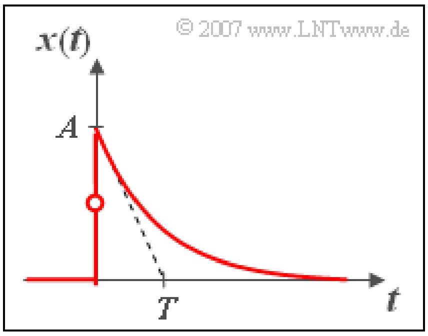
A3.1: Spektrum des Exponentialimpulses



In dieser Aufgabe wird ein kausales Signal $x(t)$ betrachtet, das zum Zeitpunkt t = 0 sprungartig von 0 auf A ansteigt und für Zeiten t > 0 exponentiell mit der Zeitkonstanten T abfällt:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-t/T}.$$

An der Sprungstelle zum Zeitpunkt t = 0 gilt $x(t = 0) = A/2$.

Verwenden Sie für die numerischen Berechnungen die Parameter

$$A = 3\ \mathrm{V}, \quad T = 1\ \mathrm{ms}.$$

Die zu berechnende Spektralfunktion $X(f)$ wird komplex sein und kann daher nach Real– und Imaginärteil, aber auch nach Betrag und Phase dargestellt werden. Verwenden Sie die Notation:

$$X(f) = |X(f)| \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot \varphi(f)}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.1.**

Fragebogen zu "A3.1: Spektrum des Exponentialimpulses"

a) Berechnen Sie die Spektralfunktion $X(f)$. Welcher Spektralwert ergibt sich bei der Frequenz $f = 0$?

$\mathbf{Re}[X(f = 0)]$ = V/Hz

$\mathbf{Im}[X(f = 0)]$ = V/Hz

b) Wie lauten der Real– und der Imaginärteil von $X(f)$ unter Verwendung von $f_0 = 1/(2\pi T)$. Welche Werte weisen diese Funktionen bei $f = f_0$ auf?

$\mathbf{Re}[X(f = f_0)]$ = V/Hz

$\mathbf{Im}[X(f = f_0)]$ = V/Hz

c) Berechnen Sie die Betragsfunktion $|X(f)|$. Welche Werte ergeben sich bei der Frequenz $f = f_0$ und bei sehr großen Frequenzen?

$|X(f = f_0)|$ = V/Hz

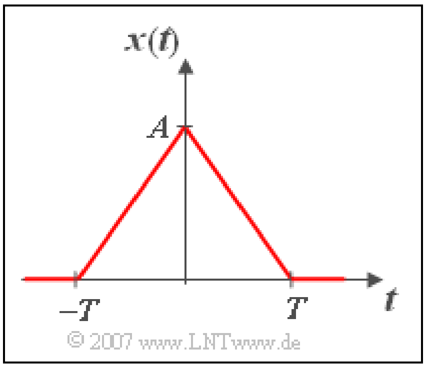
$|X(f \to \infty)|$ = V/Hz

d) Berechnen Sie die Phasenfunktion $\varphi(f)$. Welche Werte ergeben sich hierfür bei der Frequenz $f = f_0$ und bei sehr großen Frequenzen?

$\varphi(f = f_0)$ = rad

$\varphi(f \to \infty)$ = rad

Z3.1: Spektrum des Dreieckimpulses



Betrachtet wird ein dreieckförmiger Impuls $x(t)$, der im Bereich $-T \leq t \leq T$ durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$x(t) = A \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T}\right).$$

Die Impulsamplitude sei $A = 1$ V, der Zeitparameter $T = 1$ ms. Für alle Zeiten $|t| > T$ ist $x(t) = 0$.

Zur Berechnung der Spektralfunktionen $X(f)$ können Sie folgende Eigenschaften ausnutzen:

- Die Zeitfunktion ist gerade und damit die Spektralfunktion reell:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft} \mathrm{d}t = 2 \cdot \int_{0}^{\infty} x(t) \cdot \cos(2\pi ft)\, \mathrm{d}t.$$

- Für $|t| > T$ besitzt $x(t)$ keine Anteile:

$$X(f) = 2 \cdot \int_{0}^{T} x(t) \cdot \cos(2\pi ft)\, \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.1.** Zur Lösung dieser Aufgabe können Sie auf die folgenden Formeln zurückgreifen:

$$\int t \cdot \cos(\omega_0 t)\, \mathrm{d}t = \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2} + \frac{t \cdot \sin(\omega_0 t)}{\omega_0},$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)).$$

Weitere Informationen zu dieser Thematik liefert das folgende Lernvideo:

Unterschiede und Gemeinsamkeiten von kontinuierlichen und diskreten Spektren
(Dauer Teil 1: 6:20 – Teil 2: 5:15)

Fragebogen zu "Z3.1: Spektrum des Dreieckimpulses"

a) Berechnen Sie die Spektralfunktion $X(f)$. Welcher Spektralwert ergibt sich bei der Frequenz $f = 500$ Hz?

$\boldsymbol{X(f = 500\ \text{Hz})}$ = V/Hz

b) Geben Sie die Spektralfunktion $X(f)$ unter Verwendung der Spaltfunktion $\text{si}(x) = \sin(x)/x$ an. Welcher Wert ergibt sich bei der Frequenz $f = 0$?

$\boldsymbol{X(f = 0)}$ = V/Hz

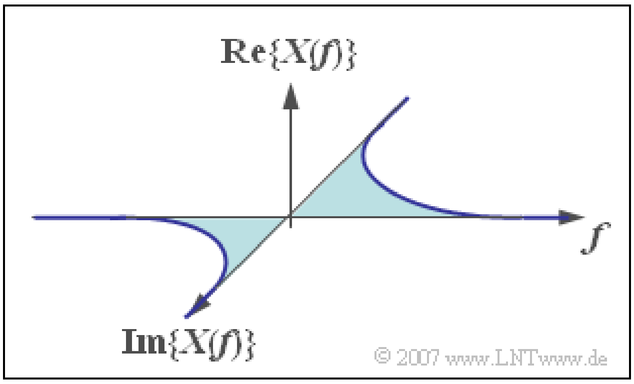
c) Bei welcher Frequenz $f = f_0$ hat das Spektrum $X(f)$ die erste Nullstelle?

$\boldsymbol{f_0}$ = kHz

d) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Bei allen Vielfachen von f_0 hat das Spektrum Nullstellen.
- [ ] Bei der Frequenz $f = 1.5 \cdot f_0$ ist die Spektralfunktion negativ.

A3.2: Vom Spektrum zum Signal



Gegeben sei die Spektralfunktion

$$X(f) = \frac{2\,\mathrm{V}}{\mathrm{j}\pi f}.$$

Die zugehörige Zeitfunktion $x(t)$ kann mit Hilfe des zweiten Fourierintegrals ermittelt werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}f = \\ &= x_\mathrm{R}(t) + \mathrm{j} \cdot x_\mathrm{I}(t), \end{aligned}$$

wobei für den Realteil bzw. Imaginärteil gilt:

$$x_\mathrm{R}(t) = 2\,\mathrm{V} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi f t)}{\pi f}\,\mathrm{d}f, \quad x_\mathrm{I}(t) = -2\,\mathrm{V} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi f t)}{\pi f}\,\mathrm{d}f.$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.1.** Benutzen Sie zur Lösung eventuell die nachfolgenden Angaben:

$$x(t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,\mathrm{d}f, \quad X(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{sign}(a) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Fragebogen zu "A3.2: Vom Spektrum zum Signal"

a) Welche der folgenden Aussagen treffen für das Zeitsignal $x(t)$ zu?

- ○ $x(t)$ ist eine komplexe Funktion.
- ○ $x(t)$ ist rein reell.
- ○ $x(t)$ ist rein imaginär.

b) Berechnen Sie den Signalverlauf $x(t)$ im gesamten Definitionsgebiet. Welche Signalwerte treten zu den Zeitpunkten t = 1 ms und t = –1 ms auf?

$\boldsymbol{x(t = 1\ \text{ms})}$ = V

$\boldsymbol{x(t = -1\ \text{ms})}$ = V

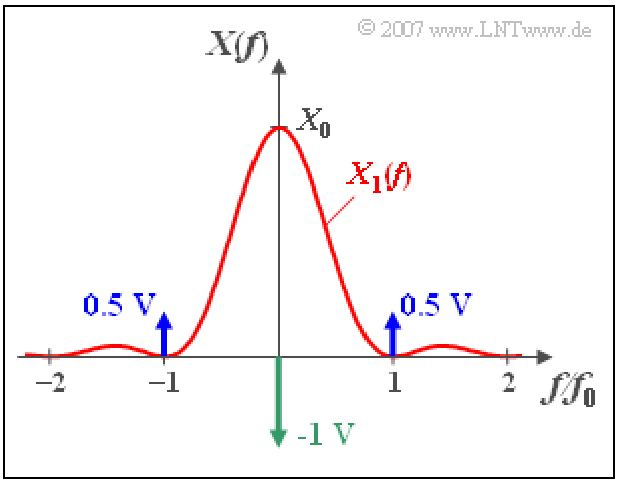
c) Wie lautet der Signalwert zum Zeitpunkt $t = 0$?

$\boldsymbol{x(t = 0)}$ = V

d) Wie groß ist der Spektralwert bei der Frequenz $f = 0$?

$\boldsymbol{X(f = 0)}$ = V/Hz

Z3.2: si²-Spektrum mit Diracs



Das skizzierte Spektrum $X(f)$ eines Zeitsignals $x(t)$ setzt sich zusammen aus

- einem kontinuierlichen Anteil $X_1(f)$,
- dazu drei diracförmigen Spektrallinien.

Der kontinuierliche Anteil lautet mit f_0 = 200 kHz und $X_0 = 10^{-5}$ V/Hz:

$$X_1(f) = X_0 \cdot \mathrm{si}^2(\pi \frac{f}{f_0}),$$
$$\text{wobei} \quad \mathrm{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Die Spektrallinie bei $f = 0$ hat das Gewicht –1V. Daneben gibt es noch zwei Linien bei den Frequenzen $\pm f_0$, beide mit dem Gewicht 0.5 V.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.1.** Als bekannt vorausgesetzt werden kann, dass ein um $t = 0$ symmetrischer Dreieckimpuls $y(t)$ mit der Amplitude A und der absoluten Dauer $2T$ (das heißt: die Signalwerte sind nur zwischen $-T$ und $+T$ ungleich 0) folgende Spektralfunktion besitzt:

$$Y(f) = A \cdot T \cdot \mathrm{si}^2(\pi f T).$$

Weitere Informationen zu dieser Thematik liefert das folgende Lernvideo:

Unterschiede und Gemeinsamkeiten von kontinuierlichen und diskreten Spektren
(Dauer Teil 1: 6:20 – Teil 2: 5:15)

Fragebogen zu "Z3.2: si^2-Spektrum mit Diracs"

a) Welche Werte besitzen die Parameter A (Amplitude) und T (einseitige Dauer) des dreieckförmigen Signalanteils $x_1(t)$?

$\boldsymbol{A}$ = V

$\boldsymbol{T}$ = µs

b) Wie groß ist der Gleichsignalanteil B des Signals?

$\boldsymbol{B}$ = V

c) Wie groß ist die Amplitude C des periodischen Anteils von $x(t)$?

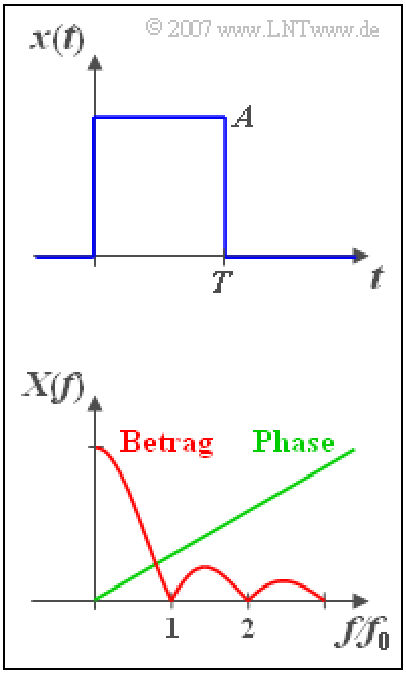
$\boldsymbol{C}$ = V

d) Wie groß sind der Maximalwert und der Minimalwert des Signals $x(t)$?

$\boldsymbol{x_{\max}}$ = V

$\boldsymbol{x_{\min}}$ = V

A3.3: Vom Signal zum Spektrum



Betrachtet wird ein Rechteckimpuls $x(t)$ der Dauer T = 50 µs und der Höhe A = 2 V. An den Sprungstellen bei t = 0 und t = T ist der Signalwert jeweils $A/2$, was aber für die Lösung der Aufgabe keinen Einfluss hat.

In der unteren Grafik ist die dazugehörige Spektralfunktion nach Betrag und Phase qualitativ skizziert. Es gilt:

$$X(f) = |X(f)| \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\varphi(f)}.$$

Der analytische Funktionsverlauf von $X(f)$ soll ermittelt werden.

Hinweis: Diese Übungsaufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.1** und **Kapitel 3.2.** Gegeben sind weiterhin folgende trigonometrischen Umformungen:

$$\sin^2(\alpha) = 1/2 \cdot (1 - \cos(2\alpha)),$$

$$\tan(\alpha/2) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

Fragebogen zu "A3.3: Vom Signal zum Spektrum"

a) Berechnen Sie allgemein die Spektralfunktion $X(f)$. Welcher Wert ergibt sich bei der Frequenz f = 10 kHz?

Re[X(f = 10 kHz)] = V/Hz

Im[X(f = 10 kHz)] = V/Hz

b) Berechnen Sie die Betragsfunktion $|X(f)|$ allgemein. Welche Werte ergeben sich für die Frequenzen f = 0 und f = 20 kHz?

$|X(f = 0)|$ = V/Hz

$|X(f$ = 20 kHz$)|$ = V/Hz

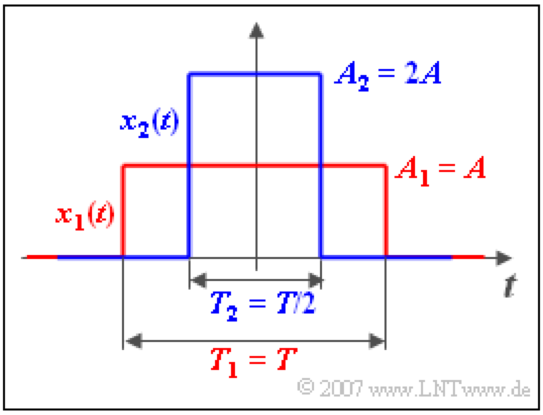
c) Welche der nachfolgenden Aussagen sind bezüglich $|X(f)|$ zutreffend?

- [ ] $|X(f)|$ hat Nullstellen bei Vielfachen von $f_0 = 1/T$.
- [ ] $|X(f)|$ hat Nullstellen bei Vielfachen von $f_0 = 1/(2T)$.
- [ ] In der Mitte zwischen zwei Nullstellen ist $|X(f)| = |A/(\pi f)|$.

d) Berechnen Sie die Phasenfunktion $\varphi(f)$. Welcher Phasenwinkel (in Grad) ergibt sich bei der Frequenz f = 10 kHz?

φ(f = 10 kHz) = Grad

Z3.3: Rechteck– und Diracimpuls



Wir betrachten hier eine Vielzahl von symmetrischen Rechteckfunktionen $x_k(t)$. Die Rechtecke unterscheiden sich durch unterschiedliche Amplituden (Höhen)

$$A_k = k \cdot A$$

und unterschiedliche Impulsdauern (Breiten)

$$T_k = T/k.$$

Hierbei sei k ein beliebiger positiver Wert. Der im Bild rot dargestellte Rechteckimpuls $x_1(t)$ hat die Amplitude $A_1 = A = 2$ V und die Dauer $T_1 = T = 500$ µs. Der blau gezeichnete Impuls $x_2(t)$ ist halb so breit ($T_2 = 250$ µs), aber doppelt so hoch ($A_2 = 4$ V).

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.2.**

Sie können Ihre Ergebnisse anhand zweier Interaktionsmodule überprüfen:

- **Zeitfunktion und zugehörige Spektralfunktion**
- **Frequenzgang und zugehörige Impulsantwort**

Fragebogen zu "Z3.3: Rechteck– und Diracimpuls"

a) Welche der folgenden Aussagen treffen bezüglich des Spektrums $X_1(f)$ zu?

- [ ] Der Spektralwert $X_1(f = 0)$ ist gleich 10^{-3} V/Hz.
- [ ] X_1(f) besitzt Nullstellen im Abstand von 2 kHz.
- [ ] $X_1(f)$ besitzt Nullstellen im Abstand von 4 kHz.

b) Welche der folgenden Aussagen treffen bezüglich des Spektrums $X_2(f)$ zu?

- [ ] Der Spektralwert $X_2(f = 0)$ ist gleich 10^{-3} V/Hz.
- [ ] X_2(f) besitzt Nullstellen im Abstand von 2 kHz.
- [ ] $X_2(f)$ besitzt Nullstellen im Abstand von 4 kHz.

c) Es gelte k = 10. Berechnen Sie die Frequenz f_{10} der ersten Nullstelle und den Spektralwert bei f = 2 kHz.

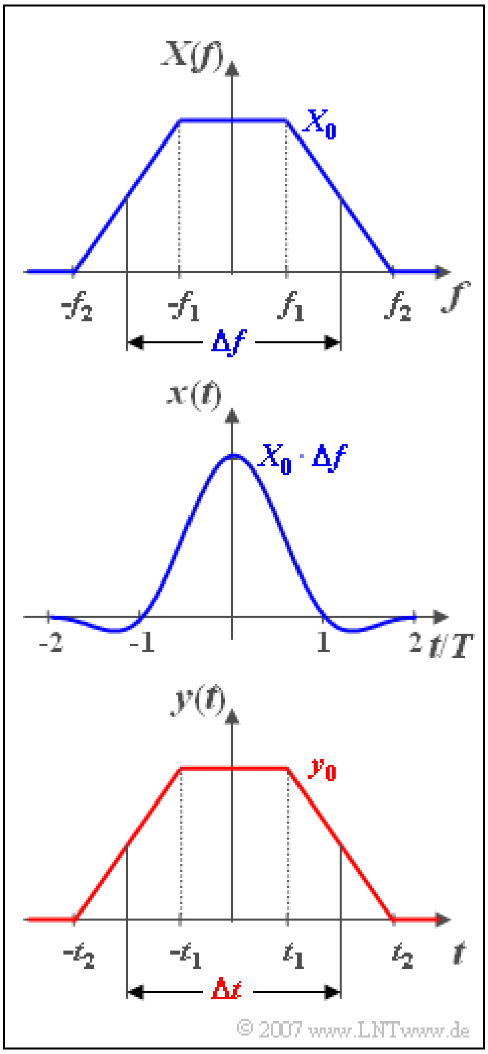
$\boldsymbol{f_{10}}$ = kHz

$\boldsymbol{X_{10}(f = 2\ \mathrm{kHz})}$ = V/Hz

d) Wie groß wird der Spektralwert bei f = 2 kHz im Grenzfall $k \to \infty$? Interpretieren Sie das Ergebnis.

$\boldsymbol{X_{\infty}(f = 2\ \mathrm{kHz})}$ = V/Hz

A3.4: Trapezspektrum bzw. –impuls



Wir betrachten hier eine trapezförmige Spektralfunktion $X(f)$ gemäß der oberen Grafik, die durch die drei Parameter X_0, f_1 und f_2 vollständig beschrieben wird. Für die Eckfrequenzen gelte $f_2 > 0$ und $0 \le f_1 \le f_2$.

Anstelle der Eckfrequenzen f_1 und f_2 können auch die beiden folgenden Beschreibungsgrößen verwendet werden:

- die äquivalente Bandbreite:
  $$\Delta f = f_1 + f_2,$$
- der so genannte Rolloff-Faktor (im Frequenzbereich):
  $$r_f = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}.$$

Mit diesen Größen lautet die dazugehörige Zeitfunktion (siehe Grafik in der Mitte):

$$x(t) = X_0 \cdot \Delta f \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot r_f \cdot \Delta f \cdot t).$$

Hierbei ist $\mathrm{si}(x) = \sin(x)/x$ die so genannte Spaltfunktion.

In diesem Beispiel sollen die Zahlenwerte $X_0 = 10^{-3}$ V/Hz, $f_1 = 1$ kHz und $f_2 = 3$ kHz verwendet werden. Die Zeit $T = 1/\Delta f$ dient lediglich zu Normierungszwecken.

Ab Aufgabe c) wird ein trapezförmiges Signal $y(t)$ betrachtet, das formgleich mit dem Spektrum $X(f)$ ist. Als Beschreibungsgrößen können hier verwendet werden:

- die Impulsamplitude $y_0 = y(t = 0)$,
- die äquivalente Impulsdauer (definiert über das flächengleiche Rechteck):
  $$\Delta t = t_1 + t_2,$$
- der Rolloff-Faktor (im Zeitbereich):
  $$r_t = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1}.$$

Es gelte $y_0 = 4$ V, $\Delta t = 1$ ms und $r_t = 0.5$.

Hinweis: Diese Aufgabe soll unter Verwendung von **Vertauschungssatz** und **Ähnlichkeitssatz** gelöst werden. Sie können Ihre Ergebnisse anhand zweier Interaktionsmodule überprüfen:

- **Zeitfunktion und zugehörige Spektralfunktion**
- **Frequenzgang und zugehörige Impulsantwort**

Fragebogen zu "A3.4: Trapezspektrum bzw. –impuls"

a) Wie groß sind bei den gegebenen Parametern die äquivalente Bandbreite und der Rolloff-Faktor des Spektrums $X(f)$?

Δf = kHz

r_f =

b) Wie groß sind die Signalwerte von $x(t)$ bei $t = 0$, $t = T/2$ und $t = T$?

$x(t = 0)$ = V

$x(t = T/2)$ = V

$x(t = T)$ = V

c) Wie lautet das Spektrum $Y(f)$ des Trapezimpulses mit $y_0 = 4$ V, $\Delta t = 1$ ms, $r_t = 0.5$. Wie groß sind die Spektralwerte bei $f = 0$, 500 Hz und 1 kHz?

$Y(f = 0)$ = V/Hz

$Y(f = 0.5\ \text{kHz})$ = V/Hz

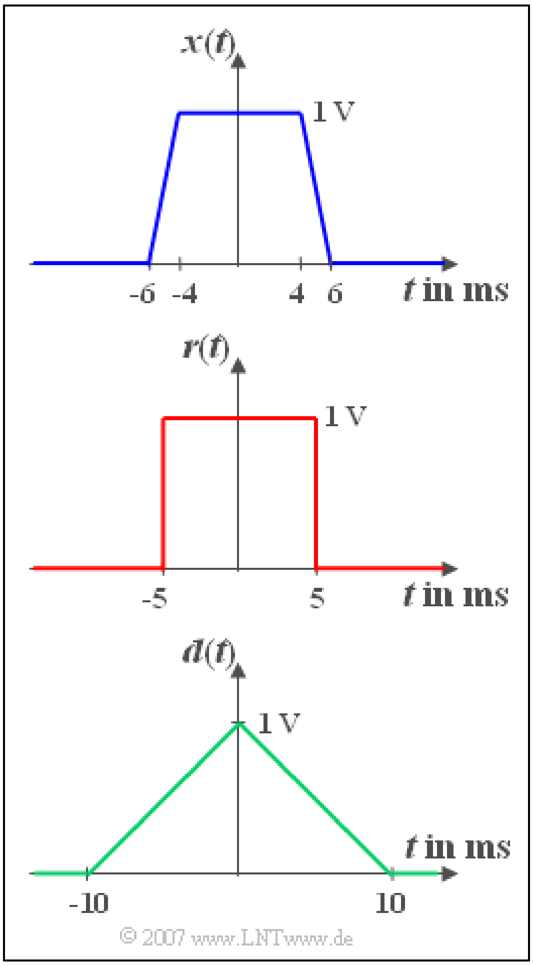
$Y(f = 1\ \text{kHz})$ = V/Hz

d) Welche Spektralwerte ergeben sich mit $y_0 = 8$ V, $\Delta t = 0.5$ ms und $r_t = 0.5$?

$Y(f = 0)$ = V/Hz

$Y(f = 1\ \text{kHz})$ = V/Hz

Z3.4: Trapez, Rechteck und Dreieck



Betrachtet werden drei unterschiedliche Impulsformen. Der Impuls $x(t)$ ist trapezförmig. Für $|t| < t_1 = 4$ ms ist der Zeitverlauf konstant $A = 1$ V. Danach fällt $x(t)$ bis zum Zeitpunkt $t_2 = 6$ ms linear bis auf den Wert 0 ab.

Mit den beiden abgeleiteten Systemgrößen, nämlich

- der äquivalenten Impulsdauer

  $$\Delta t = t_1 + t_2$$

- und dem so genannten Rolloff-Faktor

  $$r_t = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1}$$

lautet die Spektralfunktion des Trapezimpulses:

$$X(f) = A \cdot \Delta t \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \Delta t \cdot f) \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \Delta t \cdot r_t \cdot f).$$

Weiter sind im Bild rechts noch der Rechteckimpuls $r(t)$ und der Dreieckimpuls $d(t)$ dargestellt, die beide als Grenzfälle des Trapezimpulses $x(t)$ interpretiert werden können.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.3.** Sie können Ihre Ergebnisse anhand zweier Interaktionsmodule überprüfen:

- **Zeitfunktion und zugehörige Spektralfunktion**
- **Frequenzgang und zugehörige Impulsantwort**

Fragebogen zu "Z3.4: Trapez, Rechteck und Dreieck"

a) Wie groß sind äquivalente Impulsdauer und Rolloff-Faktor von $x(t)$?

$\boldsymbol{\Delta t}$ = ms

$\boldsymbol{r_t}$ =

b) Welche Aussagen sind hinsichtlich der Spektralfunktion $X(f)$ zutreffend?

- [ ] Der Spektralwert bei der Frequenz $f = 0$ ist gleich 20 mV/Hz.
- [ ] Für die Phasenfunktion sind die Werte 0 oder π (180°) möglich.
- [ ] $X(f)$ weist nur Nullstellen bei allen Vielfachen von 100 Hz auf.

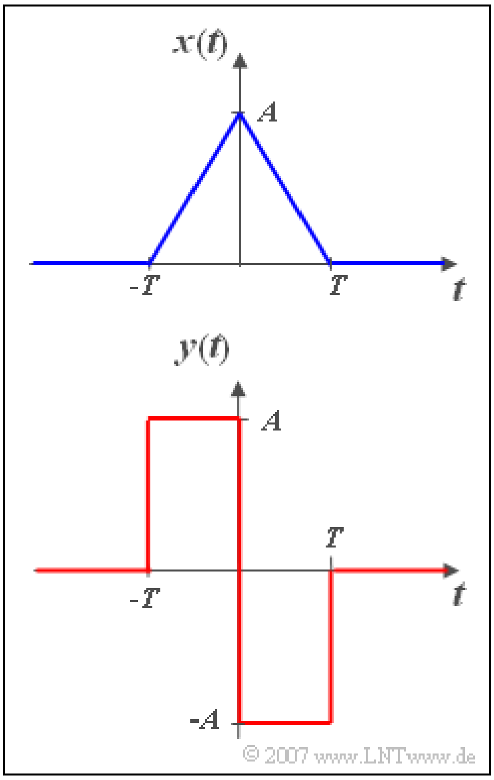
c) Welche Aussagen sind hinsichtlich der Spektralfunktion $R(f)$ zutreffend?

- [ ] Der Spektralwert bei der Frequenz $f = 0$ ist gleich $X(f = 0)$.
- [ ] Für die Phasenfunktion sind die Werte 0 oder π (180°) möglich.
- [ ] $R(f)$ weist nur Nullstellen bei allen Vielfachen von 100 Hz auf.

d) Welche Aussagen sind hinsichtlich der Spektralfunktion $D(f)$ zutreffend?

- [ ] Der Spektralwert bei der Frequenz $f = 0$ ist gleich $X(f = 0)$.
- [ ] Für die Phasenfunktion sind die Werte 0 oder π (180°) möglich.
- [ ] $D(f)$ weist nur Nullstellen bei allen Vielfachen von 100 Hz auf.

A3.5: Differentiation des Dreiecksignals



Gesucht wird das Spektrum $Y(f)$ des Signals

$$y(t) = \begin{cases} A & \text{für} \quad -T \le t < 0, \\ -A & \text{für} \quad 0 < t \le T, \\ 0 & \text{für} \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei gelte A = 1 V und T = 0.5 ms.

Als bekannt vorausgesetzt wird die Fouriertransformierte des oben skizzierten Dreieckimpulses $x(t)$, nämlich

$$X(f) = A \cdot T \cdot \mathrm{si}^2(\pi f T),$$

wobei wiederum $\mathrm{si}(x) = \sin(x)/x$ gilt.

Ein Vergleich der beiden Zeitsignale zeigt, dass zwischen den Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ folgender Zusammenhang besteht:

$$y(t) = T \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Hinweise: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 3.3.**

- In Aufgabe c) soll das Spektrum $Y(f)$ ausgehend von einem symmetrischen Rechteckimpuls $r(t)$ mit Amplitude A und Dauer T sowie dessen Spektrum $R(f) = A \cdot T \cdot \mathrm{si}(\pi f T)$ berechnet werden. Dies erreicht man durch zweimalige Anwendung des **Verschiebungssatzes.**

- In der **Zusatzaufgabe Z3.5** wird das gleiche Spektrum $Y(f)$ ausgehend von einem aus drei Diracfunktionen bestehenden Signal durch Anwendung des Integrationssatzes berechnet.

Alle im Kapitel 3.3 dargelegten Gesetzmäßigkeiten – unter Anderem auch der Verschiebungssatz und der Integrationssatz – werden in einem Lernvideo an Beispielen verdeutlicht:

Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation (Dauer Teil 1: 5:57 – Teil 2: 5:55)

Fragebogen zu "A3.5: Differentiation des Dreiecksignals"

a) Berechnen Sie die Spektralfunktion $Y(f)$ am Ausgang. Wie groß ist deren Betrag bei den Frequenzen $f = 0$ bzw. $f = 1$ kHz?

$|Y(f = 0)|$ = V/Hz

$|Y(f = 1\text{ kHz})|$ = V/Hz

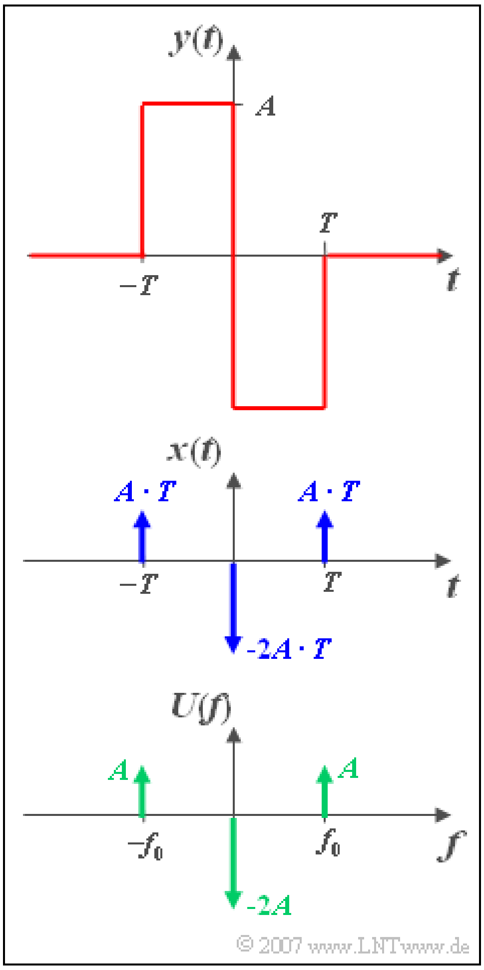
b) Welche Aussagen sind hinsichtlich des Spektrums $Y(f)$ zutreffend?

- [ ] Die Nullstellen von $X(f)$ bleiben auch in $Y(f)$ erhalten.
- [ ] Für $f \to \infty$ hat $Y(f)$ den gleichen Verlauf wie $X(f)$.
- [ ] Für $f \to \infty$ ist $Y(f)$ doppelt so groß wie beim Spektrum eines Rechteckimpulses der Dauer T.

c) Berechnen Sie $Y(f)$ ausgehend vom Rechteckimpuls durch Anwendung des Verschiebungssatzes. Welche Aussage ist bei diesem Beispiel zutreffend?

- ○ Der Differentiationssatz führt hier schneller zum Ergebnis.
- ○ Der Verschiebungssatz führt schneller zum Ergebnis.

Z3.5: Integration von Diracfunktionen



Wie in **Aufgabe A3.5** soll das Spektrum $Y(f)$ des Signals

$$y(t) = \begin{cases} A & \text{für} \quad -T \le t < 0, \\ -A & \text{für} \quad 0 < t \le T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ermittelt werden. Es gelte wieder A = 1 V und T = 0.5 ms.

Ausgegangen wird vom Zeitsignal $x(t)$ gemäß der mittleren Skizze, das sich aus drei Diracimpulsen bei $-T$, 0 und $+T$ mit den Impulsgewichte AT, $-2AT$ und AT zusammensetzt.

Die Spektralfunktion $X(f)$ kann durch Anwendung des Vertauschungssatzes direkt angegeben werden, wenn man berücksichtigt, dass die zu $U(f)$ gehörige Zeitfunktion wie folgt lautet (siehe untere Skizze):

$$u(t) = -2A + 2A \cdot \cos(2\pi f_0 t).$$

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.3.** Zwischen $x(t)$ und $y(t)$ besteht folgender Zusammenhang:

$$y(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Der **Integrationssatz** lautet in entsprechend angepasster Form:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, X(f) \left(\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f T} + \frac{1}{2T} \cdot \delta(f) \right).$$

Alle im Kapitel 3.3 dargelegten Gesetzmäßigkeiten – unter Anderem auch der Integrationssatz – werden in einem Lernvideo an Beispielen verdeutlicht:

Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation (Dauer Teil 1: 5:57 – Teil 2: 5:55)

Fragebogen zu "Z3.5: Integration von Diracfunktionen"

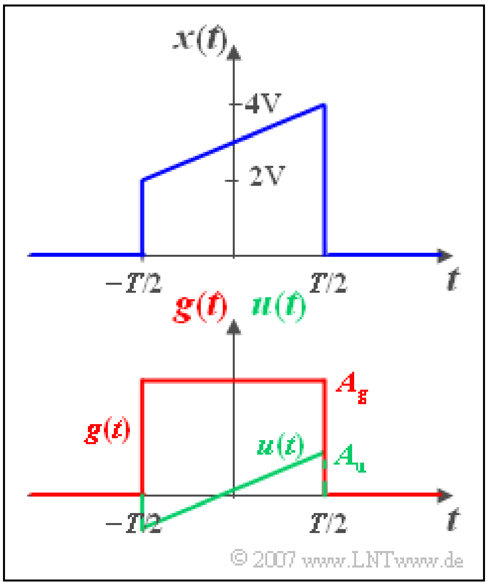
a) Berechnen Sie die Spektralfunktion $X(f)$. Wie groß ist deren Betrag bei den Frequenzen $f = 0$ und $f = 1$ kHz?

$\|X(f = 0)\|$	=	V/Hz
$\|X(f = 1\ \text{kHz})\|$	=	V/Hz

b) Berechnen Sie die Spektralfunktion $Y(f)$. Welche Werte ergeben sich bei den Frequenzen $f = 0$ und $f = 1$ kHz?

$\|Y(f = 0)\|$	=	V/Hz
$\|Y(f = 1\ \text{kHz})\|$	=	V/Hz

A3.6: Gerades / ungerades Zeitsignal



Gesucht ist das Spektrum $X(f)$ des nebenstehend skizzierten impulsförmigen Signals $x(t)$, das im Bereich von $-T/2$ bis $T/2$ linear von 2 V auf 4 V ansteigt und außerhalb 0 ist.

Die Spektralfunktionen der unten dargestellten Signale $g(t)$ und $u(t)$ können als bekannt vorausgesetzt werden.

- Die gerade, rechteckförmige Zeitfunktion $g(t)$ besitzt das Spektrum
$$G(f) = A_g \cdot T \cdot \mathrm{si}(\pi f T) \quad \mathrm{mit} \quad \mathrm{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$
- Das Spektrum der unsymmetrischen Funktion $u(t)$ lautet:
$$U(f) = -\mathrm{j} \cdot \frac{A_u \cdot T}{2\pi f T}\left[\mathrm{si}(\pi f T) - \cos(\pi f T)\right].$$

Verwenden Sie für die Teilaufgaben a) und b) die Signalparameter A_u = 1 V und T = 1 ms.

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe mit Hilfe des **Zuordnungssatzes** in Kapitel 3.3.

Fragebogen zu "A3.6: Gerades / ungerades Zeitsignal"

a) Berechnen Sie die (rein imaginären) Spektralwerte des unsymmetrischen Signals $u(t)$ bei den Frequenzen f = 0.5 kHz und f = 1 kHz.

Im[U(f = 0.5 kHz)] = V/Hz

Im[U(f = 1 kHz)] = V/Hz

b) Wie groß ist der Spektralwert von $u(t)$ bei der Frequenz f = 0?
Hinweis: Lieber denken als rechnen.

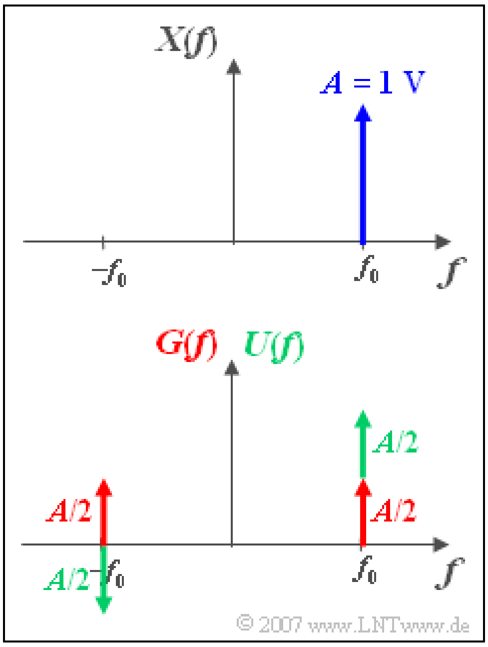
Im[U(f = 0 kHz)] = V/Hz

c) Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus a) den Spektralwert des Signals $x(t)$ bei der Frequenz f = 0.5 kHz.

Re[X(f = 0.5 kHz)] = V/Hz

Im[X(f = 0.5 kHz)] = V/Hz

Z3.6: Komplexe Exponentialfunktion



In Zusammenhang mit Bandpass-Systemen (Kapitel 4) wird oft mit einseitigen Spektren gearbeitet. In der Abbildung sehen Sie eine solche einseitige Spektralfunktion $X(f)$, die ein komplexes Zeitsignal $x(t)$ zur Folge hat.

In der unteren Skizze ist $X(f)$ in einen – bezüglich der Frequenz – geraden Anteil $G(f)$ sowie einen ungeraden Anteil $U(f)$ aufgespaltet.

Verwenden Sie für die Aufgabe die Parameterwerte

- $A = 1$ V,
- $f_0 = 125$ kHz.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den **Zuordnungssatz** und den **Verschiebungssatz** im Kapitel 3.3. Alle im Kapitel 3.3 dargelegten Gesetzmäßigkeiten – unter Anderem auch der Verschiebungssatz und der Integrationssatz – werden in einem Lernvideo an Beispielen verdeutlicht:

Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation (Dauer Teil 1: 5:57 – Teil 2: 5:55)

Fragebogen zu "Z3.6: Komplexe Exponentialfunktion"

a) Wie lautet die zu $G(f)$ passende Zeitfunktion $g(t)$? Wie groß ist $g(t = 1\ \mu s)$?

Re[$g(t = 1\ \mu s)$] = V

Im[$g(t = 1\ \mu s)$] = V

b) Wie lautet die zu $U(f)$ passende Zeitfunktion $u(t)$? Wie groß ist $u(t = 1\ \mu s)$?

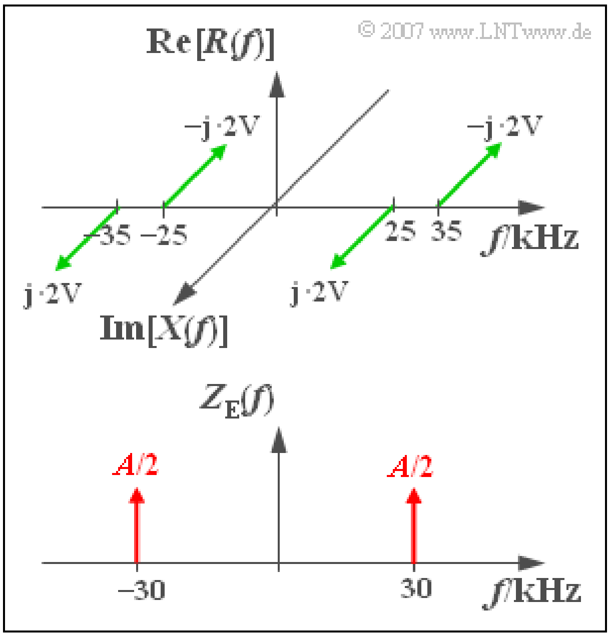
Re[$u(t = 1\ \mu s)$] = V

Im[$u(t = 1\ \mu s)$] = V

c) Welche der Aussagen sind bezüglich des Signals $x(t)$ zutreffend?

- ☐ Das Signal lautet $x(t) = A \cdot \exp(j2\pi f_0 t)$.
- ☐ In der komplexen Ebene dreht $x(t)$ im Uhrzeigersinn.
- ☐ $x(t)$ dreht stattdessen entgegen dem Uhrzeigersinn.
- ☐ Für eine Umdrehung wird eine Mikrosekunde benötigt.

A3.7: Synchrondemodulator



Zur Rücksetzung eines amplitudenmodulierten Signals in den ursprünglichen Frequenzbereich verwendet man oft einen Synchrondemodulator.

Dieser multipliziert das AM-Eingangssignal $r(t)$ mit einem empfangsseitigen Trägersignal $z_\text{E}(t)$, das sowohl hinsichtlich der Frequenz f_T als auch der Phase φ_T mit dem sendeseitigen Trägersignal $z_\text{S}(t)$ übereinstimmen sollte.

Anschließend folgt ein rechteckförmiger Tiefpass zur Eliminierung aller spektralen Anteile oberhalb der Trägerfrequenz f_T. Das Ausgangssignal des Synchrondemodulators nennen wir $v(t)$.

Das oben skizzierte Spektrum $R(f)$ des Empfangssignals $r(t)$ ist durch Zweiseitenband–Amplitudenmodulation eines sinusförmigen Quellensignals $q(t)$ mit der Frequenz 5 kHz und der Amplitude 8 V entstanden. Als sendeseitiges Trägersignal $z_\text{S}(t)$ wurde ein Cosinussignal mit der Frequenz 30 kHz verwendet.

Das Spektrum des empfangsseitigen Trägersignals $z_\text{E}(t)$ besteht entsprechend der unteren Skizze aus zwei Diraclinien, jeweils mit dem Gewicht $A/2$. Da $z_\text{E}(t)$ keine Einheit beinhalten soll, sind auch die Gewichte der Diracfunktionen dimensionslos.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen entsprechend **Kapitel 3.4,** insbesondere auf die Seite **Faltung einer Funktion mit einer Diracfunktion.**

Fragebogen zu "A3.7: Synchrondemodulator"

a) Es gelte f_T = 30 kHz und A = 1. Berechnen Sie das Ausgangssignal $v(t)$. Welcher Signalwert tritt zum Zeitpunkt t = 50 µs auf?

$v(t$ = 50 µs$)$ = V

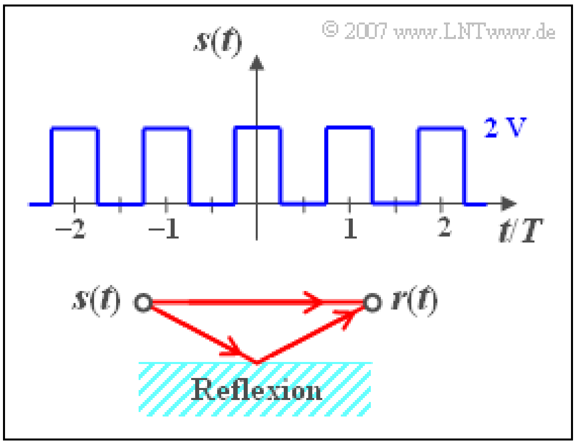
b) Wie groß muss die Amplitude des empfangsseitigen Trägersignals $z_E(t)$ gewählt werden, damit $v(t) = q(t)$ gilt?

A =

c) Berechnen Sie das Ausgangssignal $v(t)$ unter den Voraussetzungen A = 2 und f_T = 31 kHz. Welcher Signalwert tritt zum Zeitpunkt t = 50 µs auf?

$v(t$ = 50 µs$)$ = V

Z3.7 Rechtecksignal mit Echo



Wir betrachten ein periodisches Rechtecksignal $s(t)$ mit den möglichen Amplitudenwerten 0 V und 2 V und der Periodendauer $T_0 = T = 1$ ms. Bei den Sprungstellen, zum Beispiel bei $t = T/4$, beträgt der Signalwert jeweils 1 V. Der Gleichanteil (also der Fourierkoeffizient A_0) des Signals ist 1 V.

- Aufgrund der Symmetrie (gerade Funktion) sind alle Sinuskoeffizienten $B_n = 0$.
- Die Koeffizienten A_n mit geradzahligem n sind ebenfalls 0.
- Für ungeradzahlige Werte von n gilt hingegen:

$$A_n = (-1)^{(n-1)/2} \cdot \frac{4\text{ V}}{n \cdot \pi}.$$

Das Signal $s(t)$ gelangt über zwei Wege zum Empfänger (siehe untere Skizze): Einmal auf dem direkten Pfad und zum zweiten über einen Nebenpfad. Dieser ist durch den Dämpfungsfaktor α und eine Laufzeit τ gekennzeichnet. Daher gilt für das Empfangssignal:

$$r(t) = s(t) + \alpha \cdot s(t - \tau).$$

Der Frequenzgang des Kanals ist $H(f) = R(f)/S(f)$, die Impulsantwort wird mit $h(t)$ bezeichnet.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.4,** insbesondere auf die Seite **Faltung einer Funktion mit einer Diracfunktion.**

Fragebogen zu "Z3.7 Rechtecksignal mit Echo"

a) Welche Aussagen treffen hinsichtlich der Impulsantwort $h(t)$ zu?

- ☐ Für $0 \le t < \tau$ gilt $h(t) = 1$, für $t > \tau$ ist $h(t) = 1 + \alpha$.
- ☐ Es gilt $h(t) = \delta(t) + \alpha \cdot \delta(t - \tau)$.
- ☐ $h(t)$ verläuft gaußförmig.

b) Berechnen Sie das Signal $r(t)$ für die Kanalparameter $\alpha = -0.5$ und $\tau = T/4$. Welche Werte ergeben sich bei den normierten Zeiten $t/T = 0.2$ bzw. 0.3?

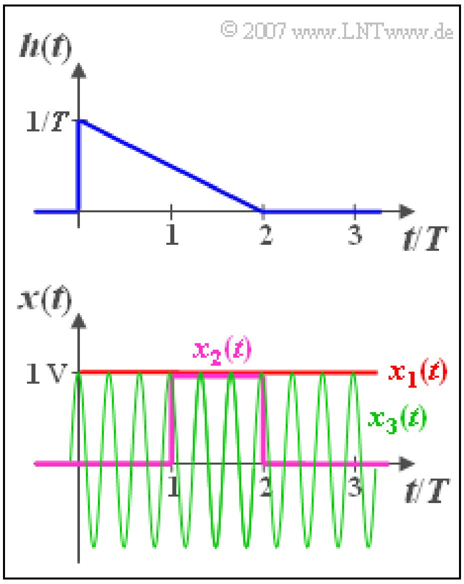
$r(t = 0.2 \cdot T)$ = V

$r(t = 0.3 \cdot T)$ = V

c) Berechnen Sie das Signal $r(t)$ mit $\alpha = 1$ und $\tau = T/2$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Frequenzbereich. Welcher Signalwert ergibt sich bei $t = T/2$?

$r(t = T/2)$ = V

A3.8: Dreimal Faltung?



Die Impulsantwort eines LZI-Systems hat im Zeitbereich zwischen 0 und $2T$ den folgenden Verlauf:

$$h(t) = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{t}{2T}\right).$$

Außerhalb dieses Intervalls ist $h(t)$ gleich 0. Die zugehörige Spektralfunktion lautet:

$$H(f) = \frac{1}{8\,(\pi f T)^2}\left(1 - \mathrm{j}\cdot 4\pi f T - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot 4\pi f T}\right).$$

Zur Berechnung des sog. Gleichsignalübertragungsfaktors ⇒ $H(f = 0)$ ist diese Gleichung nicht geeignet, da sowohl der Klammerausdruck als auch der Nenner Null werden.

Es gilt aber auch:

$$H(f = 0) = \int_0^{2T} h(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

An den Eingang dieses Filters werden drei verschiedene Zeitsignale angelegt (siehe Skizze):

- $x_1(t)$ ist ein Gleichsignal mit der Höhe x_0 = 1 V.
- $x_2(t)$ ist ein Rechtecksignal mit der Dauer T und der Höhe x_0 = 1 V, beginnend bei $t = T$.
- $x_3(t)$ ist ein Cosinussignal mit der Frequenz $f_0 = 3/T$ und der Amplitude x_0 = 1 V.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.4.** Die Thematik dieses Abschnitts wird auch in nachfolgendem Interaktionsmodul veranschaulicht:

Zur Verdeutlichung der grafischen Faltung

Fragebogen zu "A3.8: Dreimal Faltung?"

a) Bei welchen der drei Signale ist es zweckmäßiger, das Ausgangssignal direkt im Zeitbereich zu berechnen?

- [ ] $y_1(t) = x_1(t) * h(t)$.
- [ ] $y_2(t) = x_2(t) * h(t)$.
- [ ] $y_3(t) = x_3(t) * h(t)$.

b) Wie lautet das Signal $y_1(t)$ am Filterausgang, wenn am Eingang das Gleichsignal $x_1(t)$ = 1 V anliegt? Geben Sie den Signalwert bei $t = 2T$ an.

$\boldsymbol{y_1(t = 2T)}$ = V

c) Auf welchen Zeitbereich zwischen $t_{\rm min}$ und $t_{\rm max}$ ist das Ausgangssignal $y_2(t) = x_2(t) * h(t)$ beschränkt, d. h. ungleich 0?

$\boldsymbol{t_{\rm min}/T}$ =

$\boldsymbol{t_{\rm max}/T}$ =

d) Berechnen Sie die Werte des Signals $y_2(t)$ zu den Zeiten $t = 2T$ und $t = 3T$.

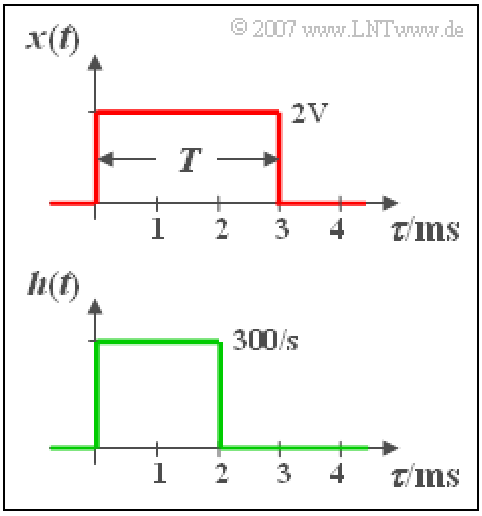
$\boldsymbol{y_2(t = 2T)}$ = V

$\boldsymbol{y_2(t = 3T)}$ = V

e) Wie lautet das Ausgangssignal $y_3(t)$, wenn am Eingang das Cosinussignal $x_3(t)$ anliegt? Geben Sie den Signalwert bei $t = 0$ an.

$\boldsymbol{y_3(t = 0)}$ = V

Z3.8: Faltung zweier Rechtecke



Am Eingang eines kausalen LZI-Systems (also linear und zeitinvariant) mit einer rechteckförmigen Impulsantwort $h(t)$ der Dauer 2 ms liegt ein Rechteckimpuls $x(t)$ der Dauer T = 3 ms und der Amplitude A = 2 V an. Die beiden Rechteckfunktionen beginnen jeweils zum Zeitpunkt t = 0.

In dieser Aufgabe sollen Sie das Ausgangssignal $y(t)$ mit Hilfe der grafischen Faltung berechnen. Wie man leicht nachprüfen kann, ist das Ausgangssignal $y(t)$

- nur im Bereich von 0 bis 5 ms von Null verschieden,
- symmetrisch zum Zeitpunkt t = 2.5 ms.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 3.4,** insbesondere auf die Seite **Grafische Faltung.** Diese Thematik wird auch in folgendem Interaktionsmodul behandelt:

Zur Verdeutlichung der grafischen Faltung

Fragebogen zu "Z3.8: Faltung zweier Rechtecke"

a) Berechnen Sie die Signalwerte zu den Zeitpunkten t = 1 ms und t = 2 ms.

$\boldsymbol{y(t = 1\ \text{ms})}$ = V

$\boldsymbol{y(t = 2\ \text{ms})}$ = V

b) Bestimmen Sie die Signalwerte für die Zeitpunkte t = 3 ms und t = 4 ms durch Ausnutzung der angegebenen Symmetrieeigenschaften.

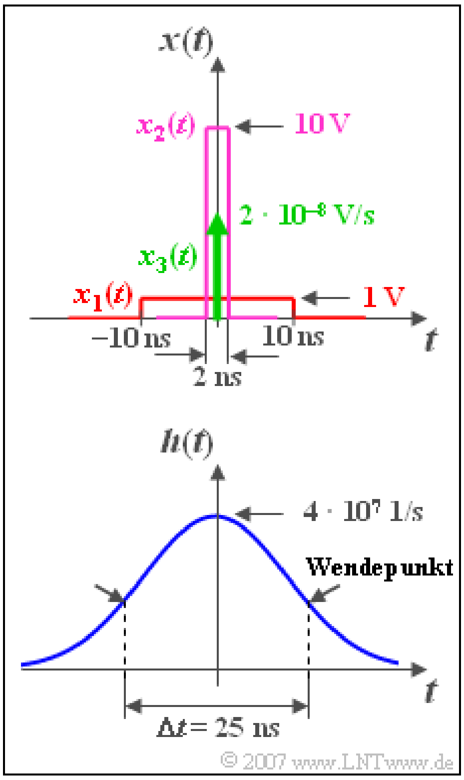
$\boldsymbol{y(t = 3\ \text{ms})}$ = V

$\boldsymbol{y(t = 4\ \text{ms})}$ = V

c) Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend?

- [ ] Das Ausgangssignal $y(t)$ hat einen trapezförmigen Verlauf.
- [ ] Das Spektrum lautet: $Y(f) = Y_0 \cdot \text{si}^2(\pi f T)$.
- [ ] Mit T = 2 ms würde sich eine Dreiecksform ergeben.

A3.9: Faltung von Rechteck und Gauß



Wir betrachten in der Aufgabe einen gaußförmigen Tiefpass mit der äquivalenten Bandbreite $\Delta f = 40$ MHz:

$$H(f) = \mathrm{e}^{-\pi (f/\Delta f)^2}.$$

Die dazugehörige Impulsantwort lautet:

$$h(t) = \Delta f \cdot \mathrm{e}^{-\pi (\Delta f \cdot t)^2}.$$

Aus der Skizze ist zu ersehen, dass die äquivalente Zeitdauer der Impulsantwort $h(t)$ ⇒ $\Delta t = 1/\Delta f = 25$ ns an den beiden Wendepunkten der Gaußfunktion abgelesen werden kann.

An den Eingang des Tiefpasses werden nun drei verschiedene impulsartige Signale angelegt:

- ein Rechteckimpuls $x_1(t)$ mit der Amplitude 1 V und der Dauer $T_1 = 20$ ns (roter Kurvenverlauf),
- ein Rechteckimpuls $x_2(t)$ mit der Amplitude $A_2 = 10$ V und der Dauer $T_2 = 2$ ns (violetter Kurvenverlauf),
- ein Diracimpuls $x_3(t)$ mit dem Impulsgewicht $2 \cdot 10^{-8}$ Vs (grüner Pfeil).

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf die theoretischen Grundlagen von **Kapitel 3.4.** Zur Lösung der nachfolgenden Fragen können Sie das komplementäre Gaußsche Fehlerintegral benutzen, das wie folgt definiert ist (siehe **Kapitel 3.5** im Buch „Stochastische Signale”):

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Die nachfolgende Tabelle gibt einige Funktionswerte wieder:

x	0.0	0.1	1.0	1.9	2.0	2.1	3.0
Q(x)	0.500	0.460	0.159	0.029	0.023	0.018	0.001
Q(-x)	0.500	0.540	0.841	0.971	0.977	0.982	0.999

Fragebogen zu "A3.9: Faltung von Rechteck und Gauß"

a) Berechnen Sie das Signal $y_1(t) = x_1(t) * h(t)$. Welche Werte ergeben sich zu den Zeiten $t = 0$ und $t = 20$ ns mit der Näherung $(2\pi)^{1/2} \approx 2.5$?

$\boldsymbol{y_1(t = 0)}$ = V

$\boldsymbol{y_1(t = 20\ \text{ns})}$ = V

b) Welche Signalwerte ergeben sich beim Ausgangssignal $y_2(t) = x_2(t) * h(t)$ zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 20$ ns?

$\boldsymbol{y_2(t = 0)}$ = V

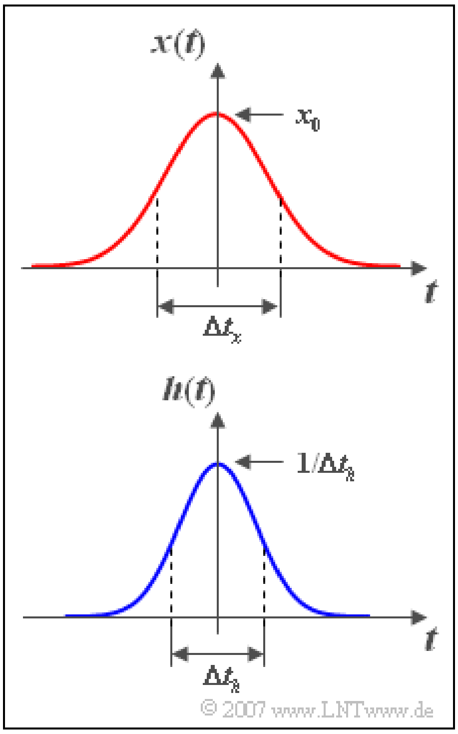
$\boldsymbol{y_2(t = 20\ \text{ns})}$ = V

c) Wie groß ist das Ausgangssignal $y_3(t) = x_3(t) * h(t)$ zu den betrachteten Zeitpunkten? Interpretieren Sie das Ergebnis.

$\boldsymbol{y_3(t = 0)}$ = V

$\boldsymbol{y_3(t = 20\ \text{ns})}$ = V

Z3.9: Gauß gefaltet mit Gauß



Es soll das Faltungsergebnis zweier Gaußfunktionen ermittelt werden. Wir betrachten einen gaußförmigen Eingangsimpuls $x(t)$ mit der Amplitude x_0 = 1 V und der äquivalenten Dauer Δt_x = 4 ms sowie eine ebenfalls gaußförmige Impulsantwort $h(t)$, welche die äquivalente Dauer Δt_h = 3 ms aufweist:

$$x(t) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{-\pi (t/\Delta t_x)^2},$$

$$h(t) = \frac{1}{\Delta t_h} \cdot \mathrm{e}^{-\pi (t/\Delta t_h)^2}.$$

Gesucht ist das Ausgangssignal $y(t) = x(t) * h(t)$, wobei der Umweg über die Spektralfunktionen gegangen werden soll.

Hinweis: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Theorieteil von **Kapitel 3.4.**

Fragebogen zu "Z3.9: Gauß gefaltet mit Gauß"

a) Geben Sie die Spektralfunktionen $X(f)$ und $H(f)$ an. Welche Werte ergeben sich jeweils bei der Frequenz $f = 0$?

$\boldsymbol{X(f=0)}$ = V/Hz

$\boldsymbol{H(f=0)}$ =

b) Berechnen Sie die Spektralfunktion $Y(f)$ des Ausgangssignals. Wie groß ist der Spektralwert bei $f = 0$?

$\boldsymbol{Y(f=0)}$ = V/Hz

c) Berechnen Sie den Ausgangsimpuls $y(t)$. Welche Werte ergeben sich für die Amplitude $y_0 = y(t = 0)$ und die äquivalente Impulsdauer Δt_y?

$\boldsymbol{y_0}$ = V

$\boldsymbol{\Delta t_y}$ = ms