

Überblick zu Kapitel 2

Im Folgenden werden *periodische Signale* betrachtet und diese sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich mathematisch beschrieben. Dieses Kapitel beinhaltet im Einzelnen:

- einige Grundbegriffe wie *Periodendauer*, *Grundfrequenz* und *Kreisfrequenz*,
- die Eigenschaften eines *Gleichsignals* als Grenzfall eines periodischen Signals,
- die Definition und Interpretation der *Diracfunktion*,
- Spektraldarstellung eines *Gleichsignals* oder eines *Gleichsignalanteils*,
- die Zeit- und Frequenzdarstellung *harmonischer Schwingungen*, und schließlich
- die Anwendung der *Fourierreihe* zur Spektralanalyse periodischer Signale.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 22 Bildschirmseiten verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch 38 Grafiken, sechs Aufgaben und sechs Zusatzaufgaben mit insgesamt 53 Teilaufgaben, sowie vier Lernvideos (LV) und ein Interaktionsmodul (IM), nämlich:

- **Periodendauer T_0 periodischer Signale** (IM zu Kap. 2.1)
- **Herleitung, Visualisierung der Diracfunktion** (LV zu Kap. 2.2, Dauer 2:50)
- **Harmonische Schwingungen** (LV zu Kap. 2.3, Dauer Teil 1: 4:33 – Teil 2: 6:15)
- **Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten** (LV zu Kap. 2.4, Dauer 3:50)
- **Genauigkeit der Fourierreihe** (LV zu Kap. 2.4, Dauer Teil 1: 3:31 – Teil 2: 8:39)

Literatur: [BS01] – [Han15] – [Hay83] – [KK10] – [Lük04] – [Mar94] – [Sto15] – [WS93a]

Weitere Informationen zum Thema sowie Aufgaben, Simulationen und Programmierübungen finden Sie im Kapitel 6 des Praktikums *Simulationenmethoden in der Nachrichtentechnik* (Prof. Söder). Diese LNT-Lehrveranstaltung an der TU München basiert auf den 24 DOS-Programmen des Lehrsoftwarepakets *LNTsim*.

- Kapitel 6: *Lineare zeitinvariante Systeme*, Programm *lzi*

Hinweise zum Herunterladen des Programmpakets *LNTsim* und der Versuchsanleitung:

Lehrsoftwarepaket LNTsim (Zip-Version, mehr als 50 MB)

Praktikumsanleitung – Teil A (PDF-Version, ca. 8.5 MB)

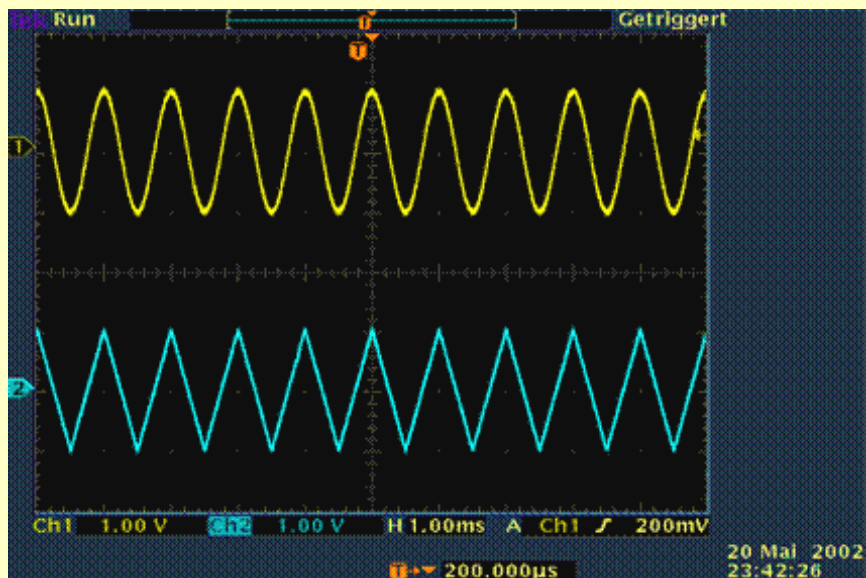
Eigenschaften und Anwendungen

Für die Nachrichtentechnik besitzen **periodische Signale** eine große Bedeutung. Sie gehören zu der Klasse der **deterministischen Signale**, deren Zeitfunktion in analytischer Form angegeben werden kann. Ihr Signalverlauf ist damit für alle Zeiten t bekannt und für die Zukunft eindeutig vorhersagbar; sie sind daher niemals informationstragende Signale.

Trotzdem werden periodische Signale oft auch in der Nachrichtentechnik benötigt, zum Beispiel

- für die Modulation und Demodulation bei Trägerfrequenzsystemen,
- für die Synchronisation und Taktgenerierung bei Digitalsystemen,
- als Test- und Prüfsignale bei der Systemrealisierung.

Beispiel: Auf dem Oszilloskopbild sehen Sie zwei typische Vertreter periodischer Signale, nämlich ein Cosinus- sowie ein Dreiecksignal.



Wie aus den eingeblendeten Einstellungen zu ersehen ist, beträgt bei beiden Signalen die Periodendauer eine Millisekunde und die Amplitude ein Volt.

Definition und Parameter

Bevor wir uns den Signalparametern eines periodischen Signals zuwenden, soll eine eindeutige Definition des Begriffs *Periodizität* erfolgen.

Definition: Ein Signal $x(t)$ bezeichnet man dann und nur dann als **periodisch**, wenn für alle beliebigen Werte von t und alle ganzzahligen Werte von i gilt:

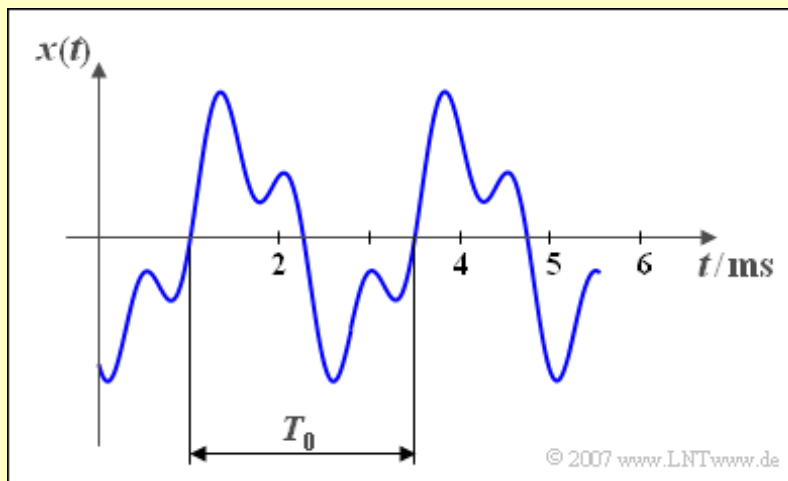
$$x(t + i \cdot T_0) = x(t).$$

Daraus ergeben sich die folgenden Kenngrößen:

- Die **Periodendauer** T_0 gibt den kleinstmöglichen Wert an, der obige Gleichung erfüllt.
- Die **Grundfrequenz** $f_0 = 1/T_0$ beschreibt die Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit (meist je Sekunde). Die Einheit „1/s“ wird auch mit „Hz“ bezeichnet, benannt nach dem deutschen Physiker **Heinrich Hertz**.
- Die **Grundkreisfrequenz** ω_0 stellt die Winkeldrehung pro Sekunde dar, die meistens im Bogenmaß angegeben wird. Im Gegensatz zur Grundfrequenz ist hier nicht die Einheit „Hz“, sondern „1/s“ üblich. Es gilt folgende Gleichung:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Beispiel: Nachfolgend sehen Sie ein periodisches Zeitsignal mit der Periodendauer $T_0 = 2.5$ ms.



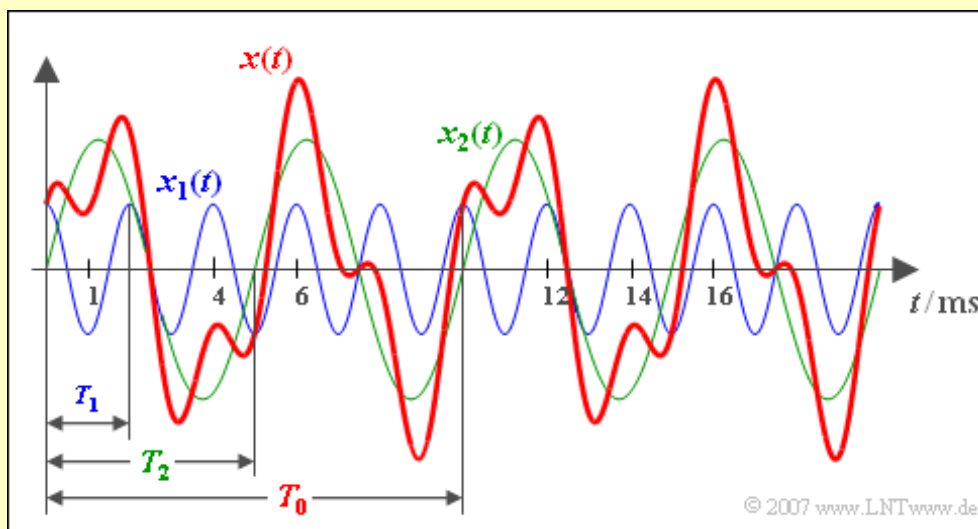
Daraus ergeben sich die Grundfrequenz $f_0 = 400$ Hz und die Grundkreisfrequenz $\omega_0 \approx 2513$ 1/s.

Resultierende Periodendauer

Besteht ein Signal $x(t)$ aus der Summe zweier periodischer Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$ mit Periodendauer T_1 bzw. T_2 , so ist die **resultierende Periodendauer** des Summensignals das kleinste gemeinsame Vielfache von T_1 und T_2 , und zwar unabhängig von den Amplituden- und Phasenverhältnissen.

Besitzen T_1 und T_2 dagegen kein rationales gemeinsames Vielfaches (z. B.: $T_2 = \pi \cdot T_1$), so ist das Summensignal im Gegensatz zu seinen beiden Komponenten nicht periodisch.

Beispiel: Addiert werden ein cosinusförmiges Signal $x_1(t)$ mit Periodendauer $T_1 = 2$ ms (blauer Signalverlauf) und ein Sinussignal $x_2(t)$ mit Periodendauer $T_2 = 5$ ms und doppelt so großer Amplitude (grüner Verlauf).



Das (rote) Summensignal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ weist dann die resultierende Periodendauer $T_0 = 10$ ms auf, und damit die Grundfrequenz $f_0 = 100$ Hz. Diese Frequenz f_0 selbst ist in $x(t)$ nicht enthalten, lediglich ganzzahlige Vielfache davon, nämlich $f_1 = 500$ Hz und $f_2 = 200$ Hz.

Mit folgendem Interaktionsmodul lässt sich die resultierende Periodendauer zweier harmonischer Schwingungen ermitteln:

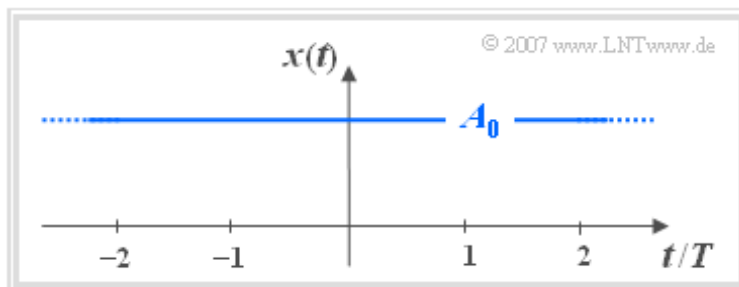
Periodendauer periodischer Signale

Zeitsignaldarstellung

Zunächst die Definition:

Definition: Ein **Gleichsignal** ist ein deterministisches Signal, dessen Augenblickswerte für alle Zeiten t von $-\infty$ bis $+\infty$ konstant sind. Ein solches Signal ist der Grenzfall einer **harmonischen Schwingung**, wobei die Periodendauer T_0 einen unendlich großen Wert besitzt.

Entsprechend dieser Definition reicht ein Gleichsignal immer von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$. Wird das Signal erst zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet, so liegt kein Gleichsignal vor.



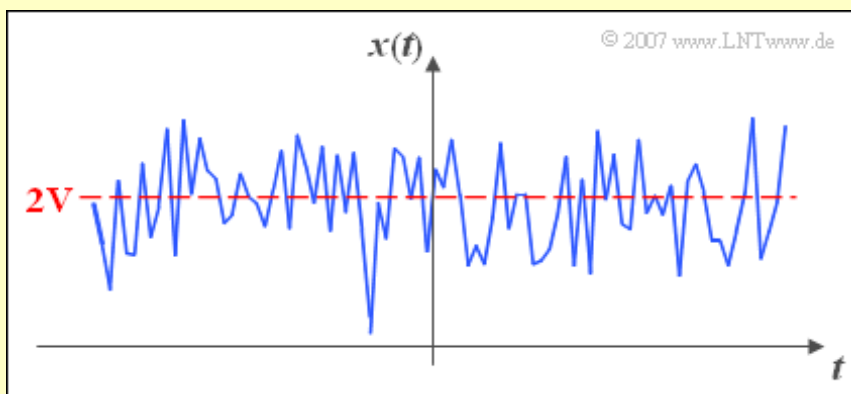
Ein Gleichsignal kann niemals Träger von Information im nachrichtentechnischen Sinne sein, doch können Nachrichtensignale durchaus einen *Gleichsignalanteil* besitzen. Alle im Folgenden für das Gleichsignal getroffenen Aussagen gelten in gleicher Weise auch für einen solchen Gleichsignalanteil.

Für den *Gleichsignalanteil* A_0 eines beliebigen Signals $x(t)$ gilt:

$$A_0 = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} x(t) dt.$$

T_M ist die Messdauer, die stets möglichst groß (im Grenzfall unendlich) gewählt werden sollte und hier symmetrisch zum Zeitpunkt $t = 0$ angenommen ist.

Beispiel: Die Grafik zeigt ein stochastisches Signal $x(t)$ mit dem Gleichsignalanteil $A_0 = 2 \text{ V}$.



Im Sinne der Statistik entspricht A_0 dem linearen Mittelwert.

Spektraldarstellung

Betrachten wir nun den Sachverhalt im *Frequenzbereich*. Aus der Zeitfunktion ist ersichtlich, dass diese – spektral gesehen – nur eine einzige (physikalische) Frequenz beinhaltet, nämlich die Frequenz $f = 0$. Dieses Ergebnis soll nun mathematisch hergeleitet werden.

Im Vorgriff auf das Kapitel 3: **Fouriertransformation** wird bereits hier der Zusammenhang zwischen dem Zeitsignal $x(t)$ und dem korrespondierenden Spektrum $X(f)$ angegeben:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

Man bezeichnet die so berechnete Spektralfunktion $X(f)$ nach dem französischen Mathematiker **Jean Baptiste Fourier** als die Fouriertransformierte von $x(t)$ und verwendet als Kurzbezeichnung für diesen Funktionalzusammenhang

$$X(f) \bullet \text{---} \circ x(t).$$

Beschreibt $x(t)$ beispielsweise einen Spannungsverlauf, so hat $X(f)$ die Einheit „V/Hz“.

Wenden wir diese Transformationsgleichung auf das Gleichsignal $x(t) = A_0$ an, so erhält man:

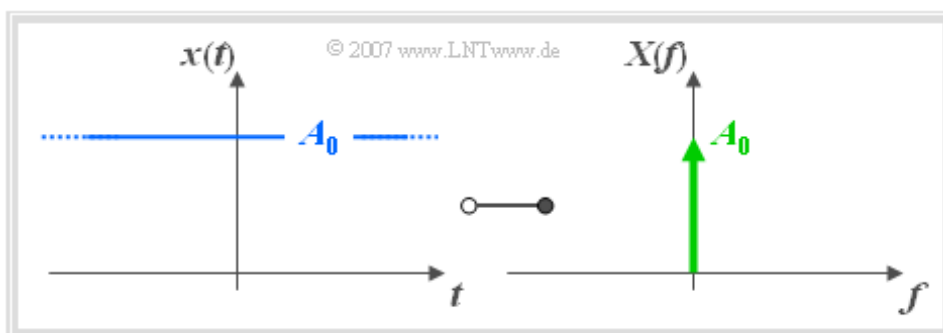
$$X(f) = A_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt.$$

Dieses Integral divergiert für $f = 0$, das heißt, es liefert einen unendlich großen Wert (Integration über den konstanten Wert 1). Für jede andere Frequenz f nimmt das Integral jedoch den Wert 0 an; der dazugehörige Beweis ist allerdings nicht ganz trivial (Herleitung siehe nächste Seite).

Die gesuchte Spektralfunktion $X(f)$ wird kompakt durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$X(f) = A_0 \cdot \delta(f).$$

Man bezeichnet $\delta(f)$ als **Diracfunktion**, auch bekannt unter dem Namen „Distribution“. $\delta(f)$ ist eine mathematisch komplizierte Funktion; die Herleitung finden Sie auf der nächsten Seite.



Die Grafik zeigt nochmals den Funktionalzusammenhang zwischen einem Gleichsignal $x(t) = A_0$ und der dazugehörigen Spektralfunktion $X(f) = A_0 \cdot \delta(f)$. Die Diracfunktion bei der Frequenz $f = 0$ ist durch einen Pfeil dargestellt, der mit dem Gewicht A_0 versehen ist.

Diracfunktion im Frequenzbereich

Definition: Die für die funktionale Beschreibung von Nachrichtentechnischen Systemen äußerst wichtige **Diracfunktion** weist folgende Eigenschaften auf:

- Die Diracfunktion ist unendlich schmal, das heißt, es ist $\delta(f) = 0$ für $f \neq 0$.
- Die Diracfunktion $\delta(f)$ ist bei der Frequenz $f = 0$ unendlich hoch.
- Die Impulsfläche der Diracfunktion ergibt einen endlichen Wert, nämlich 1:

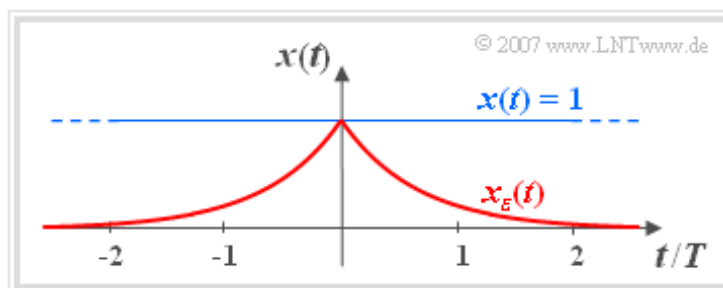
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1.$$

Aus dieser letzten Eigenschaft folgt, dass $\delta(f)$ die Einheit $\text{Hz}^{-1} = \text{s}$ besitzt.

Zur mathematischen Herleitung obiger Eigenschaften gehen wir von einem dimensionslosen Gleichsignal aus. Um die Konvergenz des Fourierintegrals zu erzwingen, wird das nicht energiebegrenzte Signal $x(t) = 1$ und das energiebegrenzte Signal

$$x_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon \cdot |t|}.$$

Hierbei gelte $\varepsilon > 0$. Im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ geht $x_\varepsilon(t)$ in $x(t) = 1$ über.



Zur Spektraldarstellung kommt man durch Anwendung des vorne angegebenen Fourierintegrals:

$$X_\varepsilon(f) = \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt.$$

Nach Integration und Zusammenfassen dieser beiden Anteile erhalten wir die rein reelle Spektralfunktion des energiebegrenzten Signals $x_\varepsilon(t)$:

$$X_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon - j \cdot 2\pi f} + \frac{1}{\varepsilon + j \cdot 2\pi f} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (2\pi f)^2}.$$

Der Grenzübergang für $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert die Diracfunktion mit Gewicht 1:

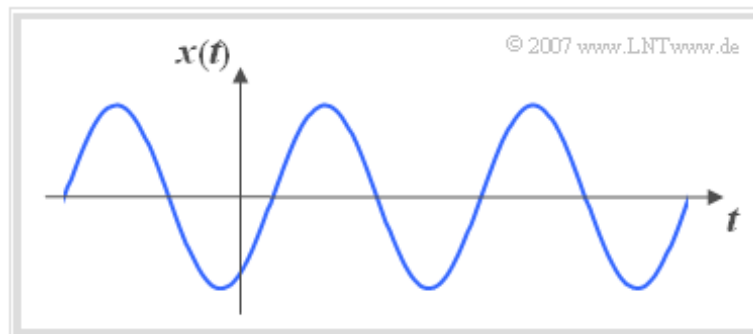
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(f) = \delta(f).$$

Die Fläche unter der Kurve ist unabhängig vom Parameter ε gleich 1. Je kleiner ε gewählt wird, um so schmaler und höher wird die Funktion, wie das nachfolgende Lernvideo zeigt:

Herleitung und Visualisierung der Diracfunktion (Dauer 2:50)

Definition und Eigenschaften

Besondere Bedeutung für die Nachrichtentechnik – aber auch in vielen Naturwissenschaften – haben *harmonische Schwingungen*. Das folgende Bild zeigt einen beispielhaften Signalverlauf.



Ihre Bedeutung hängt auch damit zusammen, dass die harmonische Schwingung die Lösung einer in vielen Disziplinen vorkommenden Differentialgleichung darstellt, die wie folgt lautet:

$$x(t) + k \cdot \ddot{x}(t) = 0.$$

Hierbei kennzeichnen die beiden Punkte die zweite Ableitung der Funktion $x(t)$ nach der Zeit.

Definition: Eine jede **harmonische Schwingung** kann man in allgemeiner Form wie folgt darstellen:

$$x(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi).$$

Hierbei sind folgende Signalparameter verwendet:

- die **Amplitude** C , gleichzeitig der Maximalwert des Signals,
- die **Signalfrequenz** f_0 , und
- der **Nullphasenwinkel** (oder kurz die *Phase*) φ der Schwingung.

Anmerkung: In diesem Tutorial geht – wie auch in anderer Literatur üblich – bei der Beschreibung von harmonischen Schwingungen, Fourierreihe und Fourierintegral die Phase mit negativem Vorzeichen in die Gleichungen ein, während in Zusammenhang mit allen Modulationsverfahren die Phase stets mit einem Pluszeichen angesetzt wird.

Zur Unterscheidung der beiden Varianten benutzen wir in *LNTwww* φ und ϕ . Beide Symbole kennzeichnen das kleine griechische „phi“, wobei die Schreibweise φ vorwiegend im deutschen und ϕ im anglo-amerikanischen Sprachraum angewandt wird.

Die Angaben $\varphi = 90^\circ$ und $\phi = -90^\circ$ sind somit äquivalent und stehen beide für die Sinusfunktion:

$$\cos(2\pi f_0 t - 90^\circ) = \cos(2\pi f_0 t - \varphi) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \sin(2\pi f_0 t).$$

Das folgende Lernvideo verdeutlicht die Eigenschaften harmonischer Schwingungen anhand von Tonleitern:

Harmonische Schwingungen (Dauer Teil 1: 4:33 – Teil 2: 6:15)

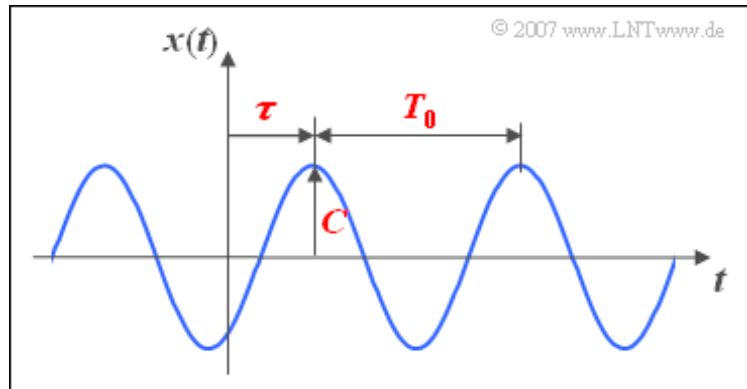
Zeitsignaldarstellung

Die Amplitude C kann aus der folgenden Grafik direkt abgelesen werden. Die Signalfrequenz f_0 ist gleich dem Kehrwert der Periodendauer T_0 . Schreibt man die obige Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} x(t) &= C \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi) = \\ &= C \cdot \cos(2\pi f_0 (t - \tau)), \end{aligned}$$

so wird klar, dass der Nullphasenwinkel φ und die Verschiebung τ gegenüber einem cosinusförmigen Signal wie folgt zusammenhängen:

$$\varphi = \frac{\tau}{T_0} \cdot 2\pi.$$



Bei einem *Cosinussignal* sind die Kenngrößen τ und φ jeweils 0. Demgegenüber ist ein *Sinussignal* um $\tau = T_0/4$ verschoben und entsprechend gilt für den Nullphasenwinkel $\varphi = \pi/2$ (im Bogenmaß) bzw. 90° .

Es ist also festzustellen, dass – wie für das obige Beispiel vorausgesetzt – bei einem positiven Wert von τ bzw. φ das (bezüglich $t = 0$) nächstgelegene Signalmaximum später kommt als beim Cosinussignal und bei negativen Werten früher. Liegt am Systemeingang ein Cosinussignal an und ist das Ausgangssignal demgegenüber um einen Wert τ verzögert, so bezeichnet man τ auch als die **Laufzeit** des Systems.

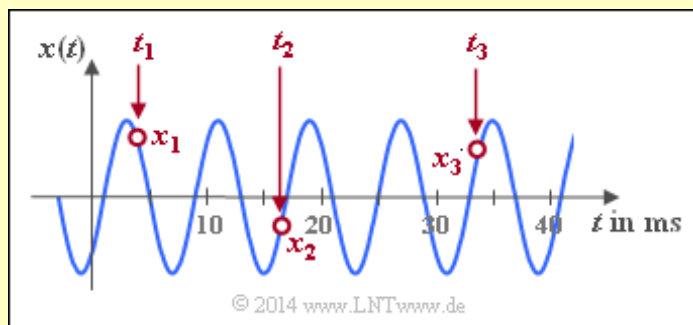
Da eine harmonische Schwingung durch lediglich drei Signalparameter eindeutig festliegt, kann der gesamte Zeitverlauf von $-\infty$ bis $+\infty$ aus nur drei Signalwerten $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$, $x_3 = x(t_3)$ analytisch beschrieben werden, wenn die Zeiten t_1 , t_2 und t_3 geeignet ausgewählt wurden.

Beispiel: Aus den drei Abtastwerten,

- $x_1 = x(t_1 = 3.808 \text{ ms}) = +1.609$,
- $x_2 = x(t_2 = 16.696 \text{ ms}) = -0.469$,
- $x_3 = x(t_3 = 33.84 \text{ ms}) = +1.227$.

erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} C \cdot \cos(2\pi f_0 t_1 - \varphi) &= +1.609, \\ C \cdot \cos(2\pi f_0 t_2 - \varphi) &= -0.469, \\ C \cdot \cos(2\pi f_0 t_3 - \varphi) &= +1.227. \end{aligned}$$



Nach Lösen dieses nichtlinearen Gleichungssystem ergeben sich folgende Signalparameter:

- Signalamplitude $C = 2$,
- Periodendauer $T_0 = 8 \text{ ms} \Rightarrow$ Signalfrequenz $f_0 = 125 \text{ Hz}$,
- Verschiebung gegenüber einem Cosinus $\tau = 3 \text{ ms} \Rightarrow$ Nullphasenwinkel $\varphi = 3\pi/4 = 135^\circ$.

Hinweis: Legt man alle Abtastzeitpunkte t_1 , t_2 , t_3 in Maxima, Minima und/oder Nullstellen, so gibt es für das nichtlineare Gleichungssystem keine eindeutige Lösung.

Darstellung mit Cosinus- und Sinusanteil

Eine weitere Darstellungsform der harmonischen Schwingung lautet wie folgt:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) + B \cdot \sin(2\pi f_0 t).$$

Die Bezeichnungen A und B für die Amplituden von Cosinus- und Sinusanteil sind so gewählt, dass sie mit der Nomenklatur des nachfolgenden Kapitels **Fourierreihe** übereinstimmen.

Durch Anwendung trigonometrischer Umformungen erhalten wir aus der Darstellung auf der letzten Seite:

$$x(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi) = C \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + C \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\pi f_0 t).$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich direkt:

$$A = C \cdot \cos(\varphi),$$

$$B = C \cdot \sin(\varphi).$$

Der Betrag und der Nullphasenwinkel der harmonischen Schwingung können aus den Parametern A und B ebenfalls nach einfachen trigonometrischen Überlegungen berechnet werden:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi = \arctan(-B/A).$$

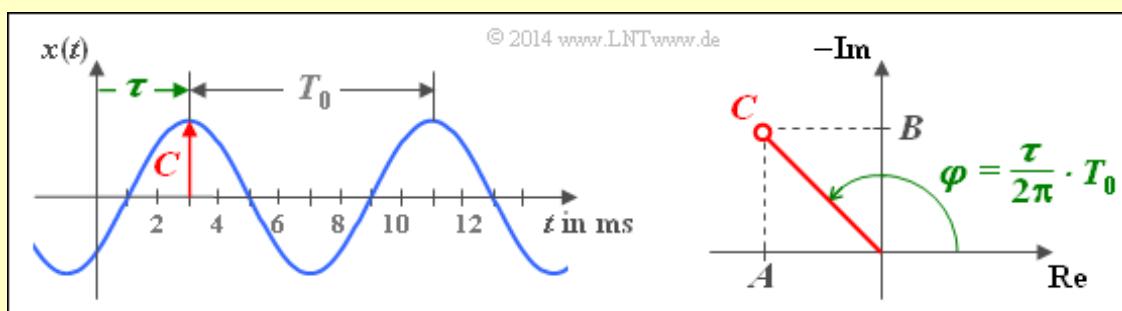
Das Minuszeichen bei der Berechnung des Nullphasenwinkels φ hängt damit zusammen, dass φ in das Argument der Cosinusfunktion mit negativem Vorzeichen eingeht. Würde man statt „ $\cos(2\pi f_0 t - \varphi)$ “ die Schreibweise „ $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ “ verwenden, so gilt $\phi = \arctan(B/A)$.

- Bei Fourierreihe und Fourierintegral ist in der Literatur die φ -Darstellung üblich.
- Zur Beschreibung der Modulationsverfahren verwendet man fast immer die ϕ -Darstellung.

Beispiel: Die in der linken Grafik dargestellte Schwingung wird durch jede der folgenden Gleichungen vollständig beschrieben. Es gilt $f_0 = 125$ Hz und $\varphi = +135^\circ \Rightarrow \phi = -135^\circ$:

$$x(t) = 2 \cdot \cos(2\pi f_0 t - 135^\circ),$$

$$x(t) = -\sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \sqrt{2} \cdot \sin(2\pi f_0 t).$$



Die rechte Skizze verdeutlicht die trigonometrische Umformung:

$$A = 2 \cdot \cos(-135^\circ) = -\sqrt{2},$$

$$B = 2 \cdot \sin(-135^\circ) = +\sqrt{2}.$$

Spektral­darstellung eines Cosinussignals

Zur Herleitung der Spektralfunktion beschränken wir uns zunächst auf ein Cosinussignal, das mit der **komplexen Exponentialfunktion** und dem Satz von **Leonhard Euler** auch in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} \cdot (e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}).$$

Bereits aus dieser Zeitbereichsdarstellung ist ersichtlich, dass das Cosinussignal – spektral gesehen – nur eine einzige (physikalische) Frequenz beinhaltet, nämlich die Frequenz f_0 .

Zur mathematischen Herleitung der Spektralfunktion benutzen wir folgende Beziehungen:

- den auf der Seite **Diracfunktion** (im Kapitel 2.2) hergeleiteten Funktionalzusammenhang:

$$x(t) = A \circ \longrightarrow \bullet X(f) = A \cdot \delta(f).$$

- den **Verschiebungssatz** (für den Frequenzbereich) im Vorgriff auf das Kapitel 3.3:

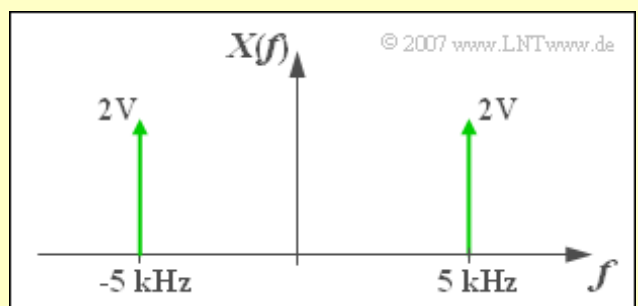
$$x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \circ \longrightarrow \bullet X(f - f_0).$$

Daraus ergibt sich die folgende Fourierkorrespondenz:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) \circ \longrightarrow \bullet X(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f - f_0).$$

Das bedeutet: Die Spektralfunktion $X(f)$ eines Cosinussignals mit der Frequenz f_0 setzt sich aus zwei Diracfunktionen bei $\pm f_0$ zusammen. Die Impulsgewichte sind jeweils gleich der halben Signalamplitude.

Beispiel: Das Bild zeigt das Spektrum einer Cosinusschwingung mit Amplitude $A = 4 \text{ V}$ und Frequenz $f_0 = 5 \text{ kHz} \Rightarrow T_0 = 200 \text{ }\mu\text{s}$. Die Diracfunktion bei $-f_0$ gehört zum ersten Term obiger Gleichung (ableitbar aus der Bedingung $f + f_0 = 0$), die bei $+f_0$ zum Term $\delta(f - f_0)$. Die Impulsgewichte sind jeweils 2 V .



Es wird darauf hingewiesen, dass die Spektralfunktion einer jeden reellen Zeitfunktion mit Ausnahme des Gleichsignals sowohl Anteile bei positiven als auch bei negativen Frequenzen aufweist. Diese Tatsache, die Studienanfänger oft Probleme bereitet, ergibt sich ganz formal aus dem Satz von Euler (siehe oben). Durch die Erweiterung des Frequenzwertebereichs von $f \geq 0$ auf die Menge der reellen Zahlen kommt man von der physikalischen zur **mathematischen Frequenz**. Allerdings ist für eine negative Frequenz die vorne angegebene **Definition** nicht mehr anwendbar: Man kann -5 kHz nicht als „minus 5000 Schwingungen pro Sekunde“ interpretieren.

Im Verlauf dieses Kurses werden Sie feststellen, dass durch die Verkomplizierung des einfachen Sachverhaltes später kompliziertere Sachverhalte sehr elegant und einfach beschrieben werden können.

Allgemeine Spektraldarstellung

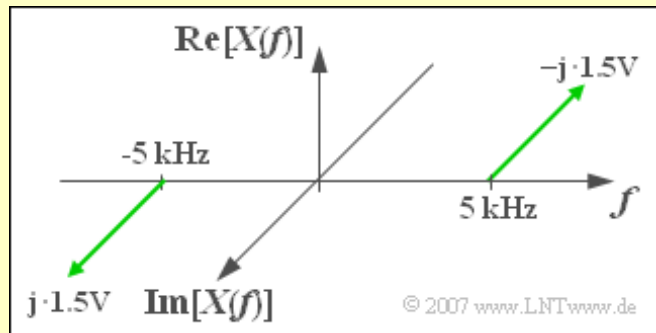
Für ein sinusförmiges Signal gilt mit dem Satz von Euler in ähnlicher Weise:

$$x(t) = B \cdot \sin(2\pi f_0 t) = \frac{B}{2 \cdot j} (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) = j \cdot B/2 (e^{-j2\pi f_0 t} - e^{j2\pi f_0 t}).$$

Daraus folgt für die Spektralfunktion, die jetzt rein imaginär ist:

$$x(t) = B \cdot \sin(2\pi f_0 t) \circ \bullet X(f) = j \cdot [B/2 \cdot \delta(f + f_0) - B/2 \cdot \delta(f - f_0)].$$

Beispiel: Das Bild zeigt die rein imaginäre Spektralfunktion einer Sinusschwingung $x(t)$ mit Amplitude $B = 3 \text{ V}$ und Frequenz $f_0 = 5 \text{ kHz}$. Die Phase ist $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = -90^\circ$.
 Beachten Sie: Bei der positiven Frequenz ($+f_0$) ist der Imaginärteil negativ und bei der negativen Frequenz ($-f_0$) positiv.



Bei Überlagerung von Cosinus- und Sinusanteil entsprechend der Beziehung

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) + B \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

überlagern sich auch die einzelnen Spektralfunktionen und man erhält:

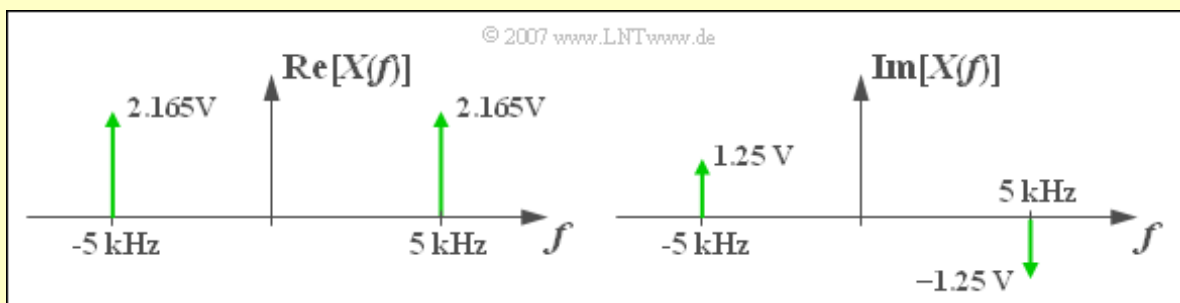
$$X(f) = \frac{A + j \cdot B}{2} \delta(f + f_0) + \frac{A - j \cdot B}{2} \delta(f - f_0).$$

Mit dem Betrag C und der Phase φ lautet diese Fourierkorrespondenz:

$$x(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi) \circ \bullet X(f) = \frac{C}{2} \cdot e^{j\varphi} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{C}{2} \cdot e^{-j\varphi} \cdot \delta(f - f_0).$$

Man erkennt, dass die Spektralfunktion $X(f)$ nicht nur für positive und negative Frequenzen definiert ist, sondern im Allgemeinen auch noch komplexwertig ist.

Beispiel: Mit den Parametern $C = 5 \text{ V}$, $f_0 = 5 \text{ kHz}$ und $\varphi = 30 \text{ Grad}$ (im Bogenmaß $\pi/6$) ergibt sich wegen $2.5 \cdot \cos(30^\circ) = 2.165$ und $2.5 \cdot \sin(30^\circ) = 1.25$ für der Real- bzw. der Imaginärteil von $X(f)$ gemäß folgender Grafik:



Die Eigenschaften harmonischer Schwingungen anhand von Tonleitern zeigt das Lernvideo **Harmonische Schwingungen** (Dauer Teil 1: 4:33 – Teil 2: 6:15)

Allgemeine Beschreibung (1)

Jede periodische Funktion $x(t)$ kann in allen Bereichen, in denen sie stetig ist oder nur endlich viele Sprungstellen aufweist, in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden, die man als *Fourierreihe* bezeichnet.

Definition: Die **Fourierreihe** eines periodischen Signals $x(t)$ lautet wie folgt:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n\omega_0 t).$$

Hierbei bezeichnen:

- A_0 den **Gleichanteil** von $x(t)$,
- A_n die **Cosinuskoeffizienten**,
- B_n die **Sinuskoeffizienten**,
- $\omega_0 = 2\pi/T_0$ die **Grundkreisfrequenz** des periodischen Signals (T_0 ist die Periodendauer).

Soll die Fourierreihe mit dem tatsächlichen periodischen Signal $x(t)$ exakt übereinstimmen, so müssen im Allgemeinen unendlich viele Cosinus- und Sinuskoeffizienten zur Berechnung herangezogen werden. Bricht man die Fourierreihe ab und verwendet jeweils nur N dieser Koeffizienten A_n und B_n , so ergibt sich bis auf Sonderfälle ein etwas anderer Funktionsverlauf:

$$x_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^N B_n \cdot \sin(n\omega_0 t).$$

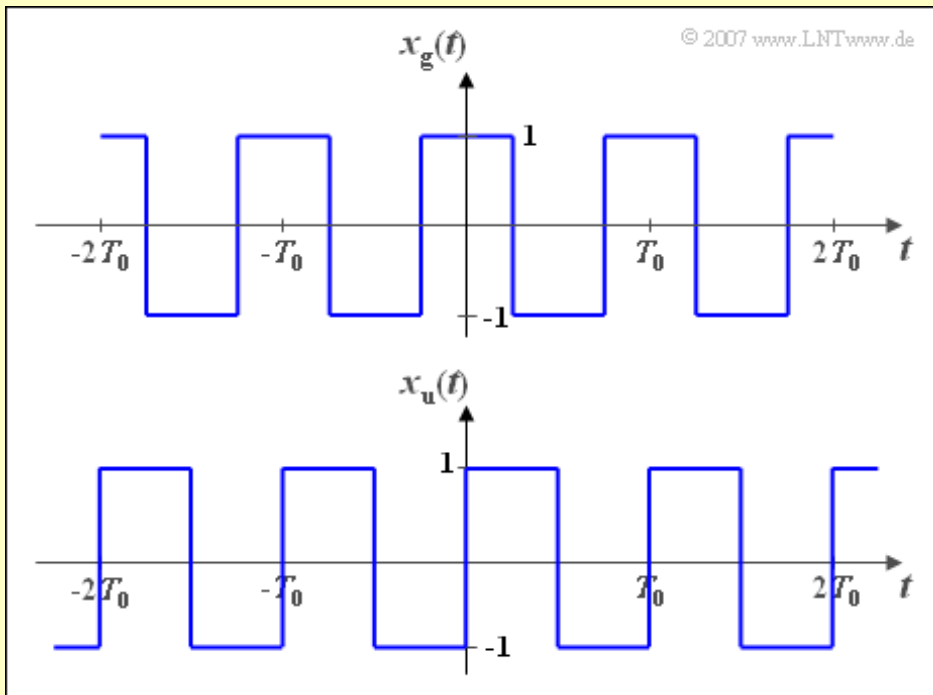
Zwischen dem periodischen Signal und der Fourierreihenapproximation gilt der Zusammenhang:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t).$$

Ist $N \cdot f_0$ die höchste im Signal $x(t)$ vorkommende Frequenz, so gilt natürlich $x_N(t) = x(t)$.

Allgemeine Beschreibung (2)

Beispiel: Wir betrachten zwei periodische Rechtecksignale, jeweils mit der Periodendauer T_0 und der Grundkreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Für das oben skizzierte gerade Zeitsignal gilt $x_g(-t) = x_g(t)$. Dagegen ist die unten dargestellte Funktion ungerade: $x_u(-t) = -x_u(t)$.



In Formelsammlungen, z. B. **[BS01]**, findet man die Fourierreihendarstellungen beider Signale:

$$x_g(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5\omega_0 t) - \dots + \dots \right],$$

$$x_u(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots + \dots \right].$$

Wegen der allgemeingültigen Beziehung

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

ergeben sich die Amplituden der beiden Rechtecksignale (Maximalwerte zum Beispiel bei $t = 0$ bzw. $T_0/4$) jeweils zu 1. Dies lässt sich auch anhand der Signalverläufe in der obigen Grafik verifizieren.

Berechnung der Fourierkoeffizienten (1)

Der Fourierkoeffizient A_0 gibt den **Gleichanteil** an, der durch Mittelung über den Signalverlauf $x(t)$ bestimmt werden kann. Aufgrund der Periodizität genügt die Mittelung über eine Periode:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) dt.$$

Der Integrationsbereich kann auch von 0 bis T_0 (oder über eine anders festgelegte gleich lange Periode) gewählt werden. Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten A_n und B_n ($n \geq 1$) beruht auf der Eigenschaft, dass die harmonischen Cosinusfunktionen und Sinusfunktionen so genannte **Orthogonalfunktionen** sind. Für diese gilt:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos(n\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} T_0/2 & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} T_0/2 & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{für alle } m, n.$$

Berücksichtigt man diese Gleichungen, so ergeben sich für die Cosinus- und Sinuskoeffizienten:

$$A_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt.$$

Nachfolgend finden Sie ein Lernvideo zur weiteren Verdeutlichung dieser Gleichungen:

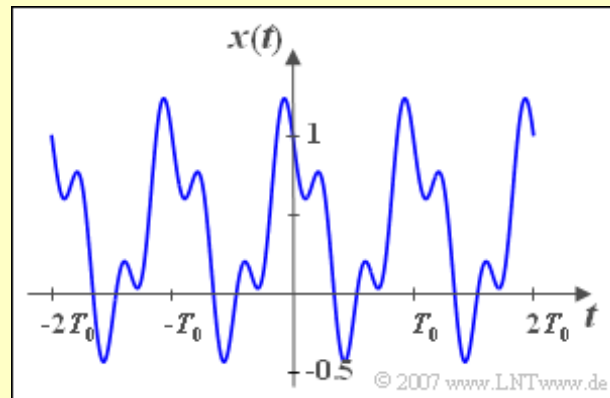
Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten (Dauer 3:50)

Berechnung der Fourierkoeffizienten (2)

Beispiel: Wir betrachten die nachfolgend gezeichnete periodische Zeitfunktion

$$x(t) = 0.4 + 0.6 \cdot \cos(\omega_0 t) - 0.3 \cdot \sin(3\omega_0 t).$$

Da das Integral der Cosinus- und der Sinusfunktion über jeweils eine Periode identisch 0 ist, erhält man für den Gleichsignalkoeffizienten $A_0 = 0.4$.



Die Bestimmungsgleichung für den Cosinuskoeffizienten A_1 lautet (Integration von 0 bis T_0):

$$A_1 = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.4 \cdot \cos(\omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.6 \cdot \cos^2(\omega_0 t) dt - \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.3 \cdot \sin(3\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t) dt.$$

Das letzte Integral ist aufgrund der Orthogonalität gleich 0; das erste ist ebenfalls 0. Nur der mittlere Term liefert hier einen Beitrag zu $A_1 = 2 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.6$. Bei allen weiteren ($n \geq 2$) Cosinuskoeffizienten liefern alle drei Integrale den Wert 0, und es gilt somit stets $A_{n \neq 1} = 0$.

Die Bestimmungsgleichungen für die Sinuskoeffizienten B_n lauten entsprechend:

$$B_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.4 \cdot \sin(n \omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.6 \cdot \cos(\omega_0 t) \sin(n \omega_0 t) dt - \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} 0.3 \cdot \sin(3\omega_0 t) \sin(n \omega_0 t) dt.$$

Für $n \neq 3$ sind alle drei Integralwerte gleich 0 und damit gilt auch $B_n = 0$. Dagegen liefert für $n = 3$ das letzte Integral einen Beitrag, und man erhält für den Sinuskoeffizienten $B_3 = -0.3$.

Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften (1)

Einige Erkenntnisse über die zu erwartenden Fourierkoeffizienten A_n und B_n lassen sich bereits aus den **Symmetrieeigenschaften** der Zeitfunktion $x(t)$ ablesen.

- Ist das Zeitsignal $x(t)$ eine gerade Funktion \Rightarrow achsensymmetrisch um die Ordinate ($t = 0$), so verschwinden alle Sinuskoeffizienten B_n , da die Sinusfunktion selbst eine ungerade Funktion $\Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ ist:

$$B_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

- Eine ungerade Funktion $x(t)$ ist punktsymmetrisch um den Koordinatenursprung ($t = 0; x = 0$). Deshalb müssen hier alle Cosinuskoeffizienten verschwinden ($A_n = 0$), da die Cosinusfunktion selbst gerade ist. In diesem Fall ist auch der Gleichanteil A_0 stets 0.

$$A_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

- Liegt eine Funktion ohne Gleichanteil vor ($A_0 = 0$) und ist diese innerhalb einer Periode ungerade \Rightarrow es gilt $x(t) = -x(t - T_0/2)$, so sind in der Fourierreihendarstellung nur ungerade Vielfache der Grundfrequenz vorhanden. Für die Koeffizienten mit geradzahligem Index gilt dagegen stets:

$$A_n = B_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots).$$

- Sind alle Koeffizienten A_n und B_n mit geradzahligem Index ($n = 2, 4, \dots$) gleich 0 und der Koeffizient $A_0 \neq 0$, so bezieht sich die im letzten Punkt genannte Symmetrieeigenschaft auf den Gleichsignalanteil, und es gilt:

$$x(t) = 2 \cdot A_0 - x(t - T_0/2).$$

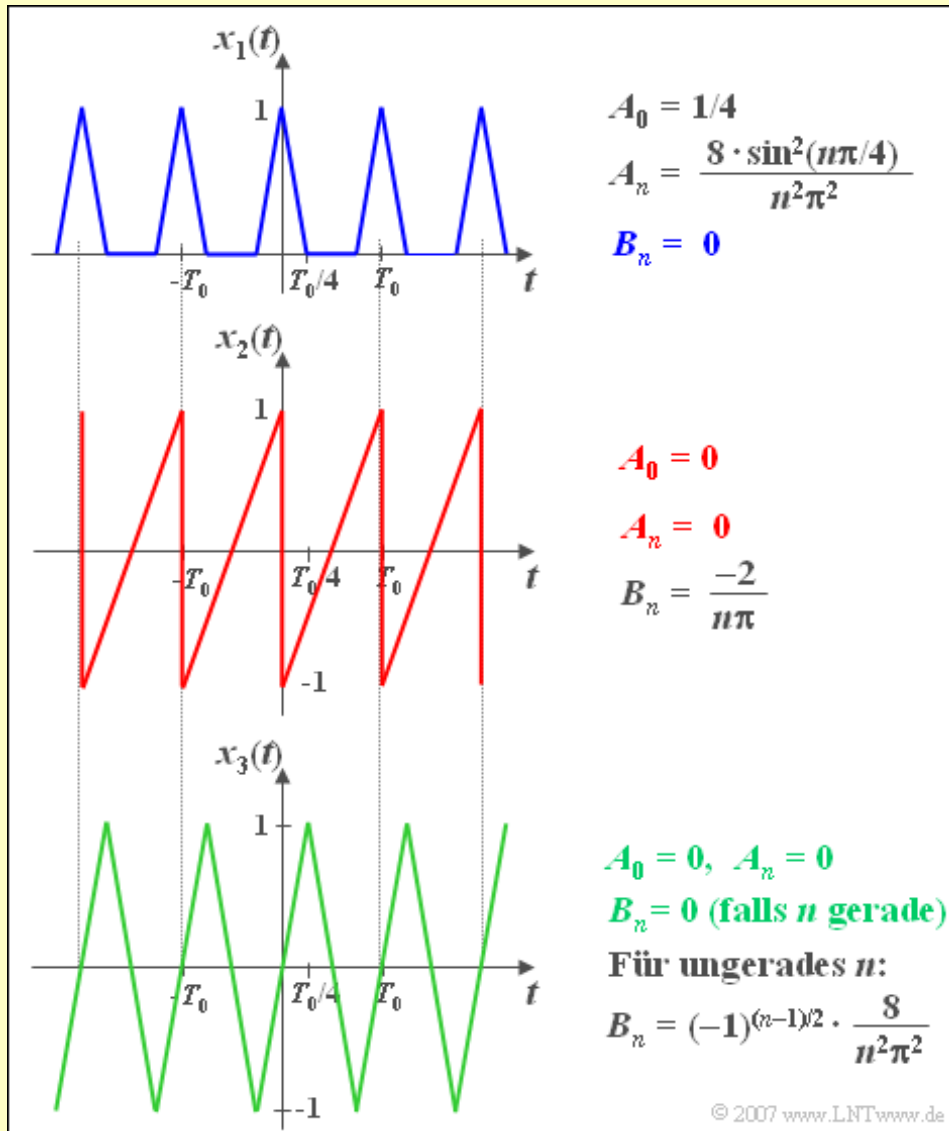
Anmerkung: Es können auch mehrere dieser Symmetrieeigenschaften gleichzeitig erfüllt sein.

Die Symmetrieeigenschaften der Fourierkoeffizienten werden im ersten Teil des nachfolgenden Videos zusammenfassend dargestellt:

Eigenschaften und Genauigkeit der Fourierreihe (Dauer Teil 1: 3:31 – Teil 2: 8:39)

Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften (2)

Beispiel: Die oben genannten Eigenschaften werden nun an drei Signalverläufen verdeutlicht. $x_1(t)$ ist eine gerade und mittelwertbehaftete Funktion, die dementsprechend ausschließlich durch Cosinuskoeffizienten A_n bestimmt ist ($B_n = 0$).



Dagegen sind bei der ungeraden Funktion $x_2(t)$ alle A_n ($n \geq 0$) identisch 0. Die ungerade Funktion $x_3(t)$ beinhaltet ebenfalls nur Sinuskoeffizienten, aber wegen $x_3(t) = -x_3(t - T_0/2)$ ausschließlich für ungeradzahlige Werte von n .

Komplexe Fourierreihe

Wie auf der Seite **Darstellung mit Cosinus- und Sinusanteil** im Kapitel 2.3 für den Fall einer harmonischen Schwingung bereits gezeigt wurde, kann man jedes beliebige periodische Signal

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

auch mit Hilfe der Betrags- und Phasenkoeffizienten darstellen:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t - \varphi_n).$$

Diese modifizierten Fourierkoeffizienten weisen folgende Eigenschaften auf:

- Der Gleichsignalkoeffizient C_0 ist identisch mit A_0 .
- Die Betragskoeffizienten lauten: $C_n = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2}$.
- Für die Phasenkoeffizienten gilt: $\varphi_n = \arctan(B_n/A_n)$.

Mit der Eulerschen Beziehung $\cos(x) + j \cdot \sin(x) = e^{jx}$ erhält man eine zweite Darstellungsvariante der Fourierreihenentwicklung, die von der komplexen Exponentialfunktion ausgeht.

Definition: Die **komplexe Fourierreihe** eines periodischen Signals $x(t)$ lautet wie folgt:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}.$$

Hier bezeichnen D_n die **komplexen Fourierkoeffizienten**, die sich aus den Cosinuskoeffizienten A_n und den Sinuskoeffizienten B_n oder auch aus den Betragskoeffizienten C_n sowie den Phasenkoeffizienten φ_n wie folgt berechnen lassen (gültig für $n \neq 0$):

$$D_n = 1/2 \cdot (A_n - j \cdot B_n) = 1/2 \cdot C_n \cdot e^{-j\varphi_n}.$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten kann man nach folgender Gleichung auch direkt berechnen:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Solange das Integrationsintervall T_0 erhalten bleibt, kann dieses ebenso wie bei den Koeffizienten A_n und B_n beliebig verschoben werden, zum Beispiel von 0 bis T_0 . Der Koeffizient $D_0 = A_0$ ist stets reell. Für die komplexen Koeffizienten mit negativem Laufindex ($n < 0$) gilt:

$$D_{-n} = D_n^* = 1/2 \cdot (A_n + j \cdot B_n).$$

Spektrum eines periodischen Signals (1)

Ausgehend von der gerade abgeleiteten komplexen Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

und dem bereits in Kapitel 2.3 benutzten **Verschiebungssatz** erhält man für das Spektrum eines periodischen Signals $x(t)$:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot \delta(f - n \cdot f_0).$$

Dies bedeutet:

- Das Spektrum eines mit T_0 periodischen Signals ist ein **Linienpektrum** bei ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz $f_0 = 1/T_0$.
- Der **Gleichanteil** liefert eine Diracfunktion bei $f = 0$ mit dem Impulsgewicht A_0 .
- Daneben gibt es **Diracfunktionen** $\delta(f \pm n \cdot f_0)$ **bei Vielfachen von f_0** , wobei $\delta(f - n \cdot f_0)$ eine Diracfunktion bei $f = n \cdot f_0$ (also im positiven Frequenzbereich) und $\delta(f + n \cdot f_0)$ eine solche bei der Frequenz $f = -n \cdot f_0$ (im negativen Frequenzbereich) kennzeichnet.
- Die **Impulsgewichte** sind im allgemeinen komplex.

Diese Aussagen werden auf der nächsten Seite anhand zweier Beispiele verdeutlicht.

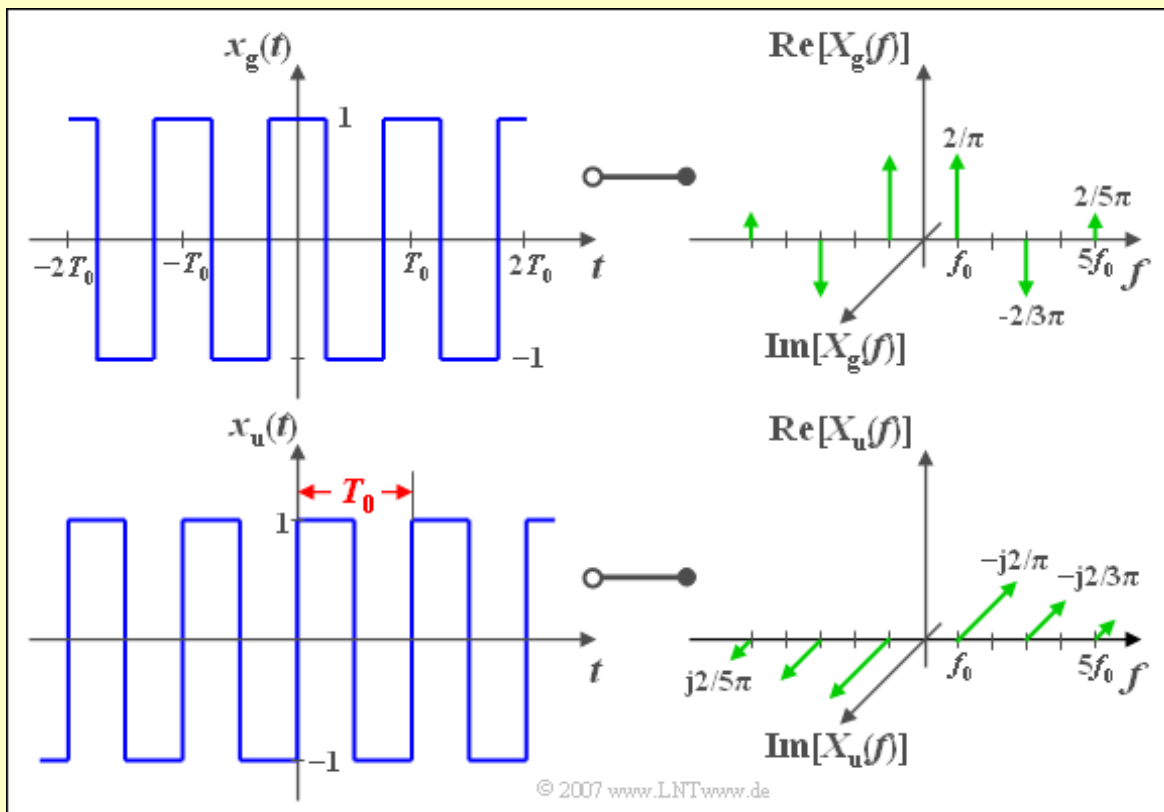
Spektrum eines periodischen Signals (2)

Beispiel: Wir betrachten – wie im Beispiel zu Beginn dieses Abschnitts – zwei periodische Rechtecksignale, jeweils mit Periodendauer T_0 und Grundfrequenz $f_0 = 1/T_0$. Das Signal

$$x_g(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5\omega_0 t) - \dots + \dots \right]$$

ist eine gerade, aus verschiedenen Cosinusanteilen zusammengesetzte Funktion. Die zugehörige Spektralfunktion $X_g(f)$ ist damit rein reell.

Wie auf der Seite **Spektraldarstellung eines Cosinussignals** bereits beschrieben wurde, liefert die Grundwelle zwei Diracfunktionen bei $\pm f_0$, jeweils gewichtet mit $2/\pi$. Dieses Gewicht entspricht den (im Allgemeinen komplexen) Fourierkoeffizienten $D_1 = D_{-1}^*$, die nur im Sonderfall einer geraden Funktion reell sind. Weitere Diracfunktionen gibt es bei $\pm 3f_0$ (negativ), $\pm 5f_0$ (positiv), $\pm 7f_0$ (negativ) usw. Alle Phasenwerte φ_n sind aufgrund der alternierenden Vorzeichen entweder 0 oder π .



Die unten dargestellte Funktion $x_u(t)$ ist ungerade:

$$x_u(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots \right].$$

Wie auf der Seite **Spektraldarstellung eines Sinussignals** bereits beschrieben wurde, liefert hier die Grundwelle zwei Diracfunktionen bei $+f_0$ (gewichtet mit $-j \cdot 2/\pi$) bzw. bei $-f_0$ (gewichtet mit $+j \cdot 2/\pi$). Auch alle weiteren Diracfunktionen bei $\pm 3f_0$, $\pm 5f_0$, usw. sind rein imaginär und in gleicher Richtung gewichtet wie die Diracfunktionen bei $\pm f_0$. Die beiden Betragsspektren sind gleich: $|X_u(f)| = |X_g(f)|$.

Das Gibbsche Phänomen

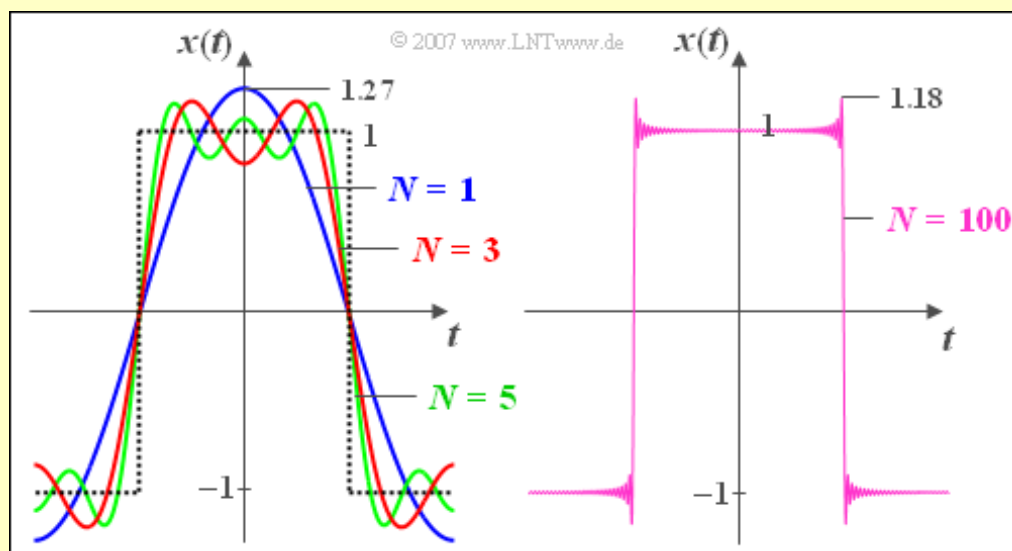
Nicht jedes Signal eignet sich für die Fourierreihendarstellung. Hier einige Einschränkungen:

- Eine wichtige Voraussetzung für die Konvergenz der Fourierreihe ist, dass das Signal nur endlich viele Unstetigkeitsstellen je Periode besitzen darf.
- An denjenigen Stellen $t = t_i$, an denen $x(t)$ Sprünge aufweist, konvergiert die Reihe gegen den aus dem jeweiligen links- und rechtsseitigen Grenzwert gebildeten arithmetischen Mittelwert.
- In der Umgebung solcher Sprungstellen kommt es in der Reihendarstellung meist zu hochfrequenten Oszillationen. Dieser Fehler ist von prinzipieller Art, das heißt, er ließe sich auch nicht vermeiden, wenn man unendlich viele Summanden berücksichtigen würde. Man spricht vom *Gibbschen Phänomen*, benannt nach dem Physiker **Josiah Willard Gibbs**.
- Durch eine Erhöhung von N wird zwar der fehlerhafte Bereich kleiner, nicht jedoch die maximale Abweichung zwischen dem Signal $x(t)$ und der Fourierreihendarstellung $x_N(t)$. Der maximale Fehler beträgt ca. 9% der Sprungamplitude – und zwar unabhängig von N .

Das Gibbsche Phänomen und weitere interessante Aspekte werden in einem Lernvideo behandelt:

Eigenschaften und Genauigkeit der Fourierreihe (Dauer Teil 1: 3:31 – Teil 2: 8:39)

Beispiel: Links sehen Sie gepunktet einen Ausschnitt eines periodischen ± 1 -Rechtecksignals und die dazugehörige Fourierreihendarstellung mit $N = 1, 3$ und 5 Summanden. Die Grundwelle hat hier den Amplitudenwert $4/\pi \approx 1.27$. Auch mit $N = 5$ (das bedeutet wegen $A_2 = A_4 = 0$ drei Summanden) unterscheidet sich die Fourierreihe vom anzunähernden Rechtecksignal noch deutlich, vor allem im Bereich der Flanke.



Aus dem rechten Bild ist zu erkennen, dass die Flanke und der innere Bereich mit $N = 100$ relativ gut nachgebildet werden, es aber an der Sprungstelle aufgrund des Gibbschen Phänomens noch immer zu Überschwingern kommt. Da hier die Sprungamplituden jeweils gleich 2 sind, ergeben sich die Maximalwerte näherungsweise zu 1.18. Mit $N = 1000$ wären die Überschwinger genau so groß, aber auf einen noch engeren Raum begrenzt und bei zeitdiskreter Darstellung eventuell nicht mehr sichtbar.