Musterlösung zur Aufgabe A4.1

a) Die si–förmige Zeitfunktion $x(t)$ lässt auf ein Rechteckspektrum $X(f)$ schließen. Die absolute, zweiseitige Bandbreite $2 \cdot B_x$ ist gleich dem Kehrwert der ersten Nullstelle. Daraus folgt:

$$B_x = \frac{1}{2 \cdot T_x} = \frac{1}{2 \cdot 0.1\,\text{ms}} \underline{= 5\,\text{kHz}}.$$

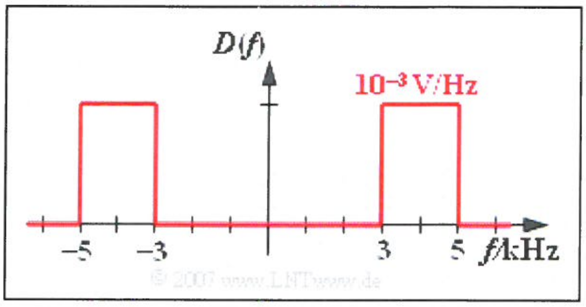
Da der Signalwert bei $t = 0$ gleich der Rechteckfläche ist, ergibt sich für die konstante Höhe:

$$X(f=0) = \frac{x(t=0)}{2 \cdot B_x} = \frac{10\,\text{V}}{10\,\text{kHz}} \underline{= 10^{-3}\,\text{V/Hz}}.$$

b) Aus T_y = 0.167 ms erhält man B_y = 3 kHz. Zusammen mit $y(t = 0)$ = 6V führt dies zum gleichen Spektralwert $Y(f = 0)$ = 10^{-3} V/Hz.

c) Aus $d(t) = x(t) - y(t)$ folgt wegen der Linearität der Fouriertransformation:

$$D(f) = X(f) - Y(f).$$



Die Differenz der zwei gleich hohen Rechteckfunktionen führt zu einem rechteckförmigen BP–Spektrum zwischen 3 kHz und 5 kHz. Die (einseitige) Bandbreite beträgt somit B_d = 2 kHz. In diesem Frequenzintervall ist $D(f) = 10^{-3}$ V/Hz. Außerhalb, also auch bei $f = 0$, gilt $D(f) = 0$.

d) Nach den fundamentalen Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation ist das Integral über die Zeitfunktion gleich dem Spektralwert bei $f = 0$. Daraus folgt:

$$F_x = X(f=0) = \frac{x(t=0)}{2 \cdot B_x} = 10^{-3}\,\text{V/Hz} \underline{= 10^{-3}\,\text{Vs}}.$$

$$F_d = D(f=0) \underline{= 0}.$$

Das bedeutet: Bei jedem Bandpass–Signal sind die Flächen der positiven Signalanteile genau so groß wie die Flächen der negativen Anteile.

e) In beiden Fällen ist die Berechnung im Frequenzbereich einfacher als im Zeitbereich, da hier die Integration auf eine Flächenberechnung von Rechtecken zurückgeführt werden kann:

$$E_x = (10^{-3}\,\text{V/Hz})^2 \cdot 2 \cdot 5\,\text{kHz} \underline{= 10^{-2}\,\text{V}^2\text{s}}.$$

$$E_d = (10^{-3}\,\text{V/Hz})^2 \cdot 2 \cdot 2\,\text{kHz} \underline{= 4 \cdot 10^{-3}\,\text{V}^2\text{s}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.1

a) Der Gleichsignalübertragungsfaktor ist $H_{\rm TP}(f = 0) = 1$. Für den Betragsfrequenzgang gilt:

$$|H_{\rm TP}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_{\rm G})^2}}.$$

Somit ist der Wert bei $f_{\rm G}$ gleich „Wurzel aus 1/2". Die Leistungsübertragungsfunktion $|H_{\rm TP}(f)|^2$ ist daher bei $f = f_{\rm G}$ nur halb so groß als bei $f = 0$, worauf die Bezeichnung 3dB-Grenzfrequenz für $f_{\rm G}$ zurückzuführen ist. Die Phasenfunktion wird allgemein nach folgender Gleichung berechnet:

$$\varphi_{\rm TP}(f) = -\arctan \frac{{\rm Im}\,[H_{\rm TP}(f)]}{{\rm Re}\,[H_{\rm TP}(f)]}.$$

Mit der konjugiert–komplexen Erweiterung erhält man:

$$H_{\rm TP}(f) = \frac{1}{1-(f/f_{\rm G})^2} - \frac{{\rm j}\cdot f/f_{\rm G}}{1-(f/f_{\rm G})^2}.$$

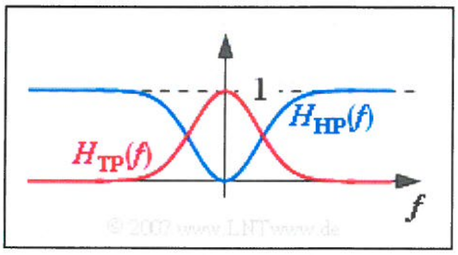
Setzt man dieses Ergebnis in obige Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\varphi_{\rm TP}(f) = \arctan\,(f/f_{\rm G})\,.$$

Der Verlauf ist ausgehend von 0 (bei $f = 0$) über $\pi/2$ (bei $f = f_{\rm G}$) bis zu π (bei $f \to \infty$) monoton steigend. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2 und 3.

b) Auf Seite 3 von Kapitel 4.1 wurde gezeigt, dass ein jedes BP-Signal als Differenz zweier TP-Signale dargestellt werden kann. Gleiches gilt für Frequenzgänge:

$$H_{\rm BP}(f) = H_1(f) - H_2(f).$$



Setzt man $H_2(f) = H_{\rm TP}(f)$ und betrachtet $H_1(f) = 1$ als Grenzfall einer Tiefpassfunktion mit unendlicher Bandbreite, so ergibt sich:

$$H_{\rm HP}(f) = 1 - H_{\rm TP}(f).$$

Wie die obere Grafik zeigt, ist das Ergebnis wegen $H_1(f) = 1$ nun ein Hochpass. Mit der vorgegebenen Tiefpassfunktion $H_{\rm TP}(f)$ erhält man weiter:

$$H_{\rm HP}(f) = 1 - \frac{1}{1+{\rm j}\cdot f/f_{\rm G}} = \frac{{\rm j}\cdot f/f_{\rm G}}{1+{\rm j}\cdot f/f_{\rm G}}.$$

Für $f = 0$ ergibt sich $H_{\rm HP}(f = 0) = 0$. Anzumerken ist, dass die tatsächliche (komplexe) Funktion $H_{\rm TP}(f)$ und nicht deren Betrag zu substrahieren ist. Daher ist die obige Skizze nur qualitativ zu verstehen.

Zum genau gleichen Ergebnis kommt man ausgehend von der konkreten Schaltung auf der Angabenseite. Entsprechend einem frequenzabhängigen Spannungsteiler mit den Widerständen R und $1/({\rm j}\omega C)$ gilt:

$$H_{\rm HP}(f) = \frac{R}{R+1/({\rm j}\cdot\omega\cdot C)} = \frac{{\rm j}\cdot\omega\cdot C\cdot R}{1+{\rm j}\cdot\omega\cdot C\cdot R} = \frac{{\rm j}\cdot f/f_{\rm G}}{1+{\rm j}\cdot f/f_{\rm G}}.$$

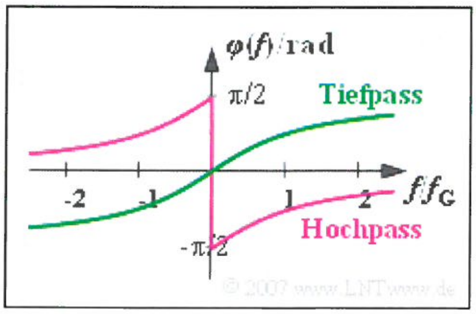
c) Die Betragsfunktion des Hochpasses lautet:

$$|H_{\rm HP}(f)| = \frac{|f/f_{\rm G}|}{\sqrt{1+(f/f_{\rm G})^2}}.$$

Bei der Grenzfrequenz $f_{\rm G}$ sind somit die Beträge von Hochpass- und Tiefpass-Frequenzgang gleich groß, und zwar jeweils 0.707. Dagegen ist die erste Aussage offensichtlich falsch: demnach müsste sich nämlich der Wert $|H_{\rm HP}(f = f_{\rm G})| = 1 - 0.707 \approx 0.293$ ergeben.

Der unter b) berechnete Frequenzgang kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$H_{\rm HP}(f) = \frac{(f/f_{\rm G})^2 + {\rm j}\cdot f/f_{\rm G}}{1+(f/f_{\rm G})^2}.$$



Damit ergibt sich für die Phasenfunktion:

$$\varphi_{\rm HP}(f) = -\arctan\frac{f/f_{\rm G}}{(f/f_{\rm G})^2} = -{\rm arcctg}(f/f_{\rm G})$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{\rm HP}(f) = \arctan(\frac{f}{f_{\rm G}}) - \frac{\pi}{2} = \varphi_{\rm TP}(f) - \frac{\pi}{2}.$$

Bei positiven Frequenzen ergibt sich also bis auf eine Verschiebung um $\pi/2$ nach unten der gleiche Verlauf wie beim TP-System. Da die Phasenfunktion ungerade ist, gibt es bei negativen Frequenzen eine Verschiebung um $\pi/2$ nach oben. Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3.

d) Aufgrund der Linearität der Fourier(rück)transformation gilt für den Zeitverlauf für $t > 0$:

$$h_{\rm HP}(t) = h_1(t) - h_2(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau}\cdot {\rm e}^{-t/\tau}.$$

Die Diracfunktion ist die Fourierrücktransformierte der konstanten Frequenzfunktion „1". Der zweite Anteil ist bis auf das Vorzeichen identisch mit der TP-Impulsantwort. Die Diracfunktion bewirkt, dass $h_{\rm HP}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ unendlich groß ist. Dagegen gilt für $t = \tau$:

$$h_{\rm HP}(t=\tau) = -\frac{1}{\tau}\cdot {\rm e}^{-1} = -\frac{1}{{\rm e}\cdot\tau}.$$

Die letzte Aussage ist somit ebenfalls falsch. Richtig sind wieder die Lösungsvorschläge 2 und 3.

Musterlösung zur Aufgabe A4.2

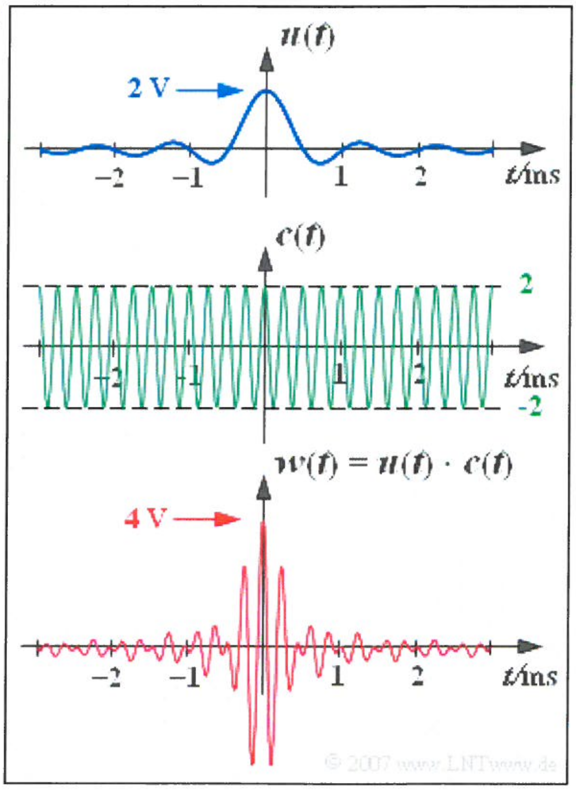
a) Die Zeit T_u, welche die erste Nullstelle des TP-Signals $u(t)$ angibt, ist gleich dem Kehrwert der Breite des Rechteckspektrums, also 1/(2 kHz) = 0.5 ms. Die Impulsamplitude ist, wie in der Musterlösung zur Aufgabe A4.1 ausführlich dargelegt wurde, gleich der Rechteckfläche. Daraus folgt u_0 = 2V.

b) Das BP-Spektrum kann mit f_T = 4 kHz wie folgt dargestellt werden:

$$W(f) = U(f - f_T) + U(f + f_T) = = U(f) \star [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)] .$$

Entsprechend dem Verschiebungssatz gilt dann für das dazugehörige Zeitsignal:

$$w(t) = 2 \cdot u(t) \cdot \cos(2\pi f_T t) = = 2u_0 \cdot \mathrm{si}(\pi \frac{t}{T_u}) \cdot \cos(2\pi f_T t).$$



Die Grafik zeigt

- oben das TP-Signal $u(t)$,
- dann die Schwingung $c(t) = 2 \cdot \cos(2\pi f_T t)$,
- unten das BP-Signal $w(t) = u(t) \cdot c(t)$.

Insbesondere erhält man zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$w(t = 0) = 2 \cdot u_0 \underline{= 4\mathrm{V}}.$$

Der Zeitpunkt t = 62.5 µs entspricht genau einer viertel Periodendauer des Signals $c(t)$:

$$w(t = 62.5\,\mu s) = 2u_0 \cdot \mathrm{si}(\pi \frac{62.5\,\mu s}{500\,\mu s}) \cdot \cos(2\pi \cdot 4\,\mathrm{kHz} \cdot 62.5\,\mu s) = 4\mathrm{V} \cdot \mathrm{si}(\pi/8) \cdot \cos(\pi/4) \underline{= 0}.$$

c) Vergleicht man die Spektralfunktion $W(f)$ dieser Aufgabe mit dem Spektrum $D(f)$ in der **Musterlösung zu Aufgabe A4.1,** so erkennt man, dass $w(t)$ und $d(t)$ identische Signale sind. Etwas aufwändiger ist dieser Beweis im Zeitbereich. Mit f_2 = 2 kHz kann für das hier betrachtete Signal geschrieben werden:

$$w(t) = 4\mathrm{V} \cdot \mathrm{si}(\pi f_2 t) \cdot \cos(4\pi f_2 t) = (4\mathrm{V})/(\pi f_2 t) \cdot \sin(\pi f_2 t) \cdot \cos(4\pi f_2 t).$$

Wegen der trigonometrischen Beziehung

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = 1/2 \cdot [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

kann obige Gleichung umgeformt werden:

$$w(t) = \frac{2\mathrm{V}}{\pi f_2 t} \cdot [\sin(5\pi f_2 t) + \sin(-3\pi f_2 t)] = 10\,\mathrm{V} \cdot \frac{\sin(5\pi f_2 t)}{5\pi f_2 t} - 6\,\mathrm{V} \cdot \frac{\sin(3\pi f_2 t)}{3\pi f_2 t}.$$

Damit ist gezeigt, dass beide Signale tatsächlich identisch sind ⇒ Lösungsvorschlag 1:

$$w(t) = 10\,\text{V} \cdot \text{si}(5\pi f_2 t) - 6\,\text{V} \cdot \text{si}(3\pi f_2 t) = d(t).$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.2

a) Das Nachrichtensignal lässt sich mit den Abkürzungen f_1 = 1 kHz und $T_1 = 1/f_1$ = 1 ms wie folgt darstellen (beachten Sie, dass $f_2 = 2f_1$ gilt):

$$q(t) = 4\,\text{V} \cdot \cos(2\pi f_1 t) - 2\,\text{V} \cdot \sin(4\pi f_1 t) = 4\,\text{V} \cdot \cos(2\pi \frac{t}{T_1}) - 2\,\text{V} \cdot \sin(4\pi \frac{t}{T_1}).$$

Zum Zeitpunkt t = 0 verschwindet der zweite Anteil und es ergibt sich $q(t = 0)$ = <u>4 V</u>. Dagegen erhält man für t = 0.125 ms = $T_1/8$:

$$q(t = 0.125\text{ms}) = 4\,\text{V} \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) - 2\text{V} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{4\,\text{V}}{\sqrt{2}} - 2\,\text{V} \underline{= 0.828\,\text{V}}.$$

b) Entsprechend dem rein imaginären Spektrum $Z(f)$ und den Impulsgewichten ±3 muss gelten:

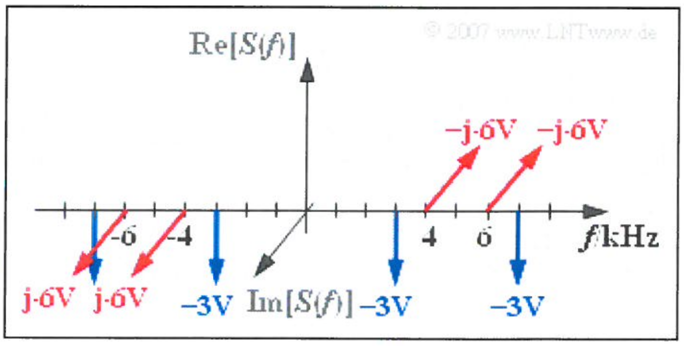
$$z(t) = 6 \cdot \sin(2\pi \cdot 5\,\text{kHz}) \quad \Rightarrow \quad z_{\text{max}} \underline{= 6}.$$

c) d) Die Spektralfunktion $S(f)$ ergibt sich aus der Faltung zwischen $Q(f)$ und $Z(f)$. Man erhält:

$$S(f) = -3\text{j} \cdot Q(f - f_{\text{T}}) + 3\text{j} \cdot Q(f + f_{\text{T}}).$$

Es ergeben sich Spektrallinien bei 3 kHz (–3V), 4 kHz (–j · 6V), 6 kHz (–j · 6V) sowie 7 kHz (–3V), und dazu noch die konjugiert–komplexen Anteile bei negativen Frequenzen:

- Teilaufgabe (c): Linien mit reellen Gewichten bei <u>±3 kHz und ±7 kHz</u>,
- Teilaufgabe (d): Imaginäre Linien bei <u>±4 kHz und ±6 kHz</u>.



Eine alternative Möglichkeit zur Lösung dieser Aufgabe ist die Anwendung trigonometrischer Gleichungen. Im Folgenden bezeichnet zum Beispiel f_5 = 5 kHz. Dann gilt:

$$4\,\text{V} \cdot \cos(2\pi f_1 t) \cdot 3 \cdot \sin(2\pi f_5 t) = \frac{12\,\text{V}}{2} \cdot [\sin(2\pi f_4 t) + \sin(2\pi f_6 t)]\,.$$

$$-2\,\text{V} \cdot \sin(2\pi f_2 t) \cdot 3 \cdot \sin(2\pi f_5 t) = \frac{-6\,\text{V}}{2} \cdot [\cos(2\pi f_3 t) + \cos(2\pi f_7 t)]\,.$$

Aus der ersten Gleichung ergeben sich folgende Spektrallinien:

- bei f_4 bzw. $-f_4$ mit den Gewichten –j · 3V bzw. +j · 3V,
- bei f_6 bzw. $-f_6$ mit den Gewichten –j · 3V bzw. +j · 3V.

Die zweite Gleichung liefert insgesamt 4 Diraclinien (alle 6 V, reell und negativ) bei $\pm f_3$ und $\pm f_7$. Ein Vergleich mit obiger Skizze zeigt, dass beide Lösungswege zum gleichen Ergebnis führen.

Musterlösung zur Aufgabe A4.3

a) Die Amplitude der harmonischen Schwingung ist gleich der Zeigerlänge. Für alle Signale gilt $\underline{A = 3\text{V}}$.

b) Die gesuchte Frequenz ergibt sich zu $f_1 = \omega_1/(2\pi) \underline{= 5 \text{ kHz}}$. Die Phase kann aus $S_1 = 3\text{V} \cdot \exp(-\text{j} \cdot \varphi_1)$ ermittelt werden und ergibt sich zu $\underline{\varphi_1 = 0}$, d.h. es ist

$$x_1(t) = 3\,\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 5\,\text{kHz} \cdot t).$$

c) Wegen $\omega_2 = 2\omega_1$ beträgt nun die Frequenz $f_2 = 2 \cdot f_1 \underline{= 10 \text{ kHz}}$. Die Phase ergibt sich mit dem Startzeitpunkt S_2 zu $\exp(-\text{j} \cdot \varphi_2) = \text{j}$, das heißt $\varphi_2 \underline{= -\pi/2\ (-90°)}$. Somit lautet die Zeitfunktion:

$$x_2(t) = 3\,\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 10\,\text{kHz} \cdot t + 90°) = -3\,\text{V} \cdot \sin(2\pi \cdot 10\,\text{kHz} \cdot t).$$

Dieses Signal ist somit „minus–sinusförmig”, was auch direkt am Zeigerdiagramm abgelesen werden kann. Der Realteil von $x_{2+}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist 0. Da der Zeiger entgegen dem Uhrzeigersinn dreht, ergibt sich zunächst ein negativer Realteil. Nach einer viertel Umdrehung ist $x_2(T/4) = -3\text{V}$. Dreht man nochmals in Schritten von 90° entgegen dem Uhrzeigersinn weiter, so ergeben sich die Signalwerte 0V, 3V und 0V.

d) Diese Teilaufgabe kann analog zu den Fragen b) und c) gelöst werden: $f_3 \underline{= 10 \text{ kHz}}$, $\varphi_3 \underline{= 60°}$.

e) Der Zeiger benötigt für eine Umdrehung genau die Periodendauer $T_3 = 1/f_3 \underline{= 0.1 \text{ ms}}$ $(= t_1)$.

f) Das analytische Signal startet bei $S_3 = 3\text{V} \cdot \text{e}^{-\text{j}60°}$. Dreht das Signal um 120° weiter, so ergibt sich genau der gleiche Realteil. Es gilt dann mit $t_2 = t_1/3 \underline{= 0.033 \text{ ms}}$ folgende Beziehung:

$$x_3(t = t_2) = x_3(t = 0) = 3\,\text{V} \cdot \cos(60°) = 1.5\,\text{V}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.3

a) Für die Spektralfunktion am Modellausgang gilt:

$$X_+(f) = (1 + \mathrm{j} \cdot H_{\rm HT}(f)) \cdot X(f).$$

Ein Vergleich mit der angegebenen Beziehung

$$X_+(f) = (1 + \mathrm{sign}(f)) \cdot X(f)$$

zeigt, dass $H_{\rm HT}(f) = -\mathrm{j} \cdot \mathrm{sign}(f)$ ist. Der gesuchte Realteil ist somit 0, der Imaginärteil gleich –1.

b) Aus der Spektralfunktion

$$X_1(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f - f_0).$$

wird nach dem Hilbert-Transformator:

$$Y_1(f) = \mathrm{j} \cdot \frac{A}{2} \cdot \delta(f + f_0) - \mathrm{j} \cdot \frac{A}{2} \cdot \delta(f - f_0).$$

Damit lautet das Signal am Ausgang des Hilbert-Transformators:

$$y_1(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t) \quad \Rightarrow \quad y_1(t = 0) \; \underline{= 0}.$$

c) Nun lauten die Spektralfunktionen am Eingang und Ausgang des Hilbert-Transformators:

$$X_2(f) = \mathrm{j} \cdot \frac{A}{2} \cdot \delta(f + f_0) - \mathrm{j} \cdot \frac{A}{2} \cdot \delta(f - f_0).$$

$$Y_2(f) = -\frac{A}{2} \cdot \delta(f + f_0) - \frac{A}{2} \cdot \delta(f - f_0).$$

Daraus folgt $y_2(t) = -A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ und $y_2(t = 0) \; \underline{= -1 \text{ V}}$.

d) Dieses Eingangssignal lässt sich auch wie folgt darstellen:

$$x_3(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t - 2\pi \cdot 10\,\text{kHz} \cdot 0.0125\,\text{ms}) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t - \pi/4).$$

$$\Rightarrow \quad y_3(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t - 3\pi/4).$$

Die Signalphase ist somit $\varphi = \pi/4$. Durch den Hilbert-Transformator wird diese um $\varphi_{\rm HT} = 90°$ ($\pi/2$) verzögert. Deshalb ist das Ausgangssignal $y_3(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t - 3\pi/4)$ und der Signalwert zur Zeit $t = 0$ beträgt $A \cdot \cos(135°) \; \underline{= -0.707 \text{ V}}$.

e) Die Spektralfunktion des Signals $x_3(t)$ lautet:

$$X_3(f) = \frac{A_0}{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{A_0}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \cdot \delta(f - f_0).$$

Beim analytischen Signal verschwindet der erste Anteil und der Anteil bei $+f_0$ wird verdoppelt:

$$X_{3+}(f) = A_0 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \cdot \delta(f - f_0).$$

Durch Anwendung des Verschiebungssatzes lautet damit die zugehörige Zeitfunktion mit $\varphi = \pi/4$:

$$x_{3+}(t) = A_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0 t - \varphi)}.$$

Speziell gilt für den Zeitpunkt $t = 0$:

$$x_{3+}(t = 0) = A_0 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = A_0 \cdot \cos(45°) - \mathrm{j} \cdot A_0 \cdot \sin(45°) = \underline{0.707\,\mathrm{V} - \mathrm{j} \cdot 0.707\,\mathrm{V}}.$$

Hinweis: Um von $x(t)$ zu $x_+(t)$ zu kommen, muss man nur die Cosinusfunktion durch die komplexe Exponentialfunktion ersetzen. Beispielsweise gilt für eine harmonische Schwingung:

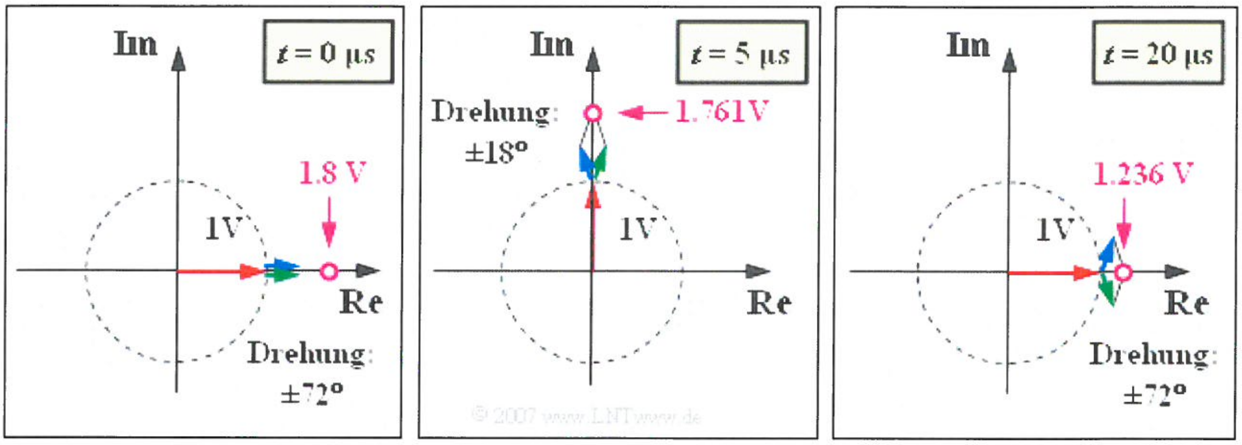
$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi) \quad \Rightarrow \quad x_+(t) = A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0 t - \varphi)}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.4

a) Durch Fourierrücktransformation von $S_+(f)$ unter Berücksichtigung des Verschiebungssatzes gilt:

$$s_+(t) = 1\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_{50}\,t} + 0.4\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_{60}\,t} + 0.4\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_{40}\,t}.$$

Der Ausdruck beschreibt die Summe dreier Zeiger, die mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten drehen. In obiger Gleichung bedeutet z. B. $\omega_{60} = 2\pi(f_\mathrm{T} + f_\mathrm{N}) = 2\pi \cdot 60$ kHz. Zum Zeitpunkt t = 0 zeigen alle drei Zeiger in Richtung der reellen Achse (siehe linke Grafik), und man erhält den rein reellen Wert $s_+(t = 0) = 1.8$ V.



b) Die erste Aussage ist richtig und ergibt sich aus der Hilbert-Transformation. Dagegen stimmen die nächsten beiden Aussagen nicht: $s_+(t)$ ist stets eine komplexe Zeitfunktion mit Ausnahme des Grenzfalls $s(t)$ = 0. Jede komplexe Funktion hat jedoch zu einigen Zeitpunkten auch rein reelle Werte.

Der Zeigerverbund dreht immer in mathematisch positiver Richtung. Überschreitet der Summenvektor die reelle Achse, so verschwindet zu diesem Zeitpunkt der Imaginärteil und $s_+(t)$ ist rein reell.

c) Die Periodendauer des Trägersignals beträgt $T_0 = 1/f_\mathrm{T}$ = 20 µs. Nach t = 5 µs hat sich der Träger somit um 90° gedreht (siehe mittlere Grafik). Der blaue Zeiger (OSB) dreht um 20% schneller, der grüne (USB) um 20% langsamer als der rote Drehzeiger (Trägersignal):

$$\begin{aligned} s_+(5\,\mu\mathrm{s}) &= 1\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi \cdot 50 \cdot 0.005} + 0.4\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi \cdot 60 \cdot 0.005} + 0.4\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi \cdot 40 \cdot 0.005} = \\ &= 1\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ} + 0.4\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,108^\circ} + 0.4\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,72^\circ}. \end{aligned}$$

Somit sind die in 5 µs zurückgelegten Winkel von OSB und USB 108° bzw. 72°. Da sich zu diesem Zeitpunkt die Realteile von OSB und USB kompensieren, ist $s_+(t$ = 5 µs) rein imaginär und man erhält:

$$\mathrm{Im}\,[s_+(t = 5\,\mu\mathrm{s})] = 1\,\mathrm{V} + 2 \cdot 0.4\,\mathrm{V} \cdot \cos(18^\circ) \,\underline{= 1.761\,\mathrm{V}}.$$

d) Nach einer Umdrehung des roten Trägers, also zum Zeitpunkt $t = T_0$ = 20 µs, hat der blaue Zeiger bereits 72° mehr zurückgelegt; der grüne Zeiger 72° weniger. Die Summe der drei Zeiger ist wieder rein reell und ergibt (siehe rechte Grafik):

$$\mathrm{Re}\,[s_+(20\,\mu\mathrm{s})] = 1\,\mathrm{V} + 2 \cdot 0.4\,\mathrm{V} \cdot \cos(72^\circ) \,\underline{= 1.237\,\mathrm{V}}.$$

e) Der Betrag ist minimal, wenn die Zeiger der beiden Seitenbänder gegenüber dem Träger um 180° versetzt sind. Daraus folgt:

$$|s_+(t)|_{\min} = 1\,\text{V} - 2 \cdot 0.4\,\text{V} \underline{= 0.2\,\text{V}}.$$

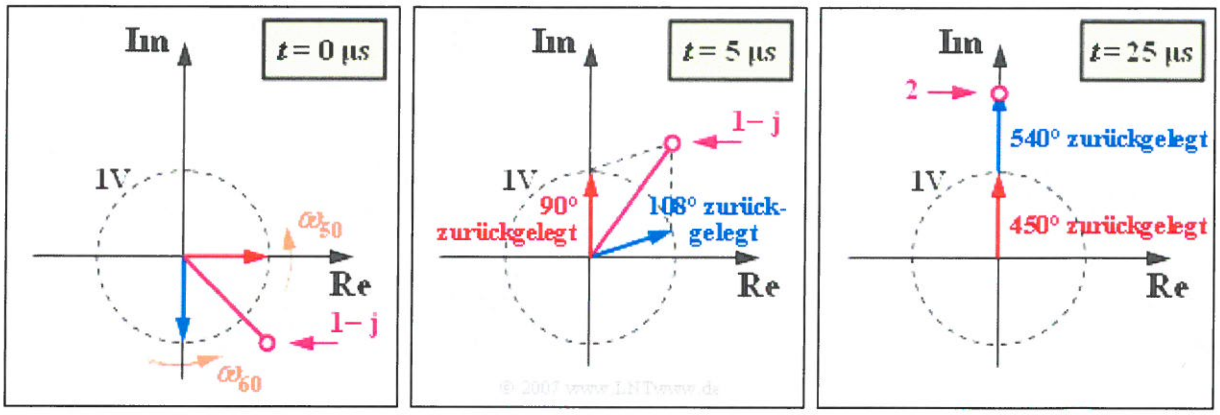
Innerhalb einer Periode T_0 des Trägers tritt gegenüber den Zeigern der beiden Seitenbändern ein Phasenversatz von ±72° auf. Daraus folgt: $t_{\text{min}} = 2.5 \cdot T_0 \underline{= 50\ \mu\text{s}}$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.4

a) Das analytische Signal lautet allgemein:

$$s_+(t) = 1\,\text{V} \cdot \text{e}^{\text{j}\,\omega_{50}\,t} - \text{j} \cdot 1\,\text{V} \cdot \text{e}^{\text{j}\,\omega_{60}\,t}.$$

Zum Zeitpunkt t = 0 nehmen die komplexen Exponentialfunktionen jeweils den Wert 1 an und man erhält Re[$s_+(t = 0)$] = 1V und Im[$s_+(t = 0)$] = –1V (siehe linke Grafik).



b) Für das analytische Signal kann auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} s_+(t) &= 1\,\text{V} \cdot \cos(\omega_{50}\,t) + \text{j} \cdot 1\,\text{V} \cdot \sin(\omega_{50}\,t) + \\ &- \text{j} \cdot 1\,\text{V} \cdot \cos(\omega_{60}\,t) + 1\,\text{V} \cdot \sin(\omega_{60}\,t). \end{aligned}$$

Der Realteil hiervon beschreibt das tatsächliche, physikalische Signal:

$$s(t) = 1\,\text{V} \cdot \cos(\omega_{50}\,t) + 1\,\text{V} \cdot \sin(\omega_{60}\,t).$$

Bei alleiniger Berücksichtigung des 50 kHz-Cosinussignals würde der erste Nulldurchgang bei t_1 = $T_0/4$ auftreten, also nach 5 µs, wobei T_0 = $1/f_{50}$ = 20 µs die Periodendauer des 50 kHz-Signals bezeichnet. Das Sinussignal mit der Frequenz 60 kHz ist während der gesamten ersten Halbwelle (0 ... 8.33 µs) positiv. Aufgrund des Pluszeichens verzögert sich der erste Nulldurchgang von $s(t)$ ⇒ t_1 > 5 µs. Richtig ist also der Lösungsvorschlag 3.

Die mittlere Grafik zeigt das analytische Signal zum Zeitpunkt t = $T_0/4$, zu dem der rote Träger seinen Nulldurchgang hätte. Der Nulldurchgang des violetten Summenzeigers tritt erst dann auf, wenn dieser in Richtung der imaginären Achse zeigt. Dann gilt $s(t_1)$ = Re[$s_+(t_1)$] = 0.

c) Der Maximalwert von $|s_+(t)|$ wird erreicht, wenn beide Zeiger in die gleiche Richtung weisen. Der Betrag des Summenzeigers ist dann gleich der Summe der beiden Einzelzeiger; also 2 V.

Dieser Fall wird zum ersten Mal dann erreicht, wenn der schnellere Zeiger mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{60} seinen „Rückstand" von 90° (π/2) gegenüber dem langsameren Zeiger (ω_{50}) aufgeholt hat:

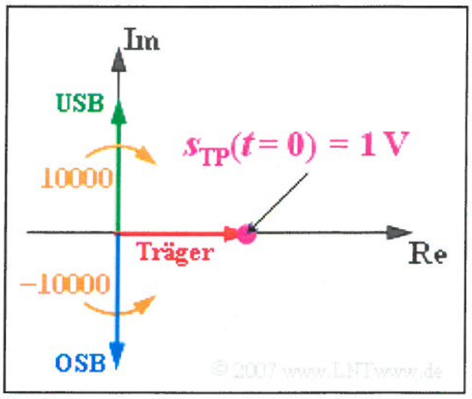
$$\omega_{60}\,t_2 - \omega_{50}\,t_2 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{\pi/2}{2\pi(f_{60} - f_{50})} = \frac{1}{4 \cdot (f_{60} - f_{50})} \underline{= 25\,\mu\text{s}}.$$

Zu diesem Zeitpunkt haben die beiden Zeiger 5/4 bzw. 6/4 Umdrehungen zurückgelegt und weisen beide in Richtung der imaginären Achse (siehe rechte Grafik). Das tatsächliche Signal $s(t)$ – also der Realteil von $s_+(t)$ – ist deshalb in diesem Moment gleich 0.

d) Die Bedingung für $|s_+(t_3)| = 0$ ist, dass zwischen den beiden gleich langen Zeigern ein Phasenversatz von 180° besteht, sodass sie sich auslöschen. Dies bedeutet weiter, dass der schnellere Zeiger um 3π/2 weiter gedreht hat als der 50 kHz-Anteil. Analog zur Musterlösung der Teilaufgabe c) gilt deshalb:

$$t_3 = \frac{3\pi/2}{2\pi(f_{60} - f_{50})} \underline{= 75\,\mu\text{s}.}$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.5



a) Verschiebt man alle Diraclinien jeweils um f_T = 50 kHz nach links, so liegen diese bei –10 kHz, 0 und +10 kHz. Die Gleichung $s_{TP}(t)$ lautet mit $\omega_{10} = 2\,\pi \cdot 10$ kHz:

$$s_{TP}(t) = 1\,V - j \cdot 1\,V \cdot e^{j\omega_{10}t} + j \cdot 1\,V \cdot e^{-j\omega_{10}t}$$

$$\Rightarrow \quad s_{TP}(t=0) = 1\,V - j \cdot 1\,V + j \cdot 1\,V = 1\,V.$$

$$\Rightarrow \quad \text{Re}[s_{TP}(t=0)]\ \underline{= 1\,V}, \quad \text{Im}[s_{TP}(t=0)]\ \underline{= 0}.$$

b) Obige Gleichung kann man nach dem Satz von Euler mit $T_0 = 1/f_N$ = 100 Mikrosekunden wie folgt umformen:

$$\frac{s_{TP}(t)}{1\,V} = 1 - j \cdot \cos(\omega_{10}\,t) + \sin(\omega_{10}\,t) + j \cdot \cos(\omega_{10}\,t) + \sin(\omega_{10}\,t) = 1 + 2 \cdot \sin(2\pi\frac{t}{T_0}).$$

Damit ist gezeigt, dass $s_{TP}(t)$ für alle Zeiten t reell ist. Für die gesuchten Zahlenwerte erhält man:

$$s_{TP}(t = 10\,\mu s) = 1\,V \cdot [1 + 2 \cdot \sin(36^\circ)]\ \underline{= 2.176\,V}.$$

$$s_{TP}(t = 25\,\mu s) = 1\,V \cdot [1 + 2 \cdot \sin(90^\circ)]\ \underline{= 3\,V}.$$

$$s_{TP}(t = 75\,\mu s) = 1\,V \cdot [1 + 2 \cdot \sin(270^\circ)]\ \underline{= -1\,V}.$$

$$s_{TP}(t = 100\,\mu s) = s_{TP}(t = 0)\ \underline{= 1\,V}.$$

c) Definitionsgemäß gilt $a(t) = |s_{TP}(t)|$. Damit erhält man folgende Zahlenwerte:

$$a(t = 25\,\mu s) = s_{TP}(t = 25\,\mu s)\ \underline{= 3\,V}.$$

$$a(t = 75\,\mu s) = |s_{TP}(t = 75\,\mu s)|\ \underline{= 1\,V}.$$

d) Aufgrund der Tatsache, dass für alle Zeiten $\text{Im}[s_{TP}(t)] = 0$ ist, erhält man aus der Beziehung

$$\phi(t) = \text{arc}\,[s_{TP}(t)] = \arctan\frac{\text{Im}\,[s_{TP}(t)]}{\text{Re}\,[s_{TP}(t)]}$$

das Ergebnis $\phi(t) = 0$, falls $\text{Re}[s_{TP}(t)]$ positiv ist, und $\phi(t) = \pi$ bei negativem Realteil.

Wir beschränken uns hier auf den Zeitbereich einer Periode: $0 \le t \le T_0$. Im Bereich zwischen t_1 und t_2 liegt eine Phase von 180° vor, ansonsten gilt $\text{Re}[s_{TP}(t)] \ge 0$. Zur Berechung von t_1 kann das Ergebnis aus b) herangezogen werden:

$$\sin(2\pi \cdot \frac{t_1}{T_0}) = -0.5 \quad \Rightarrow \quad 2\pi \cdot \frac{t_1}{T_0} = 2\pi \cdot \frac{7}{12} \quad (\text{entspricht } 210^\circ)$$

Daraus erhält man $t_1 = 7/12 \cdot T_0$ = 58.33 µs. Durch ähnliche Überlegungen kommt man zum Ergebnis $t_2 = 11/12 \cdot T_0$ = 91.67 µs.

Die gesuchten Werte sind somit $\phi(t = 25\ \mu s)\ \underline{= 0}$ und $\phi(t = 75\ \mu s)\ \underline{= 180^\circ\ (= \pi)}$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.5

a) Durch die Phasenverschiebung um $\phi = 90°$ wird aus der Cosinus– die Minus–Sinusfunktion. Richtig sind also der erste und der letzte Vorschlag, da mit $q(t) = \sin(\omega_N t)$ gilt:

$$\begin{aligned} s(t) &= \cos(\omega_T\, t) - \sin(\omega_T\, t) \cdot \sin(\omega_N\, t) = \\ &= \cos(\omega_T\, t) - 0.5 \cdot \cos((\omega_T - \omega_N)t) + 0.5 \cdot \cos((\omega_T + \omega_N)t). \end{aligned}$$

b) Das Spektrum des analytischen Signals lautet:

$$S_+(f) = \delta(f - f_T) - 0.5 \cdot \delta(f - f_\Delta) + 0.5 \cdot \delta(f - f_\Sigma).$$

Durch Verschiebung um f_T kommt man zum Spektrum des äquivalenten Tiefpass-Signals:

$$S_{TP}(f) = \delta(f) - 0.5 \cdot \delta(f + f_N) + 0.5 \cdot \delta(f - f_N).$$

Dies führt zu der Zeitfunktion

$$s_{TP}(t) = 1 - 0.5 \cdot e^{-j\omega_N t} + 0.5 \cdot e^{j\omega_N t} = 1 + j \cdot \sin(\omega_N t).$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $s_{TP}(t) = 1$, also reell. Somit gilt:

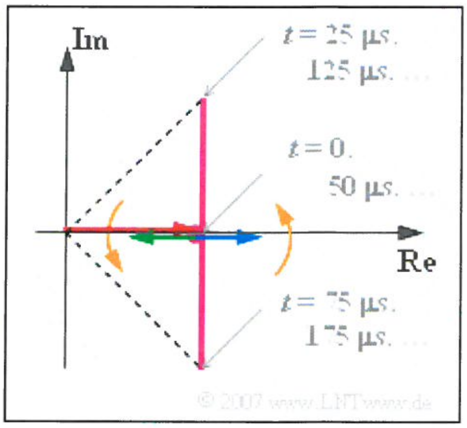
- $s_I(t = 0) = \mathrm{Re}[s_{TP}(t = 0)] = 1$,
- $s_Q(t = 0) = \mathrm{Im}[s_{TP}(t = 0)] = 0$.

c) Die Ortskurve ist eine vertikale Gerade ⇒ Vorschlag 3 mit folgenden Werten:

$$s_{TP}(t = 0) = s_{TP}(t = 50\,\mu s) = \ldots = 1.$$

$$s_{TP}(t = 25\,\mu s) = s_{TP}(t = 125\,\mu s) = \ldots = 1 + j.$$

$$s_{TP}(t = 75\,\mu s) = s_{TP}(t = 175\,\mu s) = \ldots = 1 - j.$$



d) Der Betrag entspricht der Zeigerlänge. Diese schwankt zwischen a_{max} = „Wurzel aus 2" und $a_{min} = 1$. Es gilt:

$$a(t) = \sqrt{1 + \sin^2(\omega_N t)}.$$

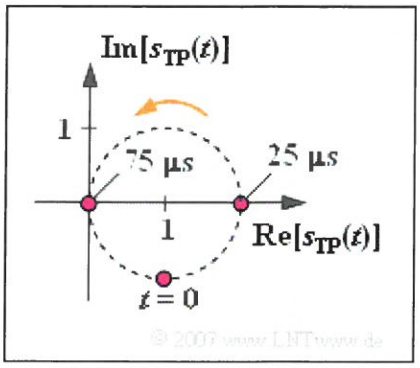
Bei idealer Phasenmodulation müsste die Hüllkurve $a(t)$ dagegen konstant sein.

e) Der Realteil ist stets 1, der Imaginärteil gleich $\sin(\omega_N t)$. Daraus folgt die Phasenfunktion:

$$\phi(t) = \arctan\,(\sin(\omega_N\, t)).$$

Der Maximalwert der Sinusfunktion ist 1. Daraus folgt $\phi_{max} = \arctan\,(1) = \pi/4$ (entspricht 45 °).

Musterlösung zur Aufgabe A4.6



a) Das Spektrum des äquivalenten TP–Signals lautet mit der Trägerfrequenz $f_T = f_{50}$:

$$S_{TP}(f) = S_+(f + f_{50}) = 1 \cdot \delta(f) - \mathrm{j} \cdot \delta(f - f_{10}).$$

Damit ergibt sich für das dazugehörige Zeitsignal:

$$s_{TP}(t) = 1 - \mathrm{j} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{10}t}.$$

Ausgehend vom Punkt (1, –j) verläuft $s_{TP}(t)$ auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt (1, 0) und dem Radius 1. Die Periodendauer ist gleich dem Kehrwert der Frequenz: $T_0 = 1/f_{10} = 100$ µs ⇒ Antwort 2.

b) Spaltet man obige Gleichung nach Real- und Imaginäranteil auf, so erhält man:

$$s_{TP}(t) = 1 + \sin(\omega_{10}t) - \mathrm{j} \cdot \cos(\omega_{10}t).$$

Dies führt zur Betragsfunktion

$$\begin{aligned} a(t) &= |s_{TP}(t)| = \sqrt{\mathrm{Re}\left[s_{TP}(t)\right]^2 + \mathrm{Im}\left[s_{TP}(t)\right]^2} = \\ &= \sqrt{1 + 2\sin(\omega_{10}t) + \sin^2(\omega_{10}t) + \cos^2(\omega_{10}t)} = \sqrt{2 \cdot (1 + \sin(\omega_{10}t))}. \end{aligned}$$

Der Maximalwert ergibt sich aus $\sin(\omega_{10} \cdot t) \le 1$ zu $a_{max} = 2$. Für den Minimalwert erhält man unter Berücksichtigung von $\sin(\omega_{10} \cdot t) \ge -1$: $a_{min} = 0$. Bei $t = 0$ ist der Betrag gleich „Wurzel aus 2" = 1.414.

c) Entsprechend der allgemeinen Definition gilt:

$$\phi(t) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\left[s_{TP}(t)\right]}{\mathrm{Re}\left[s_{TP}(t)\right]} = \arctan \frac{-\cos(\omega_{10}t)}{1 + \sin(\omega_{10}t)}.$$

Für $t = 0$ ist $\cos(\omega_{10} \cdot t) = 1$ und $\sin(\omega_{10} \cdot t) = 0$ und man erhält:

$$\phi(t = 0) = \arctan(-1) \;\underline{= -45^\circ}.$$

Dagegen gilt für $t = 25$ µs $= T_0/4$:

$$\cos(\omega_{10}t) = 0; \;\; \sin(\omega_{10}t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(t = 25\,\mu s) \;\underline{= 0}.$$

Die beiden Winkel kann man auch aus obiger Grafik ablesen. Der Phasenwert bei $t = 75$ µs muss durch Grenzübergang bestimmt werden, da hier sowohl der Real- als auch der Imaginärteil 0 werden und somit das Argument der arctan–Funktion unbestimmt ist. Man erhält $\phi(t = 75$ µs$)$ = 0.

Dieses Ergebnis soll hier numerisch hergeleitet werden. Berechnet man die Phasenfunktion für $t = 74$ µs, so erhält man mit $\omega_{10} \cdot t = 1.48\,\pi = 266.4°$:

$$\phi(t = 74\,\mu s) = \arctan \frac{\cos(86.4^\circ)}{1 - \sin(86.4^\circ)} = \arctan \frac{0.062}{1 - 0.998} \approx \arctan(31) \approx 88^\circ.$$

Entsprechend gilt für $t = 76\,\mu s$ mit $\omega_{10} \cdot t = 1.52\,\pi = 273.6\,°$:

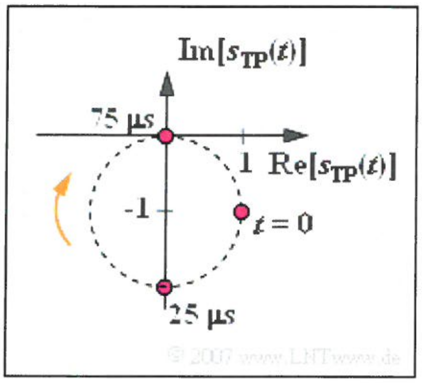
$$\phi(t = 76\,\mu s) = \arctan \frac{-\cos(86.4°)}{1-\sin(86.4°)} \approx \arctan(-31) \approx -88°.$$

Diese Zahlenwerte lassen darauf schließen, dass die Grenzwerte für $t \to 75$ µs sich zu ±90° ergeben, je nachdem, ob man sich diesem Wert von oben oder unten nähert. Der Phasenwert bei exakt t = 75 µs ist gleich dem Mittelwert zwischen rechts- und linksseitigem Grenzwert, also 0.

d) Nun lauten die Gleichungen für Zeit– und Frequenzbereich:

$$S_{TP}(f) = S_+(f + f_{60}) = -j \cdot \delta(f) + \delta(f + f_{10}).$$

$$s_{TP}(t) = -j + 1 \cdot e^{-j\omega_{10} t}.$$



In der Grafik ist $s_{TP}(t)$ dargestellt. Man erkennt:

- Die Ortskurve ist wiederum ein Kreis mit Radius 1, aber nun mit Mittelpunkt (0, –j).
- Es gilt auch hier $s_{TP}(t = 0) = 1 - j$.
- Man bewegt sich nun auf der Ortskurve im Uhrzeigersinn.
- Die Periodendauer beträgt weiterhin $T_0 = 1/f_{10}$ = 100 µs.
- Die Ortskurve ist gegenüber Punkt a) nur um 90° in der komplexen Ebene gedreht. Für alle Zeiten ergeben sich die gleichen Zeigerlängen wie für $f_T = f_{50}$. Der Betrag bleibt gleich.
- Die Phasenfunktion $\phi(t)$ liefert nun Werte zwischen $-\pi$ und 0, während die in der Teilfrage c) berechnete Phasenfunktion Werte zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ angenommen hat. Es gilt:

$$\phi_d(t) = -(\phi_c(t) + 90°).$$

Richtig sind somit der erste und der dritte Lösungsvorschlag.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.6

a) Die Ortskurve ist ein Kreisbogen mit Radius 2. Deshalb ist die Betragsfunktion a(t) konstant gleich 2.

b) Aus der Grafik ist zu erkennen, dass $\phi_{\rm min}$ = –π/2 (–90°) und $\phi_{\rm max}$ = +π (180°) ist.

c) Allgemein gilt folgender Zusammenhang:

$$s_{\rm TP}(t) = a(t) \cdot {\rm e}^{{\rm j}\cdot \phi(t)}.$$

Ein Vergleich mit der gegebenen Funktion liefert:

$$\phi(t) = \eta \cdot q(t).$$

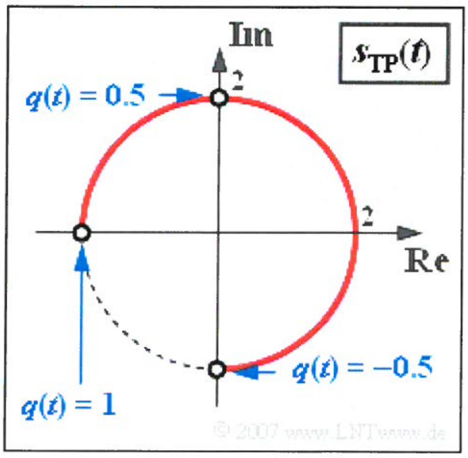
Der maximale Phasenwert $\phi_{\rm max}$ = π (180°) ergibt sich für die Signalamplitude $q_{\rm max}$ = 1. Daraus folgt direkt η = π. Dieser Modulationsindex wird durch die Werte $\phi_{\rm min}$ = –π/2 und $q_{\rm min}$ = –0.5 bestätigt.

d) Ist $q(t)$ = const. = –0.5, so ist die Phasenfunktion ebenfalls konstant:

$$\phi(t) = \eta \cdot q(t) = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad s_{\rm TP}(t) = -{\rm j}\cdot s_0 = -2{\rm j}.$$

Somit gilt für das tatsächliche, physikalische Signal:

$$s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega_{\rm T}\, t - \frac{\pi}{2}) = 2 \cdot \sin(\omega_{\rm T}\, t).$$



Dagegen führt $q(t)$ = 0.5 zu $\phi(t)$ = π/2 und $s_{\rm TP}(t)$ = 2j. Ist $q(t)$ ein Rechtecksignal, das abwechselnd die Werte +0.5 und –0.5 annimmt, besteht somit die Ortskurve nur aus zwei Punkten auf der imaginären Achse, und zwar unabhängig davon, wie lange die Intervalle mit +0.5 und –0.5 dauern.

Gilt dagegen $q(t)$ = ±1, so ergeben sich rein formal die möglichen Phasenwerte +π und –π, die aber identisch sind. Die „Ortskurve" besteht dann nur aus einem einzigen Punkt: $s_{\rm TP}(t) = -\,s_0$ ⇒ das Signal $s(t)$ ist „minus-cosinusförmig".

Richtig sind der zweite und der dritte Lösungsvorschlag.