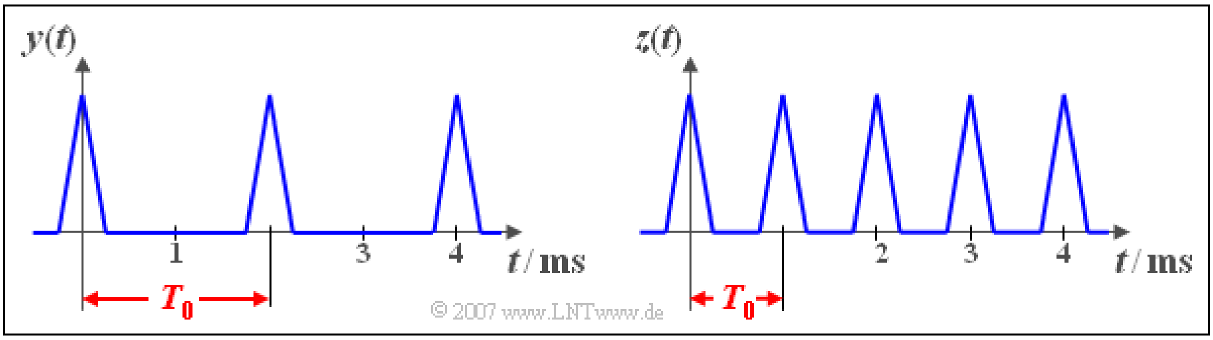
Musterlösung zur Aufgabe A2.1

a) Die nichtlineare Kennlinie $y = g(x)$ beschreibt einen Einweggleichrichter und $z = h(x) = |x|$ einen Zweiweggleichrichter $\Rightarrow$ Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 4.

b) Die Periodendauer des gegebenen Signals $x(t)$ beträgt T_0 = 2 ms. Der Kehrwert hiervon ergibt die Grundfrequenz f_0 = 500 Hz.

c) Wie aus der folgenden linken Skizze hervorgeht, ändert sich durch die Einweggleichrichtung nichts an der Periodendauer. Das heißt: T_0 ist weiterhin 2 ms.



d) Das Signal $z(t)$ nach der Doppelweggleichrichtung hat dagegen die doppelte Frequenz (siehe rechtes Bild). Es gelten dann folgende Werte: T_0 = 1 ms, f_0 = 1 kHz und ω_0 = 6283 1/s.

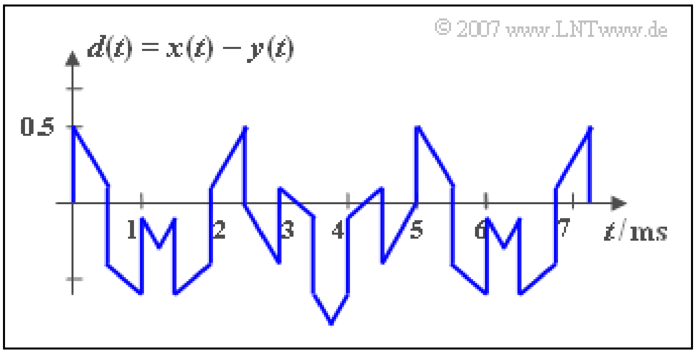
Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.1

a) Es gilt T_x = 1 ms und f_x = 1 kHz.

b) Es gilt T_y = 2.5 ms und f_y = 0.4 kHz.

c) Die Grundfrequenz f_s ist der größte gemeinsame Teiler von f_x = 1 kHz und f_y = 0.4 kHz. Daraus folgt f_s = 200 Hz und die Periodendauer T_s = 5 ms, wie auch aus der grafischen Darstellung des Signals $s(t)$ hervorgeht.

d) Die Periodendauer T_d ändert sich gegenüber der Periodendauer T_s nicht, wenn das Signal $y(t)$ nicht addiert, sondern subtrahiert wird: $T_d = T_s$ = 5 ms.



e) Der größte gemeinsame Teiler von f_u = 0.998 kHz und f_v = 1.002 kHz ist f_w = 2 Hz. Der Kehrwert hiervon ergibt die Periodendauer T_w = 500 ms.

Musterlösung zur Aufgabe A2.2

a) Alle Signale mit Ausnahme von $x_2(t)$ beinhalten einen Gleichsignalanteil ⇒ Richtig sind somit die Antworten 1, 3, 4, 5 und 6.

b) Subtrahiert man vom Signal $x_5(t)$ den Gleichanteil 1V, so ist das Restsignal $\Delta x_5(t) = x_5(t) - 1\text{V}$ gleich Null. Dementspechend ist auch die Spektralfunktion $\Delta X_5(f) = 0$. Bei allen anderen Zeitverläufen ist $\Delta x_i(t)$ ungleich 0 und damit auch die dazugehörige Spektralfunktion $\Delta X_i(f)$ ⇒ Richtig ist allein der Lösungsvorschlag 5.

c) Bei einem periodischen Signal genügt zur Berechnung des Gleichsignalanteils die Mittelung über eine Periode (hier: 3 ms). Damit ergibt sich der Gleichanteil zu

$$A_0 = \frac{1}{3\,\text{ms}}(1\,\text{V}\cdot 1\,\text{ms} + (-1\,\text{V})\cdot 2\,\text{ms}) \underline{= -0.333\,\text{V}}.$$

d) Für das Signal $x_4(t)$ kann geschrieben werden: $x_4(t) = 0.5\text{ V} + \Delta x_4(t)$. Hierbei bezeichnet $\Delta x_4(t)$ einen Rechteckimpuls der Amplitude 0.5 V und der Dauer 4 ms, der aufgrund seiner endlichen Dauer nicht zum Gleichsignalanteil beiträgt. Deshalb gilt hier $A_0 \underline{= 0.5\text{ V}}$.

e) Die allgemeine Gleichung zur Berechnung des Gleichsignalanteils lautet:

$$A_0 = \lim_{T_\text{M}\to\infty}\frac{1}{T_\text{M}}\int_{-T_\text{M}/2}^{+T_\text{M}/2} x(t)\,\text{d}t.$$

Spaltet man dieses Integral in zwei Teilintegrale auf, so erhält man:

$$A_0 = \lim_{T_\text{M}\to\infty}\frac{1}{T_\text{M}}\int_{-T_\text{M}/2}^{0} 0\text{V}\cdot\text{d}t + \lim_{T_\text{M}\to\infty}\frac{1}{T_\text{M}}\int_{0}^{T_\text{M}/2} 1\text{V}\cdot\text{d}t.$$

Nur der zweite Term liefert einen Beitrag. Daraus folgt wiederum $A_0 \underline{= 0.5\text{ V}}$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.2

a) Der Gleichsignalanteil x_0 ist der Mittelwert des Signals $x(t)$. Es genügt die Mittelung über eine Periodendauer T_0 = 1 ms, und man erhält:

$$x_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,\mathrm{d}t \;\underline{= 1\mathrm{V}}.$$

b) In der Hälfte der Zeit ist $y(t)$ = 1 V, in der anderen Hälfte liegt es zwischen 0 und 1 V mit dem Mittelwert bei 0.5 V. Daraus folgt y_0 $\underline{= 0.75\ \mathrm{V}}$.

c) Aufgrund der Periodizität und der Symmetrie genügt die Mittelung über den Zeitbereich von 0 bis $T_0/2$. Mit der entsprechenden Kennlinie gilt dann:

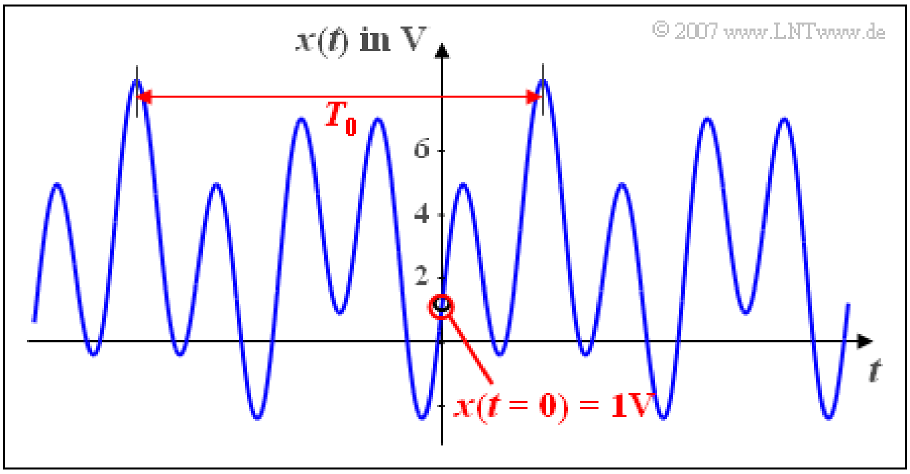
$$z_0 = \frac{1}{T_0/2}\int_0^{T_0/2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{4\mathrm{V}^2}{T_0/2}\int_0^{T_0/2} (2t/T_0)^2\,\mathrm{d}t = 4/3\ \mathrm{V}^2 \;\underline{\approx 1.333\ \mathrm{V}^2}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.3

a) Das Zeitsignal hat die folgende Form:

$$x(t) = 3\text{V} - 2\text{V} \cdot \cos(\omega_1 t) + 4\text{V} \cdot \sin(2.5\omega_1 t).$$

Hierbei bezeichnet $\omega_1 = 2\pi f_1$ die Kreisfrequenz des Cosinusanteils. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Signal den Wert 1V.



b) Die Grundfrequenz f_0 ist der kleinste gemeinsame Teiler von f_1 = 4 kHz und $2.5 \cdot f_1$ = 10 kHz. Daraus folgt f_0 = 2 kHz und $T_0 = 1/f_0$ = 0.5 ms.

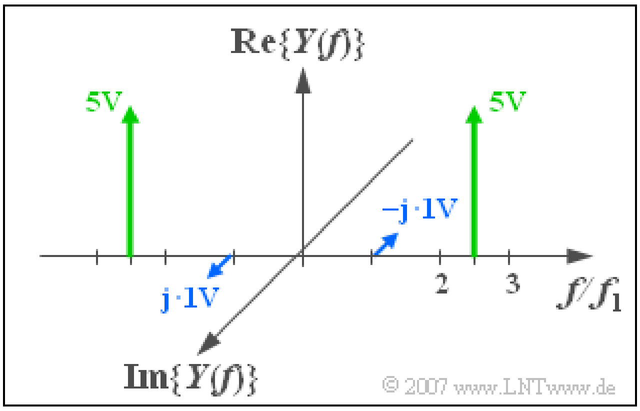
c) Für das Ausgangssignal $y(t)$ des Differenzierers gilt:

$$y(t) = \frac{1}{\omega_1} \cdot \frac{\text{d}x(t)}{\text{d}t} = \frac{-2\text{V}}{\omega_1} \cdot \omega_1 \cdot (-\sin(\omega_1 t)) + \frac{4\text{V}}{\omega_1} \cdot 2.5\omega_1 \cdot \cos(2.5\omega_1 t).$$

Dies führt zum Ergebnis:

$$y(t) = 2\text{V} \cdot \sin(\omega_1 t) + 10\text{V} \cdot \cos(2.5\omega_1 t).$$

Für den Nullzeitpunkt ergibt sich der Wert 10 V. Nebenstehend sehen Sie das Spektrum $Y(f)$.



d) Die Periodendauer T_0 wird durch die Amplitude und die Phase der beiden Anteile nicht verändert. Das bedeutet, dass weiterhin T_0 = 0.5 ms gilt.

Der Gleichanteil verschwindet aufgrund der Differentiation. Der Anteil bei f_1 ist sinusförmig. Somit hat $X(f)$ einen (imaginären) Dirac bei $f = f_1$, jedoch mit negativem Vorzeichen. Der Cosinusanteil mit der Amplitude 10 V hat die beiden Diracfunktionen bei $\pm 2.5 \cdot f_1$ zur Folge, jeweils mit dem Gewicht 5 V. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 4.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.3

a) Es gilt $T_0 = t_2 - t_1$ $\underline{= 12\text{ ms}}$ und $f_0 = 1/T_0$ $\underline{\approx 83.33\text{ Hz}}$.

b) Die Verschiebung beträgt τ $\underline{= 2\text{ ms}}$; die Phase ist $\varphi = 2\pi \cdot \tau/T_0 = \pi/3$ entsprechend $\underline{60°}$.

c) Aus dem Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ folgt für die Amplitude $C = 6$ V:

$$x_0 = x(t=0) = C \cdot \cos(-60\,°) = \frac{C}{2} = 3\,\text{V} \quad \Rightarrow \quad \underline{C = 6\,\text{V}}.$$

d) Die dazugehörige Spektralfunktion lautet:

$$X(f) = \frac{C}{2} \cdot \text{e}^{-\text{j}\varphi} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{C}{2} \cdot \text{e}^{\text{j}\varphi} \cdot \delta(f + f_0).$$

Das Gewicht der Diraclinie bei $f = f_0$ (erster Term) ist $C/2 \cdot \text{e}^{-\text{j}\varphi} \approx$ $\underline{1.5\text{ V} - \text{j} \cdot 2.6\text{ V}}$.

Musterlösung zur Aufgabe A2.4

a) Aus der Signalfrequenz f_0 = 10 kHz folgt $T_0 = 1/f_0$ = 100 µs. Das Cosinussignal ist gleichsignalfrei (A_0 = 0) und wird durch einen einzigen Cosinuskoeffizienten – nämlich A_1 – vollständig beschrieben. Alle Sinuskoeffizienten B_n sind identisch 0, da $x(t)$ eine gerade Funktion ist. Die Fourierreihendarstellung bildet $x(t)$ fehlerfrei nach.
Richtig sind somit alle Lösungsvorschläge außer dem Vierten.

b) Aufgrund der Doppelweggleichrichtung ergibt sich für die Periodendauer nunmehr der halbe Wert: T_0 = 50 µs = 0.05 ms. Bei allen nachfolgenden Punkten bezieht sich T_0 auf diesen Wert, also auf die Periodendauer des Signals $y(t)$.

c) Im Bereich von $-T_0/2$ bis $T_0/2$ (–25 µs ... 25 µs) ist $y(t) = x(t)$. Mit f_x = 10 kHz = $1/(2T_0)$ gilt deshalb für diesen Abschnitt:

$$y(t) = 1\text{V} \cdot \cos(2\pi f_0 t) = 1\text{V} \cdot \cos(\pi \frac{t}{T_0}).$$

Daraus ergibt sich für den Gleichsignalanteil:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\,\text{d}t = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1\text{V} \cdot \cos(\pi \frac{t}{T_0})\,\text{d}t.$$

Mit der Substitution $u = \pi \cdot t/T_0$ erhält man

$$A_0 = \frac{1\text{V}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)\,\text{d}u = \frac{1\text{V}}{\pi} \sin(u) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1\text{V} \cdot 2}{\pi} \underline{\approx 0.637\text{ V}}.$$

d) Da $y(-t) = y(t)$ gilt, sind alle Sinuskoeffizienten $B_n = 0$. Insbesondere ist $B_2 \underline{= 0}$.

e) Für die Koeffizienten A_n gilt mit der Substitution $u = \pi \cdot t/T_0$ entsprechend dem angegebenen Integral:

$$A_n = \frac{2\text{V}}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(\pi \frac{t}{T_0}) \cdot \cos(n \cdot 2\pi \frac{t}{T_0})\,\text{d}t = \frac{2\text{V}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) \cdot \cos(2nu)\,\text{d}u$$

$$\Rightarrow \quad A_n = (-1)^{n+1} \frac{4\text{ V}}{\pi\,(4n^2-1)}.$$

Der Koeffizient A_2 ist damit gleich $-4\text{ V}/(15\pi)$ $\underline{\approx -0.085\text{ V}}$.

f) Für die endliche Fourierreihe mit N = 3 gilt allgemein:

$$y_3(t) = \frac{2\text{V}}{\pi} \cdot [1 + 2/3 \cdot \cos(\omega_0 t) - 2/15 \cdot \cos(2\omega_0 t) + 2/35 \cdot \cos(3\omega_0 t)].$$

Zum Zeitpunkt t = 0 ist $y_3(0) \approx 1.0125$ V; damit ergibt sich der Fehler zu $\varepsilon_3(t = 0)$ $\underline{= 0.0125\text{ V}}$.

g) Die Zeit t = 25µs entspricht der halben Periodendauer. Hierfür gilt wegen $\omega_0 \cdot T_0 = 2\pi$:

$$
\begin{aligned}
y_3(T_0/2) &= \frac{2\text{V}}{\pi}\left[1+\frac{2}{3}\cdot\cos(\pi)-\frac{2}{15}\cdot\cos(2\pi)+\frac{2}{35}\cdot\cos(3\pi)\right] \\
&= \frac{2\text{V}}{\pi}\left[1-\frac{2}{3}-\frac{2}{15}-\frac{2}{35}\right]=\frac{2\text{V}}{7\pi}\approx 0.091\text{V}\,.
\end{aligned}
$$

Da $y(T_0/2) = 0$ ist, ergibt sich für $\varepsilon_3(T_0/2)$ ebenfalls 0.091 V. Dieser Fehler ist um mehr als den Faktor 7 größer als der Fehler bei $t = 0$, da das Signal $y(t)$ bei $t = T_0/2$ mehr hochfrequente Anteile besitzt (spitzförmiger Verlauf). Wird gefordert, dass der Fehler $\varepsilon_3(T_0/2)$ kleiner als 0.01 sein soll, dann müssten mindestens 32 Fourierkoeffizienten berücksichtigt werden.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.4

a) Der Gleichanteil ist tatsächlich T_1/T_0. Da $x(t)$ eine gerade Funktion ist, sind alle Koeffizienten $B_n = 0$. Die geradzahligen Koeffizienten A_{2n} verschwinden nur dann, wenn $T_1 = T_0/2$ ist. In diesem Fall ist die Bedingung $x(t) = 2A_0 - x(t - T_0/2)$ erfüllt (mit $A_0 = 0.5$). Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 2.

b) Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft $x(-t) = x(t)$ erhält man:

$$A_n = 2 \cdot \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_1} (1 - \frac{t}{T_1}) \cos(2\pi n \frac{t}{T_0})\, \mathrm{d}t.$$

Dies führt zu zwei Teilintegralen I_1 und I_2. Das erste lautet:

$$I_1 = \frac{4}{T_0} \cdot \int_0^{T_1} \cos(2\pi n \frac{t}{T_0})\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi n} \sin(2\pi n \frac{T_1}{T_0}).$$

Für das zweite Integral gilt mit dem Integral auf der Angabenseite:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{-4}{T_0 \cdot T_1} \cdot \int_0^{T_1} t \cdot \cos(2\pi n \frac{t}{T_0})\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{-4}{T_0 \cdot T_1} \cdot \left[\frac{T_0^2 \cdot \cos(2\pi n t/T_0)}{4\pi^2 n^2} + \frac{T_0 \cdot t \cdot \sin(2\pi n t/T_0)}{2\pi n} \right]_0^{T_1}. \end{aligned}$$

Dieses letzte Integral kann wie folgt zusammengefasst werden:

$$I_2 = \frac{-\cos(2\pi n T_1/T_0)}{\pi^2 n^2 T_1/T_0} + \frac{1}{\pi^2 n^2 T_1/T_0} - I_1.$$

Daraus folgt mit $1 - \cos(2\alpha) = 2 \cdot \sin^2(\alpha)$:

$$A_n = I_1 + I_2 = \frac{1 - \cos(2\pi n T_1/T_0)}{\pi^2 n^2 T_1/T_0} = \frac{2\sin^2(\pi n T_1/T_0)}{\pi^2 n^2 T_1/T_0}.$$

Für $T_1/T_0 = 0.25$ erhält man:

$$A_n = \frac{8\sin^2(\pi n/4)}{\pi^2 n^2}.$$

Insbesondere gilt:

$$A_1 = \frac{8}{\pi^2}\sin^2(\pi/4) = \frac{4}{\pi^2} \underline{\approx 0.405}, \quad A_2 = \frac{2}{\pi^2}\sin^2(\pi/2) = \frac{2}{\pi^2} \underline{\approx 0.202},$$

$$A_3 = \frac{8}{9\pi^2}\sin^2(3\pi/4) = \frac{4}{9\pi^2} \underline{\approx 0.045}.$$

c) Es gilt:

$$x_3(t) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\left[\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega_0 t)\right].$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt sich hieraus:

$$x_3(t=0) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{29}{18} \approx 0.9 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_3(t=0) = x_3(t=0) - x(t=0) \; \underline{= -0.1}.$$

Für die Zeit $t = 0$ und bei Vielfachen der Periodendauer T_0 (Spitze der Dreiecksfunktionen) ist die Abweichung betragsmäßig am größten.

Musterlösung zur Aufgabe A2.5

a) Auch das verschobene Signal $v(t)$ ist gerade und alle Sinuskoeffizienten sind dementsprechend 0. Am Gleichsignalkoeffizienten ändert sich ebenfalls nichts: $A_0 = 1$.

Aus den Signalverläufen ist zu erkennen, dass $v(t) = u(t - T/4)$ gilt:

$$v(t) = 1 + \frac{2}{3}\cos(2\omega_0(t - \frac{T}{4})) - \frac{2}{15}\cos(4\omega_0(t - \frac{T}{4})) + \frac{2}{35}\cos(6\omega_0(t - \frac{T}{4})) - \ldots$$

Die Cosinusterme können nun mit $\omega_0 \cdot T = 2\pi$ umgeformt werden:

$$\cos(2\omega_0(t - \frac{T}{4})) = \cos(2\omega_0 t - \pi) = -\cos(2\omega_0 t),$$

$$\cos(4\omega_0(t - \frac{T}{4})) = \cos(4\omega_0 t - 2\pi) = \cos(4\omega_0 t),$$

$$\cos(6\omega_0(t - \frac{T}{4})) = \cos(6\omega_0 t - 3\pi) = -\cos(6\omega_0 t).$$

Damit erhält man für die Fourierreihe

$$v(t) = 1 - 2/3 \cdot \cos(2\omega_0 t) - 2/15 \cdot \cos(4\omega_0 t) - 2/35 \cdot \cos(6\omega_0 t) - \ldots$$

bzw. für die Cosinuskoeffizienten mit geradzahligem n:

$$A_n = \frac{-2}{n^2 - 1}.$$

Insbesondere ist A_2 = –2/3.

b) Wegen $w(t) = \pi/2 \cdot \sin(\omega_0 t)$ sind alle Fourierkoeffizienten außer B_1 = π/2 =1.571 gleich 0.

c) Aus der grafischen Darstellung erkennt man den Zusammenhang

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot [v(t) + w(t)].$$

Das bedeutet:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{15} \cdot \cos(4\omega_0 t) - \frac{1}{35} \cdot \cos(6\omega_0 t) - \ldots$$

Die gesuchten Fourierkoeffizienten sind somit A_0 =1/2; $B_1 = \pi/4$ = 0.785 und A_2 = –1/3.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.5

a) Die Spektralfunktion beinhaltet eine Diracfunktion bei $f = 0$ mit dem Gewicht 0.5 (Gleichanteil) sowie weitere Spektrallinien bei ungeradzahligen Vielfachen ($n = \pm1, \pm3, \pm5,...$) von f_0. Die Gewichte bei $\pm f_0$ sind jeweils $A_1/2 = 1/\pi$. Richtig sind somit die Aussagen 1, 3 und 5.

b) Bei allen ungeradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz existieren Spektrallinien, zusätzlich noch bei den 2–, 6– und 10–fachen. Beispielsweise gilt $A_2 = 1/\pi$. Die Spektrallinie bei $2f_0$ hat somit das Gewicht $A_2/2 = 1/(2\pi)$. Für $n = 4$, $n = 8$, usw. sind dagegen die Koeffizienten $A_n = 0$, da für die Sinusfunktion gilt: $\sin(\pi) = \sin(2\pi) = ... = 0$. Richtig sind somit die Aussagen 1, 2 und 4.

c) Aus der grafischen Darstellung des Signals $y(t)$ wird deutlich, dass $A_0 = 0.75$ gelten muss. Zum gleichen Ergebnis kommt man über die Beziehung:

$$A_0^{(y)} = 1 - A_0^{(x)} = 1 - 0.25 \underline{= 0.75}.$$

d) Es gilt $y(t) = 1 - x(t)$. Für $n \neq 0$ ergeben sich somit die gleichen Fourierkoeffizienten wie für das Signal $x(t)$, jedoch mit negativen Vorzeichen. Inbesondere gilt:

$$A_1 = -\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \underline{\approx -0.450}, \qquad A_2 = -\frac{1}{\pi} \underline{\approx -0.318}.$$

e) Es gilt $z(t) = y(t - T_0/2)$. Mit der Fourierreihendarstellung von $y(t)$ folgt daraus:

$$\begin{aligned} z(t) = A_0 \quad &+ \quad A_1^{(y)}\cos(\omega_0(t - \frac{T_0}{2})) + A_2^{(y)}\cos(2\omega_0(t - \frac{T_0}{2})) + \\ &+ \quad A_3^{(y)}\cos(3\omega_0(t - \frac{T_0}{2})) + \ldots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = A_0 - A_1^{(y)}\cos(\omega_0 t) + A_2^{(y)}\cos(2\omega_0 t) - A_3^{(y)}\cos(3\omega_0 t) + \ldots$$

Damit erhält man:

$$A_1^{(z)} = -A_1^{(y)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \underline{= +0.450}, \quad A_2^{(z)} = A_2^{(y)} = -\frac{1}{\pi} \underline{= -0.318}.$$

Das gleiche Ergebnis erhält man ausgehend von den gegebenen Koeffizienten mit $\Delta t/T_0 = 0.75$:

$$A_1^{(z)} = 2/\pi \cdot \sin(3/4 \cdot \pi) = \sqrt{2}/\pi, \quad A_2^{(z)} = 1/\pi \cdot \sin(3/2 \cdot \pi) = -1/\pi.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.6

a) Mit dem Eulerschen Satz ist der komplexe Fourierkoeffizient D_n wie folgt darstellbar:

$$\mathrm{Re}[D_n] = \frac{T_0/T_1}{(2\pi n)^2}(1 - \cos(2\pi n T_1/T_0)),$$

$$\mathrm{Im}[D_n] = \frac{T_0/T_1}{(2\pi n)^2}\sin(2\pi n T_1/T_0) - \frac{1}{2\pi n}.$$

Mit der für kleine α-Werte gültigen Näherung $\sin(\alpha) \approx \alpha$ erhält man für den Imaginärteil:

$$\mathrm{Im}[D_n] = \frac{T_0/T_1}{(2\pi n)^2} \cdot (2\pi n T_1/T_0) - \frac{1}{2\pi n} = 0.$$

Für den Realteil erhält man mit $\cos(\alpha) \approx 1 - \alpha^2/2$:

$$\mathrm{Re}[D_n] = \frac{T_0/T_1}{(2\pi n)^2}\frac{(2\pi n T_1/T_0)^2}{2} = \frac{T_1/T_0}{2}.$$

Für $T_1 = T_0/2$ folgt daraus der Gleichsignalkoeffizient $D_0 \underline{= 0.25}$. Mit $T_1 = T_0$ ergibt sich $D_0 = 0.5$. Ein Vergleich mit den Signalen $x(t)$ und $y(t)$ auf der Angabenseite zeigen die Richtigkeit dieser Ergebnisse.

b) Es wird nun $n \neq 0$ vorausgesetzt. Mit $T_1 = T_0$ erhält man für den Realteil wegen $\cos(2\pi n) = 1$:

$$\mathrm{Re}[D_n] = \frac{1}{(2\pi n)^2}(1 - \cos(2\pi n)) = 0.$$

Der Imagnärteil lautet:

$$\mathrm{Im}[D_n] = \frac{1}{(2\pi n)^2}(\sin(2\pi n)) - \frac{1}{2\pi n}.$$

Wegen $\sin(2\pi n) = 0$ folgt daraus:

$$\mathrm{Im}[D_n] = -\frac{1}{2\pi n}.$$

Somit ist

$$D_n = \frac{-\mathrm{j}}{2\pi n} = \frac{1}{2}(A_n - \mathrm{j} \cdot B_n).$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A_n = 0$ und $B_n = 1/(\pi n)$, Insbesondere sind $A_1 \underline{= 0}$ und $B_1 \underline{\approx 0.318}$. Wie zu erwarten war, gilt stets $B_{-n} = -B_n$.

c) Aus der in der Teilaufgabe a) berechneten allgemeinen Gleichung folgt mit $T_1/T_0 = 1/2$:

$$D_n = \frac{2}{(2\pi n)^2}(1 - \cos(\pi n)) + \mathrm{j} \cdot \left[\frac{2\sin(\pi n)}{(2\pi n)^2} - \frac{1}{(2\pi n)}\right].$$

Daraus erhält man die Cosinuskoeffizienten

$$A_n = 2 \cdot \mathrm{Re}[D_n] = \begin{cases} \frac{2}{(\pi n)^2} & \text{für ungeradzahliges } n, \\ 0 & \text{für geradzahliges } n. \end{cases}$$

Die Sinuskoeffizienten lauten:

$$B_n = -2 \cdot \mathrm{Im}[D_n] = \frac{1}{\pi n}.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass für alle ganzzahligen Werte von n die Funktion $\sin(n\pi) = 0$ ist. Die jeweils ersten reellen Koeffizienten lauten $A_1 = 2/\pi^2 \approx \underline{0.203}$ und $B_1 = 1/\pi \approx \underline{0.318}$.

d) Das Signal $x(t)$ ist gleich der Differenz zwischen $y(t)$ und $z(t)$. Da $z(t)$ eine gerade und $y(t)$ eine ungerade Funktion ist, werden die Cosinuskoeffizienten A_n allein durch die Koeffizienten des Signals $z(t)$ bestimmt, allerdings mit negativen Vorzeichen. Die Sinuskoeffizienten B_n stimmen vollständig mit denen von $y(t)$ überein. Der Gleichsignalanteil von $x(t)$ ergibt sich aus der Differenz der beiden Gleichanteile von $y(t)$ und $z(t)$: $A_0 = 0.5 – 0.25 = 0.25$. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2, 4 und 5.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.6

a) Der Gleichsignalkoeffizient beträgt A_0 = 1 V. Gleichzeitig gilt $C_0 = D_0 = A_0$ $\Rightarrow$ $C_0 \underline{= 1}$, $\varphi_0 \underline{= 0}$.

b) Es gibt keine Anteile mit $\sin(\omega_0 t)$ und $\cos(3\omega_0 t)$. Daraus folgt direkt $B_1 = A_3 = 0$. Alle anderen hier aufgeführten Koeffizienten sind ungleich 0. $\Rightarrow$ Richtig sind also die Antworten 1, 3, 4 und 6.

c) Allgemein gilt:

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{B_n}{A_n}\right), \qquad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \qquad D_n = \frac{1}{2}(A_n - \mathrm{j}B_n).$$

Wegen $B_1 = 0$ erhält man $\varphi_1 \underline{= 0}$, $C_1 = A_1 = \underline{2\text{ V}}$ und $D_1 = A_1/2 \underline{= 1\text{ V}}$.

d) Mit A_2 = 2 V und B_2 = –1 V erhält man:

$$\varphi_2 = \arctan(-0.5) \underline{= -26.56^\circ}, \qquad C_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \underline{= 2.236\text{ V}},$$

$$D_2 = \frac{1}{2}(A_2 - \mathrm{j}\cdot B_2) = 1\text{ V} + \mathrm{j}\cdot 0.5\text{V} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}[\mathrm{D}_2] \underline{= 1\text{V}}, \;\; \mathrm{Im}[\mathrm{D}_2] \underline{= 0.5\text{V}}.$$

e) Es ist $\varphi_3 \underline{= -90^\circ}$ und $C_3 = |B_3| \underline{= 1\text{ V}}$.

f) Es gilt $D_3 = -\mathrm{j}\cdot B_3/2 = \mathrm{j}\cdot 0.5$ V und $D_{-3} = D_3^* = \mathrm{j}\cdot B_3/2 \underline{= -\mathrm{j}\cdot 0.5\text{ V}}$.