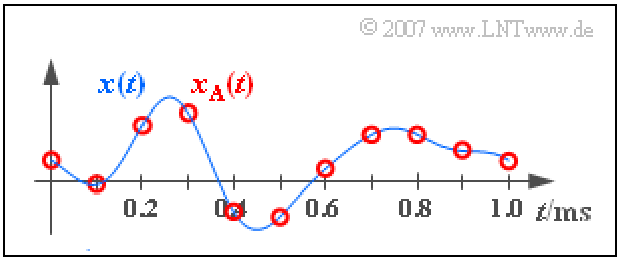
A5.1: Abtasttheorem



Gegeben ist ein Analogsignal $x(t)$ entsprechend der Skizze. Bekannt ist, dass dieses Signal keine höheren Frequenzen als B_{NF} = 4 kHz beinhaltet. Durch Abtastung (Abtastrate f_A) erhält man das in der Grafik rot eingezeichnete Signal $x_A(t)$.

Zur Signalrekonstruktion wird ein Tiefpass mit dem Frequenzgang

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |f| < f_1 , \\ 0 & \text{für} \quad |f| > f_2 \end{cases}$$

eingesetzt. Der Bereich zwischen den Frequenzen f_1 und $f_2 > f_1$ ist für die Lösung dieser Aufgabe nicht relevant.

Die Eckfrequenzen f_1 und f_2 sind so zu bestimmen, dass das Ausgangssignal $y(t)$ des Tiefpasses mit dem Signal $x(t)$ exakt übereinstimmt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.1.** Zu der hier behandelten Thematik gibt es auch ein Interaktionsmodul:
Abtastung periodischer Signale und Signalrekonstruktion

Fragebogen zu "A5.1: Abtasttheorem"

a) Ermitteln Sie aus der Grafik die zugrundeliegende Abtastrate.

f_A = kHz

b) Bei welchen Frequenzen besitzt $X_A(f)$ mit Sicherheit **keine** Anteile?

- ☐ f = 2.5 kHz,
- ☐ f = 5.5 kHz,
- ☐ f = 6.5 kHz,
- ☐ f = 34.5 kHz.

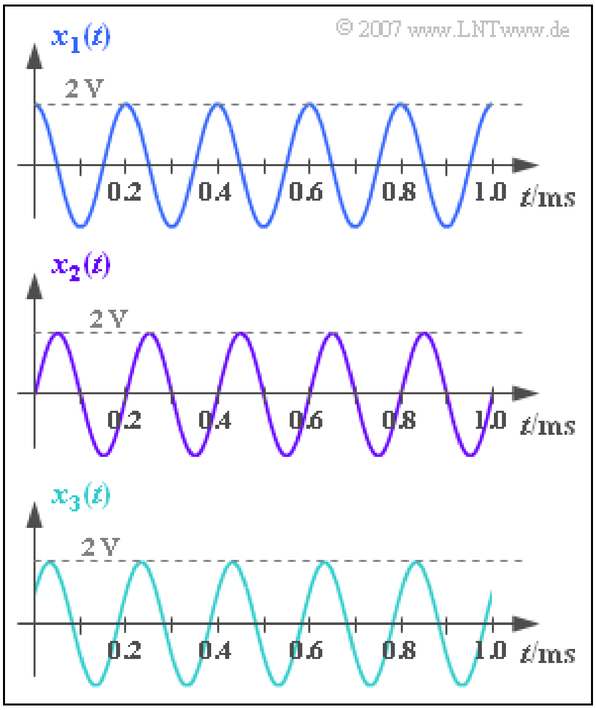
c) Bis zu welcher Eckfrequenz f_1 wird das Signal perfekt rekonstruiert?

$f_{1,\,min}$ = kHz

d) Bis zu welcher Eckfrequenz f_2 wird das Signal perfekt rekonstruiert?

$f_{2,\,max}$ = kHz

Z5.1: Zeitdiskrete Harmonische



Wir betrachten drei harmonische Schwingungen mit gleicher Frequenz und gleicher Amplitude:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)\,, \\ x_2(t) &= A \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)\,, \\ x_3(t) &= A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t - 60°)\,. \end{aligned}$$

Die Schwingungsparameter f_0 und A können Sie der Grafik entnehnen.

Angenommen wird, dass die Signale äquidistant zu den Zeitpunkten $v \cdot T_A$ abgetastet werden, wobei die Parameterwerte T_A = 80 µs und T_A = 100 µs analysiert werden sollen .

Die Signalrekonstruktion beim Empfänger erfolgt durch einen Tiefpass $H(f)$, der aus dem abgetasteten Signal $y_A(t) = x_A(t)$ das Signal $y(t)$ formt. Es gelte:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |f| < f_G\,, \\ 0.5 & \text{für} \quad |f| = f_G\,, \\ 0 & \text{für} \quad |f| > f_G\,, \end{cases}$$

Hierbei gibt f_G die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters an. Für diese soll gelten:

$$f_G = \frac{1}{2 \cdot T_A}\,.$$

Das Abtasttheorem ist erfüllt, wenn $y(t) = x(t)$ gilt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.1.** Zu der hier behandelten Thematik gibt es auch ein Interaktionsmodul:
Abtastung periodischer Signale und Signalrekonstruktion

Fragebogen zu "Z5.1: Zeitdiskrete Harmonische"

a) Wie groß sind Amplitude und Frequenz der Signale $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$?

$\boldsymbol{A}$ = V

$\boldsymbol{f_0}$ = kHz

b) Bei welchen Eingangssignalen ist das Abtasttheorem erfüllt $\Rightarrow$ $y(t) = x(t)$, wenn T_A = 80 µs beträgt?

- [ ] $x_1(t)$,
- [ ] $x_2(t)$,
- [ ] $x_3(t)$.

c) Wie lautet das rekonstruierte Signal $y_1(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi_1)$ mit dem Abtastabstand T_A = 100 µs? Interpretieren Sie das Ergebnis.

$\boldsymbol{A_1}$ = V

$\boldsymbol{\varphi_1}$ = Grad

d) Welche Amplitude A_2 besitzt das rekonstruierte Signal $y_2(t)$, wenn das Sinussignal $x_2(t)$ anliegt? Es gelte weiterhin T_A = 100 µs.

$\boldsymbol{A_2}$ = V

e) Welche Amplitude A_3 besitzt das rekonstruierte Signal $y_3(t)$, wenn das Signal $x_3(t)$ anliegt? Es gelte wiederum T_A = 100 µs.

$\boldsymbol{A_3}$ = V

A5.2: Inverse DFT

Bei der *Diskreten Fouriertransformation* (DFT) werden aus den N Koeffizienten $d(\nu)$ – also den Abtastwerten des Zeitsignals $x(t)$ – die N Spektralbereichskoeffizienten $D(\mu)$ berechnet. Mit $\nu = 0, \ldots , N-1$ und $\mu = 0, \ldots , N-1$ gilt:

$$D(\mu) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} d(\nu) \cdot w^{\nu \cdot \mu}.$$

Hierbei bezeichnet w den komplexen Drehfaktor:

$$w = \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot 2\pi/N} = \cos(2\pi/N) - \mathrm{j} \cdot \sin(2\pi/N) .$$

Für die *Inverse Diskrete Fouriertransformation* (IDFT) gilt entsprechend ⇒ „Umkehrfunktion” der DFT:

$$d(\nu) = \sum_{\mu=0}^{N-1} D(\mu) \cdot w^{-\nu \cdot \mu}.$$

	A	B	C	D	E
D(0)	1	0	0	0	1
D(1)	0	0.5	0	0	0
D(2)	0	0	0.5	0	0
D(3)	0	0	0	0	0
D(4)	0	0	0	1	1
D(5)	0	0	0	0	0
D(6)	0	0	0.5	0	0
D(7)	0	0.5	0	0	0

In dieser Aufgabe sollen für verschiedene Beispielfolgen $D(\mu)$ – die in obiger Tabelle mit „A”, ... , „E” bezeichnet sind – die Zeitkoeffizienten $d(\nu)$ ermittelt werden. Es gilt somit stets $N = 8$.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.2.** Diese können Sie sich auch mit folgendem Interaktionsmodul verdeutlichen:

Diskrete Fouriertransformation

Fragebogen zu "A5.2: Inverse DFT"

a) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(\nu)$ für die $D(\mu)$–Werte von Spalte A?

$D(\mu)$ gemäß „A”: $d(0)$ =

$d(1)$ =

b) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(\nu)$ für die $D(\mu)$–Werte von Spalte B?

$D(\mu)$ gemäß „B”: $d(0)$ =

$d(1)$ =

c) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(\nu)$ für die $D(\mu)$–Werte von Spalte C?

$D(\mu)$ gemäß „C”: $d(0)$ =

$d(1)$ =

d) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(\nu)$ für die $D(\mu)$–Werte von Spalte D?

$D(\mu)$ gemäß „D”: $d(0)$ =

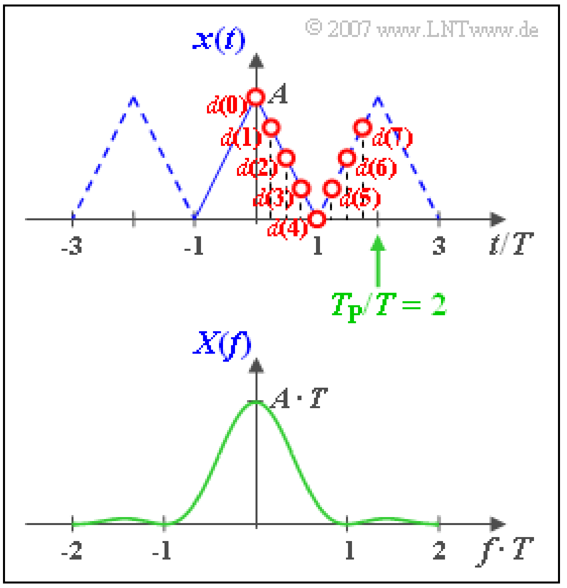
$d(1)$ =

e) Wie lauten die Zeitkoeffizienten $d(\nu)$ für die $D(\mu)$–Wertevon Spalte E?

$D(\mu)$ gemäß „E”: $d(0)$ =

$d(1)$ =

Z5.2: DFT eines Dreieckimpulses



Betrachtet wird der skizzierte Dreieckimpuls

$$x(t) = \begin{cases} A \cdot (1 - |t|/T) & \text{für} \quad |t| \le T, \\ 0 & \text{für} \quad |t| > T. \end{cases}$$

Die Signalparameter haben folgende Werte:

- Amplitude $A = 4$ V,
- äquivalente Impulsdauer $\Delta t = T = 1$ ms:

Das Spektrum $X(f)$ erhält man durch Anwendung der herkömmlichen Fouriertransformation:

$$X(f) = A \cdot T \cdot \text{si}^2(\pi f T)\,.$$

Die Spektralfunktion soll nun durch eine Diskrete Fouriertransformation (DFT) mit $N = 8$ angenähert werden, wobei die N Koeffizienten für den Zeitbereich, also $d(0)$, ... , $d(7)$, der Grafik entnommen werden können.

Die dazugehörigen Spektralkoeffizienten $D(0)$, ... , $D(7)$ sind in dieser Aufgabe zu ermitteln, wobei für die Indizes $\mu = 0, \ldots, N{-}1$ gilt:

$$D(\mu) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} d(\nu) \cdot w^{\nu \cdot \mu}\,.$$

Bezeichnet man den Abstand zweier Abtastwerte im Zeitbereich mit T_A und den entsprechenden Frequenzabstand zweier Linien mit f_A, so gilt folgender Zusammenhang:

$$N \cdot f_A \cdot T_A = 1\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.2.** Diese können Sie sich auch mit folgendem Interaktionsmodul verdeutlichen:
Diskrete Fouriertransformation

Fragebogen zu "Z5.2: DFT eines Dreieckimpulses"

a) Geben Sie die Zeitkoeffizienten an. Wie groß sind $d(0)$, $d(3)$ und $d(6)$?

$\boldsymbol{d(0)}$ = V

$\boldsymbol{d(3)}$ = V

$\boldsymbol{d(6)}$ = V

b) Wie groß ist der Abstand T_A zweier Zeitabtastwerte?

$\boldsymbol{T_A}$ = ms

c) Wie groß ist der Abstand f_A zweier DFT–Frequenzabtastwerte?

$\boldsymbol{f_A}$ = kHz

d) Berechnen Sie den Koeffizienten $D(0)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

$|\boldsymbol{D(0)}|$ = V

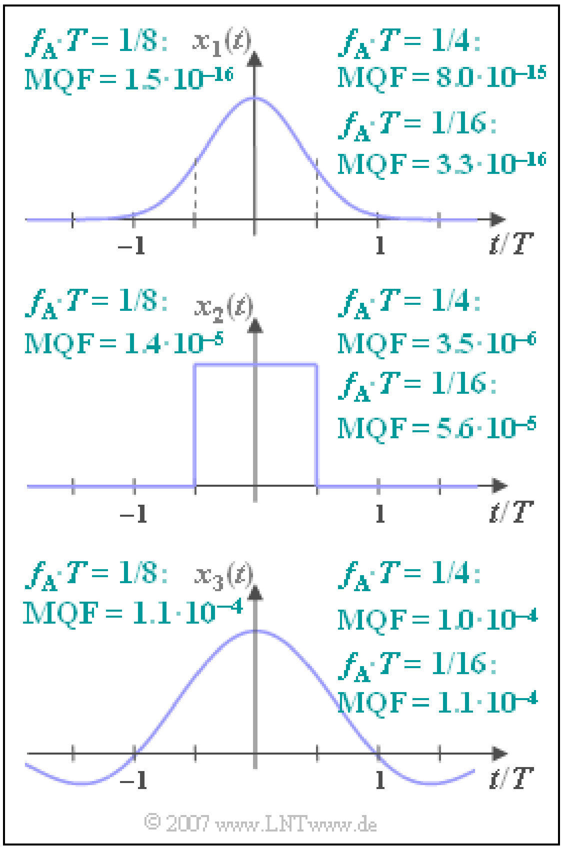
e) Berechnen Sie den Koeffizienten $D(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis, auch im Hinblick auf die Koeffizienten $D(4)$ und $D(6)$.

$|\boldsymbol{D(2)}|$ = V

f) Berechnen und interpretieren Sie den DFT–Koeffizienten $D(7)$.

$|\boldsymbol{D(7)}|$ = V

A5.3: Mittlerer quadratischer Fehler



Wir betrachten drei impulsartige Signale, nämlich

- einen **Gaußimpuls** entsprechend

$$x_1(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-\pi (t/T)^2},$$

- einen **Rechteckimpuls** $x_2(t)$ mit der Amplitude A und der Dauer T,

$$x_2(t) = \left\{ \begin{array}{ll} A & \text{für} \quad |t| < T/2, \\ 0 & \text{für} \quad |t| > T/2, \end{array} \right.$$

- einen **Spaltimpuls** gemäß

$$x_3(t) = A \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot t/T), \ \mathrm{si}(x) = \sin(x)/x\,.$$

Die Signalparameter seien A = 1 V und T = 1 ms.

Die *konventionelle Fouriertransformation* ⇒ siehe **Kapitel 3.1** führt zu folgenden Spektralfunktionen:

- $X_1(f)$ ist ebenfalls gaußförmig,
- $X_2(f)$ verläuft entsprechend der si–Funktion,
- $X_3(f)$ ist für $|f| < 1/(2T)$ konstant und außerhalb 0.

Für alle Spektralfunktionen gilt $X(f = 0) = A \cdot T$.

Ermittelt man das frequenzdiskrete Spektrum durch die *Diskrete Fouriertransformation* (DFT) mit den DFT-Parametern N = 512 und $f_A \cdot T$ = 1/4, 1/8 bzw. 1/16, so wird dies aufgrund von Abbruch– und/oder Aliasingfehler zu Verfälschungen führen. Hierbei gibt N die Anzahl der berücksichtigten Abtastwerte im Zeit– und Frequenzbereich an und f_A den Stützstellenabstand im Frequenzbereich. Die weiteren DFT–Parameter liegen mit N und f_A eindeutig fest. Für diese gilt:

$$f_P = N \cdot f_A, \quad T_P = 1/f_A, \quad T_A = T_P/N\,.$$

Die Genauigkeit der jeweiligen DFT–Approximation wird durch den mittleren quadratischen Fehler (MQF) erfasst:

$$\mathrm{MQF} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\mu=0}^{N-1} \left| X(\mu \cdot f_A) - \frac{D(\mu)}{f_A} \right|^2 .$$

Die sich ergebenden MQF–Werte sind in obiger Grafik für N = 512 sowie für $f_A \cdot T$ = 1/4, $f_A \cdot T$ = 1/8 bzw. $f_A \cdot T$ = 1/16 angegeben.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.3.** Diese sind auch in dem folgenden Lernvideo zusammengefasst:

Fehlermöglichkeiten bei Anwendung der DFT (Dauer 7:26)

Fragebogen zu "A5.3: Mittlerer quadratischer Fehler"

a) Welcher Bereich $|f| \le f_{max}$ wird mit $N = 512$ und $f_A \cdot T = 1/8$ erfasst?

$\boldsymbol{f_{max} \cdot T}$ =

b) In welchem Zeitabstand T_A liegen die Abtastwerte von $x(t)$ vor?

$\boldsymbol{T_A/T}$ =

c) Aufgrund welchen Effekts ergibt sich ein größerer MQF–Wert, wenn man nun $f_A \cdot T = 1/4$ anstelle von $f_A \cdot T = 1/8$ verwendet?

- [ ] Der Abbruchfehler wird vergrößert.
- [ ] Der Aliasingfehler wird vergrößert.

d) Aufgrund welchen Effekts ergibt sich ein größerer MQF–Wert, wenn man dagegen $f_A \cdot T = 1/16$ anstelle von $f_A \cdot T = 1/8$ verwendet?

- [ ] Der Abbruchfehler wird vergrößert.
- [ ] Der Aliasingfehler wird vergrößert.

e) Vergleichen Sie die MQF–Werte des Rechteckimpulses $x_2(t)$ mit denen des Gaußimpulses $x_1(t)$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- [ ] MQF wird größer, da die Spektralfunktion $X_2(f)$ asymptotisch langsamer abfällt als $X_1(f)$.
- [ ] Es dominiert der Aliasingfehler.
- [ ] Es dominiert der Abbruchfehler.

f) Vergleichen Sie die MQF–Werte des Spaltimpulses $x_3(t)$ mit denen des Gaußimpulses $x_1(t)$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- [ ] MQF wird größer, da die Spektralfunktion $X_3(f)$ asymptotisch langsamer abfällt als $X_1(f)$.
- [ ] Es dominiert der Aliasingfehler.
- [ ] Es dominiert der Abbruchfehler.

Z5.3: Zero-Padding

Wir betrachten die DFT eines Rechteckimpulses $x(t)$ der Höhe 1 und der Dauer T. Damit hat die Spektralfunktion $X(f)$ einen sin(f)/f–förmigen Verlauf.

Für diesen Sonderfall soll der Einfluss des DFT–Parameters N analysiert werden, wobei der Stützstellenabstand im Zeitbereich stets $T_A = 0.01T$ bzw. $T_A = 0.05T$ betragen soll.

Nebenstehend sind für unterschiedliche Werte von N die sich ergebenden Werte für den mittleren quadratischen Fehler (MQF) der Stützwerte im Frequenzbereich angegeben:

$$\text{MQF} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\mu=0}^{N-1} \left| X(\mu \cdot f_\text{A}) - \frac{D(\mu)}{f_\text{A}} \right|^2 .$$

T_A/T	N	MQF
0.01	64	$\approx 1.2 \cdot 10^{-2}$
0.01	128	$\approx 6.0 \cdot 10^{-6}$
0.01	256	$\approx 6.0 \cdot 10^{-6}$
0.01	512	$\approx 6.0 \cdot 10^{-6}$
0.05	64	$\approx 1.5 \cdot 10^{-4}$
0.05	128	$\approx 1.5 \cdot 10^{-4}$
0.05	256	$\approx 1.5 \cdot 10^{-4}$
0.05	512	$\approx 1.5 \cdot 10^{-4}$

Für $T_A/T = 0.01$ sind somit stets 101 der DFT–Koeffizienten $d(\nu)$ von 0 verschieden.

- Davon besitzen 99 den Wert 1 und die beiden Randkoeffizienten sind jeweils gleich 0.5.
- Vergrößert man N, so wird das DFT–Koeffizientenfeld mit Nullen aufgefüllt. Man spricht von *„Zero–Padding"*.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 5.3.**

Diese sind in dem folgenden Lernvideo zusammengefasst:
Fehlermöglichkeiten bei Anwendung der DFT (Dauer 7:26)

Fragebogen zu "Z5.3: Zero-Padding"

a) Welche Aussagen können aus den angegebenen MQF-Werten (gültig für T_A/T = 0.01 und $N \geq 128$) abgeleitet werden?

- [ ] Der MQF–Wert ist hier nahezu unabhängig von N.
- [ ] Der MQF–Wert wird durch den Abbruchfehler bestimmt.
- [ ] Der MQF–Wert wird durch den Aliasingfehler bestimmt.

b) Wie groß ist der Abstand f_A benachbarter Abtastwerte im Frequenzbereich für N = 128 und N = 512?

T_A/T = 0.01, N = 128: $f_A \cdot T$ =

N = 512: $f_A \cdot T$ =

c) Was sagt das Produkt MQF · f_A hinsichtlich der DFT–Qualität aus?

- [ ] Dieses berücksichtigt Genauigkeit und Dichte der DFT–Werte.
- [ ] MQF · f_A sollte möglichst groß sein.

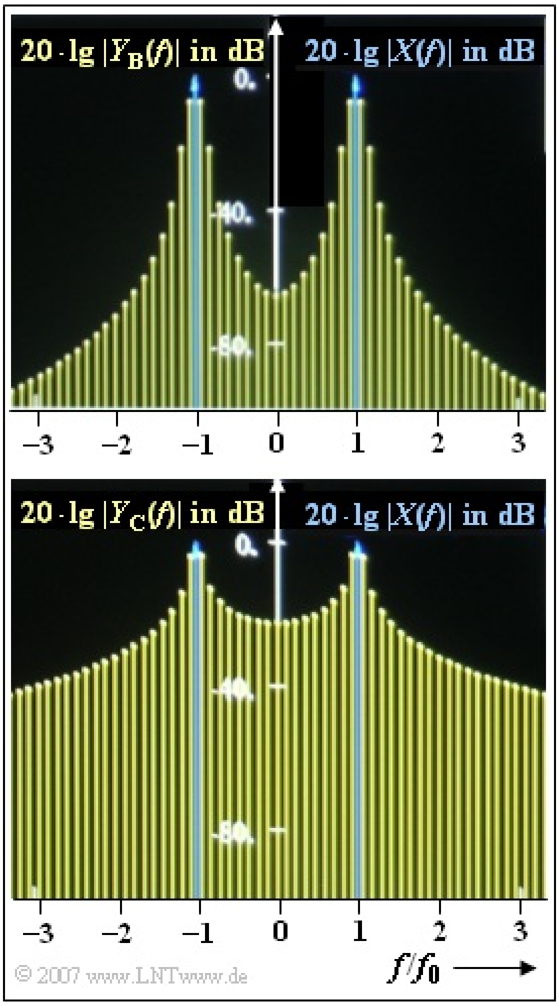
d) Es sei N konstant gleich 128. Welche Aussagen gelten für den Vergleich der DFT–Ergebnisse mit T_A/T = 0.01 und T_A/T = 0.05 ?

- [ ] Mit T_A/T = 0.05 erhält man eine feinere Frequenzauflösung.
- [ ] Mit T_A/T = 0.05 ist der MQF–Wert kleiner.
- [ ] Mit T_A/T = 0.05 nimmt der Einfluss des Abbruchfehlers ab.
- [ ] Mit T_A/T = 0.05 wächst der Einfluss des Aliasingfehlers.

e) Welche Aussagen treffen dagegen für den Vergleich der DFT–Ergebnisse mit T_A/T = 0.01 und T_A/T = 0.05 bei N = 64 zu?

- [ ] Mit T_A/T = 0.05 erhält man eine feinere Frequenzauflösung.
- [ ] Mit T_A/T = 0.05 ist der MQF–Wert kleiner.
- [ ] Mit T_A/T = 0.05 nimmt der Einfluss des Abbruchfehlers ab.
- [ ] Mit T_A/T = 0.05 wächst der Einfluss des Aliasingfehlers.

A5.4: Spektralanalyse



Gegeben sei der prinzipielle Zeitverlauf $x(t)$ eines periodischen Signals. Unbekannt sind die Parameter A_1, f_1, A_2 und f_2:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + \\ &+ A_2 \cdot \cos(2\pi \cdot f_2 \cdot t) \,. \end{aligned}$$

Nach Gewichtung des Signals mit dem Fenster $w(t)$ wird das Produkt $y(t) = x(t) \cdot w(t)$ einer Diskreten Fouriertransformation (DFT) mit den Parametern $N = 512$ und T_P unterworfen. Die Zeitdauer T_P des analysierten Signalausschnitts kann vom Benutzer beliebig eingestellt werden.

Für die Fensterung stehen folgende Funktionen zur Verfügung, die jeweils für $|t| > T_P/2$ identisch 0 sind:

- das **Rechteckfenster**:

$$w(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{für } -N/2 \le \nu < N/2, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$W(f) = 1/f_A \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot f/f_A),$$

- das **Hanning–Fenster**:

$$w(\nu) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{\nu}{N}) & \text{für } -N/2 \le \nu < N/2, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$W(f) = 0.5/f_A \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \frac{f}{f_A}) + 0.25/f_A \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \frac{f - f_A}{f_A}) + 0.5/f_A \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \frac{f + f_A}{f_A}) \,.$$

Beachten Sie, dass die Frequenzauflösung f_A gleich dem Kehrwert des einstellbaren Parameters T_P ist. $W(f)$ ist die Fouriertransformierte der zeitkontinuierlichen Fensterfunktion $w(t)$, während die oben angegebene Funktion $w(\nu)$ die zeitdiskrete Gewichtungsfunktion angibt.

Im Laufe der Aufgabe wird auf verschiedene Spektralfunktionen $Y(f)$ Bezug genommen, zum Beispiel auf

$$Y_A(f) = 1\,\text{V} \cdot \delta(f \pm 1\text{ kHz}) + 0.5\text{ V} \cdot \delta(f \pm 1.125\text{ kHz}) \,.$$

In der obigen Grafik sind zwei weitere Spektralfunktionen $Y_B(f)$ und $Y_C(f)$ abgebildet, die sich ergeben, wenn ein 1 kHz–Signal mittels DFT analysiert wird und der DFT–Parameter T_P = 8.5 ms ungünstig gewählt ist.

Für eines der Bilder ist das Rechteckfenster zugrundegelegt, für das andere das Hanning–Fenster. Nicht angegeben wird, welche Spektralfunktion zu welchem Fenster gehört.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 5.4.**

Fragebogen zu "A5.4: Spektralanalyse"

a) Welche der folgenden Aussagen treffen mit Sicherheit zu, wenn die DFT das Ausgangsspektrum $Y_A(f)$ anzeigt?

- [ ] Zur Gewichtung wurde das Rechteckfenster verwendet.
- [ ] Zur Gewichtung wurde das Hanning–Fenster verwendet.
- [ ] Es wurde der DFT–Parameter T_P = 4 ms verwendet.
- [ ] Das DFT–Spektrum $Y_A(f)$ ist identisch mit dem Spektrum $X(f)$.

b) Wie lautet $Y(f)$ bei Verwendung des Hanning–Fensters und T_P = 8 ms, wenn das Eingangsspektrum $X(f) = Y_A(f)$ anliegt? Geben Sie die Gewichte der Diraclinien bei f_1 = 1 kHz und f_2 = 1.125 kHz an.

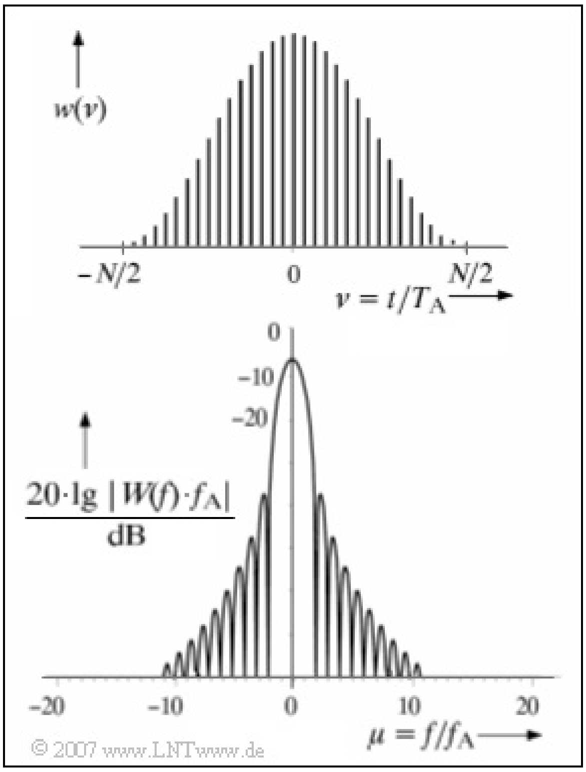
$G(f_1$ = 1 kHz) = V

$G(f_2$ = 1.125 kHz) = V

c) Wir betrachten das 1 kHz–Cosinussignal $x(t)$. Welches Spektrum – $Y_B(f)$ oder $Y_C(f)$ – ergibt sich mit dem Rechteck– bzw. dem Hanning–Fenster, wenn der DFT-Parameter T_P = 8.5 ms ungünstig gewählt ist?

- ○ $Y_B(f)$ ergibt sich bei Rechteckfensterung.
- ○ $Y_B(f)$ ergibt sich mit dem Hanning-Fenster.

Z5.4: Zum Hanning-Fenster



In dieser Aufgabe sollen wichtige Eigenschaften des häufig verwendeten Hanning–Fensters hergeleitet werden. Die zeitkontinuierliche Darstellung im Intervall von $-T_P/2$ bis $+T_P/2$ lautet hier wie folgt:

$$\begin{aligned} w(t) &= \cos^2(\pi \cdot t/T_P) = \\ &= 0.5 \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot t/T_P))\,. \end{aligned}$$

Außerhalb des symmetrischen Zeitbereichs der Dauer $T_P = 0.5$ ms ist $w(t)$ identisch 0.

Die obere Grafik zeigt die zeitdiskrete Darstellung $w(\nu) = w(\nu \cdot T_A)$, wobei T_A um den Faktor $N = 32$ kleiner ist als T_P. Der Definitionsbereich der diskreten Zeitvariablen ν reicht von –16 bis +15.

In der unteren Grafik ist die Fouriertransformierte $W(f)$ der zeitkontinuierlichen Fensterfunktion $w(t)$ logarithmisch dargestellt. Die Abszisse ist hierbei auf $f_A = 1/T_P$ normiert ist. Man erkennt:

- Die äquidistanten Werte $W(\mu \cdot f_A)$ sind 0 mit Ausnahme von $\mu = 0$ und $\mu = \pm 1$.
- Die Hauptkeule erstreckt sich somit auf den Frequenzbereich $|f| \le 2 \cdot f_A$.
- $W(f)$ ist außerhalb der Hauptkeule betragsmäßig für $f = \pm 2.5 \cdot f_A$ am größten. Somit gilt hier für den minimalen Abstand zwischen Haupt– und Seitenkeulen:

$$A_{H/S} = 20 \cdot \lg \frac{|W(0)|}{|W(2.5 \cdot f_A)|}\ (\text{in dB})\,.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 5.4.**

Fragebogen zu "Z5.4: Zum Hanning-Fenster"

a) Geben Sie die zeitdiskreten Koeffizienten $w(\nu)$ des Hanning–Fensters analytisch an. Welche Zahlenwerte ergeben sich für $\nu = 0$, $\nu = 1$, $\nu = –8$?

$\boldsymbol{w(\nu = 0)}$ =

$\boldsymbol{w(\nu = 1)}$ =

$\boldsymbol{w(\nu = –8)}$ =

b) Berechnen Sie die Spektralfunktion $W(f)$ allgemein. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ $W(f)$ liefert für spezielle Frequenzwerte komplexe Ergebnisse.
- ☐ $W(f)$ ist bezüglich f gerade, das heißt, es gilt stets $W(–f) = W(f)$.
- ☐ Der Spektralwert $W(f = 0)$ ist gleich $0.5/f_A$ und somit reell.

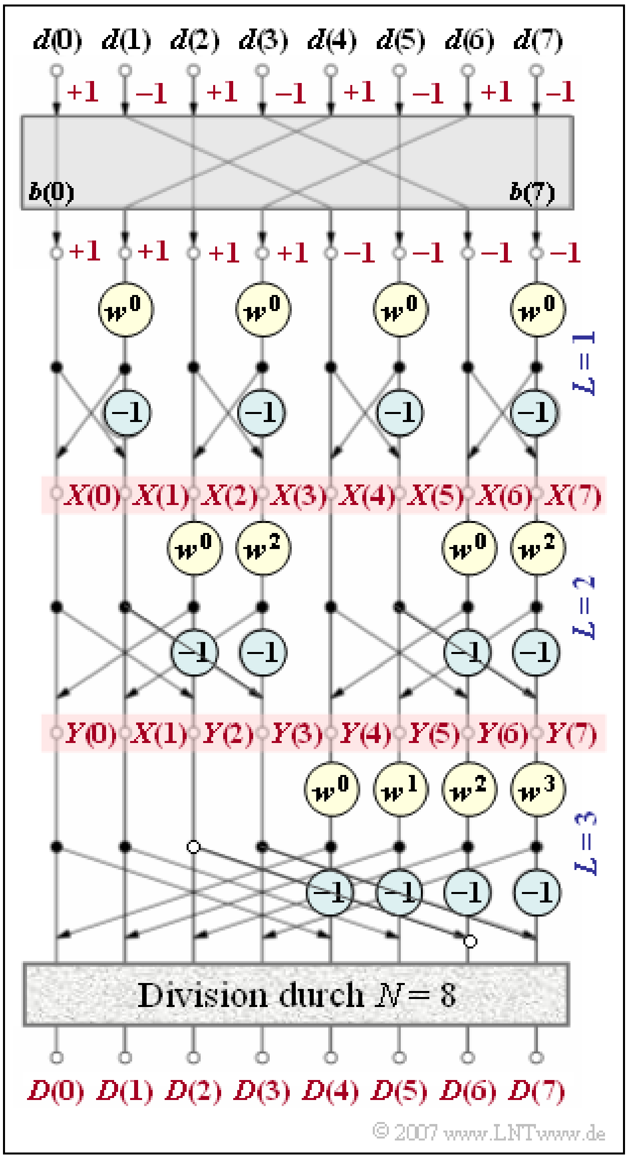
c) Wie groß sind $W(f = ±f_A)$ und die auf f_A normierte 6 dB–Bandbreite?

$\boldsymbol{B_{6dB}/f_A}$ =

d) Wie groß ist der minimale Abstand zwischen Hauptkeule und Seitenkeule.

$\boldsymbol{A_{H/S}}$ = dB

A5.5: Fast-Fouriertransformation



Die Grafik zeigt den Signalflussplan der DFT für N = 8. Aus den Zeitkoeffizienten $d(0)$, ... , $d(7)$ werden die dazugehörigen Spektralkoeffizienten $D(0)$, ... , $D(7)$ ermittelt.

Für diese gilt mit $0 \le \mu \le 7$:

$$D(\mu) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} d(\nu) \cdot w^{\nu \cdot \mu},$$

wobei der komplexe Drehfaktor $w = \exp(-\text{j}2\pi/N)$ zu verwenden ist, also $\exp(-\text{j}\pi/4)$ für $N = 8$.

Am Eingang wird die alternierende ±1–Folge $\langle d(\nu)\rangle$ angelegt. Nach der Bitumkehroperation ergibt sich daraus die Folge $\langle b(\kappa)\rangle$.

Es gilt $b(\kappa) = d(\nu)$, wenn man ν als Dualzahl darstellt und die resultierenden 3 Bit als κ in umgekehrter Reihenfolge geschrieben werden. Beispielsweise

- folgt aus ν = 1 (binär 001) die Position κ = 4 (binär 100),
- verbleibt $d(2)$ an der gleichen Position 2 (binär 010).

Der eigentliche FFT–Algorithmus geschieht für das Beispiel $N = 8$ in $\log_2 N = 3$ Stufen, die mit L = 1, 2 und 3 bezeichnet werden. Weiter gilt:

- In jeder Stufe sind vier Basisoperationen – sog. Butterflies – durchzuführen sind.
- Die Werte am Ausgang der ersten Stufe werden in dieser Aufgabe mit $X(0)$, ... , $X(7)$ bezeichnet, die der zweiten mit $Y(0)$, ... , $Y(7)$.
- Nach der dritten und letzten Stufe sind alle Werte noch durch N zu dividieren.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil zu **Kapitel 5.5.**

Fragebogen zu "A5.5: Fast-Fouriertransformation"

a) Berechnen Sie den DFT–Koeffizienten $D(3)$.

$\boldsymbol{D(3)}$ =

b) Berechnen Sie den DFT–Koeffizienten $D(4)$.

$\boldsymbol{D(4)}$ =

c) Ermitteln Sie die Ausgangswerte $X(0)$, ... , $X(7)$ der ersten Stufe. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Alle Werte mit geradzahligen Indizes sind gleich 2.
- [ ] Alle Werte mit ungeradzahligen Indizes sind gleich 0.

d) Ermitteln Sie die Ausgangswerte $Y(0)$, ... , $Y(7)$ der zweiten Stufe. Geben Sie zur Kontrolle die Werte $Y(0)$ und $Y(4)$ ein.

$\boldsymbol{Y(0)}$ =

$\boldsymbol{Y(4)}$ =

e) Berechnen Sie alle N Spektralwerte $D(\mu)$, insbesondere

$\boldsymbol{D(\mu = 4)}$ =

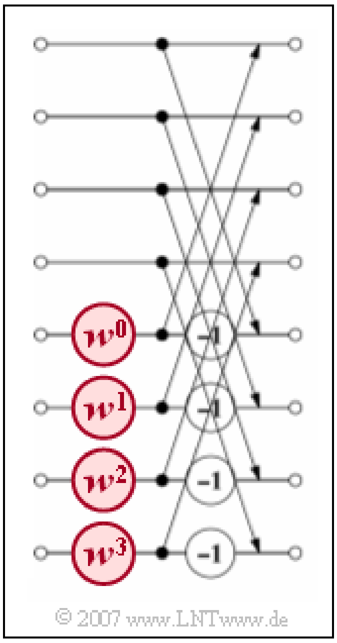
$\boldsymbol{D(\mu \neq 4)}$ =

f) Welche Spektralkoeffizienten würden sich für $d(\nu = 4) = 1$ und $d(\nu \neq 4) = 0$ ergeben? Geben Sie zur Kontrolle die Werte $D(3)$ und $D(4)$ ein:

$\boldsymbol{D(\mu = 3)}$ =

$\boldsymbol{D(\mu = 4)}$ =

Z5.5: Rechenaufwand für die FFT



Der FFT–Algorithmus realisiert eine Diskrete Fouriertransformation mit dem kleinstmöglichen Rechenaufwand, wenn der Parameter N eine Zweierpotenz ist. Im einzelnen sind zur Durchführung einer FFT folgende Rechenschritte notwendig:

- Die FFT geschieht in ld N Stufen, wobei in jeder Stufe die genau gleiche Anzahl an Rechenoperationen durchzuführen ist. „ld" steht hier als Abkürzung für den Logarithmus zur Basis 2.
- Die Grafik zeigt die dritte und letzte Stufe für das Beispiel $N = 8$. Man erkennt, dass in dieser und auch den anderen Stufen jeweils $N/2$ Basisoperationen durchzuführen sind.
- In jeder Basisoperation, die man häufig auch als **Butterfly** bezeichnet, werden aus den beiden komplexen Eingangsgrößen E_1 und E_2 zwei komplexe Ausgänge berechnet:

$$\begin{aligned} A_1 &= E_1 + E_2 \cdot w^{\mu}, \\ A_2 &= E_1 - E_2 \cdot w^{\mu}. \end{aligned}$$

- Hierbei bezeichnet $w = \exp(-\mathrm{j} \cdot 2\pi/N)$ den komplexen Drehfaktor. Für das Beispiel $N = 8$ hat dieser folgenden Wert:

$$w = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\pi/4} = \cos(45^\circ) - \mathrm{j}\cdot\sin(45^\circ)\,.$$

- Der Exponent μ dieses komplexen Drehfaktors kann alle ganzzahligen Werte zwischen 0 und $N/2 - 1$ annehmen. Für $N = 8$ gilt:

$$w^0 = 1, \quad w^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{j}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w^2 = -\mathrm{j}, \quad w^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{j}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mit dieser Aufgabe sollen die für die FFT erforderliche Anzahl von Rechenoperationen ($O_{\rm FFT}$) ermittelt und mit dem für die DFT angebbaren Wert $O_{\rm DFT} \approx 8N^2$ verglichen werden.

Zu beachten ist:

- Sinnvollerweise werden die Potenzen von w vor dem eigentlichen Algorithmus berechnet und in einer Lookup–Tabelle abgelegt. Die hierfür notwendigen Operationen sollen deshalb unberücksichtigt bleiben.
- Die Bitumkehroperation – eine Umsortierung, die vor der ersten Stufe durchzuführen ist – soll bei dieser Abschätzung ebenfalls nicht berücksichtigt werden.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Kapitel 5.5.**

Fragebogen zu "Z5.5: Rechenaufwand für die FFT"

a) Wieviele reelle Additionen (A_A) erfordert eine komplexe Addition?

$\boldsymbol{A_\text{A}}$ =

b) Wieviele reelle Additionen (A_M) und Multiplikationen (M_M) sind für eine komplexe Multiplikation erforderlich?

$\boldsymbol{A_\text{M}}$ =

$\boldsymbol{M_\text{M}}$ =

c) Wieviele komplexe Additionen/Subtraktionen (a_B) erfordert eine einzige Basisoperation („Butterfly”)? Wieviele komplexe Multiplikationen (m_B) sind pro Basisoperation notwendig?

$\boldsymbol{a_\text{B}}$ =

$\boldsymbol{m_\text{B}}$ =

d) Wieviele Rechenoperationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen gleichermaßen) erfordert eine Basisoperation?

$\boldsymbol{O_\text{B}}$ =

e) Wieviele reelle Operationen erfordert der gesamte FFT–Algorithmus? Welche Zahlenwerte ergeben sich für $N = 16$ und $N = 1024$?

$\boldsymbol{O_\text{FFT}\ (N = 16)}$ =

$\boldsymbol{O_\text{FFT}\ (N = 1024)}$ =

f) Wie groß ist der Zeitgewinn $G_\text{FFT} = O_\text{DFT}/O_\text{FFT}$ für $N = 16$ und $N = 1024$?

$\boldsymbol{G_\text{FFT}\ (N = 16)}$ =

$\boldsymbol{G_\text{FFT}\ (N = 1024)}$ =