gleichung stellt auch eine gute Näherung für andere Sendegrundimpulse dar, so lange a_* hinreichend groß ist ($\geq 60 \text{ dB}$). Δt_s gibt dann die äquivalente Sendeimpulsdauer an.

Wir möchten Sie auf ein Interaktionsmodul hinweisen, das die hier behandelte Thematik zum Inhalt hat:

Zeitverhalten von Kupferkabeln

Einige Bemerkungen zu Koaxialkabelsystemen

Geht man von binärer Übertragung mit NRZ-Rechteckimpulsen (Symboldauer T) und einem koaxialen Übertragungskanal aus, so ergibt sich das folgende Systemmodell:



Insbesondere ist zu beachten:

- Bei einer Simulation lässt man zweckmäßigerweise die Laufzeit des Koaxialkabels außer Betracht. Dann gilt für den Empfangsgrundimpuls näherungsweise:

$$g_r(t) \approx s_0 \cdot T \cdot h_K(t) = \frac{s_0 \cdot a_* / \pi}{\sqrt{2}(t/T)^3} \cdot \exp\left[-\frac{a_*^2}{2\pi t/T}\right], \text{ mit } a_* \text{ in Neper.}$$

- Das **thermische Rauschen** ist wegen der sehr guten Abschirmung der Koaxialkabel gegenüber anderen Störungen die dominante Störursache. $n(t)$ ist gaußverteilt und weiß und wird durch die (zweiseitige) Rauschleistungsdichte $N_0/2$ beschrieben.
- Der weitaus größte Rauschanteil entsteht in der Eingangsstufe des Empfängers, so dass man $n(t)$ zweckmäßigerweise an der Schnittstelle Kabel–Empfänger addiert:

$$r(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_r(t - \nu \cdot T) + n(t).$$

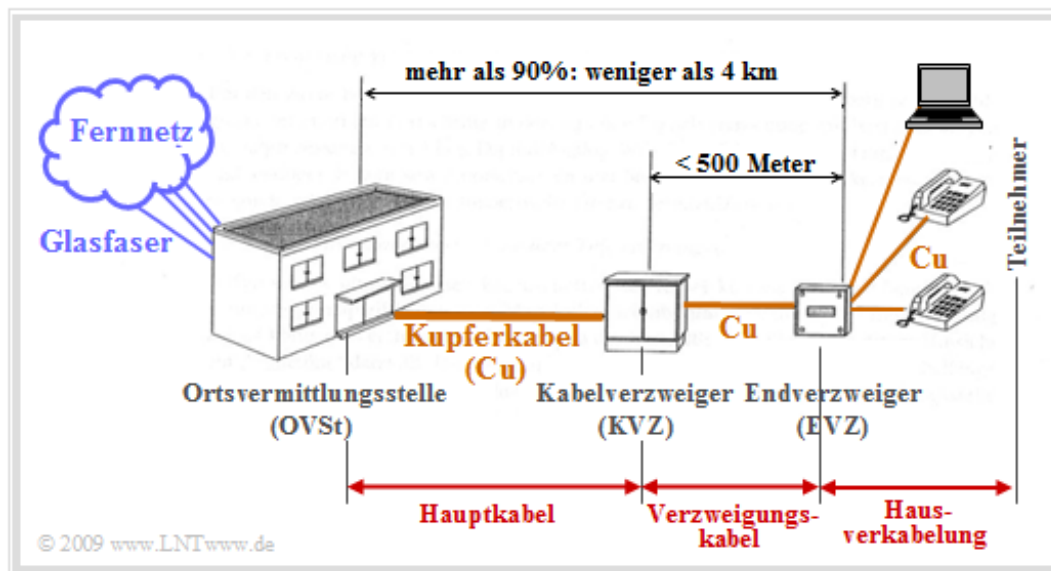
- Dieser Punkt ist auch deshalb sinnvoll, da alle entlang des Kabels akkumulierten Rauschstörungen durch den Kabelfrequenzgang $H_K(f)$ entscheidend gedämpft werden.

Zugangsnetz eines Telekommunikationssystems (1)

Bei einem Telekommunikationssystem unterscheidet man zwischen

- dem Fern- und Regionalnetz sowie
- dem Teilnehmeranschlussbereich,

die durch die Ortsvermittlungsstelle voneinander getrennt sind. Die Grafik zeigt die Netzinfrastruktur bei ISDN (*Integrated Services Digital Network*).



Ursprünglich basierte das gesamte Fernsprechnet auf Kupferleitungen. Mitte der 1980-Jahre wurden aber im Weitverkehr die – vorwiegend koaxialen – Kupferkabel durch Glasfaserkabel ersetzt, da der stetig wachsende Bandbreitebedarf nur mit optischer Übertragungstechnik befriedigt werden konnte.

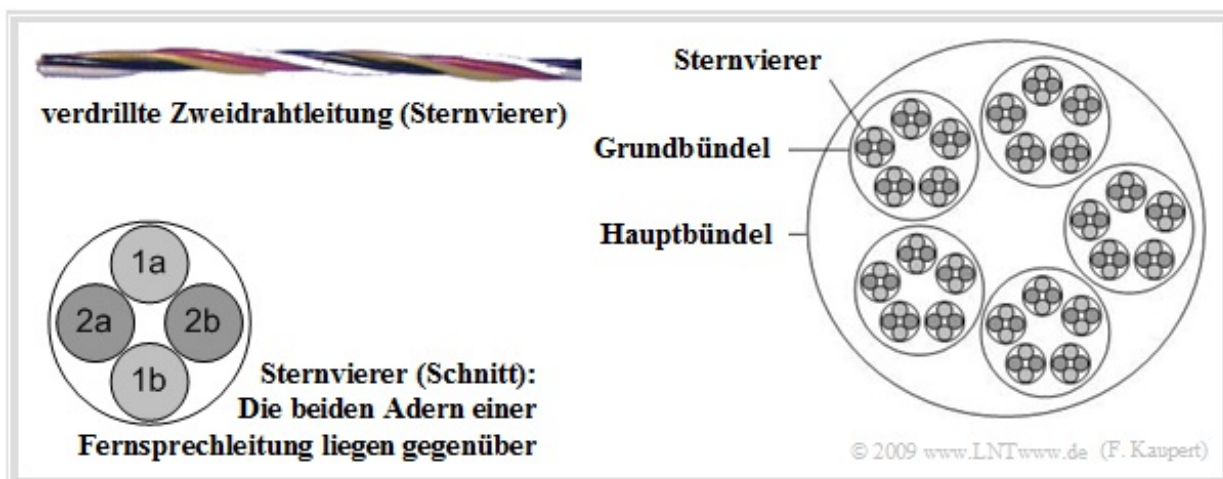
Aufgrund der immens hohen Verlegekosten sind Glasfasern im Teilnehmeranschlussbereich bis heute (2009) nicht wirtschaftlich, allerdings gibt es schon lange Planungen zu *Fiber-to-the-Building* (FttB) bzw. *Fiber-to-the-Home* (FttH). Vielmehr ist man in den letzten 20 Jahren den Weg gegangen, durch die Entwicklung und die Verbesserung hochratiger Übertragungssysteme wie **DSL** (*Digital Subscriber Line*) über das konventionelle, kupferbasierte Zugangsnetz ausreichend Kapazität bereitzustellen.

Zugangsnetz eines Telekommunikationssystems (2)

In Deutschland ist diese so genannte „Last Mile“ im Landesdurchschnitt kürzer als 4 km, in städtischen Gebieten zu 90% sogar kürzer als 2.8 km. Der **Teilnehmeranschlußbereich** setzt sich meist wie folgt zusammen:

- das *Hauptkabel* mit bis zu 2000 Doppeladern als Verbindung zwischen Ortsvermittlungsstelle und dem Kabelverzweiger,
- das *Verzweigungskabel* zwischen Kabel- und Endverzweiger, mit bis zu 300 Doppeladern und mit maximal 500 Metern deutlich kürzer als ein Hauptkabel,
- das *Hausanschlußkabel* zwischen Endverzweiger und der Netzabschlußdose beim Teilnehmer mit zwei Doppeladern.

Zur Verminderung des Nebensprechens auf benachbarte Leitungspaare durch induktive und kapazitive Kopplungen und zur Erhöhung der Packungsdichte werden jeweils zwei Doppeladern zu einem so genannten Sternvierer verseilt. Die untere Grafik zeigt einen solchen **Sternvierer** und ein Bündelkabel. Hier werden je fünf solcher Vierer zu einem Grundbündel und je 5 Grundbündel zu einem Hauptbündel zusammengefasst. Dieses beinhaltet somit 50 Doppeladern mit PE-Isolierung (*PE*: Polyethylen).



Dämpfungsmaß von Zweidrahtleitungen

Das Dämpfungsmaß $\alpha(f)$ und der Wellenwiderstand $Z_W(f)$ von Doppeladern in realen verlegten Kabeln weichen mehr oder weniger stark von der in **Kapitel 4.1** dargelegten Theorie ab. Gründe hierfür sind:

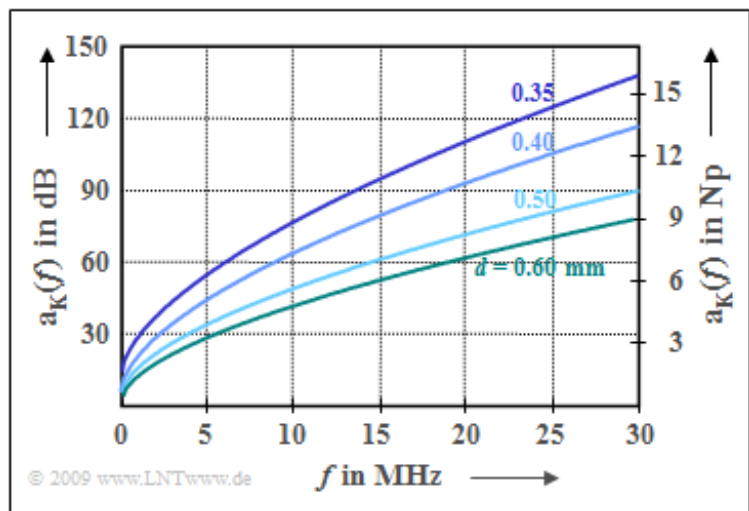
- komplexe Vorgänge der Wirbelstrombildung und der Stromverdrängung, und
- Inhomogenitäten im Kabelaufbau bei gespleißten Kabelabschnitten.

Verschiedene Netzbetreiber haben $\alpha(f)$ und $Z_W(f)$ gemessen und daraus empirische Gleichungen abgeleitet. Wir beziehen uns hier auf die in [PW95] dokumentierten Arbeiten von M. Pollakowski und H.W. Wellhausen vom Fernmeldetechnischen Zentralamt der Deutschen Bundespost in Darmstadt. Diese ermittelten für unterschiedliche Leitungsdurchmesser d unter anderem das empirische Dämpfungsmaß aus 40 Messungen im Frequenzbereich bis 30 MHz entsprechend der Gleichung

$$\alpha(f) = k_1 + k_2 \cdot (f/\text{MHz})^{k_3}.$$

Die Grafik zeigt die Messergebnisse:

- $d = 0.35$ mm: $k_1 = 7.9$ dB/km, $k_2 = 15.1$ dB/km, $k_3 = 0.62$,
- $d = 0.40$ mm: $k_1 = 5.1$ dB/km, $k_2 = 14.3$ dB/km, $k_3 = 0.59$,
- $d = 0.50$ mm: $k_1 = 4.4$ dB/km, $k_2 = 10.8$ dB/km, $k_3 = 0.60$,
- $d = 0.60$ mm: $k_1 = 3.8$ dB/km, $k_2 = 9.2$ dB/km, $k_3 = 0.61$.



Man erkennt aus dieser Darstellung:

- Das Dämpfungsmaß $\alpha(f)$ sowie die Dämpfungsfunktion $a_K(f) = \alpha(f) \cdot l$ hängt signifikant vom Leitungsdurchmesser ab. Die seit 1994 verlegten Kabel (Durchmessern; 0.35 mm und 0.5 mm) haben etwa ein um 10% größeres Dämpfungsmaß als die älteren Leitungen 0.4 mm und 0.6 mm.
- Dieser mit den Herstellungs- und Verlegungskosten begründete kleinere Leitungsdurchmesser d vermindert allerdings die Reichweite der auf diesen Leitungen eingesetzten Übertragungssysteme signifikant, so dass im schlimmsten Fall teure Zwischengeneratoren eingesetzt werden müssen, um die Kunden mit hochratigen Diensten versorgen zu können.
- Die heute üblichen Übertragungsverfahren für Kupferleitungen belegen allerdings nur ein relativ schmales Frequenzband, zum Beispiel sind dies bei ISDN 120 kHz und bei DSL ca. 1100 kHz. Für $f = 1$ MHz beträgt das Dämpfungsmaß für ein 0.4 mm-Kabel etwa 20 dB/km, so dass selbst bei einer Kabellänge von 4 km der Dämpfungswert nicht über 80 dB liegt.
- Eine Ausnahme bildet VDSL, das z. B. die Deutsche Telekom in allen größeren Städten anbietet. Hier geht der Frequenzbereich bis 30 MHz. Deshalb wurden hierfür Glasfaserverbindungen bis zum Kabelverzweiger verlegt, um die noch mit Kupfer zu überbrückende Länge klein zu halten. Man spricht dann von *Fibre-to-the-Cabinet* (FttC).

Umrechnung zwischen k - und α - Parametern (1)

Zur Berechnung des Frequenzgangs $H_K(f)$ sollte man stets vom gemessenen Dämpfungsmaß

$$\alpha(f) = k_1 + k_2 \cdot (f/f_0)^{k_3} = \alpha_I(f), \text{ mit } f_0 = 1 \text{ MHz}$$

ausgehen. Will man dagegen die dazugehörige Zeitfunktion in Form der Impulsantwort $h_K(t)$ ermitteln, so ist es günstiger (siehe übernächste Seite), wenn das Dämpfungsmaß in der Form

$$\alpha(f) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot \sqrt{f} = \alpha_{II}(f)$$

dargestellt werden kann, wie es auch für die Koaxialkabel üblich ist.

Als Kriterium dieser Umrechnung gehen wir davon aus, dass die quadratische Abweichung dieser beiden Funktionen im Bereich von $f = 0$ bis $f = B$ minimal ist:

$$\int_0^B [\alpha_I(f) - \alpha_{II}(f)]^2 df \Rightarrow \text{Minimum.}$$

Es ist offensichtlich, dass $\alpha_0 = k_1$ gelten wird. Die Parameter α_1 und α_2 sind von der zugrundegelegten Bandbreite B abhängig. Sie lauten entsprechend **Aufgabe A4.6**:

$$\alpha_1 = 15 \cdot (B/f_0)^{k_3-1} \cdot \frac{k_3 - 0.5}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{f_0},$$
$$\alpha_2 = 10 \cdot (B/f_0)^{k_3-0.5} \cdot \frac{1 - k_3}{(k_3 + 1.5)(k_3 + 2)} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{f_0}}.$$

Für $k_3 = 1$ (frequenzproportionales Dämpfungsmaß) ergeben sich folgerichtig

$$\alpha_1 = k_2/f_0, \quad \alpha_2 = 0,$$

während man für $k_3 = 0.5$ die folgenden Koeffizienten erhält:

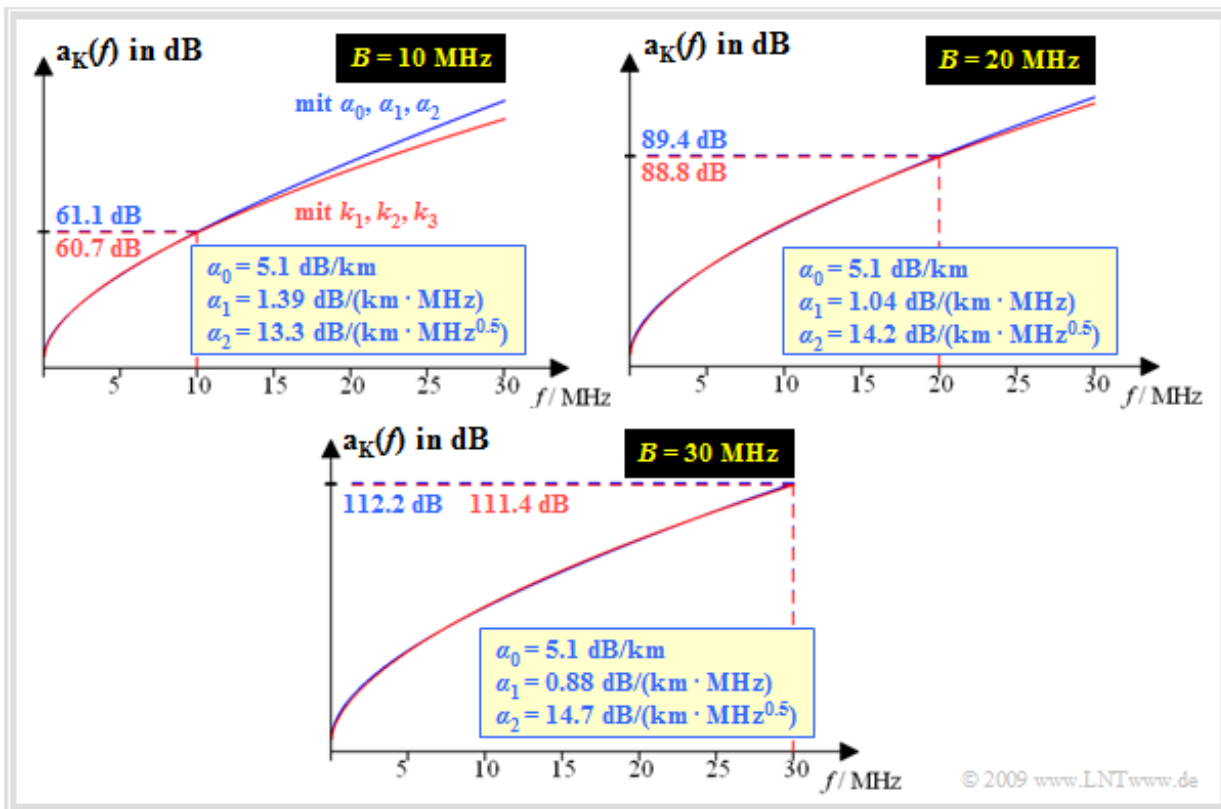
$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = k_2/\sqrt{f_0}.$$

In diesem Fall würde das Dämpfungsmaß $\alpha(f)$ mit der Wurzel aus der Frequenz ansteigen. Es ergäbe sich also der gleiche Verlauf wie bei einem Koaxialkabel entsprechend dem Skineneffekt.

Auf der nächsten Seite wird an drei Beispielen verdeutlicht, wie die zugrundeliegende Bandbreite B die Ergebnisse dieser Umrechnung beeinflussen.

Umrechnung zwischen k - und α - Parametern (2)

Bei allen nachfolgenden Grafiken gehen wir von der Leitungslänge $l = 1$ km und vom Durchmesser 0.4 mm aus $\Rightarrow k_1 = 5.1$ dB/km, $k_2 = 14.3$ dB/km, $k_3 = 0.59$. Für diesen Fall zeigt die folgende Grafik die mit α_0 , α_1 und α_2 approximierte Dämpfung (blaue Kurve) im Vergleich zum tatsächlichen Verlauf gemäß k_1 , k_2 , k_3 (rote Kurve). Die drei Diagramme gelten für die Bandbreiten $B = 10$ MHz, $B = 20$ MHz und $B = 30$ MHz. Die ermittelten Koeffizienten α_1 und α_2 sind angegeben. Stets gilt $\alpha_0 = k_1 = 5.1$ dB/km.



Man erkennt aus diesen Darstellungen:

- Selbst beim größten Approximationsbereich ($B = 30$ MHz) nähert die blaue Kurve (mit α_0 , α_1 , α_2) den gemessenen Verlauf (rote Kurve, beschrieben durch k_1 , k_2 , k_3) sehr gut an.
- Bei kleinerer Bandbreite ($B = 20$ MHz bzw. 10 MHz) ist die Approximation im Bereich $0 \leq f \leq B$ noch besser, doch kommt es dann für $f > B$ zu Verfälschungen.
- Der Dämpfungswert $a_K(f = 30$ MHz) ≈ 112.2 dB setzt sich bei der betrachteten Zweidrahtleitung ($l = 1$ km, $d = 0.4$ mm) folgendermaßen zusammen: 4.5% geht auf den Gleichsignalkoeffizienten α_0 zurück, 23.5% auf den frequenzproportioanlen Anteil α_1 und 72% auf den Koeffizienten α_2 .
- Das Normalkoaxialkabel 2.6/9.5 mm weist im Vergleich dazu erst bei einer Länge von $l = 8.7$ km eine vergleichbare Dämpfung $a_K(f = 30$ MHz) ≈ 112 dB auf, wobei α_0 nur für 0.1% und α_1 nur für ca. 1% verantwortlich ist, während der Großteil der Dämpfung vom Skineffekt (α_2) herrührt.

Impulsantworten von Zweidrahtleitungen (1)

Mit dieser Koeffizientenumrechnung $k_1, k_2, k_3 \Rightarrow \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ kann nun für den gesamten Frequenzgang einer Zweidrahtleitung geschrieben werden:

$$H_K(f) = H_{\alpha 0}(f) \cdot H_{\alpha 1}(f) \cdot H_{\beta 1}(f) \cdot H_{\alpha 2}(f) \cdot H_{\beta 2}(f).$$

Hierbei wurden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} H_{\alpha 0}(f) &= e^{-\alpha_0 \cdot l} = e^{-a_0}, \quad a_0 = \alpha_0 \text{ (in Np)} \cdot l, \\ H_{\alpha 1}(f) &= e^{-\alpha_1 \cdot f \cdot l} = e^{-a_1 \cdot 2f/R}, \quad a_1 = \alpha_1 \text{ (in Np)} \cdot l \cdot R/2, \\ H_{\beta 1}(f) &= e^{-j \cdot \beta_1 \cdot f \cdot l} = e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau_P}, \quad \tau_P = \frac{\beta_1 \text{ (in rad)} \cdot l}{2\pi}, \\ H_{\alpha 2}(f) &= e^{-\alpha_2 \cdot \sqrt{f} \cdot l} = e^{-a_2 \cdot \sqrt{2f/R}}, \quad a_2 = \alpha_2 \text{ (in Np)} \cdot l \cdot \sqrt{R/2}, \\ H_{\beta 2}(f) &= e^{-j \cdot \beta_2 \cdot \sqrt{f} \cdot l} = e^{-j \cdot b_2 \cdot \sqrt{2f/R}}, \quad b_2 = \beta_2 \text{ (in rad)} \cdot l \cdot \sqrt{R/2}. \end{aligned}$$

Auf die Bedeutung der hier implizit definierten Größen wird etwas später eingegangen.

Wir gehen hier zunächst ganz formal vor. Nach dem Faltungssatz gilt für die resultierende Impulsantwort als die Fourierrücktransformierte von $H_K(f)$:

$$\begin{aligned} h_K(t) &= h_{\alpha 0}(t) \star h_{\alpha 1}(t) \star h_{\beta 1}(t) \star h_{\alpha 2}(t) \star h_{\beta 2}(t), \\ h_{\alpha 0}(t) &\circ\text{---}\bullet H_{\alpha 0}(f), \quad h_{\alpha 1}(t) \circ\text{---}\bullet H_{\alpha 1}(f), \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Diese fünf Anteile sollen nun separat betrachtet werden, wobei sich die numerischen Ergebnisse auf ein digitales Übertragungssystem mit der Bitrate $R = 30$ Mbit/s und eine Zweidrahtleitung 0.4 mm der Länge $l = 1$ km beziehen. Damit lauten die α -Koeffizienten in Neper:

$$\alpha_0 = 0.59 \frac{\text{Np}}{\text{km}}, \quad \alpha_1 = 0.10 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \text{MHz}}, \quad \alpha_2 = 1.69 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \text{MHz}^{0.5}}.$$

Das Phasenmaß dieser Leitung ist ebenfalls in [PW95] angegeben:

$$b_K(f) = \beta_1 \cdot f + \beta_2 \cdot \sqrt{f}, \quad \beta_1 = 32.9 \frac{\text{rad}}{\text{km} \cdot \text{MHz}}, \quad \beta_2 = 2.26 \frac{\text{rad}}{\text{km} \cdot \text{MHz}^{0.5}}.$$

Als Normierungsgröße der Zeit eignet sich die Symboldauer $T = 1/R \approx 33$ ns.

Impulsantworten von Zweidrahtleitungen (2)

Nun sollen die fünf Impulsantwort-Anteile $h_{\alpha 0}(t)$, $h_{\alpha 1}(t)$, $h_{\alpha 2}(t)$, $h_{\beta 1}(t)$ und $h_{\beta 2}(t)$ interpretiert werden:

1. Der von den Ohmschen Verlusten herrührende erste Term (frequenzunabhängige Dämpfung) führt zu einer Diracfunktion mit dem Gewicht K , sodass die Faltung mit $h_{\alpha 0}(t)$ durch die Multiplikation mit $K = e^{-0.59} \approx 0.55$ ersetzt werden kann:

$$h_{\alpha 0}(t) = K \cdot \delta(t) \quad \text{mit} \quad K = e^{-a_0} \quad \Rightarrow \quad h_K(t) = h_{\alpha 0}(t) \star h_{\text{Rest}}(t) = K \cdot h_{\text{Rest}}(t).$$

2. $H_{\alpha 1}(f)$ ist eine reelle und gerade Funktion der Frequenz, so dass auch die Fourierrücktransformierte reell und symmetrisch um $t = 0$ ist:

$$H_{\alpha 1}(f) = e^{-2 \cdot a_1 \cdot |f/R|} \quad \bullet \rightarrow \quad h_{\alpha 1}(t) = \frac{1}{T} \cdot \frac{a_1}{a_1^2 + \pi \cdot (t/T)^2}, \quad a_1 \text{ in Np}.$$

Mit den beispielhaften Zahlenwerten $a_1 = 0.1 \text{ Np}/(\text{km} \cdot \text{MHz})$, $l = 1 \text{ km}$, $R = 30 \text{ MHz} \Rightarrow a_1 = 1.5 \text{ (Np)}$ ergibt sich für das Maximum dieses Anteils: $h_{\alpha 1}(t = 0) = 1/a_1 = 2/3 \cdot 1/T$.

3. Wie bei den Koaxialkabelsystemen führt $H_{\beta 1}(f)$ zu keiner Signalverzerrung, sondern nur zu einer Zeitverzögerung um die **Phasenlaufzeit** $\tau_P \approx 5.24 \mu\text{s} \Rightarrow \tau_P/T \approx 157$.

4. Wenden wir uns schließlich der gemeinsamen Betrachtung der Spektralanteile $H_{\alpha 2}(f)$ und $H_{\beta 2}(f)$ zu, die durch die Teilimpulsantwort $h_2(t)$ beschrieben wird:

$$H_{\alpha 2}(f) \cdot H_{\beta 2}(f) \quad \bullet \rightarrow \quad h_{\alpha 2}(t).$$

Um die Ergebnisse von Kapitel 4.2 anwenden zu können, ersetzen wir β_2 durch $a_2 \cdot \text{rad/Np}$ und b_2 durch $a_2 \cdot \text{rad/Np}$, so dass a_2 und b_2 den gleichen Zahlenwert besitzen. Beispielhaft ersetzt man hier:

$$b_2 = 8.75 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 6.55 \text{ rad}.$$

Man reduziert somit die Konstante $\beta_2 = 2.26 \text{ rad}/(\text{km} \cdot \text{MHz}^{0.5})$ auf $\beta_2 = 1.69 \text{ rad}/(\text{km} \cdot \text{MHz}^{0.5})$.

5. Bevor wir den Leser unnötig zu Überlegungen verleiten, ob diese Näherung tatsächlich zulässig ist oder nicht, geben wir gleich freiwillig zu, dass diese Annahme die Schwachstelle unserer Überlegungen ist. Eine Diskussion dieser Fehlannahme folgt auf der **übernächsten Seite**.

6. Nachdem nun a_2 und b_2 die gleichen Zahlenwerte aufweisen, kann die in **Kapitel 4.2** angegebene Gleichung weiterverwendet werden, wobei a_* durch a_2 zu ersetzen ist:

$$h_2(t) = \frac{1/T \cdot a_2}{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot (t/T)^3} \cdot \exp \left[-\frac{a_2^2}{2\pi \cdot t/T} \right], \quad a_2 \text{ in Np}.$$

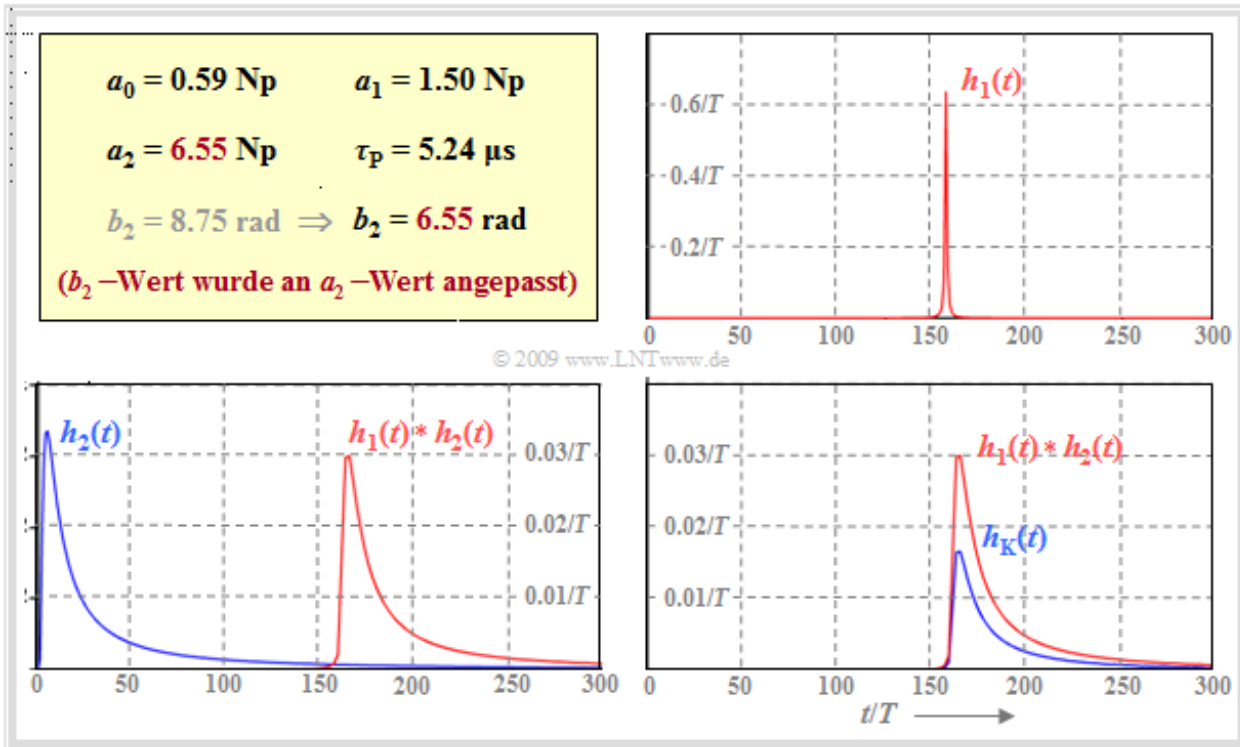
7. Die gesamte Impulsantwort ohne Berücksichtigung der Phasenlaufzeit ergibt sich damit zu

$$h_K(t + \tau_P) = K \cdot h_{\alpha 1}(t) \star h_2(t).$$

Durch Verschiebung um τ_P nach rechts ergibt sich die gesuchte Funktion $h_K(t)$. Auf der nächsten Seite wird diese Vorgehensweise durch Grafiken verdeutlicht.

Impulsantworten von Zweidrahtleitungen (3)

Für die folgenden Grafiken wird weiterhin eine Zweidrahtleitung mit den Abmessungen $d = 0.4 \text{ mm}$ und $l = 1 \text{ km}$ vorausgesetzt. Die Bitrate beträgt $R = 30 \text{ Mbit/s} \Rightarrow$ Symboldauer $T \approx 33 \text{ ns}$. Wir gehen von den im gelben Kasten angegebenen Größen aus, die auf der letzten Seite berechnet wurden. Der b_2 -Wert wird von 8.75 rad dazu auf 6.55 rad verändert und damit an den a_2 -Wert angepasst. Die Auswirkungen dieser Maßnahme werden auf der nächsten Seite interpretiert.



Beachten Sie bitte die unterschiedlichen Ordinaten skalierungen der drei Diagramme in obiger Grafik.

- Oben rechts ist $h_1(t) = h_{\alpha_1}(t + \tau_p)$ dargestellt. Dieser Anteil geht auf die Konstanten α_1 und β_1 zurück. $h_1(t)$ ist eine bezüglich der Phasenlaufzeit τ_p symmetrische Funktion mit dem Maximalwert $(1.5T)^{-1}$, wobei der $1/(1+x^2)$ -Abfall bei $\pm 5T$ (rechts und links von τ_p) nahezu abgeklungen ist.
- Das linke untere Diagramm zeigt den Signalanteil $h_2(t)$, der auf die beiden Koeffizienten α_2 und β_2 zurückgeht. $h_2(t)$ ist identisch mit der **Koaxialkabel-Impulsantwort** (ohne Berücksichtigung der Laufzeit), wenn die charakteristische Kabeldämpfung 6.55 Np bzw. 56.9 dB beträgt.
- Die rote Kurve in diesem Diagramm stellt das Faltungsprodukt $h_1(t) * h_2(t)$ dar. Man erkennt, dass die Kurvenform im wesentlichen durch $h_2(t)$ festliegt. Die Faltung mit $h_1(t)$ führt aber neben einem Amplitudenverlust um ca. 10% auch zu einer (leichten) Verfälschung der Signalform.
- Die resultierende Impulsantwort der 0.4mm -Zweidrahtleitung ist im unteren rechten Diagramm als blaue Kurve dargestellt. Der Unterschied zum rot eingezeichneten Faltungsprodukt $h_1(t) * h_2(t)$ ergibt sich durch den Einfluss der Gleichsignaldämpfung (Koeffizient α_0).

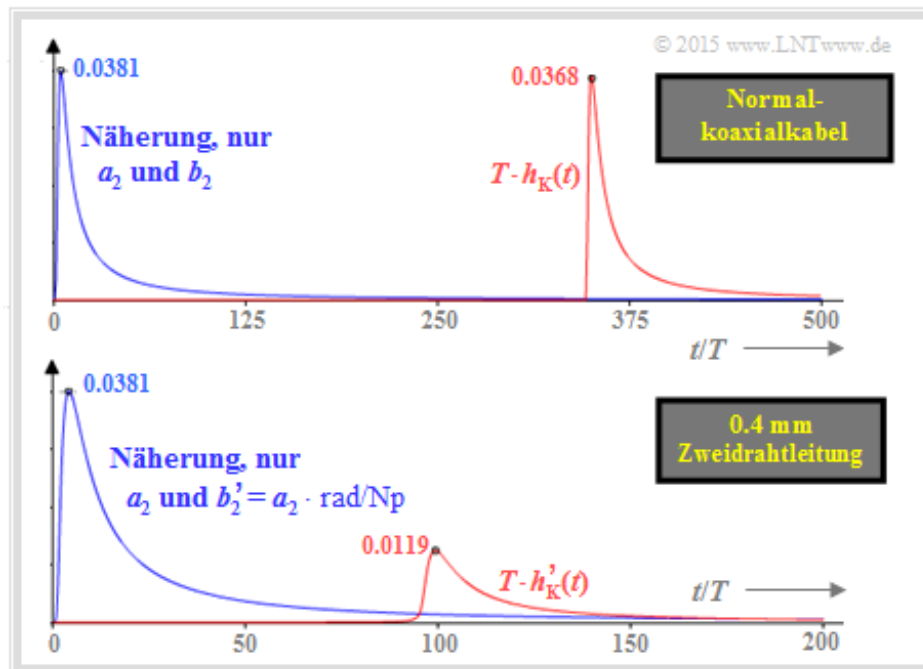
Die hier vorgestellte Methode können Sie sich auch für andere Parameterwerte (Durchmesser, Länge, Bitrate) mit dem Interaktionsmodul **Zeitverhalten von Kupferkabeln** verdeutlichen.

Diskussion der gefundenen Näherungslösung (1)

Die Grafik zeigt die (normierten) Impulsantworten $T \cdot h_K(t)$ für zwei beispielhafte Kupferkabel, nämlich

- für das **Normalkoaxialkabel 2.6/9.5 mm** bei 10.1 km Länge (oben), wobei gilt:
 $a_0 = 0.016 \text{ Np}, a_1 = 0.020 \text{ Np}, a_2 = 6.177 \text{ Np}, \tau_P/T = 350, b_2 = 6.177 \text{ rad},$
- für die **0.4 mm Zweidrahtleitung** mit der Länge 1.8 km (unten) mit den Kenngrößen
 $a_0 = 1.057 \text{ Np}, a_1 = 0.147 \text{ Np}, a_2 = 6.177 \text{ Np}, \tau_P/T = 94, b_2 = 8.260 \text{ rad}.$

Diese Zahlenwerte gelten für die Bitrate $R = 10 \text{ Mbit/s} \Rightarrow$ Zeitnormierung $T = 0.1 \mu\text{s}$. Die beiden Kabellängen wurden so gewählt, dass sich genau gleiche a_2 -Parameter ergeben. Zudem wurde für die Zweidrahtleitung der letzte Phasenwert $b_2 \Rightarrow b_2'$ so angepasst, dass sich wie beim Koaxialkabel für $b_2' = 6.177 \text{ rad}$ und $a_2 = 6.177 \text{ Np}$ ($\approx 53 \text{ dB}$) gleiche Zahlenwerte ergeben.



Die blauen Kurven zeigen die Näherungen bei Vernachlässigung der a_0 -, a_1 - und b_1 -Terme. Aufgrund der Phasen Anpassung $b_2 \Rightarrow b_2'$ bei der Zweidrahtleitung ergeben sich gleiche Kurvenverläufe. Das Maximum von ca. 3.8% liegt bei etwa $t/T = 4$ (unterschiedlichen Zeitmaßstäbe in beiden Diagrammen!).

Die roten Kurven berücksichtigen auch die a_0 -, a_1 - und b_1 -Terme. Die rote Kurve des Koaxialkabels ist die tatsächliche (normierte) Impulsantwort $T \cdot h_K(t)$. Man erkennt weiter:

- Beim Koaxialkabel können der a_0 -Term und der a_1 -Term vernachlässigt werden. Der dadurch entstehende relative Fehler beträgt lediglich 3.5%.
- Nicht zu vernachlässigen ist dagegen die Phasenlaufzeit τ_P , also der b_1 -Term. Beim Koaxialkabel ergibt sich $\tau_P/T \approx 350$, während bei der Zweidrahtleitung $\tau_P/T \approx 94$ gilt (anderer Zeitmaßstab).
- Bei der Zweidrahtleitung (unten) darf man Gleichsignaldämpfung (a_0) und Querverlust (a_1) nicht vernachlässigen: Die rote Näherung $T \cdot h_K'(t)$ ist um 70% niedriger als die blaue und etwas breiter.

Diskussion der gefundenen Näherungslösung (2)

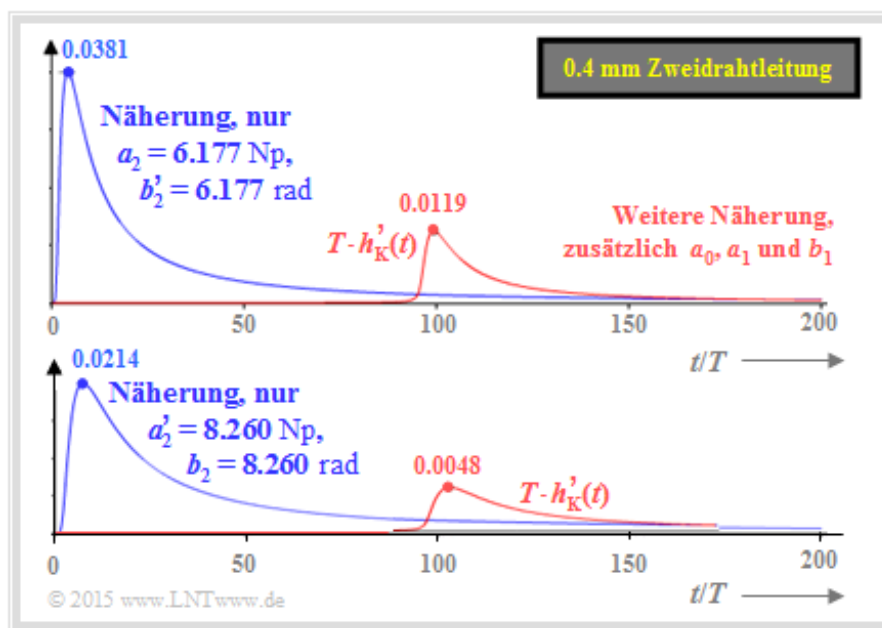
Die folgende Grafik zeigt Näherungen der Impulsantwort einer Zweidrahtleitung der Länge 1.8 km mit 0.4 mm Durchmesser, so dass entsprechend [PW95] von folgenden Kenngrößen auszugehen ist:

$$a_0 = 1.057 \text{ Np}, \quad a_1 = 0.147 \text{ Np}, \quad a_2 = 6.177 \text{ Np}, \quad \tau_P/T = 94, \quad b_2 = 8.260 \text{ rad}.$$

Die obere Grafik – identisch mit dem unteren Diagramm auf der letzten Seite – zeigt zwei Näherungen:

- Vernachlässigung der a_0 -, a_1 - und b_1 -Terme sowie Phasenanpassung $b_2 \Rightarrow b_2'$ (blaue Kurve),
- Berücksichtigung der a_0 -, a_1 - und b_1 -Terme, weiterhin Phasenanpassung $b_2 \Rightarrow b_2'$ (rote Kurve).

Im Gegensatz zum Koaxialkabel ist hier wegen $b_2' \neq b_2$ auch die rote Kurve nur eine Näherung, was in der Grafik durch ein Hochkomma vermerkt ist.



Ohne die Korrektur $b_2' = a_2 \cdot \text{rad/Np}$ wäre die **Hilbert-Transformation** (Zusammenhang zwischen Betrag und Phase bei realen \Rightarrow minimalphasigen Systemen) nicht erfüllt. Deshalb ergäbe sich eine akausale Impulsantwort. Wir glauben deshalb (ohne es zu wissen), dass auch bei einer Zweidrahtleitung die beiden Parameter a_2 und b_2 gleiche Zahlenwerte haben müssten. Wir betrachten nun zwei Fälle.

- Für die obere Grafik haben wir – wie bisher auch – den in [PW95] angegebenen a_2 -Koeffizienten übernommen und den genannten b_2 -Koeffizienten herabgesetzt: $b_2 = 8.26 \text{ rad} \Rightarrow b_2' = 6.18 \text{ rad}$.
- Dagegen wurde für die untere Grafik der Phasenkoeffizient $b_2 = 8.26 \text{ rad}$ beibehalten und der Dämpfungskoeffizient a_2 daran angepasst (vergrößert): $a_2 = 6.18 \text{ Np} \Rightarrow a_2' = 8.26 \text{ Np}$.
- Die rot eingezeichnete Impulsantwort im unteren Bild \Rightarrow *Worst Case* ist weniger als halb so hoch und deutlich breiter als die obere (rote) Impulsantwort \Rightarrow *Best Case*. Die tatsächliche (normierte) Impulsantwort $h_K'(t)$ wird dazwischen liegen. Genauere Aussagen erlauben wir uns nicht.

Störungen auf Zweidrahtleitungen (1)

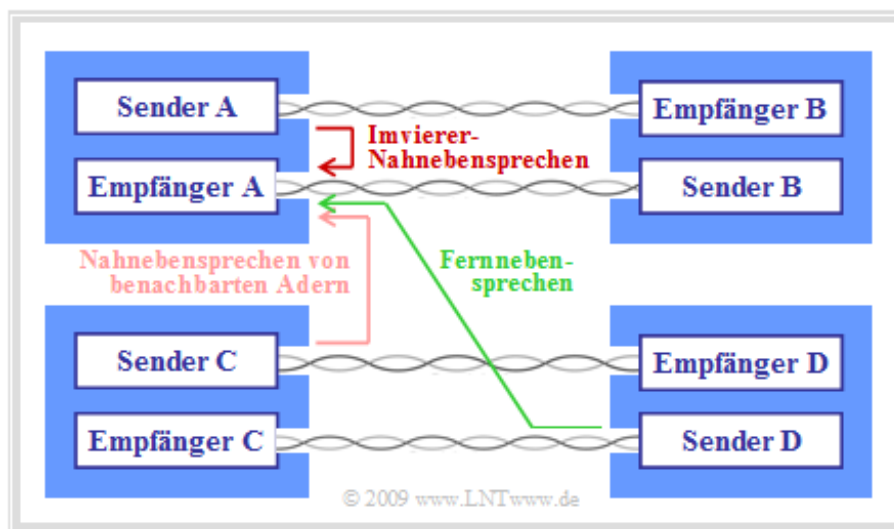
Bei Übertragungssystemen über Zweidrahtleitungen kann vom gleichen **Blockschaltbild** wie bei den Koaxialkabelsystemen ausgegangen werden, wobei nun

- für den Frequenzgang $H_K(f)$ und die Impulsantwort $h_K(t)$ die in diesem Abschnitt angegebenen Gleichungen zu verwenden sind,
- das weiße Rauschen N_0 als Störungsursache nicht mehr dominant ist, sondern **Nebensprechen** (*Crosstalk*) aufgrund von kapazitiver bzw. induktiver Kopplung benachbarter Doppeladern.

Durch Verdrillen der Doppeladern eines Sternvierers sowie der Grund- und Hauptbündel wird versucht, im Mittel eine möglichst symmetrische gegenseitige Kopplung zwischen allen Aderpaaren zu erreichen. Aufgrund unvermeidbarer Fertigungstoleranzen bleibt aber immer eine leichte Unsymmetrie bestehen.

Diese bewirkt, dass

- an jeden Empfängereingang neben dem eigenen Nutzsignal auch (meist allerdings nur geringe) Anteile der Signale auf benachbarten Doppeladern gelangt,
- die induzierten Signalanteile für das Nutzsignal eine zusätzliche stochastische Störung darstellen, die zusammen mit dem thermischen Rauschen das resultierende Störsignal $n(t)$ ergeben,
- man die Übertragungsqualität nicht oder nur sehr begrenzt durch Erhöhung der Sendeleistung verbessern kann, da durch diese Maßnahme auch die Nebensprechstörungen zunehmen.



Wie die Grafik verdeutlicht, unterscheidet man zwischen

- **Nahnebensprechen** (*Near-End-Crosstalk* \Rightarrow NEXT): Der störende Sender speist sein Signal am selben Ende des Kabels ein, an dem der betrachtete Empfänger platziert ist.
- **Fernnebensprechen** (*Far-End-Crosstalk* \Rightarrow FEXT): Der störende Sender und der gestörte Empfänger befinden sich an entgegengesetzten Kabelenden.

Bei FEXT akkumuliert sich zwar die Störung über die gesamte Kabellänge, wird aber auch durch die Kabeldämpfung stark abgeschwächt. Für gebündelte Kabel im Teilnehmeranschlussbereich ergeben sich somit durch das Invierer-Nahnebensprechen um Größenordnungen größere Störungen als durch das Fernnebensprechen, und auch die Nahnebensprechstörungen von benachbarten Adern können meist vernachlässigt werden.

Störungen auf Zweidrahtleitungen (2)

Wir betrachten weiterhin ausschließlich das Nahbensprechen (NEXT). Bei diesem lässt sich das **Leistungsdichtespektrum** (LDS) des Störsignals $n(t)$ unter Berücksichtigung des unvermeidbaren thermischen Rauschens ($N_0/2$) wie folgt darstellen:

$$\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2} + \Phi_{\text{NEXT}}(f),$$

$$\Phi_{\text{NEXT}}(f) = \Phi_s(f) \cdot |H_{\text{NEXT}}(f)|^2 \approx \Phi_s(f) \cdot [K_{\text{NEXT}} \cdot f]^{3/2}.$$

Zu dieser Gleichung ist anzumerken:

- Die Gleichung ergibt sich durch Integration der lokalen Kopplungen über die gesamte Länge eines kurzen Abschnitts, wobei die Kopplungen zwischen allen Kupferleitungen durch Querkapazitäten und –Induktivitäten modelliert werden.
- $\phi_s(f)$ ist das LDS des störenden Senders, woraus sich durch Integration die Sendeleistung P_S ergibt. Nimmt man an, dass die gestörte Übertragung das gleiche Sendesignal und damit auch das gleiche LDS $\phi_s(f)$ wie der Störer verwendet, so wird deutlich, dass durch eine Erhöhung von P_S lediglich der (relative) Einfluss des thermischen Rauschens ($N_0/2$) vermindert wird.
- Der das Nahbensprechen quantifizierende Faktor K_{NEXT} hängt stark vom Adernabstand ab, ebenso vom Unsymmetriegrad entlang des Kabels. Dagegen ist dieser Faktor K_{NEXT} nahezu unabhängig vom Leiterdurchmesser d und von der Leitungslänge l .
- Das Produkt $K_{\text{NEXT}} \cdot f$ (dimensionslos) ist im gesamten Betriebsbereich der Leitung, zum Beispiel für alle Frequenzen $0 \leq f \leq 30$ MHz, stets sehr viel kleiner als 1. Die Nebensprechstörung steigt mit der Frequenz stark (das heißt mit Exponent 1.5) an.
- In [PW95] werden nach einer Messreihe über 40 Doppeladern für die Frequenz $f = 10$ MHz folgende Werte genannt (für $f = 30$ MHz sind diese Werte noch mit $3^{3/2} \approx 5.2$ zu multiplizieren):

1) ungünstigster Fall: $|H_{\text{NEXT}}(f = 10 \text{ MHz})|^2 \approx 0.001,$

2) Mittelung über 40 Adern: $|H_{\text{NEXT}}(f = 10 \text{ MHz})|^2 \approx 0.0004.$

- Die Werte gelten für das Invierer–Nahbensprechen (störender Sender und gestörter Empfänger im gleichen Sternvierer). Nahbensprechstörungen zwischen weiter entfernten Adern weisen zwar die gleiche Frequenzabhängigkeit auf, sind aber kleiner als das Invierer–Nahbensprechen:
 - 1) Nahbensprechen zwischen benachbarten Sternvierern um ca. 5 dB,
 - 2) Nahbensprechen zwischen benachbarten Grundbündeln um ca. 10 dB,
 - 3) Nahbensprechen zwischen nicht benachbarten Grundbündeln um ca. 25 dB.

Um solche Nahbensprechstörungen zu vermeiden oder zumindest zu vermindern, werden benachbarte Doppeladern häufig mit ganz unterschiedlichen Signalen (analoge Telefonie, ISDN, DSL oder andere breitbandige Dienste) belegt, die möglichst auch noch unterschiedliche Frequenzbänder benutzen. Durch geschickte Auswahl der Doppeladern können nun benachbarte Adern mit Signalen belegt werden, deren Spektren möglichst wenig überlappen, wodurch die Nebensprechstörungen vermindert werden.

